Теорія ймовірностей, статистика та ймовірнісні процеси

Лекція 13.

Розора Ірина Василівна

Київ, 2022

Зміст I

Зміст

Теоретичні та вибіркові моменти

Велику групу статистик утворюють вибіркові моменти, які за ЗВЧ є природними оцінками для теоретичних моментів – математичних сподівань степеневих функцій від випадкової величини.

Момент порядку k

Нехай ξ – випадкова величина. Її (нецентральним) теоретичним моментом порядку $k \in N$ називається число

$$\mu_k \equiv \mathbf{M}\xi^k,$$

за умови інтегрованості величини ξ^k.

Центральний момент порядку k

Центральним теоретичним моментом порядку k називається число

$$\mu_k^0 \equiv \mathbf{M}(\xi - \mu)^k,$$

де $\mu \equiv \mu_1$ – математичне сподівання, $\mu_2^0 = \sigma^2$ – дисперсія ξ.

Значення центральних моментів використовуються в теорії розподілів для означення таких спеціальних характеристик:

Коефіцієнт варіації

$$k_v = \frac{\sigma}{\mu_1}$$

(дорівнює 1 для показникового розподілу)

Коефіцієнт скошеності

$$k_s = \frac{3(\mu_1 - x_{\frac{1}{2}})}{\sigma}$$

(нульовий для симетричних розподілів)

Коефіцієнт асиметрії

$$k_a = \frac{\mu_3^0}{\sigma^3}$$

(нульовий для симетричних розподілів)

Коефіцієнт ексцесу

$$k_e = \frac{\mu_4^0}{\sigma^4} - 3$$

(нульовий для нормальних спостережень).

Всі наведені характеристики є безрозмірними та відображають певні особливості форми відповідного розподілу.

Вибірковий момент порядку k

Нехай $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ – вибірка. Її (нецентральним) вибірковим моментом порядку k називається статистика

$$\hat{\mu}_{kn} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^k.$$

Центральний вибірковий момент порядку k

Центральним вибірковим моментом порядку k називається статистика

$$\hat{\mu}_{kn}^0 \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \hat{\mu}_n)^k,$$

де $\hat{\mu}_n \equiv \hat{\mu}_{1n}$ – вибіркове середнє, а, $\hat{\mu}_{2n}^0 = \hat{\sigma}_n^2$ – вибіркова дисперсія.

Вибірковий момент порядку k

Нехай $X = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – вибірка. Її (нецентральним) вибірковим моментом порядку k називається статистика

$$\hat{\mu}_{kn} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^k.$$

Центральний вибірковий момент порядку k

Центральним вибірковим моментом порядку k називається статистика

$$\hat{\mu}_{kn}^0 \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \hat{\mu}_n)^k,$$

де $\hat{\mu}_n \equiv \hat{\mu}_{1n}$ – вибіркове середнє, а, $\hat{\mu}_{2n}^0 = \hat{\sigma}_n^2$ – вибіркова дисперсія.

Зауваження

Важливою властивістю центральних моментів є інваріантність відносно зсувів – вони не змінюються при одночасному зсуві всіх спостережень на сталу:

$$\hat{\mu}^0_{kn} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right)^k$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - c - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - c)\right)^k .$$

Зауваження

Як і в теоремі про властивості дисперсії, для вибіркової дисперсії має місце тотожність

$$\hat{\sigma}_n^2 = \hat{\mu}_{2,n} - (\hat{\mu}_n)^2.$$

Дійсно,

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \hat{\mu}_n)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 - 2(\hat{\mu}_n)^2 + (\hat{\mu}_n)^2.$$

Теорема (про моменти вибіркових моментів)

Нехай $(\xi_1, ..., \xi_n)$ *– кратна вибірка. Тоді*

$$\mathbf{M}\hat{\mu}_{kn} = \mu_k,$$

$$\mathbf{D}\hat{\mu}_{kn} = \frac{1}{n}(\mu_{2k} - \mu_k^2).$$

Зокрема,

$$\mathbf{M}\hat{\mu}_n = \mu, \quad \mathbf{D}\hat{\mu}_n = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Крім того,

$$\mathbf{M}\hat{\sigma}_n^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2, \quad \mathbf{D}\hat{\sigma}_n^2 = \frac{n-1}{n^3}((n-1)\mu_4^0 - (n-3)\sigma^4).$$

