Теорія ймовірностей, статистика та ймовірнісні процеси

Лекція 9.

Розора Ірина Василівна

Київ, 2022

Зміст I

Зміст

Розглянемо ймовірнісний простір (Ω, F, P), на якому визначені n в.в. $X_1, \dots, X_n$. Вектор $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ називають *випадковим вектором* або *n-вимірною в.в.*

Нехай $X_1, \ldots, X_n$ – довільні в.в.

Означення

Сумісною функцією розподілу випадкового вектора $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ називають функцію $F_{\mathbf{X}}(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, яка в точці $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ дорівнює

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \equiv F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \mathbf{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n).$$

Як і в одновимірному випадку, багатовимірна функція розподілу має подібні властивості:

(1) $F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ – неспадна функція за будь-яким аргументом;

(2) – неперервна праворуч за будь-яким аргументом;

(3) – задовольняє співвідношення

$$F_X(+\infty, \ldots, +\infty) = 1, \quad \lim_{x_k \to -\infty} F_X(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

для довільних значень інших аргументів.

На відміну від функції розподілу одновимірної в.в., сумісна функція розподілу має ще одну характеристичну властивість. Для її формулювання позначимо через $\Pi_{\mathbf{x}}$ кут

$$\Pi_{\mathbf{x}} = (-\infty, \mathbf{x}] = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n], \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n).$$

Для початку припустимо, що розмірність $n = 2$. Зауважимо, що паралелепіпед $(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]]$ можна зобразити у вигляді вкладеної різниці вкладених різниць кутів:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\Pi_{\mathbf{b}} \backslash \Pi_{\mathbf{b}'}) \backslash (\Pi_{\mathbf{a}} \backslash \Pi_{\mathbf{a}'}),$$

де точки $\mathbf{b}' = (a_1, b_2)$, $\mathbf{a}' = (a_2, b_1)$. Тоді

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{b}} \backslash \Pi_{\mathbf{b}'}) - \mathbf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{a}} \backslash \Pi_{\mathbf{a}'}) =$$

$$= \mathbf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{b}}) - \mathbf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{b}'}) - \mathbf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{a}}) + \mathbf{P}(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{a}'}).$$

Позначимо через $\Delta_{(\mathbf{a},\mathbf{b}]}F_{\mathbf{X}}$ приріст сумісної функції розподілу $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ на паралелепіпеді $(\mathbf{a},\mathbf{b}]$. Тоді при $n=2$ приріст $F_{\mathbf{X}}$ на прямокутнику $(\mathbf{a},\mathbf{b}]$ дорівнює $\Delta_{(\mathbf{a},\mathbf{b}]}F_{\mathbf{X}} = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{b}) - F_{\mathbf{X}}(\mathbf{b}') - F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a}') + F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a})$. У загальному випадку $n>2$ правило чергування знаків при значеннях функції у вершинах паралелепіпеда $(\mathbf{a},\mathbf{b}]$ визначається аналогічно.

Зокрема, нехай $\Delta^k_{(a_k,b_k]}F_{\mathbf{X}} = F_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_{k-1},b_k,x_{k+1},\ldots,x_n) - F_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_{k-1},a_k,x_{k+1},\ldots,x_n)$ позначає k-ий частковий приріст на $(a_k,b_k]$. Використовуючи метод математичної індукції, легко показати, що приріст сумісної функції розподілу на паралелограмі $(\mathbf{a},\mathbf{b}]$ є результатом послідовних часткових приростів:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}\in(\mathbf{a},\mathbf{b}]) = \Delta_{(\mathbf{a},\mathbf{b}]}F_{\mathbf{X}} = \Delta^1_{(a_1,b_1]}\ldots\Delta^{n-1}_{(a_k,b_k]}\Delta^n_{(a_k,b_k]}F_{\mathbf{X}}. \quad (1)$$

В одновимірному випадку перераховані властивості (1) – (3) є необхідними й достатніми для того, щоб функція $F_X(x)$ була функцією розподілу деякої в.в. X. У багатовимірному випадку цих властивостей вже недостатньо. Для того, щоб функція $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ була функцією розподілу деякого випадкового вектора $\mathbf{X}$, треба додати ще одну:

(4) для довільних $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ вираз (1) невід'ємний.

