

2102333: ระบบควบคุมเชิงเส้น 1 และปฏิบัติการ
ห้องปฏิบัติการพื้นฐานระบบควบคุม
ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การทดลองที่ 3 การวิเคราะห์ผลตอบสนองทางเวลา

หมายเลขชุดทดลอง ตอนเรียน
ชื่อ รหัสนิสิต
ชื่อ รหัสนิสิต
ชื่อ รหัสนิสิต

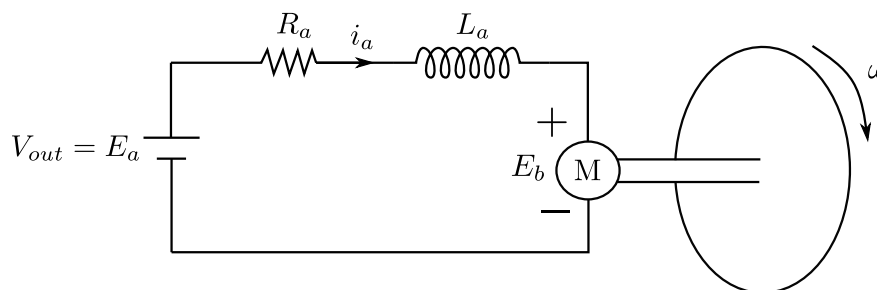
วัตถุประสงค์

1. เข้าใจคุณลักษณะของผลตอบแบบขั้น (step response) ของระบบอันดับหนึ่ง
2. สามารถประมาณพารามิเตอร์ของระบบอันดับหนึ่งจากผลตอบสนองแบบขั้นได้
3. เข้าใจถึงผลการรบกวนของโหลดที่มีต่อผลตอบของระบบ

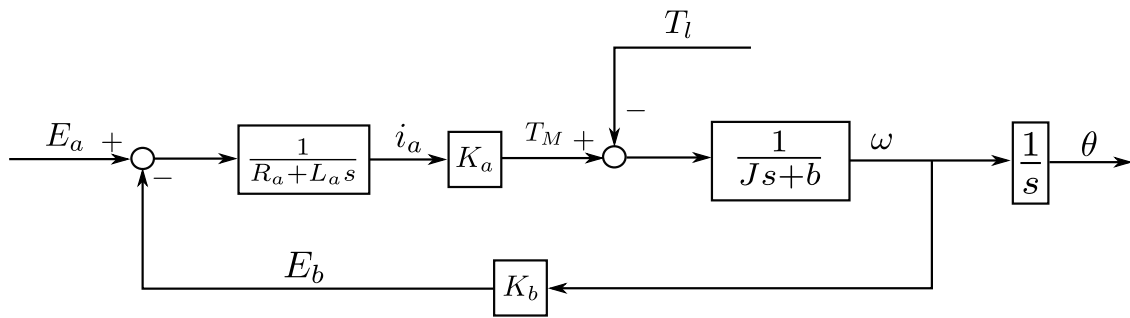
ระบบควบคุมมอเตอร์

ตัวแปร

E_a	แรงดันอาเมเจอร์	L_a	ค่าความเหนี่ยวนำของขดลวดอาเมเจอร์
i_a	กระแสอาเมเจอร์	J	โมเมนต์ความเฉื่อยของมอเตอร์
R_a	ค่าความต้านทานของขดลวดอาเมเจอร์	b	ค่าความหน่วงของมอเตอร์
K_a	อัตราส่วนของแรงบิดมอเตอร์	K_b	อัตราส่วนของแรงเคลื่อนเหนี่ยวนำย้อนกลับ
T_m	แรงบิดทางกลของมอเตอร์	K_l	อัตราส่วนของโหลดแรงบิด
ω	ความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์	α	อัตราส่วนตึงกระแส



