## Лінійні оператори простої структури.

Будемо вважати, що всі опер. діють на скінч. вимірному вект. пр. $V$ над полем $F$, $\dim V = n$.

Озн. Лін. опер. $\mathcal{A}$ на вект. пр. $V$ наз. оператором простої структури, якщо простір є прямою сумою підпросторів розмірності 1, інваріантних відносно оператора $\mathcal{A}$.

$$V = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n, \quad \dim M_i = 1, \ i = \overline{1,n}.$$

Озн. Квадратна матриця
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$
наз. діагональною, якщо $\alpha_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $i,j = \overline{1,n}$.

Іншими словами, всі ненульові елементи діагональної матриці стоять на головній діагоналі.

Теорема. Для оператора $\mathcal{A}$ на скінч. вим. вект. пр. $V$ наступні умови еквівалентні:

1) Оператор $\mathcal{A}$ є оператором простої структури
2) В просторі $\exists$ базис, який складається з власних векторів оператора $\mathcal{A}$
3) В просторі $\exists$ базис, в якому оператору $\mathcal{A}$ відповідає діагональна матриця.

### Достатня умова оператора простої структури.

Теор. Нехай $\mathcal{A}$ — лін. опер. на скінч. вим. вект. пр. $V$ над п. $F$, всі корені його характеристичного многочлена $\chi(t)$ різні і належать основному полю $F$. Тоді оператор $\mathcal{A}$ є оператором простої структури.

Заув. Ця теорема дає лише достатню умову оператора простої структури.

### Критерій оператора простої структури

Теор 1 (Критерій 1) Лін. опер. $\mathcal{A}$ на вект. пр. $V$ над полем $F$ є оператором простої структури $\Longleftrightarrow$

1) всі корені його хар. многочлена $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ належать основному полю $F$;

2) розмірність кожного підпр. $L_{\lambda_i}$, $i=\overline{1,s}$ дорівнює кратності відповідного власного числа $\lambda_i$ як кореня хар. многочлена.

<u>Теор2</u> (Критерій 2). Лін. опер. $\mathcal{A}$ на вект. пр. $V$ над полем $F$ є оператором простої структури $\Leftrightarrow$

1) всі корені його хар. многоч. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ належать основному полю $F$;

2) простір $V = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus L_{\lambda_s}$.

2. <u>Спряжені лінійні оператори.</u>

<u>Озн.</u> Нехай $\mathcal{A}$ – лін. оператор на евкл. пр. $V$. Спряженим до оператора $\mathcal{A}$ наз. лін. опер. $\mathcal{B}$ на $V$:

$\forall x, y \in V: \ (\mathcal{A}(x), y) = (x, \mathcal{B}(y))$.

Спряжений оператор для оператора $\mathcal{A}$ познач. $\mathcal{A}^*$.

<u>Лема</u> Нехай $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ – лін. оператори на евклідовому просторі $V$ і $\forall x, y \in V: (x, \mathcal{B}_1(y)) = (x, \mathcal{B}_2(y))$. Тоді $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

<u>Теорема 1</u> Якщо до даного лін. опер. $\mathcal{A}$ на евклід. пр-рі $V$ $\exists$ спряжений оператор $\mathcal{A}^*$, то він єдиний.

<u>Теорема 2</u> $\forall$ лін. опер. $\mathcal{A}$ в скінченновимірному евклідовому просторі $V$ $\exists \mathcal{A}^*$.

<u>Заув. 1</u> Таким чином, до $\forall$ лін. оператора в скінч. вим. евкл. пр. $\exists$ спряжений оператор, причому єдиний.

<u>Заув. 2</u> Якщо в даному ортонормованому базисі оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця $A$, то оператору $\mathcal{A}^*$ відповідає матриця $A^T$.

<u>Властивості операції спряження</u>

Вважаємо, що $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ – лін. оператори на евкл. просторі $V$.

1) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$;

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}: (\alpha\mathcal{A})^* = \alpha \mathcal{A}^*$;

3) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*$;

4) $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^*$;

5) Якщо $\mathcal{E}$ – тотожний оператор, то $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$.

6) Якщо для опер. $\mathcal{A}$ $\exists$ обернений, то для опер. $\mathcal{A}^*$ також $\exists$ обернений, причому $(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$.

<u>Теорема</u> (про інваріантність ортогонального доповнення) Нехай підпростір $L$ евкл. пр. $V$ інваріантний відносно лінійного оператора $\mathcal{A}$. Тоді підпр. $L^\perp$ інваріантний відносно оператора $\mathcal{A}^*$.