Те, що ця умова може не виконуватися, незважаючи на наявність у функції $F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ властивостей (1) – (3), показує наступний приклад. Нехай

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \geq 0, \text{ або } x + y \leq 1, \text{ або } y \leq 0; \\ 1, & \text{в іншій частині площини.} \end{cases}$$

Ця функція задовольняє умови (1) – (3), але для неї $F(1, 1) - (F(1, \frac{1}{2})) - F(\frac{1}{2}, 1) + F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -1$, і, відповідно, четверта умова не виконується. Отже, функція $F(x, y)$ не може бути сумісною функцією розподілу, оскільки інакше ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) в прямокутник $\frac{1}{2} < X \leq 1, \frac{1}{2} < Y \leq 1$ буде від'ємним числом.

Нехай випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ має сумісну функцію розподілу $F_{\mathbf{X}}$. *Маргінальну функцію розподілу* в.в. X_k визначають так:

$$F_{X_k}(x_k) = \mathbf{P}(X_k < x_k) = F_{\mathbf{X}}(\infty, \ldots, \infty, x_k, \infty, \ldots, \infty),$$

де x_k – k-ий аргумент функції $F_{\mathbf{X}}$.

Означення

Випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ та його сумісну функцію розподілу $F_{\mathbf{X}}$ називають абсолютно неперервними, якщо існує невід'ємна вимірна функція $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \equiv f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$ така, що

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{(-\infty,\mathbf{x})} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_n)\,\mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n$$

для будь-якого $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Функцію $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ називають *сумісною щільністю* випадкового вектора та сумісної функції розподілу $F_{\mathbf{X}}$.

Якщо випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ має сумісну щільність $f_{\mathbf{X}}$, то його координати мають маргінальні щільності

$$f_{X_k}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(y_1, \ldots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, y_n) \, \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_{k-1} \, \mathrm{d}y_{k+1} \ldots$$

Властивості сумісної щільності:

- $f_X(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$;
- $\int_{\mathbf{R}^n} f_X(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = 1$;
- $\mathbf{P}(x_{11} < X_1 \leq x_{12}, \ldots, x_{n1} < X_n \leq x_{n2}) = \int_{x_{11}}^{x_{12}} \ldots \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} f_{\mathbf{X}}(y_1, \ldots, y_n) \, \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n$;
- $$f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_n} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Зміст

Кожна в.в. породжує випадкові події, які є прообразами борелівських множин. Незалежність в.в. означає, що всі такі породжені події незалежні.

Означення

Отже, *в.в.* $X_1, \ldots, X_n$ *незалежні в сукупності*, якщо всі породжені ними випадкові події незалежні в сукупності, тобто для довільних $B_k \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$

$$\mathbf{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k \in B_k).$$

Зокрема, в.в. $X_1, \ldots, X_n$ незалежні в сукупності тоді й лише тоді, коли відповідна сумісна функція розподілу для всіх $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ розкладається у добуток

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k \leq x_k) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x_k).$$

Коли випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ має сумісну щільність $f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$, то абсолютно неперервні в.в. $X_1, \ldots, X_n$ незалежні в сукупності тоді й лише тоді, коли

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k).$$

Теорема про спадковість незалежності

Має місце наступна теорема про перетворення незалежних в.в.

Теорема

Нехай в.в. $X_1, \ldots, X_n$ незалежні в сукупності, а $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ – борелівські функції. Тоді в.в.

$$g(X_1), \ldots, g(X_n)$$

незалежні в сукупності.

Доведення.

Для довільних множин $B_k \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, $1 \le k \le n$ розглянемо

$$\mathbf{P}(g_1(X_1) \in B_1, \dots, g_n(X_n) \in B_n) =$$

$$= \mathbf{P}(X_1 \in g_1^{-1}(B_1), \dots, X_n \in g_n^{-1}(B_n)) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k \in g_1^{-1}(B_k))$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(g(X_k) \in B_k).$$

Отже, $g(X_1), \dots, g(X_n)$ – незалежні в сукупності. $\square$

Зміст

Теорема

Якщо X та Y – незалежні в.в. із щільностями $f_X(x)$ і $f_Y(x)$, то сума $X+Y$ має функцію розподілу

$$F_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x-y)dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(x-y)dF_X(y),$$