Доведення

Незміщеність нецентральних моментів є очевидним наслідком лінійності математичного сподівання. Вираз для їх дисперсій випливає з незалежності в сукупності і однакової розподіленості степеневих функцій $(\xi_i^k, i = \overline{1, n})$ та з теореми про дисперсію суми незалежних величин:

$$\mathbf{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}(\xi_i^k)$$

$$= \frac{1}{n^2}n\mathbf{D}(\xi_1^k) = \frac{1}{n}(\mathbf{M}\xi_1^{2k} - (\mathbf{M}\xi_1^k)^2).$$

З теореми про моменти вибіркових моментів випливає, що вибіркова дисперсія $\hat{\sigma}_n^2$ є зміщеною оцінкою для теоретичної дисперсії σ^2. Тому часто використовують її скоригований незміщений варіант.

Нормована вибіркова дисперсія

Нормованою вибірковою дисперсією є статистика

$$\hat{s}_n^2 \equiv \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \hat{\mu}_n)^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}_n^2,$$

що є незміщеною оцінкою дисперсії:

$$\mathbf{M}\hat{s}_n^2 = \frac{n}{n-1}\mathbf{M}\hat{\sigma}_n^2 = \sigma^2$$

Теорема (про асимптотичні властивості вибіркових моментів)

Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *– кратна вибірка.*

(а) *Якщо*

$$\mathbf{M}|\xi_1|^k < \infty,$$

то нецентральний вибірковий момент $\hat{\mu}_{kn}$ *є незміщеною та консистентною оцінкою теоретичного моменту* μ_k*.*

(б) *Якщо*

$$\mathbf{M}\xi_1^{2k} < \infty,$$

то оцінки $\hat{\mu}_{kn}$ *є асимптотично нормальними:*

$$\sqrt{n}(\hat{\mu}_{kn} - \mu_k) \xrightarrow{W} \eta \cong N(0, \mu_{2k} - \mu_k^2).$$

Зміст

Метод моментів

Метод моментів є спеціальним методом оцінювання невідомих параметрів, який спирається на асимптотичні властивості вибіркових моментів.

Припустимо, що параметричний простір є d-вимірним:

$$\Theta \in \mathbf{R}^d.$$

Оскільки розподіл вибірки $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ відомий повністю при заданому значенні $\theta \in \Theta$, то повністю відомими є функції

$$\mu_k(\theta) \equiv \mathbf{M}_\theta \xi_1^k.$$

Розглянемо векторну функцію

$$\mu^{(d)}(\theta) \equiv (\mu_k(\theta), k = \overline{1, d}) \colon \Theta \to \mathbf{R}^d.$$

Припустимо, що існує неперервне відображення

$$T_d(\mu) \colon \mathbf{R}^d \to \Theta,$$

яке є оберненим до $\mu^{(d)}(\theta)$, тобто

$$T_d(\mu^{(d)}(\theta)) = \theta, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Ця умова виконується, зокрема, за теоремою про обернене відображення з курсу математичного аналізу, якщо функція $\mu^{(d)}(\theta)$ неперервно диференційовна, якобіан

$$\det \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \mu^{(d)}(\theta_0) \right| \neq 0$$

для деякого $\theta_0 \in \Theta$ і простір Θ звужено до деякого околу точки θ_0.

Оцінка методу моментів

Оцінкою методу моментів параметра - називається така статистика від вектора вибіркових моментів $\hat{\mu}_n^{(d)} = (\hat{\mu}_{nk}, k = \overline{1, d})$, що містить значення перших d вибіркових моментів:

$$\hat{\theta}_n \equiv T_d(\hat{\mu}_n^{(d)}),$$

де $T_d : \mathbf{R} \to \Theta$ – обернена функція до вектора моментів $\mu^{(d)}(\theta)$.

Зауваження

З означення оберненої функції випливає, що оцінка методу моментів $\hat{\theta}_n$ є єдиним розв'язком системи рівнянь методу моментів

$$\mu^{(d)}(\hat{\theta}_n) = \hat{\mu}_n^{(d)}.$$

Зауваження

У деяких випадках кількість дійсно залежних від θ координат вектора $\mu^{(d)}(\theta)$ може бути меншою за d, тому відображення $T_d(\mu)$ не існує – наприклад, при рівномірному на $[-\theta, \theta]$ розподілу спостережень та $d = 1$. У цьому разі необхідно збільшити розмірність d вектора $\mu^{(d)}(\theta)$.