รูปที่ 1: วงจรอย่างง่ายของชุดการทดลองมอเตอร์



รูปที่ 2: แผนภาพกรอบของชุดการทดลองมอเตอร์แบบวงเปิด

สมการพลวัตของระบบวงเปิด

สมการพลวัตของระบบมอเตอร์นั้น ประกอบด้วยสองส่วนอันได้แก่ ระบบทางไฟฟ้า และระบบทางกล สำหรับระบบทางไฟฟ้านั้นมีสมการของวงจรอาร์เมเจอร์ ที่อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันขาเข้าและกระแสมอเตอร์ ดังนี้

$$E_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{d}{dt} i_a(t) \quad (1)$$

และระบบทางกลเป็นการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดและความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) + b \omega(t) = T_m(t) - T_l(t) \quad (2)$$

พลวัตของระบบทางกลและทางไฟฟ้านั้น มีสิ่งที่เชื่อมโยงกันได้แก่ แรงบิดที่มอเตอร์ขับ (T_m) และแรงบิดเนื่องจากโหลดต้าน (T_l) สำหรับแรงบิดมอเตอร์นั้น จะแปรผันตรงกับกระแสอาร์เมเจอร์ ดังสมการ

$$T_m(t) = K_a i_a(t) \quad (3)$$

เมื่อมอเตอร์มีการหมุน จะก่อให้เกิดแรงเคลื่อนเหนี่ยวนำย้อนกลับของมอเตอร์ E_b (back emf) ซึ่งแปรผันตรงกับความเร็วมอเตอร์ดังนี้

$$E_b(t) = K_b \omega(t) \quad (4)$$

ดังนั้น เมื่อรวมสมการพลวัตของส่วนต่างๆ เข้าด้วยกัน จึงสามารถอธิบายได้ดังรูป 2 เมื่อมีภาวะโหลด เราอาจจำลองว่ามีแรงบิดต้านจากโหลดเป็น T_l ที่มีทิศทางกลับกับแรงบิดมอเตอร์

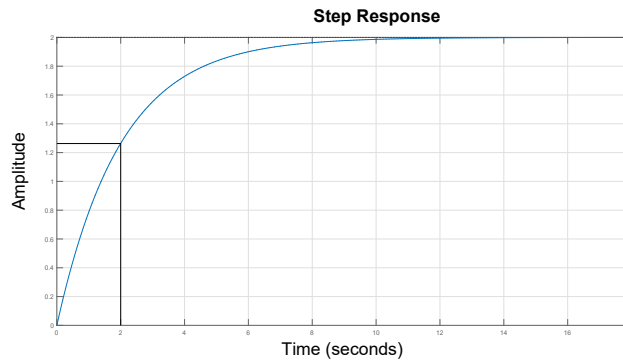
การประมาณระบบในกรณีเฉพาะ จากแผนภาพ 2 จะพบว่าหากเราพิจารณาระบบที่มีสัญญาณขาออกเป็นความเร็วมอเตอร์ (ω) เราจะได้ระบบ $G(s) = \frac{\omega(s)}{E_a(s)}$ เป็นระบบอันดับสอง และระบบที่มีสัญญาณขาออกเป็นมุมมอเตอร์ (θ) จะมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น $H(s) = \frac{\theta(s)}{\omega(s)}$ ที่มีอันดับสาม ในทางปฏิบัตินั้น เราอาจจะพบว่า ค่าพารามิเตอร์ L_a จะมีค่าน้อยมาก จนทำให้พลวัตในส่วนของวงจรอาร์เมเจอร์นั้นเกือบกลายเป็นค่าคงที่ K_a/R_a ดังนั้น ในกรณีที่ $L_a = 0$ เราจะได้ว่า $G(s)$ เป็นระบบอันดับหนึ่ง และ $H(s)$ จะเป็นระบบอันดับสอง

1. เมื่อ $L_a = 0$ และไม่มีผลจากโหลดต้าน จะได้ว่า

$$G(s) = \frac{K_a}{R_a(Js + b) + K_b K_a} \quad (5)$$

2. เมื่อ $L_a = 0$ แต่ $T_l \neq 0$ (มีผลจากโหลดต้าน) จะได้ว่า $\omega(s) = G(s)E_a(s) - G_l(s)T_l(s)$ ที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนจากแรงบิดต้านไปยังความเร็วมอเตอร์เป็น

$$G_l(s) = \frac{R_a}{R_a(Js + b) + K_b K_a} \quad (6)$$



รูปที่ 3: ตัวอย่างของผลตอบแบบขั้นสำหรับระบบอันดับหนึ่ง $G(s) = K/(\tau s + 1)$ เมื่อ $K = 2$ และ $\tau = 2$