яку називають згорткою функцій розподілу $F_X(x)$ і $F_Y(x)$ і позначають $F_X * F_Y(x) = F_{X+Y}(x)$; та щільність, яка дорівнює згортці щільностей $f_X(x)$ і $f_Y(x)$, тобто

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(a-y)f_X(y)\,\mathrm{d}y.$$

Доведення

Оскільки в.в. X та Y незалежні, то $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Тому

$$\mathbf{P}(X+Y\le a) = \iint\limits_{\{(x,y):\ x+y\le a\}} f_X(x)\cdot f_Y(y)dxdy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{a-y} f_X(x)\cdot dx\right) f_Y(y)dy =$$

використовуючи заміну $x = u - y$ ($u \in (-\infty, a)$, $du = dx$), маємо

$$F_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{a} f_X(u-y)\cdot du\right) f_Y(y)dy =$$
$$= \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u-y)f_Y(y)dydu.$$

Якщо взяти похідну за a цієї функції, то отримаємо щільність в.в.$X+Y$:

$$f_{X+Y}(a) = F'_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y) f_Y(y) dy.$$

Зміст

Означення

Послідовність випадкових величин $(\xi_n, \ n \geq 1)$ збігається за ймовірністю до величини ξ (позначення $\xi_n \to^P \xi$), якщо

$$\mathbf{P}(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \to 0, \ n \to \infty, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Зауваження

Якщо одночасно $\xi_n \to^P \eta$, то $\mathbf{P}(|\eta - \xi| \geq \varepsilon) = 0$ для всіх $\varepsilon > 0$, звідки $\eta - \xi = 0$ *м.н.*, тобто границя за ймовірністю визначена однозначно з точністю до рівності *майже напевне*.

Властивості збіжності за ймовірністю

Теорема

Теорема (про властивості збіжності за ймовірністю).
Нехай має місце збіжність $\xi_n \to^P \xi, n \to \infty$.

(а) Якщо $f \in C(\mathbb{R})$, *то* $f(\xi_n) \to^P f(\xi), n \to \infty$.

(б) Якщо $|\xi_n| \le c$, *то* $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi$ *та* $\mathbf{E}\,|\xi_n - \xi| \to 0, n \to \infty$.

(в) Якщо також $\eta_n \to^P \eta$, *то* $a\xi_n + b\eta_n \to^P a\xi + b\eta$ *при* $a, b \in \mathbb{R}$.

Означення.

Послідовність випадкових величин $(\xi_n, n \geq 1)$ збігається з імовірністю 1 *до величини* ξ *або ж* збігається майже напевне, *позначення* $\xi_n \to^{P1} \xi$, *якщо*

$$\mathbf{P}(\{\omega : \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\}) = 1.$$

Означення.

Послідовність випадкових величин $(\xi_n\ , n \geq 1)$ *збігається до величини* ξ у середньому порядку q, *позначення* $\xi_n \to^{Lq} \xi$, *якщо збігаються відповідні середні:* $\mathbf{E}\,|\xi_n - \xi|^q \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Збіжність у середньому порядку 2 називається також збіжністю у середньому квадратичному.

про співвідношення між різними видами збіжності

Теорема

Теорема (про співвідношення між різними видами збіжності).
Завжди справедливі такі імплікації між видами збіжності

$$\boxed{P1} \Longrightarrow \boxed{P} \Longleftarrow \boxed{L_1} \Longleftarrow \boxed{L_q, q > 1}.$$

https://www.youtube.com/watch?v=omgzQEu3czs

Слабка збіжність функцій розподілу і випадкових величин

Означення.

Нехай $\xi, (\xi_n, n \geq 1)$ *– випадкові величини з функціями розподілу* $F, (F_n,\ n \geq 1)$ *відповідно. Має місце слабка збіжність:*

$$\xi_n \to^W \xi, \quad F_n \to^W F, \quad n \to \infty,$$

якщо для кожної неперервної обмеженої функції g *(тобто* $\forall g \in C_b(\mathbb{R})$*) збігаються математичні сподівання*

$$\mathbf{E}g(\xi_n) \to \mathbf{E}g(\xi), \; n \to \infty,$$

або ж збігаються інтеграли

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x), \; n \to \infty.$$

Еквівалентне означення слабкої збіжності

Кажуть, що посл. в.в.$\xi, (\xi_n, n \geq 1)$ з ф.р. $F, (F_n, \; n \geq 1)$ слабко збігаються до в.в.ξ з ф.р. $F(x)$, якщо має місце поточкова збіжність

$$F_n(x) \to F(x), \quad x \in R.$$

Слабка збіжність є слабшою за вже відомі види збіжностей.