Теорема (про консистентність оцінок методу моментів)

Якщо $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *– кратна вибірка,*

$$\mathbf{M}_\theta |\xi_1|^d < \infty,$$

і функція T_d *неперервна, то оцінка методу моментів є консистентною оцінкою параметра* θ*.*

Зауваження

Якщо

$$\mathsf{M}_\theta \xi_1^{2d} < \infty$$

і функція T_d неперервно диференційовна, то можна довести, що оцінка методу моментів є асимптотично нормальною з матрицею

$$t_d = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} T_d(\mu)\Big|_{\mu=\mu^{(d)}(\theta)},$$

тобто

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{W} \eta \cong N_d(0, t_d V^{(d)} t_d'), \quad n \to \infty.$$

Приклад 1. Оцінка параметрів гама-розподілу

Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з гама-розподілом $\xi_1 \cong \Gamma(\lambda, \alpha)$, невідомий параметр $\theta = (\lambda, \alpha)$, $\dim\theta = 2$. Тоді теоретичні моменти мають вигляд

$$\mu_1(\theta) = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \mu_2(\theta) = \frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2}.$$

Оцінку методу моментів $(\hat\alpha, \hat\lambda)$ знаходимо з системи рівнянь

$$\frac{\hat\alpha}{\hat\lambda} = \hat\mu_n, \quad \frac{\hat\alpha}{\hat\lambda^2} + \frac{\hat\alpha^2}{\hat\lambda^2} = \hat\mu_{2n} = \hat\sigma_n^2 + (\hat\mu_n)^2,$$

звідки дістанемо

$$\hat\lambda = \frac{\hat\mu_n}{\hat\sigma_n^2}, \quad \hat\alpha = \frac{(\hat\mu_n)^2}{\hat\sigma_n^2}.$$

Приклад 1. Оцінка параметрів гама-розподілу

Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з гама-розподілом $\xi_1 \cong \Gamma(\lambda, \alpha)$, невідомий параметр $\theta = (\lambda, \alpha)$, $\dim\theta = 2$. Тоді теоретичні моменти мають вигляд

$$\mu_1(\theta) = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \mu_2(\theta) = \frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2}.$$

Оцінку методу моментів $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$ знаходимо з системи рівнянь

$$\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\lambda}} = \hat{\mu}_n, \quad \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\lambda}^2} + \frac{\hat{\alpha}^2}{\hat{\lambda}^2} = \hat{\mu}_{2n} = \hat{\sigma}_n^2 + (\hat{\mu}_n)^2,$$

звідки дістанемо

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\mu}_n}{\hat{\sigma}_n^2}, \quad \hat{\alpha} = \frac{(\hat{\mu}_n)^2}{\hat{\sigma}_n^2}.$$

Приклад 2. Оцінка параметрів рівномірного розподілу

Нехай $X = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – кратна вибірка з рівномірним розподілом $\xi_1 \cong U(a, b)$, невідомий параметр $\theta = (a, b)$, $\dim\theta = 2$. Тоді

$$\mu_1(\theta) = \frac{a+b}{2}, \quad \mu_2(\theta) = \mu_1^2(\theta) + \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Оцінку методу моментів $(\hat{a}, \hat{b})$ знаходимо з системи

$$\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2} = \hat{\mu}_n, \frac{(\hat{b}-\hat{a})^2}{12} = \hat{\sigma}_n^2,$$

$$\hat{b} = \hat{\mu}_n + \sqrt{3}\hat{\sigma}_n, \quad \hat{a} = \hat{\mu}_n - \sqrt{3}\hat{\sigma}_n.$$

Приклад 2. Оцінка параметрів рівномірного розподілу

Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з рівномірним розподілом $\xi_1 \cong U(a, b)$, невідомий параметр $\theta = (a, b)$, $\dim\theta = 2$. Тоді

$$\mu_1(\theta) = \frac{a+b}{2}, \quad \mu_2(\theta) = \mu_1^2(\theta) + \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Оцінку методу моментів $(\hat{a}, \hat{b})$ знаходимо з системи

$$\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2} = \hat{\mu}_n, \frac{(\hat{b}-\hat{a})^2}{12} = \hat{\sigma}_n^2,$$

$$\hat{b} = \hat{\mu}_n + \sqrt{3}\hat{\sigma}_n, \quad \hat{a} = \hat{\mu}_n - \sqrt{3}\hat{\sigma}_n.$$

Приклад 3. Оцінка параметрів логнормального розподілу

В.в. ξ має логнормальний розподіл, $\xi \cong LN(\mu, \sigma^2)$, якщо її логарифм має нормальний розподіл:

$$\ln \xi \cong N(\mu, \sigma^2).$$

Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з логнормальним розподілом спостережень: $\xi_1 \cong LN(\mu, \sigma^2)$.