การประมาณในทั้งสองกรณีดังสมการ (5)-(6) เราจะพบว่า ระบบควบคุมความเร็วมอเตอร์ที่ได้เป็นระบบอันดับหนึ่ง

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (7)$$

โดยที่ผลตอบสนองอิมพัลส์ของ G ได้แก่ $g(t) = \frac{K}{\tau}e^{-t/\tau}$ และผลตอบสนองแบบขั้น สามารถเขียนได้ในรูป

$$s(t) = K(1 - e^{-t/\tau}) \quad (8)$$

หากเราพล็อตผลตอบสนองแบบขั้น จะพบว่า ผลตอบค่อยๆ เพิ่มขึ้นแบบเลขชี้กำลัง จากนั้นลู่เข้าหาค่าคงที่ K อันเป็นค่าในภาวะอยู่ตัวของผลตอบสนอง อัตราในการลู่เข้านั้นขึ้นกับ τ โดยจะสังเกตเห็นว่าหาก τ มีค่ามาก ผลตอบจะลู่ช้า และหาก τ มีค่าน้อย ผลตอบจะลู่เข้าเร็ว เราจะเรียก K ว่าค่า **DC gain** และเรียก τ ว่า **ค่าคงตัวทางเวลา (time constant)** ของระบบ ดังแสดงในรูป 3 นอกจากนี้ เราจะพบว่า หากเรามีกราฟผลตอบของระบบอันดับหนึ่งใดๆ เราสามารถอ่านค่า K ได้จากกราฟ จากค่าที่ระบบเข้าที่ในสถานะอยู่ตัว ส่วนค่า τ นั้น สังเกตว่าเมื่อแทน $t = \tau$ ลงในสมการ (8) ผลตอบจะมีค่าเท่ากับ $K(1 - e^{-1})$ หรือเท่ากับ 63.1% ของค่า K เราจึงใช้ความสัมพันธ์ดังกล่าวเพื่ออ่านค่า τ จากกราฟได้

การประมาณพารามิเตอร์ของระบบด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดไม่เชิงเส้น: การประมาณพารามิเตอร์ของระบบ หรือการหาเอกลักษณ์ของระบบนั้นมีหลายวิธี อาศัยทั้งการเลือกสัญญาณเข้า u ให้เหมาะสมกับการทดลองเพื่อประมาณระบบ การเลือกโครงสร้างแบบจำลองที่เหมาะสมกับระบบจริง และการเลือกวิธีประมาณ (อันเป็นหัวข้อที่จะได้ศึกษาในขั้นสูงต่อไป) ในการทดลองนี้ เป็นการประมาณแบบจำลองอันดับหนึ่ง ที่เราทราบรูปแบบผลตอบสนองแบบขั้นดัง (8) เราจึงเปลี่ยนมุมมองปัญหาประมาณระบบ ให้เป็นปัญหาการประมาณกราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลังแทน หลักการของปัญหานี้คือการหาค่า K และ τ เพื่อให้ค่าความผิดพลาดระหว่าง $y(t)$ ที่วัดได้จริงและสัญญาณออกจากแบบจำลองมีผลรวมกำลังสองต่ำสุด

$$\underset{K, \tau}{\text{minimize}} \sum_{t=1}^N (y(t) - K(1 - e^{-t/\tau}))^2 \quad (9)$$