Зміст

Закон великих чисел

Означення

.
Для послідовності випадкових величин $(\xi_n,\ n \geq 1)$ *виконується* закон великих чисел, якщо частинні суми $S_n = \xi_1 + \ldots + \ \xi_n$ *задовольняють граничне співвідношення*

$$(S_n - \mathbf{E}S_n) \ / \ n \to^P 0, \text{ при } n \to \infty.$$

У випадку *однаково розподілених* випадкових величин
$\mathbf{E}S_n = n\mathbf{E}\xi_1$,
тому твердження закону великих чисел еквівалентне збіжності *за ймовірністю* середніх арифметичних

$$S_n \ / \ n \to^P \mathbf{E}\xi_1, \text{ при } n \to \infty.$$

Закон великих чисел у формі Чебишева

Теорема

Нехай $X_1, \ldots, X_n$ *– н.о.р.в.в. зі скінченними математичним сподіванням* $\mathbf{E}X_j = m_1$ *та дисперсією* $\mathbf{D}X = \sigma^2$*. Покладемо*

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ *має місце границя*

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m_1\right| \geq \varepsilon\right) \to 0, \quad \textit{коли} \quad n \to \infty.$$

Інакше кажучи, усереднена сума $\frac{S_n}{n}$ н.о.р.в.в. $X_1, \ldots, X_n$ із середнім $\mathbf{E}X_j = m_1$ та дисперсією $\mathbf{D}X = \sigma^2$ збігається за ймовірністю до m_1.

Доведення.

Використаємо нерівність Чебишева для $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Дійсно, $\mathbf{E}\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}X_k = m_1$. Тому

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m_1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2\varepsilon^2}$$

$\square$

Теорема

Теорема (теорема Бернуллі про асимптотику відносної частоти).
Нехай ν_n – кількість успіхів у перших n випробуваннях нескінченної послідовності випробувань Бернуллі з імовірністю успіху p. Тоді

$$\nu_n \,/\, n \to^P p, \;\; n \to \infty.$$

Доведення.

Оскільки $\nu_n = \sum_{k=1}^n \chi_k$, де доданки χ_k– індикатори успіхів – незалежні і однаково розподілені випадкові величини,

$$\mathbf{E}\chi_k = p, \quad \mathbf{D}(\nu_n/n) = p(1-p)/n \to 0.$$

$\square$

Посилений закон великих чисел

Означення

.

Для послідовності випадкових величин $(\xi_n,\ n \ge 1)$ *виконується* посилений закон великих чисел, якщо послідовність їх частинних сум $S_n \equiv \xi_1 + ... + \xi_n$ *задовольняє граничне співвідношення*

$$(S_n - \mathbf{E}S_n)\ /\ n\ \to^{P1} 0,\ \text{при}\ n \to \infty.$$

Як і для *закону великих чисел*, у випадку *однаково розподілених* випадкових величин це співвідношення еквівалентне збіжності середніх арифметичних

$$S_n\ /\ n \to^{P1} \mathbf{E}\xi_1,\ \text{при}\ n \to \infty.$$

Теорема Колмогорова про посилений закон великих чисел

Теорема

Теорема (теорема Колмогорова про посилений закон великих чисел).
Нехай $(\xi_n\ , n \geq 1)$ *– послідовність незалежних у сукупності випадкових величин така, що* $\mathrm{D}\xi_n < \infty$ *та*

$$\sum\nolimits_{n\geq 1} \mathrm{D}\xi_n \ / \ n^2 < \infty.$$

Тоді для цієї послідовності має місце посилений закон великих чисел.

