Поняття підпростору

Нехай V – вект. пр. над полем F.

<u>Озн.</u> Непорожня підмножина L пр. V наз. підпростором, якщо викон. 2 умови:

а) якщо $a, b \in L \Rightarrow a+b \in L$;

б) якщо $a \in L$, $\alpha \in F \Rightarrow \alpha a \in L$.

Дві умови підпростору можна замінити однією:
якщо $a, b \in L$, $\alpha, \beta \in F \Rightarrow \alpha a + \beta b \in L$.

Елементарні властивості підпростору.

1) Нехай L – підпростір пр. V над полем F, $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$,
$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F \Rightarrow \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n \in L$.

2) В $\forall$ підпр. міститься нуль-вектор θ.

[Дійсно, нехай L – підпр. і $L \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in L$
і $\forall \alpha \in F$: $\alpha x \in L$. $\alpha := 0$. Тоді $0 \cdot x = \theta \in L$.]

3) Якщо $x \in L$, то $-x \in L$

[$x \in L \Rightarrow (-1)x \in L \Rightarrow -x \in L$.]

4) Підпростір L є вект. пр. над полем F.

[Дійсно, мн. L замкнена відносно опер. простору V, бо L,
якщо $x \in L \Rightarrow -x \in L$.
Аксіоми вект. пр. викон. в L, оскільки вони викон. в пр. V.
Таким чином, підпр. L вект. пр. V над полем F є вект. пр.
над полем F відносно операцій пр. V]

Тому підпростір має базис і для підпр. $\exists$ поняття розмірності.
Якщо V – скінч. вим. пр., то в ньому не може бути
лін. нез. сист. векторів будь-якої довжини.
Якщо L – підпр. пр. V, то базис підпр. L є лін. незал. сист. векторів
в пр. V, а тому підпр. L також скінченовимірний.
Оск. за теор. 2 про базис, базис L як лін. незал. систему век.
можна доповнити до базису V, то обов'язково $\dim L \le \dim V$.

В $\forall$ пр. V $\exists$ тривіальні підпростори – нульовий $\{\Theta\}$,
який складається з Θ, і сам V. При цьому, оск. Θ
утв. лін. зал. систему век., то $\dim\{\Theta\} = 0$.

Поняття ортогонального доповнення підпростору.

Озн. Ортогональним доповненням підпростору M евкл. пр-ру V наз. множина $M^{\perp} = \{x \in V \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in M\}$.

Іншими словами, ортогональне доповнення підпростору M — це множина всіх векторів, ортогональних до всіх векторів підпростору M.

Властивості ортогонального доповнення

① Ортогональне доповнення підпростору M є підпростором.

② Припустимо $a_1, a_2, \dots, a_k$ – базис підпростору M.
Вектор $b \in V$ належить ортогональному доповненню $M^\perp \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b \perp a_i, \ \forall i = \overline{1,k}$.

③ Для будь-якого підпростору M виконується

$$M \cap M^\perp = \{\theta\}.$$

④ Припустимо M – підпростір скінченно вимірного евклідового простору V. Тоді $V = M \oplus M^\perp$.

Таким чином, якщо M – підпростір скінч. вимірного евкл. пр. V, то кожен вектор $x \in V$ однозначно можна розкласти в суму $x = y + z$, де $y \in M$, $z \in M^\perp$.

Вектор $y \in M$ наз. ортогональною проекцією вектора x на підпростір M.
$z \in M^\perp$ наз. ортогональною складовою вектора x відносно підпростору M.

Заув. Якщо $\dim V = n$, $\dim M = k \Rightarrow \dim M^{\perp} = n-k$.

5) Для $\forall$ підпросторів M_1, M_2 евкл. пр. V викон:

$$(M_1+M_2)^{\perp} = M_1^{\perp} \cap M_2^{\perp}$$

6) Нехай M - підпр. скінч. вим. евкл. пр. V. Тоді $M = (M^{\perp})^{\perp}$.

7) Для $\forall$ підпр. M_1, M_2 евкл. пр. V: $(M_1 \cap M_2)^{\perp} = M_1^{\perp} + M_2^{\perp}$.

8) В $\forall$ евкл. пр. V: $V^{\perp} = \{0\}$, $\{0\}^{\perp} = V$.

№3

$e_1=(1,2,-1,0)$ $e_2=(1,-1,1,1)$ $e_3=(-1,2,1,1)$ $e_4=(-1,-1,0,1)$

$e_1'=(2,1,0,1)$ $e_2'=(0,1,2,2)$ $e_3'=(-2,1,1,2)$ $e_4'=(1,3,1,2)$

n векторів з n-мірного простору утворюють його базис тоді і тільки тоді коли вони є лінійно незалежними.

Перевіримо це. Складемо матриці з цих векторів, і, якщо, їх ранг == 4 тоді уся система є лін. нез.