ปัญหา (9) อยู่ในกลุ่มปัญหากำลังสองต่ำสุดไม่เชิงเส้น (nonlinear least-squares) ที่ยังครอบคลุมกลุ่มปัญหาการประมาณกราฟ (curve fitting) นั่นคือในรูปแบบทั่วไป $\underset{\theta}{\text{minimize}} \sum_{t=1}^N (y(t) - f(t; \theta))^2$ ด้วยเลือกพารามิเตอร์ θ ของ f ให้เหมาะสมในการประมาณ $y(t)$ การแก้หาผลตอบเชิงเลขของ (9) จะใช้เทคนิคทางปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (optimization) ที่ผู้ใช้สามารถเรียกใช้คำสั่ง `fit` ใน MATLAB โดยผู้ใช้งานจะกำหนดรูปแบบของฟังก์ชันที่จะใช้ประมาณ $y(t)$ ในที่นี้คือ $f(t; \theta) = K(1 - e^{-t/\tau})$ อันมีพารามิเตอร์สองตัวได้แก่ $\theta = (K, \tau)$ นอกจากนี้ ผู้ใช้ต้องกำหนดค่าเริ่มต้นของ θ เพื่อที่ขั้นตอนเชิงเลขจะได้ใช้ค่านั้นเป็นจุดเริ่มต้นในการค้นหาค่า θ ที่ดีที่สุด ผู้ใช้สามารถเลือก (K, τ) จากวิธีการอ่านกราฟมาเป็นค่าเริ่มต้นได้เช่นกัน

การทดลองที่ 3 การหาคุณลักษณะของระบบควบคุมความเร็วมอเตอร์วงเปิด

หมายเลขกลุ่ม

ตอนเรียน

คะแนน

/20

1. ชื่อ

1. รหัสนิสิต

2. ชื่อ

2. รหัสนิสิต

3. ชื่อ

3. รหัสนิสิต

ในการทดลองนี้ เราจะพิจารณาความเร็วมอเตอร์เป็นสัญญาณออกของระบบ และหาผลตอบสนองแบบขั้นว่ามีลักษณะเช่นไร จากการพิจารณาเลขตัวเหนี่ยวนำในวงจรอาร์เมเจอร์ จะได้ว่าระบบที่ได้จะประมาณเป็นระบบอันดับหนึ่ง ดังสมการ (7) ในการทดลอง เราจึงสังเกตว่าผลตอบที่ได้ในทางปฏิบัติ นั้น จะใกล้เคียงกับที่สรุปไว้ทางทฤษฎีหรือไม่ หากผลตอบสนองจากระบบจริงนั้น มีลักษณะคล้ายผลตอบของระบบอันดับหนึ่ง เราจึงสนใจการประมาณพารามิเตอร์ของระบบ อันได้แก่ K และ τ จาก (8) ด้วยสองวิธี อันได้แก่ การประมาณพารามิเตอร์จากกราฟผลตอบ และวิธีกำลังสองต่ำสุดไม่เชิงเส้น ผลตอบสนองแบบขั้นที่จะนำมาประมาณระบบนั้น จะมาจากสองสถานะ อันได้แก่ ผลตอบสนองภาวะปกติ และผลตอบสนองเมื่อมีแรงบิดโหลด สำหรับข้อมูลจากสถานะหนึ่งๆ นั้น เราจะเก็บข้อมูลสองชุด ได้แก่ชุดประมาณและชุดทดสอบ ข้อมูลชุดประมาณนั้น ระบบจะถูกกระตุ้นด้วยสัญญาณขั้นเพื่อนำข้อมูลนั้นไปประมาณพารามิเตอร์ เมื่อได้ $\hat{G}(s; \theta)$ แล้ว เราจะเปรียบเทียบผลตอบของระบบที่ประมาณได้กับข้อมูลชุดทดสอบ ที่มาจากการกระตุ้นระบบด้วยสัญญาณไซน์ การประเมินว่าค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้นั้นทำให้แบบจำลองเข้ากันกับชุดข้อมูลด้วยระดับดีเพียงใด จะใช้ตัวชี้วัด

$$\text{Fit Percent} = 100\% \left(1 - \frac{\|y - \hat{y}\|_2}{\|y - \bar{y}\|_2} \right)$$