Для оцінки параметрів методом моментів можна скористатися перетворенням вибірки за допомогою логарифмічної функції. За теоремою про перетворення незалежних величин статистика $Y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ з координатами

$$\eta_k = \ln \xi_k, \quad k = \overline{1, n},$$

є кратною вибіркою, а її елементи мають нормальний розподіл.

Приклад 3 (продовження)

За теоремою про інтерпретацію параметрів нормального розподілу вибіркові середнє та дисперсія вектора Y:

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln \xi_k,$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\ln \xi_k - \hat{\mu}_n)^2$$

є консистентними оцінками параметрів μ, σ^2.

Зміст

Визначення оцінки максимальної вірогідності ґрунтується на принципі максимальної вірогідності:

"те, що спостерігається, є найбільш імовірним серед усіх можливих альтернатив".

Надалі будемо припускати, що вибірка X задовольняє умову підпорядкованості її розподілу деякій мірі у вибірковому просторі. За такої умови повністю визначена вибіркова функція вірогідності $L(X, \theta)$. Значення цієї функції і дають критерій "найбільшої вірогідності".

Оцінка максимальної вірогідності

Оцінкою максимальної вірогідності (ОМВ) параметра θ за вибіркою X називається статистика, що максимізує вибіркову функцію вірогідності $L(X, \theta)$:

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X) \equiv \arg\max_{\theta \in \Theta} L(X, \theta),$$

тобто це така статистика $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$, що задовольняє умову:

$$L(X, \theta) \leq L(X, \hat{\theta}), \forall \theta \in \Theta.$$

Для кратної вибірки ОМВ позначається як $\hat{\theta}_n$, де n – об'єм вибірки.

Оцінка максимальної вірогідності

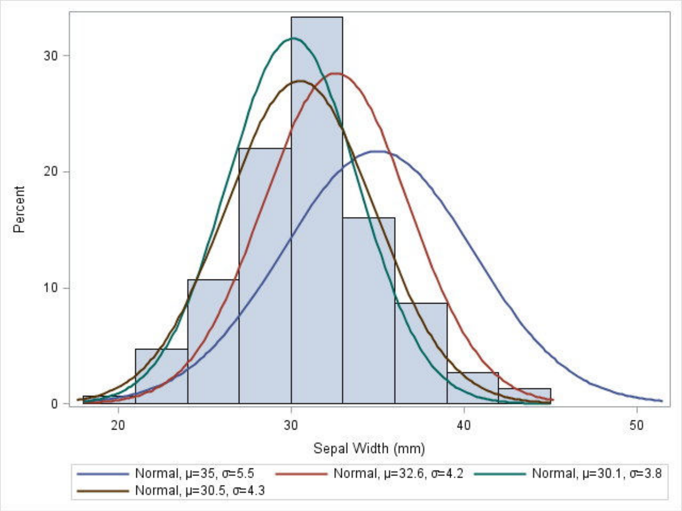
Оцінкою максимальної вірогідності (ОМВ) параметра θ за вибіркою X називається статистика, що максимізує вибіркову функцію вірогідності $L(X, \theta)$:

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X) \equiv \arg\max_{\theta \in \Theta} L(X, \theta),$$

тобто це така статистика $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$, що задовольняє умову:

$$L(X, \theta) \leq L(X, \hat{\theta}), \forall \theta \in \Theta.$$

Для кратної вибірки ОМВ позначається як $\hat{\theta}_n$, де n – об'єм вибірки.


Percent
0
10
20
30
20
30
40
50
Sepal Width (mm)
Normal, μ=35, σ=5.5
Normal, μ=32.6, σ=4.2
Normal, μ=30.1, σ=3.8
Normal, μ=30.5, σ=4.3

Іноді простішим є обчислення ОМВ з еквівалентного означення

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X) \equiv \arg\max_{\theta \in \Theta} \ln L(X, \theta),$$

що збігається з основним через монотонність логарифмічної функції.

