Операції над підпросторами.

Нехай V – вект. пр. над полем F.

1) Перетин. Припустимо $\{L_\lambda \mid \lambda \in I\}$ – деяка множина підпросторів пр. V. $L = \bigcap\limits_{\lambda \in I} L_\lambda$. Покажемо, що множина L утв. підпр.

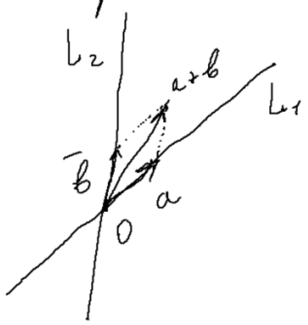
За означенням, θ міститься в $\forall$ підпр., тому

$\theta \in L_\lambda,\ \forall \lambda \in I \Rightarrow \theta \in \bigcap\limits_{\lambda \in I} L_\lambda = L, \quad L \neq \emptyset$.

Беремо $a, b \in L$, $\alpha, \beta \in F$. Тоді $a, b \in L_\lambda,\ \forall \lambda \in I$,

$\alpha a + \beta b \in L_\lambda,\ \forall \lambda \in I \Rightarrow \alpha a + \beta b \in L$.

2) Об'єднання. Припустимо M_1, M_2 – підпростори пр. V над полем F. Мн. $M_1 \cup M_2$ в загальному випадку підпростору не утворює. Наприклад в пр. $\mathbb{R}^2$ беремо неколінеарні вектори a, b.



$L_1 = \langle a \rangle = \{\alpha a,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

$L_2 = \langle b \rangle = \{\beta b,\ \beta \in \mathbb{R}\}$

$a, b \in L_1 \cup L_2$, але $a + b \notin L_1 \cup L_2$,

тобто $L_1 \cup L_2$ не є підпростором.

Твердження. Якщо M_1, M_2 – підпростори пр. V, то множина $M_1 \cup M_2$ утв. підпр. $\Leftrightarrow$ або $M_1 \subseteq M_2$, або $M_2 \subseteq M_1$.

Дов. Якщо один з підпросторів міститься в іншому, то об'єднання співпадає з одним з цих підпросторів. Припустимо навпаки, $M_1 \cup M_2$ – підпростір, але жоден з підпросторів M_1, M_2 не міститься в іншому. $\Rightarrow \exists a \in M_1 \setminus M_2$, $\exists b \in M_2 \setminus M_1 \Rightarrow a, b \in M_1 \cup M_2$ і за умовою підпростору: $a + b \in M_1 \cup M_2$. Тобто $a + b \in M_1$ або $a + b \in M_2$. Припустимо $a + b \in M_1$. Оскільки $a \in M_1$, то $(a + b) - a = b \in M_1$, що суперечить вибору елемента b. $\square$

Поняття суми підпросторів.

Нехай V – вект. пр. над полем F.

Озн. Сумою двох підпр. L_1 та L_2 пр. V наз. мн.

$$L_1+L_2 = \{x_1+x_2 \mid x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2\}.$$

Покажемо, що сума двох підпр. є підпр.

Беремо $a, b \in L_1+L_2$, $\alpha, \beta \in F \Rightarrow$

$a = a_1+a_2$, $b = b_1+b_2$, $a_1, b_1 \in L_1$, $a_2, b_2 \in L_2$.

Тоді $\alpha a+\beta b = \alpha(a_1+a_2)+\beta(b_1+b_2) = \underbrace{(\alpha a_1+\beta b_1)}_{\in L_1} + \underbrace{(\alpha a_2+\beta b_2)}_{\in L_2} \in L_1+L_2$

Зрозуміло, $L_1 \subseteq L_1+L_2$, $L_2 \subseteq L_1+L_2$.

Аналогічно можна ввести поняття суми скінченого числа підпросторів: сумою підпр. $L_1, L_2, \dots, L_k$ век. пр. V наз. мн. $L_1+L_2+\dots+L_k = \{x_1+x_2+\dots+x_k \mid x_i \in L_i,\ i=\overline{1,k}\}$.

Сума скінченого числа підпро-сторів є підпр.

Це дов. аналогічно, як до випадку $k=2$.

2. Геометричний зміст процесу ортогоналізації

Припустимо $a_1, a_2, \dots, a_k$ – система век. в скінч. вим. евк. пр. V.

Процес ортогоналізації дає можливість одержати сист. векторів $b_1, b_2, \dots, b_k \in V$ таку, що:

1) $b_i \perp b_j$, $i \neq j$

2) $\forall i=\overline{1,k}$: $\langle a_1, a_2, \dots, a_i\rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_i\rangle$.