โดยที่ \bar{y} คือค่าเฉลี่ยตัวอย่างของ y เราจะเห็นว่าค่า Fit Percent นี้จะอยู่ระหว่าง $-\infty$ ถึง 100 เป็นค่าสมรรถนะของแบบจำลองที่ประมาณได้ เมื่อเทียบกับวิธีฐานคือการใช้ค่าเฉลี่ยของข้อมูล หาก Fit Percent ติดลบ จึงแปลว่าแบบจำลองที่ประมาณได้มีสมรรถนะที่แย่กว่าวิธีพื้นฐานนี้

การนำระบบที่ประมาณได้จากการใช้ u แบบหนึ่ง และนำไปทดสอบกับข้อมูลของระบบที่โดนกระตุ้นด้วย u อีกแบบ เป็นการตรวจสอบว่าแบบจำลองที่ได้นั้น นำไปอธิบายปรากฏการณ์จริงของระบบภายใต้สถานะใหม่ (ด้วยข้อมูลใหม่ที่ไม่ได้ใช้ในการประมาณ) หรือไม่

การเก็บข้อมูลทดลอง

เราเก็บข้อมูล (u, y) จากสองสถานะ อันได้แก่ ภาวะไม่มีโหลด และภาวะมีโหลดแรงบิดต้าน ในแต่ละสถานะนั้น จะเก็บข้อมูลชุดประมาณ และชุดทดสอบ ที่จะกระตุ้นระบบด้วยสัญญาณขั้นและสัญญาณไซน์ ตามลำดับ

1. เปิดระบบมอเตอร์แบบวงเปิดจาก SimScape กำหนดโหลด $T_l = 0$ (ภาวะไม่มีโหลด)
2. ป้อนแรงดันอาเมเจอร์เป็นสัญญาณขั้นขนาด 220 V ตั้งค่าโหลดไว้ที่ 0 และกดรันเพื่อจำลองผลตอบสนองแบบขั้นของความเร็วมอเตอร์เมื่อไม่มีโหลด
3. เก็บข้อมูล step response เข้าไปที่ workspace ใน MATLAB โดยใช้ To workspace เข้า MATLAB workspace
4. ทำซ้ำข้อ 2-3 แต่เปลี่ยนแรงดันอาเมเจอร์เป็นผลรวมของสัญญาณไซน์ ที่ความถี่ 2 Hz และ 5 Hz แต่ละเทอมมีขนาด 55V

ทำซ้ำ 1-4 อีกครั้ง แต่เปลี่ยนข้อ 1 ให้เป็นระบบสถานะมีโหลด ด้วยการกำหนด $T_l = 0.5$ นิสิตจะมีไฟล์บันทึกข้อมูลของ (t, u, y) ชุดประมาณ (ที่มี u เป็นสัญญาณขั้น) และชุดทดสอบ (ที่มี u เป็นผลรวมของไซน์)

การประมาณแบบจำลองและแปลผล

1. ใช้ข้อมูลชุดประมาณ เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ของระบบอันดับหนึ่ง K, τ จากสองวิธี ได้แก่ i) ประมาณจากกราฟ และ ii) ประมาณด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดไม่เชิงเส้น ด้วยคำสั่ง `fit`¹
2. ขอให้สังเกตว่า เราใช้สมการ (8) เพื่อประมาณข้อมูล $y(t)$ ที่ตอบสนองต่อ u ขนาด 220V แต่สมการ (8) นั้น ตามคำจำกัดความแล้ว เป็นผลตอบสนองสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย
3. จากพารามิเตอร์ (K, τ) ที่ประมาณได้จากวิธีกำลังสองต่ำสุดไม่เชิงเส้น พร้อมทั้งค่าเวลาประวิงที่อ่านได้จากกราฟให้นำมาสร้าง $\hat{G}(s; \theta)$

```
readdelay = 0.01; % the response delay you detect from the graph (second)
G = tf(K,[tau 1],'InputDelay',readdelay); % K, tau are estimated values
```