3. $a_1=(1;1;0;0)$ $a_2=(0;1;1;0)$ $a_3=(0;0;1;1)$ $L_1=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$

$b_1=(1;0;1;0)$ $b_2=(0;2;1;1)$ $a_3=(1;2;1;2)$ $L_2=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$

$$B_{L_1+L_2}=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\1&1&0&0&2&2\\0&1&1&1&1&1\\0&0&1&0&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&2&1\\0&1&1&1&1&1\\0&0&1&0&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&2&1\\0&0&1&2&-1&0\\0&0&1&0&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&2&1\\0&0&1&2&-1&0\\0&0&0&-2&2&2\end{pmatrix}\sim$$

$$B_{L_1+L_2}=\{a_1,a_2,a_3,b_1\}.$$

$B_{L_1\cap L_2}$: $\quad x=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3$, $\quad x=y_1b_1+y_2b_2+y_3b_3$ $\Rightarrow$ $x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3-y_1b_1-y_2b_2-y_3b_3=0$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&-1&0&-1&0\\1&1&0&0&-2&-2&0\\0&1&1&-1&-1&-1&0\\0&0&1&0&-1&-2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&-1&0&-1&0\\0&1&0&-1&-2&1&0\\0&0&1&-1&1&-1&0\\0&0&0&2&0&0&0\end{array}\right)$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 |

$z_1=a_1+a_2+a_3=b_1+b_2=(1;2;2;1)$

$z_2=2a_1+2a_3=b_1+b_3=(2;2;2;2)$

Тоді $z_1=\alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$, $z_2=\alpha_2\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$ базисні вектори $L_1\cap L_2$.

$B_{L_1\cap L_2}=\{z_1,z_2\}$.

4. $A=\begin{pmatrix}0&3&2\\-2&2&4\\5&0&-2\end{pmatrix}$ $\quad A=BQ$, $B=B^T$, $Q^{-1}=Q^T$.

$A^TA=PCP^{-1}$, $C=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\dots&0\\0&\lambda_2&\dots&0\\0&0&\dots&\lambda_n\end{pmatrix}$, $\lambda_i\geq 0$, $i=\overline{1,n}$. $P^T=P$.

$D=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&0&\dots&0\\0&\sqrt{\lambda_2}&\dots&0\\0&0&\dots&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}$ $\quad B=PDP^T$, $Q=B^{-1}A$.

$$AA^T=\begin{pmatrix}0&3&3\\-2&2&4\\5&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&5\\3&2&0\\3&4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&14&-4\\14&24&-18\\-4&-18&29\end{pmatrix}.\quad |AA^T-\lambda E|=\begin{vmatrix}13-\lambda&14&-4\\14&24-\lambda&-18\\-4&-18&29-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(13-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}24-\lambda&-18\\-18&29-\lambda\end{vmatrix}-14\cdot\begin{vmatrix}14&-18\\-4&29-\lambda\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}14&24-\lambda\\-4&-18\end{vmatrix}=$$

$$=(13-\lambda)(\lambda^2-53\lambda+372)-14(-14\lambda+334)-4(-4\lambda-156)=-\lambda^3+66\lambda^2-849\lambda+784=$$

$$=-(\lambda-1)(\lambda-16)(\lambda-49).$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 16 \quad \lambda_3 = 49$

$\lambda_1 = 1:\ (AA^T - E) = \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 14 & -4 & 0 \\ 14 & 23 & -18 & 0 \\ -4 & -18 & 28 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 14 & 23 & -18 & 0 \\ -4 & -18 & 28 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{20}{3} & -\frac{40}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{40}{3} & \frac{80}{3} & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad x_2 = 2x_3 \quad x_1 = -2x_3$ ФСР:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|
| $-2$ | $2$ | $1$ |

$a_1 = (-2; 2; 1)$

$\lambda_2 = 16:\ \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 14 & -4 & 0 \\ 14 & 8 & -18 & 0 \\ -4 & -18 & 13 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{14}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{220}{3} & -\frac{110}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{110}{3} & \frac{55}{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x_1 = x_3$

$x_2 = \frac{x_3}{2}$ ФСР:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|
| $2$ | $1$ | $2$ |

$a_2 = (2; 1; 2)$

$\lambda_3 = 49:\ \left(\begin{array}{ccc|c} -36 & 14 & -4 & 0 \\ 14 & -25 & -18 & 0 \\ -4 & -18 & -20 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{18} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{176}{9} & -\frac{176}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{176}{9} & -\frac{176}{9} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{18} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ ФСР:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|
| $-1$ | $-2$ | $2$ |

$a_3 = (-1; -2; 2)$

$p_1 = \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right),\ p_2 = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right),\ p_3 = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).\ P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.\quad B = PDP^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -7 \\ 2 & 4 & -14 \\ 1 & 8 & 14 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.\quad Q = B^{-1}A.$

$B^{-1}:\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & -2 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} & \frac{2}{7} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{14} & \frac{15}{28} & \frac{3}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} & \frac{2}{7} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{14} & \frac{15}{28} & \frac{3}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} & \frac{2}{7} \end{array}\right)$

$B^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -2{,}5 & -1 \\ -2{,}5 & 3{,}75 & 1{,}5 \\ -1 & 1{,}5 & 2 \end{pmatrix}.\quad Q = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -2{,}5 & -1 \\ -2{,}5 & 3{,}75 & 1{,}5 \\ -1 & 1{,}5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A = B \cdot Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A.$