При цьому $b_1 = a_1$ і при вже знайдених векторах $b_1, b_2, \dots, b_{i-1}$

вектор $b_i = a_i - \alpha_{i1}b_1 - \alpha_{i2}b_2 - \dots - \alpha_{i\,i-1}b_{i-1}$,

α_{ij} підбираємо з умови ортогональності:

$\forall j=\overline{1,i-1}$: $(b_i, b_j)=0 \Rightarrow (a_i, b_j) - \alpha_{ij}(b_j, b_j) = 0$

Якщо $b_j \neq \Theta$ беремо $\alpha_{ij} = \dfrac{(a_i, b_j)}{(b_j, b_j)}$

Якщо $b_j = \Theta$, то α_{ij} – $\forall$ дійсне число.

Одержимо підпро-стори $L_1 = \langle a_1\rangle = \langle b_1\rangle$, $L_2 = \langle a_1, a_2\rangle = \langle b_1, b_2\rangle, \dots,$

$L_k = \langle a_1, a_2, \dots, a_k\rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_k\rangle$.

Де вектори $b_i = a_i - \alpha_{i1}b_1 - \alpha_{i2}b_2 - \dots - \alpha_{i\,i-1}b_{i-1}$

одночасно $c_i = \alpha_{i1} b_1 + \alpha_{i2} b_2 + \ldots + \alpha_{i\,i-1} b_{i-1}$.

Тоді $a_i = b_i + c_i$, $c_i = L_{i-1} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_{i-1} \rangle$.

Оскільки $b_i \perp b_1$, $b_i \perp b_2$, ..., $b_i \perp b_{i-1}$, то, $b_i \in L_{i-1}^{\perp}$.

Таким чином, век. c_i є ортогональною проекцією a_i на підпр. L_{i-1}, а вектор b_i є ортогональною складовою век. a_i відносно підпр. L_{i-1}.

Можна зробити висновки:

1) Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - лінійно залежна $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ серед векторів $b_1, b_2, \ldots, b_n$ є принаймні один нульовий

2) Процес ортогоналізації не збільшує довжину вектора:
$\forall i = \overline{1,n}$: $|a_i| \geq |b_i|$.

3. $a_1=(1;1;1;1)$, $a_2=(1;2;1;3)$, $a_3=(1;1;2;2)$, $a_4=(1;1;1;3)$, $a_5=(2;3;3;3)$

$L=\langle a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\rangle$

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\1&2&1&1&3\\1&1&2&1&3\\1&3&2&3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&2&1&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&1&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&2&-2\end{pmatrix}$$

rank $=4$.

$\dim L=4$. $B_L=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$.

$$A_y=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}\quad |A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda&-4\\-4&5-\lambda\end{vmatrix}-$$

$$-2\cdot\begin{vmatrix}2&-4\\-2&5-\lambda\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2&5-\lambda\\-2&-4\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+9)-2\cdot(-2\lambda+2)-$$

$$-2\cdot(-2\lambda+2)=-\lambda^3+12\lambda^2-21\lambda+10=-(\lambda-10)(\lambda-1)^2.$$

Для $\lambda_1=\lambda_2=1$ $(A-E)=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $x_1=-2x_2+2x_3$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
2	0	1
-2	1	0

$a_1=(2;0;1)$

$a_2=(-2;1;0)$.

Для $\lambda_3=10$: $(A-10E)=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-5&-4\\0&-18&-18\\0&-9&-9\end{pmatrix}\sim$

$\sim\begin{pmatrix}2&-5&-4\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $x_2=-x_3$, $x_1=-\frac{x_3}{2}$. $a_3=(-1;-2;2)$.

ФСР:

x_1	x_2	x_3
-1	-2	2

$a_1\perp a_3$, $a_2\perp a_3$.

$b_1=a_1=(2;0;1)$

$b_2=a_2-\alpha_{21}\cdot b_1=a_2-\frac{(a_2b_1)}{(b_1b_1)}b_1=a_2+\frac{4}{5}b_1=\left(-\frac{2}{5};1;\frac{4}{5}\right)$.

$b_3=(-1;-2;2)$.

$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2;0;-1)$ $c_2 = \cancel{\frac{\sqrt{45}}{5}}\ \frac{5}{\sqrt{45}} \cdot \left(-\frac{2}{5}; 1; \frac{4}{5}\right) \cdot$ $c_3 = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{45}} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$B = Q^{-1} A Q$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

матриця A в ортонорм. базисі з власних векторів.