1.

Поняття прямої суми.

Нехай V – век. пр. над полем F

Озн. 1 Век. пр. V наз. прямою сумою своїх підпросторів $L_1, L_2, \ldots, L_k$, якщо $\forall$ век. $x \in V$ можна розкласти в суму $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, де $x_i \in L_i$, $i = \overline{1,k}$ і цей розклад єдиний.

Позн. $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$.

Озн. 2 Век. пр. V наз. прямою сумою своїх підпросторів $L_1, L_2, \ldots, L_k$, якщо викон. 2 умови:

1) $V = L_1 + L_2 + \ldots + L_k$;

2) $\forall i = \overline{1,k}: \; L_i \cap (L_1 + L_2 + \ldots + L_{i-1} + L_{i+1} + \ldots + L_k) = \{\theta\}$.

Заув. У випадку $k=2$ друга умова має вигляд: $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Теорема Два означення прямої суми еквівалентні.

2.

Визначник Грама та його властивості.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – система векторів в евкл. пр. V.

Матриця

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \begin{pmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \ldots & (a_1,a_m) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \ldots & (a_2,a_m) \\ - & - & - & - \\ (a_m,a_1) & (a_m,a_2) & \ldots & (a_m,a_m) \end{pmatrix}$$

наз. матрицею Грама системи векторів $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Визначник матриці Грама наз. визначником Грама системи векторів $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ і позн.

$$g(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \det G(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

Припустимо в пр. V зафіксовано деякий ортонормований базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, A – матр., рядками якої є координати векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$ в цьому базисі:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ - - - \\ \text{———} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_m \end{array}.$$

Тоді $G(a_1, a_2, \dots, a_m) = A A^T$.

<u>Теорема</u> (про визначник Грама)

Нехай система векторів $b_1, b_2, \dots, b_m$ одержана ортогоналізацією системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$. Тоді

$g(a_1, a_2, \dots, a_m) = g(b_1, b_2, \dots, b_m)$.

<u>Наслідок 1</u> Для $\forall$ системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ в евкл. пр. V:

$g(a_1, a_2, \dots, a_m) \geq 0$.

Причому $g(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0 \Longleftrightarrow$ вектори $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ лінійно залежні.

<u>Наслідок 2</u> (нерівність Адамара)

Нехай
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} -$$

квадратна матриця з дійсними елементами.

Тоді $(\det A)^2 \leq \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2$.

3. $a_1=(2;-1;4;2)$ $a_2=(3;0;6;1)$, $a_3=(-1;2;-2;-3)$, $a_4=(1;1;2;-1)$

$L=\langle a_1,a_2,a_3,a_4\rangle$ $L=\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}_4\}$.

$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=0$

$$\begin{cases}2\alpha_1-\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4=0\\ 3\alpha_1+6\alpha_3+\alpha_4=0\\ -\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3-3\alpha_4=0\\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3-\alpha_4=0\end{cases}\quad \begin{pmatrix}2&-1&4&2\\3&0&6&1\\-1&2&-2&-3\\1&1&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\0&-3&0&4\\0&3&0&-4\\0&-3&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\0&-3&0&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{array}{c}\begin{matrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\end{matrix}\\ \sim\begin{pmatrix}1&0&2&\frac{1}{3}\\0&1&0&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}\end{array}$$

α_3,α_4 - вільні

ФСР:

α_1	α_2	α_3	α_4
-1	4	0	3
-2	0	1	0

$$\begin{cases}-x_1+4x_2+3x_4=0\\ -2x_1+x_3=0\end{cases}$$

4. $$A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac12&\frac12\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac12&\frac12\\0&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{-\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\quad |A-\lambda E|=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt2}{2}-\lambda&\frac12&\frac12\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac12-\lambda&\frac12\\0&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{-\sqrt2}{2}-\lambda\end{vmatrix}=-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\sqrt2}{2}-\lambda&\frac12\\\frac{-\sqrt2}{2}&\frac12\end{vmatrix}+$$

$$+\left(-\frac{\sqrt2}{2}-\lambda\right)\cdot\begin{vmatrix}\frac{\sqrt2}{2}-\lambda&\frac12\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac12-\lambda\end{vmatrix}=-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\right)+\left(\frac{-\sqrt2}{2}-\lambda\right)\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\lambda}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda}{\sqrt2}+\lambda^2\right)=-\lambda^3+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda}{2}-1=-\frac12(\lambda+1)(2\lambda^2-3\lambda+2).\quad \lambda_1=-1.$$

$$\lambda_{2,3}=\frac{3\pm i\sqrt7}{4}.$$

Для $\lambda_1=-1$: $$(A+E)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2+2}{2}&\frac12&\frac12\\\frac{-\sqrt2}{2}&\frac32&\frac12\\0&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{-\sqrt2+2}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&\frac{-\sqrt2+2}{2}&\frac{-\sqrt2+2}{2}\\\frac{-\sqrt2}{2}&\frac32&\frac12\\0&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{-\sqrt2+2}{2}\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&\frac{-\sqrt2+2}{2}&\frac{-\sqrt2+2}{2}\\0&1&\sqrt2-1\\0&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{-\sqrt2+2}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&\frac{-\sqrt2+2}{2}&\frac{-\sqrt2+2}{2}\\0&1&\sqrt2-1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\sqrt2+3\\0&1&\sqrt2-1\end{pmatrix}$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
$2\sqrt2-3$	$1-\sqrt2$	1