Теорема Бореля

Теорема

Теорема (теорема Бореля про асимптотику частоти успіху).
Нехай ν_n – кількість успіхів у перших n випробуваннях нескінченної послідовності випробувань Бернуллі з імовірністю успіху p. Тоді

$$\nu_n \,/\, n \to^{P1} p, \;\; n \to \infty.$$

Зміст

Перетворення Фур'є широко застосовуються в математичній фізиці, теорії диференціальних рівнянь та інших розділах математики. У теорії ймовірностей це поняття відоме як характеристична функція.

Означення

Нехай ξ – випадкова величина, а F – її функція розподілу. Характеристичною функцією величини ξ та функції розподілу F називається така комплекснозначна функція дійсної змінної $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_\xi(t) \equiv \mathbf{E}\exp(it\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)\, dF(x) \equiv \varphi_F(t).$$

Надалі матем.сп. від комплекснозначних величин визначається за лінійністю: $\mathbf{E}(\xi_1 + i\xi_2) = \mathbf{E}\xi_1 + i\mathbf{E}\xi_2$.

Відповідність між функціями розподілу та характеристичними функціями є взаємно однозначною.

Теорема

(про основні властивості х. ф.). Нехай φ *– х. ф. Вона має такі властивості:*

(а – нормованість) $\varphi(0) = 1$ *і* $|\varphi(t)| \leq 1,\ \forall t \in \mathbb{R}$,

(б – ермітовість) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$,

(в – неперервність) $\varphi(t)$ *неперервна в нулі і рівномірно неперервна, (без доведення)*

(г – невід'ємна визначеність) для довільних дійсних $t_1, \ldots, t_n$ *та комплексних* $c_1, \ldots, c_n$ *справедлива нерівність*

$$\sum\nolimits_{k,\ j\ =1}^{n} c_k \overline{c_j}\ \varphi(t_k - t_j) \geq 0.$$

Зауваження

Теорема Бохнера-Хінчина стверджує, що будь-яка комплекснозначна функція дійсної змінної, що задовольняє умови (а)-(г), є характеристичною для певної функції розподілу.

Доведення

(а) $\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = F(\mathbb{R}) = 1$ з умови *нормованості* функції розподілу,
$|\varphi(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) dF(x) \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |\exp(itx)| \, dF(x) = 1.$

(б) $\varphi(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-itx) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\exp(itx)} dF(x) = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) dF(x)}.$

(г) Сума з умови дорівнює

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,\ j\ =1}^{n} c_k \overline{c_j} \exp(i(t_k - t_j)x) dF(x) =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} c_k \exp(it_k x)\right|^2 dF(x) \ge 0$$

Теорема

про властивості характеристичної функції
(а) $\varphi_{a+b\xi}(t) = \exp(ita)\ \varphi_\xi(bt)$.
(б) Якщо ξ, η *н.в.в., то* $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\ \varphi_\eta(t)$.
(в) Якщо ξ *інтегровна, то* $\varphi_\xi(t) = 1 + it\ \mathbf{E}\xi + o(t),\ t \to 0$.
(г) Якщо ξ *квадратично інтегровна, то*

$$\varphi_\xi(t) = 1 + it\ \mathbf{E}\xi - t^2\ \mathbf{E}\xi^2/2 + o(t^2),\ \ t \to 0.$$

(д) За інтегровності ξ *або квадратичної інтегровності відповідно*

$$\mathbf{E}\xi = -i\varphi'_\xi(0),\ \ \mathbf{E}\xi^2 = -\varphi''_\xi(0).$$

Теорема

(Продовження) (е) Якщо $\xi \simeq N(\mu, \sigma^2)$ *нормальна випадкова величина, то*

$$\varphi_\xi(t) = \exp(it\mu - \sigma^2 t^2/2).$$

(ж) Якщо $\xi \simeq \Pi(\lambda)$ *має розподіл Пуассона з параметром* λ, *то*

$$\varphi_\xi(t) = \exp(\lambda(\exp(it) - 1)).$$

(з) Якщо $\xi = c$ *– стала, то* $\varphi_\xi(t) = \exp(itc)$.

