Координати образу вектора при лін. перетворенні.

Теорема Нехай $\mathcal{A}$ — лін. перетв. скінч. вим. вект. пр. V над п. F. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ — даний фікс. базис пр. V, в якому $\mathcal{A}$ відповідає матриця $A = (\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $x \in V$ — даний вектор, координати якого в цьому базисі є $x = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, а координати вектора $\mathcal{A}(x) = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$.

Тоді виконується рівність
$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Дов. За умовою $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$;
$$\mathcal{A}(x) = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n.$$

За озн. матриці лін. перетв.
$$\mathcal{A}(a_1) = \alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + \dots + \alpha_{n1} a_n,$$
$$\mathcal{A}(a_2) = \alpha_{12} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \dots + \alpha_{n2} a_n,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\mathcal{A}(a_n) = \alpha_{1n} a_1 + \alpha_{2n} a_2 + \dots + \alpha_{nn} a_n.$$

Тоді $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 \mathcal{A}(a_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(a_2) + \dots + \lambda_n \mathcal{A}(a_n) =$
$= \lambda_1(\alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + \dots + \alpha_{n1} a_n) + \lambda_2(\alpha_{12} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \dots + \alpha_{n2} a_n) + \dots +$
$+ \lambda_n(\alpha_{1n} a_1 + \alpha_{2n} a_2 + \dots + \alpha_{nn} a_n) = (\alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \dots + \alpha_{1n}\lambda_n) a_1 +$
$+ (\alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \dots + \alpha_{2n}\lambda_n) a_2 + \dots + (\alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + \dots + \alpha_{nn}\lambda_n) a_n.$

Але розклад вектора в лін. комб. базисних векторів єдиний.

Тому
$$\gamma_1 = \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \dots + \alpha_{1n}\lambda_n,$$
$$\gamma_2 = \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \dots + \alpha_{2n}\lambda_n,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\gamma_n = \alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + \dots + \alpha_{nn}\lambda_n,$$

або в матричному вигляді
$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}. \quad \square$$

Таким чином, щоб знайти координати образу вектора в даному базисі, треба вектор-стовпчик координат вектора в даному базисі домножити на матрицю лінійного перетворення в цьому ж базисі.

Будова невиродженого лінійного оператора в скінченновимірному евклідовому просторі.

Лема. Нехай A – невироджений лінійний оператор в скінченновимірному евклідовому просторі V. Тоді оператор A^*A самоспряжений і всі його власні числа додатні.

Дов. Доведемо самоспряженість опер. A^*A.

Користуючись властивостями спряження, маємо

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A.$$

Таким чином, оператор A^*A самоспряжений, а тому всі корені його характеристичного многочлена дійсні, тобто є власними числами оператора.

Нехай λ – власне число оператора A^*A.

Покажемо, що $\lambda > 0$.

Власному числу λ відповідає деякий власний вектор $a \in V$, тобто $a \neq \Theta$, $(A^*A)(a) = \lambda a$.

Тоді $\left((A^*A)(a), a\right) = (\lambda a, a) = \lambda(a,a)$.

З іншого боку $\left((A^*A)(a), a\right) = \left(A^*(A(a)), a\right) =$

$= \left(A(a), (A^*)^*(a)\right) = \left(A(a), A(a)\right)$.

Тобто $\lambda(a,a) = (A(a), A(a))$.

Але $a \neq \Theta$ і оператор A – невироджений, тому $A(a) \neq \Theta$

$\Rightarrow (a,a) > 0$, $(A(a), A(a)) > 0 \Rightarrow \lambda > 0$. $\square$

Теорема (про будову невиродженого оператора)

До $\forall$ невиродженого лінійного оператора A на скінченновимірному евклідовому просторі V існують ортогональний оператор $\mathcal{H}$ і самоспряжений оператор $\mathcal{F}$ такі, що $A = \mathcal{H}\mathcal{F}$.

Дов. Оскільки A – невироджений оператор, то за лемою оператор A^*A – само-спряжений і всі його власні числа додатні.

Тому $\exists$ ортонормований базис $a_1, a_2, \dots, a_n$ простору V, що складається з власних векторів оператора A^*A.

Нехай $A^*A(a_1) = \lambda_1 a_1$, $A^*A(a_2) = \lambda_2 a_2$, ..., $A^*A(a_n) = \lambda_n a_n$.

При цьому $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, ..., $\lambda_n > 0$.

В базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ оператору A^*A відповідає діагональна матриця
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Позначимо через F лінійний оператор на просторі V, якому в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ відповідає матриця
$$F = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

Оскільки базис ортонормований, а матриця F - симетрична, то оператор F само-спряжений.

З того, що $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ випливає, що матриця F невироджена, тобто $\exists$ оператор F^{-1}.

В базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ оператору F^{-1} відповідає матриця
$$F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}.$$

Оскільки базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ортонормований, то оператору $(F^{-1})^* = (F^*)^{-1}$ в цьому базисі відповідає матриця
$$(F^{-1})^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}$$

Позначимо через H оператор $H = AF^{-1}$, і покажемо, що оператор H ортогональний.

Для цього візьмемо добуток операторів
$$H^*H = (AF^{-1})^* \cdot AF^{-1} = (F^{-1})^* A^* \cdot AF^{-1} = (F^*)^{-1} A^* A F^{-1}.$$

Цьому оператору в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ відповідає матриця

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

Таким чином, в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ оператору $\mathcal{H}^*\mathcal{H}$ відповідає одинична матриця $\Rightarrow \mathcal{H}^*\mathcal{H} = \mathcal{E}$, тобто $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^{-1}$ і оператор $\mathcal{H}$ ортогональний, причому, оскільки $\mathcal{H} = \mathcal{A}\mathcal{F}^{-1}$, то $\mathcal{A} = \mathcal{H}\mathcal{F}$. $\square$

<u>Зауваження 1</u> Доведення теореми конструктивне і дає спосіб знаходження до даного оператора $\mathcal{A}$ відповідних операторів $\mathcal{H}$ і $\mathcal{F}$.

<u>Зауваження 2</u> Аналогічно доводиться таке твердження:

Для $\forall$ невиродженого лінійного оператора $\mathcal{A}$ на скінченновимірному евклідовому просторі $\forall$ $\exists$-ть ортогональний оператор $\mathcal{H}_1$ і самоспряжений оператор $\mathcal{F}_1$ такі, що $\mathcal{A} = \mathcal{F}_1\mathcal{H}_1$.

3. $A=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&8&2\\1&2&0\end{pmatrix}$ $\quad f_1=2e_1+2e_2-e_3$ $\quad B_e=\{e_1,e_2,e_3\}$

$f_2=2e_1-e_2+2e_3$ $\quad e_1=(1;0;0)$

$f_3=-e_1+2e_2+2e_3$ $\quad e_2=(0;1;0)$ $\quad e_3=(0;0;1)$

$B_f=\{f_1,f_2,f_3\}$

$f_1=2\cdot(1;0;0)+2\cdot(0;1;0)-(0;0;1)=(2;2;-1)$

$f_2=(2;-1;2).$ $\quad T=(f_1|f_2|f_3)=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}$

$f_3=(-1;2;2).$

$$T^{-1}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&-1&1&0&0\\2&-1&2&0&1&0\\-1&2&2&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\2&-1&2&0&1&0\\-1&2&2&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&-3&3&-1&1&0\\0&3&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&-1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{9}{2}&-\frac{1}{2}&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&\frac{4}{9}&\frac{1}{9}&\frac{1}{9}\\0&1&0&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\0&0&1&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\\0&1&0&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{9}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{array}\right)$$

$T^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}.$ $\quad B=T^{-1}AT=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\2&8&2\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&2&\frac{2}{3}\\0&0&0\\\frac{2}{3}&2&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&5\\0&0&0\\5&0&4\end{pmatrix}$$

4. $a_1=(1;-1;1;-3)$ $\quad a_2=(-4;1;5;0).$ $\quad (a_1,a_2)=-4-1+5-0=0$

$a_1\perp a_2.$

$$\begin{cases}(x,a_1)=0\\(x,a_2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_2+x_3-3x_4=0\\-4x_1+x_2+5x_3=0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&-3\\-4&1&5&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&-3\\0&-3&9&-12\end{pmatrix}$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3	x_4	
2	3	1	0	$=b_3$
−1	−4	0	1	$=b_4$

$b_3\not\perp b_4.$

$a_3=b_3.$

$a_4=b_4-\alpha a_3$ $\quad \alpha=\frac{(b_4,a_3)}{(a_3,a_3)}=\frac{-14}{14}=-1.$

$a_4=b_4+a_3=(1;-1;1;1).$

$B_{орт}=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ $\quad a_1=(1;-1;1;-3)$ $\quad a_2=(-4;1;5;0)$

$a_3=(2;3;1;0)$ $\quad a_4=(1;-1;1;1)$