Необхідною умовою існування ОМВ є припущення існування точки максимуму. ОМВ визначена однозначно за умови єдиності цієї точки.

Іноді простішим є обчислення ОМВ з еквівалентного означення

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X) \equiv \arg\max_{\theta\in\Theta} \ln L(X,\theta),$$

що збігається з основним через монотонність логарифмічної функції.

Необхідною умовою існування ОМВ є припущення існування точки максимуму. ОМВ визначена однозначно за умови єдиності цієї точки.

Теорема (про рівняння максимальної вірогідності)

Якщо параметр є векторним: $\Theta \subset R^d$, максимум в означенні ОМВ досягається всередині параметричної множини, а функція вірогідності диференційовна, то ОМВ задовольняє рівняння максимальної вірогідності:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(X, \theta)|_{\theta=\hat{\theta}} = 0,$$

тобто ОМВ є коренем функції впливу $U(X, \theta)$:

$$U(X, \hat{\theta}) = 0.$$

Якщо $\dim\theta = d > 1$, то рівняння МВ є векторним, і перетворюється на систему рівнянь МВ для кожної координати вектора-градієнта.

Теорема (про рівняння максимальної вірогідності)

Якщо параметр є векторним: $\Theta \subset R^d$, максимум в означенні ОМВ досягається всередині параметричної множини, а функція вірогідності диференційовна, то ОМВ задовольняє рівняння максимальної вірогідності:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(X, \theta)|_{\theta=\hat{\theta}} = 0,$$

тобто ОМВ є коренем функції впливу $U(X, \theta)$:

$$U(X, \hat{\theta}) = 0.$$

Якщо $\mathrm{dim}\theta = d > 1$, то рівняння МВ є векторним, і перетворюється на систему рівнянь МВ для кожної координати вектора-градієнта.

Співвідношення з ефективними оцінками. Інваріантність

Теорема (про співвідношення ОМВ з ефективними оцінками)

1. Якщо параметр θ – скалярний і існує його ефективна оцінка $\hat{\theta}^*$, то існує ОМВ $\hat{\theta}$, причому

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}^*.$$

Теорема (про інваріантність оцінки максимальної вірогідності)

Нехай існує оцінка максимальної вірогідності $\hat{\theta}$ параметра θ, а функція $q : \Theta \to Q$ є взаємно-однозначною. Тоді оцінка $q(\hat{\theta})$ є оцінкою максимальної вірогідності для значення функції $q(\theta)$.

Приклади обчислення ОМВ

Схема Бернуллі

$$\arg\max \ln L(X,\theta) = \arg\max \ln \theta^{\nu_n(X)}(1-\theta)^{n-\nu_n(X)}$$

$$= \arg\max(\nu_n(X)\ln\theta + (n-\nu_n(X))\ln(1-\theta))$$

Якщо прирівняти похідну до 0 $\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial\theta} = 0$, то ОМВ

$$\frac{\nu_n(X)}{n} = \hat{\theta}_n.$$

Приклади обчислення ОМВ

Схема Бернуллі

$$\arg\max \ln L(X,\theta) = \arg\max \ln \theta^{\nu_n(X)}(1-\theta)^{n-\nu_n(X)}$$

$$= \arg\max(\nu_n(X)\ln\theta + (n-\nu_n(X))\ln(1-\theta))$$

Якщо прирівняти похідну до 0 $\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial\theta} = 0$, то ОМВ

$$\frac{\nu_n(X)}{n} = \hat{\theta}_n.$$

Приклади обчислення ОМВ

Пуассонівська вибірка

$$\ln L(X,\theta) = \ln \prod_{k=1}^{n} \frac{\theta^{\xi_k}}{\xi_k!} e^{-\theta}$$

$$= \ln\theta \sum_{k=1}^{n} \xi_k - n\theta + \ln h(X),$$

Якщо прирівняти похідну до 0 $\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial\theta} = 0$, то ОМВ

$$\hat{\theta}_n = \arg\max \ln L(X,\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k = \hat{\mu}_n.$$

Приклади обчислення ОМВ

Пуассонівська вибірка

$$\ln L(X,\theta) = \ln \prod_{k=1}^{n} \frac{\theta^{\xi_k}}{\xi_k!} e^{-\theta}$$

$$= \ln\theta \sum_{k=1}^{n} \xi_k - n\theta + \ln h(X),$$

Якщо прирівняти похідну до 0 $\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial\theta} = 0$, то ОМВ

$$\hat{\theta}_n = \arg\max \ln L(X,\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k = \hat{\mu}_n.$$