$a_1=(2\sqrt2-3;\ 1-\sqrt2;1)$

$\|a_1\|=\sqrt{21-14\sqrt2}$

$$c_1=\frac{a_1}{\|a_1\|}=\frac17\cdot\left(\sqrt7-\sqrt{14};\ -\sqrt7;\ \sqrt7+\sqrt{14}\right).$$

$$\lambda_2 = \frac{3+i\sqrt{7}}{4}: \quad (A-\lambda_2 E) = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}-i\sqrt{7}-3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-i\sqrt{7}-1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-2\sqrt{2}-i\sqrt{7}-3}{4} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{7}+i\sqrt{14}-2}{12} & \frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{7}+i\sqrt{14}-2}{12} \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}-2i\sqrt{7}+i\sqrt{14}-2}{12} & \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{7}+i\sqrt{14}+7}{12} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-2\sqrt{2}-i\sqrt{7}-3}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{7}+i\sqrt{14}-2}{12} & \frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{7}+i\sqrt{14}-2}{12} \\ 0 & 1 & \frac{-3\sqrt{2}-i\sqrt{14}-4}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-\sqrt{2}+2i\sqrt{7}+i\sqrt{14}-2}{} \\ 0 & 1 & \frac{-3\sqrt{2}-i\sqrt{14}-4}{4} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{\sqrt{2}-2i\sqrt{7}-i\sqrt{14}+2}{4}\right)\cdot x_3 \\ x_2 &= \left(\frac{3\sqrt{2}+i\sqrt{14}+4}{4}\right)\cdot x_3 \end{aligned}$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
$\frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{7}-i\sqrt{14}+2}{4}$	$\frac{3\sqrt{2}+i\sqrt{14}+4}{4}$	1

$$a = \left(\frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{7}-i\sqrt{14}+2}{4};\ \frac{3\sqrt{2}+i\sqrt{14}+4}{4};\ 1\right) = \left(\frac{\sqrt{2}+2}{4};\ \frac{3\sqrt{2}+4}{4};\ 1\right) +$$

$$+\, i\left(\frac{-2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{4};\ \frac{\sqrt{14}}{4};\ 0\right) = a_2 + i\cdot a_3.$$

$$a_2 = \left(\frac{\sqrt{2}+2}{4};\ \frac{3\sqrt{2}+4}{4};\ 1\right),\quad a_3 = \left(\frac{-2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{4};\ \frac{\sqrt{14}}{4};\ 0\right).$$

$$c_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}+2}{4};\ \frac{3\sqrt{2}+4}{4};\ 1\right)}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{14+7\sqrt{2}}} = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}};\ \frac{4+3\sqrt{2}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}};\ \frac{4}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}}\right)$$

$$c_3 = \frac{a_3}{\|a_3\|} = \left(\frac{-2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}};\ \frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}};\ 0\right). \quad (c_1\perp c_2,\ c_1\perp c_3,\ c_2\perp c_3)$$

$$Q = (c_1|c_2|c_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}-\sqrt{14}}{7} & \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}} & \frac{-2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}} \\ \frac{-\sqrt{7}}{7} & \frac{4+3\sqrt{2}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}} & \frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}} \\ \frac{\sqrt{7}+\sqrt{14}}{7} & \frac{4}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = Q^{T},\quad B = Q^{-1}AQ$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}-\sqrt{14}}{7} & \frac{-\sqrt{7}}{7} & \frac{\sqrt{7}+\sqrt{14}}{7} \\ \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{14}+7\sqrt{2}} & \frac{4+3\sqrt{2}}{2\sqrt{14}+7\sqrt{2}} & \frac{4}{2\sqrt{14}+7\sqrt{2}} \\ \frac{-2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{2\sqrt{14}+7\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{14}+7\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}-\sqrt{14}}{7} & \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{14}+7\sqrt{2}} & \frac{-2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{2\sqrt{14}+7\sqrt{2}} \\ \frac{-\sqrt{7}}{7} & \frac{4+3\sqrt{2}}{2\sqrt{14}+7\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{14}+7\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{7}+\sqrt{14}}{7} & \frac{4}{2\sqrt{14}+7\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{7}}{4} \\ 0 & \frac{-\sqrt{7}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix},$$