Доведення

(а) За однорідністю математичного сподівання

$$\varphi_{a+b\xi}(t) = \mathbf{E}\exp(it(a+b\xi)) =$$

$$\mathbf{E}\exp(ita)\exp(itb\xi) = \exp(ita)\mathbf{E}\exp(itb\xi) = \exp(ita)\varphi_\xi(bt).$$

(б) За т. про перетворення н.в.в. $\exp(it\xi)$ і $\exp(it\eta)$ також незалежні. Тому

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \mathbf{E}\exp(it(\xi+\eta)) = \mathbf{E}\exp(it\xi)\exp(it\eta) =$$

$$\mathbf{E}\exp(it\xi)\,\mathbf{E}\exp(it\eta) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t).$$

Доведення

(в), (г) без доведень
(д) Випливає з формули розкладу в ряд Тейлора в околі нуля функції $\varphi_\xi(t)$.
(е) Якщо $\zeta \simeq N(0,1)$ *стандартна нормальна* величина, то

$$\varphi_\zeta(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2/2 + itx\right) dx =$$

$$\exp\left(-t^2/2\right) (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x - it)^2/2) dx = \exp\left(-t^2/2\right).$$

У загальному випадку досить застосувати властивість (а) до означення величини $\xi = \mu + \sigma\zeta$ з *нормальним розподілом*.
(ж)

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{n\geq 0} \exp(itn)\lambda^n \exp(-\lambda)/n! \; = \exp(\lambda(\exp(it) - 1))$$

Зміст

Центральна гранична теорема

Крім теоретичного інтересу та важливості, ця теорема забезпечує простий метод обчислення наближених ймовірностей для суми незалежних випадкових величин. Вона також пояснює той чудовий факт, що емпіричні частоти багатьох природних “ сукупностей ” мають дзвоноподібну (тобто нормальну) форму.

Теорема

(Класична центральна теорема).
Нехай $X_1, X_2, \cdots$ *послідовність н.о.р.в.в. із середнім* $EX_1 = \mu$ *та дисперсією* $DX_1 = \sigma^2$. *Тоді в.в.*

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$$

слабко збігається до стандартного нормального розподілу при $n \to +\infty$. *Тобто*

$$P\{\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\} \approx \Phi(a),$$

де

$$\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Доведення та пояснення

https://www.youtube.com/watch?v=23YMSRQEp6Q

https://edpuzzle.com/media/6062f61672ba55426c3d9cb7

Розглянемо приклад.

Приклад

Розглядається короткострокове страхування життя, коли страхова компанія сплачує 250 000 грн. у випадку смерті застрахованого протягом року, і нічого не виплачує в протилежному випадку. Припустимо, що на цих умовах застраховано 3000 клієнтів в одному віці. З таблиць смертності відомо, що йм. смерті протягом року для них дорівнює 0.003. Знайти ймовірність того, що компанія витратить не більше ніж 2 500 000 грн.

Розв'язання

Позначимо $250000 = 1$ у.о. Тоді $2500000 = 10$ у.о.
Тоді виплати страхової компанії за i-тим договором страхування $(i = \overline{1, n})$ можна описати такою в.в.

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо відбувся страховий випадок;} \\ 0, & \text{якщо не відбувся страховий випадок.} \end{cases}$$

В.в.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

характеризує сумарні виплати стр. компанії за даним портфелем страхвання.

Розв'язування

Потрібно знайти

$$P\{S_n \le 10\} = P\{\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \le \frac{10 - ES_n}{\sqrt{DS_n}}\}.$$

Оскільки $E\xi_i = 0,003, D\xi_i = 0,003 \cdot 0,997 = 0,00299 \approx 0,003$, то

$$ES_n = nE\xi_i = 3000 \cdot 0,003 = 9.$$

$$DS_n = nD\xi_i = 3000 \cdot 0,003 = 9.$$

Отже,

Розв'язування

$$P\{S_n \le 10\} = P\{\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \le \frac{10-9}{3}\} \approx \Phi(0,33) = 0,6304.$$

В R ця ймовірніть обчислюються через функцію $pnorm(0.33)$. Отже, дану задачу можна розв'язувати 3 способами:

- через біноміальний розподіл $P\{S_n \le 10\} = \sum_{k=0}^{10} C_{3000}^k (0,003)^k (1-0,003)^{3000-k}$. В R можна використати функцію $pbinom(10, size = 3000, prob = 0.003)$;
- через пуассонівський розподіл. В R функція $ppois(10, lambda = 9)$;
- через нормальний розподіл, використовуючи ЦГТ.

ПИТАННЯ?