4. ระบบที่ประมาณได้นั้น สามารถนำไปจำลองระบบที่โดนกระตุ้นจากสัญญาณเข้า u ใดๆ ได้ด้วยคำสั่ง `lsim` ที่ผู้ใช้กำหนดเวกเตอร์ t, u ที่ต้องใช้ในการจำลอง สำหรับการจำลองผลตอบสนองต่อสัญญาณขั้นขนาดหนึ่งหน่วย จะมีคำสั่ง `step` โดยตรง

```
ysim_step = step(G,t); % t can be a time vector, or a final simulation time
ysim_sine = lsim(G,u,t); % simulate a response to an input u
```

ให้จำลองผลตอบของระบบที่ประมาณได้เมื่อกระตุ้นด้วย u จากชุดทดสอบ (สัญญาณไซน์) และให้จำลองผลตอบสนองแบบขั้น ที่มี $u = 220V$ ด้วยการใช้เวกเตอร์ t ของข้อมูลชุดประมาณ (กล่าวคือ เราจะมีผลการจำลองระบบจากชุดประมาณ และชุดทดสอบ) นำผลการจำลองสัญญาณออก \hat{y} ทั้งสองกรณีไปคำนวณ Fit Percent

5. ให้พลอตกราฟผลตอบสนองต่อสัญญาณขั้น (t, ω) ของ 1) ผลตอบสนองจริง และจาก *simulation* ด้วยการใช้ $\hat{G}(s; \theta_i)$ ที่ได้ ในรูปกราฟเดียวกัน
6. ให้พลอตกราฟผลตอบสนองต่อสัญญาณไซน์ (t, ω) ของ 1) ผลตอบสนองจริง จากชุดทดสอบ และจาก *simulation* ด้วยการใช้ $\hat{G}(s; \theta_i)$ ที่ได้ ในรูปกราฟเดียวกัน

ผลการทดลอง

แสดงผลการทดลองตามรายการดังนี้ อภิปรายผลลัพธ์ที่ได้ ด้วยประเด็นที่เกี่ยวข้องกับระบบควบคุม หรือการประมาณระบบ เช่น ผลการทดลองในภาวะมีและไม่มีโหลด ผลตอบสนองของระบบที่ประมาณได้ต่อสัญญาณต่างๆ (การอภิปรายผลการทดลอง **ไม่ใช่** การอ่านกราฟ หรืออ่านค่าผล แต่เป็นการให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนผลการทดลองที่พบ) นิสิตสามารถวิจารณ์เปรียบเทียบวิธี หรือมีประเด็นใดๆ ได้ตามที่นิสิตสนใจ

- ตารางผลการประมาณพารามิเตอร์
- ตารางค่า Fit Percent
- กราฟผลการจำลองระบบที่ประมาณได้ จำนวน 4 กราฟ ดังที่อธิบายไว้ในขั้นตอนการประมาณแบบจำลองข้อ 5-6

กราฟ 1: ผลตอบสนองสัญญาณขั้นของระบบที่ไม่มีโหลด

กราฟ 2: ผลตอบสนองสัญญาณไซน์ของระบบที่ไม่มีโหลด

กราฟ 3: ผลตอบสนองสัญญาณขั้นของระบบที่มีโหลด

กราฟ 4: ผลตอบสนองสัญญาณไซน์ของระบบที่มีโหลด

¹สามารถอ่านวิธีการใช้คำสั่งได้จาก <https://www.mathworks.com/help/curvefit/fit.html>

ตารางที่ 1: ผลการประมาณพารามิเตอร์ระบบควบคุมความเร็วมอเตอร์ด้วยวิธี step test

สถานะ	K : อัตราขยายกระแสตรง (rad/s/V)		τ : ค่าคงตัวเวลา (sec)	
	วิธีอ่านกราฟ	วิธี nonlinear least-squares	วิธีอ่านกราฟ	วิธี nonlinear least-squares
$T_l = 0$				
$T_l = 0.5$				

ตารางที่ 2: ค่า Fit Percent ของแบบจำลองมอเตอร์ที่ประมาณจากวิธีกำลังสองต่ำสุดไม่เชิงเส้น

สถานะ	\hat{y} ของสัญญาณขึ้น	\hat{y} ของสัญญาณไชน์
$T_l = 0$		
$T_l = 0.5$		