Приклади обчислення ОМВ

Пуассонівська вибірка

$$\ln L(X,\theta) = \ln \prod_{k=1}^{n} \frac{\theta^{\xi_k}}{\xi_k!} e^{-\theta}$$

$$= \ln\theta \sum_{k=1}^{n} \xi_k - n\theta + \ln h(X),$$

Якщо прирівняти похідну до 0 $\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial\theta} = 0$, то ОМВ

$$\hat{\theta}_n = \arg\max \ln L(X,\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k = \hat{\mu}_n.$$

Приклади обчислення ОМВ

Показникова вибірка (зміщеність ОМВ)

$$\ln L(X,\theta) = \ln \prod_{k=1}^{n} \theta exp(-\theta \xi_k) = n \ln \theta - \theta \sum_{k=1}^{n} \xi_k,$$

$$\hat{\theta}_n = \arg\max \ln L(X,\theta) = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \xi_k} = \frac{1}{\hat{\mu}_n}.$$

Оскільки $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ має розподіл Ерланга з параметрами n, θ, то

$$\mathbf{M}_\theta \hat{\theta}_n = \int_0^{\infty} \frac{n}{x} \theta \frac{(\theta x)^{n-1}}{(n-1)!} exp(-\theta x)\, \mathrm{d}x = \theta \frac{n}{n-1} \neq \theta \quad \forall n \geq 1 \forall \theta > 0.$$

Отже, загалом не можна розраховувати на незсунутість ОМВ.

Приклади обчислення ОМВ

Показникова вибірка (зміщеність ОМВ)

$$\ln L(X,\theta) = \ln \prod_{k=1}^{n} \theta exp(-\theta\xi_k) = n\ln\theta - \theta\sum_{k=1}^{n}\xi_k,$$

$$\hat{\theta}_n = \arg\max \ln L(X,\theta) = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\xi_k} = \frac{1}{\hat{\mu}_n}.$$

Оскільки $\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ має розподіл Ерланга з параметрами n, θ, то

$$\mathbf{M}_\theta\hat{\theta}_n = \int_0^\infty \frac{n}{x}\theta\frac{(\theta x)^{n-1}}{(n-1)!} exp(-\theta x)\,\mathrm{d}x = \theta\frac{n}{n-1} \neq \theta \quad \forall n \geq 1 \forall\theta > 0.$$

Отже, загалом не можна розраховувати на незсунутість ОМВ.

Консистентність ОМВ

Теорема (про консистентність ОМВ)

За певних умов оцінка максимальної вірогідності $\hat{\theta}_n$ параметра θ за кратною вибіркою X існує і є консистентною.

Асимптотична нормальність і ефективність ОМВ

У даному розділі припускатимемо, що $\Theta \subset \mathbf{R}^1$

Теорема (про асимптотичну нормальність ОМВ)

Нехай $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ – кратна вибірка, щільність одного спостереження $f(y, \theta)$ задовольняє умови регулярності та тричі неперервно диференційовна за θ, причому відповідні похідні мажоруються за модулем інтегровною величиною η:

$$\left|\frac{\partial^{(i)} \ln f(\xi_1, \theta)}{\partial^{(i)} \theta}\right| \leq \eta, i = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{M}_{\theta_0} \eta < \infty.$$

Теорема (продовження)

Якщо ОМВ $\hat{\theta}_n$ невідомого параметра θ_0 є розв'язком рівняння максимальної вірогідності, то ця оцінка є асимптотично нормальною:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{W} \zeta \cong N(0, 1/i(\theta_0)), \quad n \to \infty,$$

де асимптотична дисперсія визначається кількістю інформації за Фішером, що міститься в одному спостереженні:

$$i(\theta) \equiv \mathbf{M}_\theta(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\xi_1, \theta))^2$$

Зауваження

За теоремою про адитивність інформації за Фішером повна інформація за Фішером у вибірці дорівнює

$$I_n(\theta) = ni(\theta),$$

тому з даної теореми випливає асимптотична ефективність ОМВ, оскільки

$$\frac{1}{ni(\theta_0)} = \frac{1}{I_n(\theta_0)}$$

збігається з найменшою можливою межею для дисперсій незміщених оцінок параметра θ в теоремі про нерівність та критерій Крамера – Рао.

ПИТАННЯ?