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\1&-1&1&1\\-1&2&1&1\\-1&-1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&-3&2&1\\0&4&0&1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&1&-1&1\\0&0&-1&4\\0&0&4&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&1&-1&1\\0&0&-1&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ система з вект. e_1, e_2, e_3, e_4 лін-незал.

$$\begin{pmatrix}2&1&0&1\\0&1&2&2\\-2&1&1&2\\1&3&1&2\end{pmatrix}\sim\cancel{\begin{matrix}0&1&2&2\\2&1&0&1\end{matrix}}\begin{pmatrix}1&3&1&2\\0&1&2&2\\0&-5&-2&-3\\0&2&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&1&2\\0&1&2&2\\0&0&8&7\\0&0&-3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&1&2\\0&1&2&2\\0&0&-3&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ система з векторів e_1', e_2', e_3', e_4' лін. незалежна

Треба знайти матрицю переходу від e до e'

$X = TX'$ де $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ $X'=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}$ відповідно в базисі e та e'

Нехай вектори e і e' задані в деякому базисі i

Тоді $T_{e\to e'} = T_{e\to i}\cdot T_{i\to e'}$

$T_{i\to e} = (T_{e\to i})^{-1}$ Отже, треба знайти обернену матрицю до $T_{i\to e}$. Матриця $T_{i\to e'} = (e_1' | e_2' | e_3' | e_4')$

$T_{i\to e} = (e_1|e_2|e_3|e_4) = \begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$ $\qquad T_{i\to e}|E \longrightarrow E|T_{e\to i}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&-1&-1&1&0&0&0\\2&-1&2&-1&0&1&0&0\\-1&1&1&0&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\-2\mathrm{I}\\+\mathrm{I}\\ \\\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&-1&-1&1&0&0&0\\0&-3&4&1&-2&1&0&0\\0&2&0&-1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\+3\mathrm{IV}\\-2\mathrm{IV}\\ \\\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&-1&-1&1&0&0&0\\0&0&7&4&-2&1&0&3\\0&0&-2&-3&1&0&1&-2\\0&1&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}+3\mathrm{III}\\ \\ \\ \\\end{matrix}\sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&-1&-1&1&0&0&0\\0&0&1&-5&1&1&3&-3\\0&0&-2&-3&1&0&1&-2\\0&1&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\+2\mathrm{II}\\ \\\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&-1&-1&1&0&0&0\\0&0&1&-5&1&1&3&-3\\0&0&0&-13&3&2&7&-8\\0&1&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\:13\\ \\\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&-1&-1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&0&1\\0&0&1&-5&1&1&3&-3\\0&0&0&1&-\frac{3}{13}&-\frac{2}{13}&-\frac{7}{13}&\frac{8}{13}\end{array}\right)\begin{matrix}+\mathrm{IV}\\-\mathrm{IV}\\+5\mathrm{IV}\\ \\\end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&-1&0&10/13&-2/13&-7/13&8/13\\0&1&1&0&3/13&2/13&7/13&5/13\\0&0&1&0&-2/13&3/13&4/13&1/13\\0&0&0&1&-3/13&-2/13&-7/13&8/13\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&3/13&2/13&-6/13&5/13\\0&1&0&0&5/13&-1/13&3/13&4/13\\0&0&1&0&-2/13&3/13&4/13&1/13\\0&0&0&1&-3/13&-2/13&-7/13&8/13\end{array}\right)$$

Наша шукана матриця переходу рівна $T_{e\to i}\cdot T_{i\to e'}$

$$=\begin{pmatrix}3/13&2/13&-6/13&5/13\\5/13&-1/13&3/13&4/13\\-2/13&3/13&4/13&1/13\\-3/13&-2/13&-7/13&8/13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Отже, наша матриця переходу від e до e' має вигляд

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

№ 4

$e_1, e_2 .. e_n$ – ортонорм. базис простору.

Лінійне перетворення φ в базисі f $\begin{matrix}f_1 = e_1-e_2-e_3\\ f_2 = e_1-e_2\\ f_3 = e_1\end{matrix}$ задається матр. A: $\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ Знайти спр. опер. φ^*.

За означенням $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$

$[\varphi^*]_{f_1,f_2,f_3} = ?$

Позначимо $[\varphi]_{e_1, e_2} = C$, $T = (t_1|t_2|t_3)$ - матриця переходу $e \to t$

$[\varphi^*]_{t_1, t_2} = B$

$$A = T^{-1}CT \Rightarrow C = TAT^{-1}$$

$$[\varphi^*]_{e_1, e_2} = C^T \qquad B = T^{-1}C^T T$$

1) Знайдемо C.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} \Rightarrow \begin{array}{c} \quad T \qquad\qquad E \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \quad E \qquad\qquad T^{-1} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$TA \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = C$$

2) $$C^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3) $$B = T^{-1} \cdot C^T \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -7 & -2 & -1 \\ 11 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Отже шуканою матрицею буде: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -7 & -2 & -1 \\ 11 & 8 & 5 \end{pmatrix}$