БІЛЕТ № 4

1. (7 балів) Математичне сподівання для дискретної випадкової величини та властивості.
2. (8 балів) Генератриса та її властивості
3. (5 балів) Формула повної ймовірності. Авто експлуатується двома особами: чоловіком та жінкою по черзі. Ймовірність ДТП при керуванні авто чоловіком є 0.1, а для жінки – 0.05. Відомо, що сталося дорожня пригода. Яка ймовірність,що за кермом був чоловік?
4. (10 балів) Випадкова величина має щільність $f(x) = \exp(-2|x|)$. Визначити $M\max(\xi,2)$; розподіл та математичне сподівання величин $\eta_1 = \xi^2$, $\eta_2 = [\xi]$.
5. (10 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – вибірка з нормального розподілу з параметрами $(\theta, 1)$. Чи є $\hat{\theta} = \bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum \xi$ ефективною оцінкою параметра θ? Дослідити її на незміщеність та консистентність.

БІЛЕТ №5

1. (7 балів) Коефіцієнт кореляції та його властивості.
2. (8 балів) Критерії перевірки для параметрів нормального розподілу. Помилки 1-го та 2-го роду.
3. (5 балів) В першій урні знаходиться 4 білих та 5 чорних куль, у другій – 3 білих та 7 чорних куль, а в третій – 2 білих та 6 чорних. Навмання обрано урну, а з неї витягнуто кульку. Яка ймовірність того, що вона біла?
4. (10 балів) Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами m і σ^2. Обчислити всі центральні моменти для ξ.
5. (10 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – вибірка з нормального розподілу з параметрами (0, θ). Чи є $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ ефективною оцінкою параметра θ? Дослідити на незміщеність та консистентність.

БІЛЕТ № 9

1. (5 балів) Визначення ймовірнісного простору.
2. (5 балів) Абсолютно неперервні випадкові величини. Щільність, її властивості.
3. (10 балів) Закон великих чисел у формі Хінчина.
4. (7 балів) З відрізка [-1,2] навмання взяли два числа. Яка ймовірність того, що їх сума більша за 1, а добуток менший.
5. (8 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – вибірка з рівномірного розподілу на відрізку [a,b]. Дослідити на незміщеність та консистентність оцінку $\hat{\theta} = \max\{\xi_i\}$ параметра b.

БІЛЕТ № 11

1. (8 балів) Формула включення та виключення. Задача про листи.

2. (7 балів) Різні види збіжності та їх зв'зок. Довести, що із збіжності в середньому-квадратичному випливає збіжність за ймовірністю.

3.(7 балів) З відрізка [0,2] навмання взяли два числа. Яка ймовірність того, що їх сума більша за 1, а добуток менший.

4.(8 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – незалежні випадкові величини з рівномірним розподілом на відрізку [a,b]. Знайти функцію розподілу та щільність для $\max\{\xi_i\}$ та підрахувати матем. сподівання та дисперсію.

5. (10 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – вибірка із розподілу

$$P(k;\theta) = C_{r-1+k}^{r-1}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k, \ k = 0, 1, \ldots,$$

де $\theta > 0$, r – відоме. Знайти оцінку параметра θ методом максимальної вірогідності. Чи буде вона ефективною?

семестр

БІЛЕТ № 12

1. (5 балів) Властивості ймовірності (множина значень об'єднання двох подій)
2. (10 балів) Центральна гранична теорема.
3. (7 балів) Нехай X і Y відповідно сума і різниця очок, що з'явилися при підкиданні двох гральних кубиків. Знати сумісний розподіл та довести, що дані величини залежні, але некорельовані.
4. (8 балів) Випадкова величина ξ має розподіл Коші $f(x) = 1/(\pi(1+x^2))$. Знайти а) $P\{|\xi| > 1\}$, б) $M(|\xi|/(1+\xi^2))$.
5. (10 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – вибірка із розподілу Релея, тобто із щільністю

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta}\exp\{-\frac{x^2}{2\theta}\}, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$

Знайти кількість інформації за Фішером для вибірки. Для оцінки $\hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$ перевірити, чи досягається рівність в нерівності Крамера-Рао.

Затверджено

БІЛЕТ № 13

1.(7 балів) Коваріація та її властивості.
2. (8 балів) Закон великих чисел у формі Чебишева.
3. (5 балів) Група з 24 студентів, серед яких 5 відмінників, довільно розбивається порівну на дві групи. Знайти ймовірність того, що три відмінники будуть в першій групі.
4. (10 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – незалежні випадкові величини з показниковим розподілом з параметром b. Знайти середнє значення та дисперсію для $\min\{\xi_i\}$.

5. (10 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – вибірка із розподілу з щільністю

$$f(x;m,\theta) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < m, \\ \frac{1}{\theta}\exp\{-\frac{1}{\theta}(x-m)\}, & \text{якщо } x \geq m, \end{cases}$$

$\theta > 0$, m – відоме. Чи є $\hat{\theta} = \overline{\xi} - m$ незміщеною, конзистентною, ефективною оцінкою параметра θ ?

БІЛЕТ № 14

1. (7 балів) Нерівність Чебишева.
2. (8 балів) Характеристична функція. Теорема про основні властивості.
3. (7 балів) Нехай X – максимальне значення, що з'явилося при підкиданні двох гральних кубиків. Знайти для нього розподіл, математичне сподівання та дисперсію.
4. (8 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – вибірка з рівномірним на $[a,b]$ розподілом. Знайти оцінки параметрів a і b методом моментів.
5. (10 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – вибірка із логарифмічно нормального розподілу із щільністю

$$f(x;\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2 x}} \exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma_0^2}\right\}, & \text{якщо} \quad x > 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad x \le 0, \end{cases}$$

$\sigma_0 > 0$ -відоме. Чи є $\hat{\theta} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \xi_i$ ефективною оцінкою параметра μ? Дослідити дану оцінку на незміщеність.

БІЛЕТ № 16

1. (8 балів) Властивості ймовірності (напівадитивність, неперервність).

2. (7 балів) Незміщені оцінки. Конзистентні оцінки. Достатні умови конзистентності.

3. (7 балів) Класичне означення ймовірності. Кидають 12 гральних кубиків. Яка ймовірність того, що кожне число з'явиться 2 рази?

4. (8 балів) Дисперсія межі міцності проти розриву волокна становить 35.63 фунт^2. Очікується, що внесені в технологічний процес зміни зменшать зазначену дисперсію. Зареєстровано такі значення міцності на розрив (у фунтах, 1 фунт=453.6 г): 151, 156, 147, 153, 155, 148, 160, 149, 156, 161, 154, 162, 163, 149, 150. Чи привела зміна технологічного процесу до зменшення дисперсії з довірчою йм. 0.95.

5.(10 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – вибірка із біноміального розподілу

$$P(k;p) = C_m^k p^k \left(1-p\right)^{m-k}, \ k = 0, 1, \dots, m.$$

де m – відоме. Знайти оцінку параметра p методом максимальної вірогідності. З'ясувати, чи є оцінка $\hat{p}$ незміщеною, конзистентною, ефективною оцінкою параметра p.

БІЛЕТ № 17

1. (7 балів) Теорема добутку. Узагальнена теорема добутку.
2. (8 балів) Теорема про функцію впливу (внеску) кратної вибірки.
3. (7 балів) Дві особи вирішили зустрітись між восьмою та дев`ятою годинами вечора. Чекати один одного домовились не більше 10 хвилин. Яка ймовірність їх зустрічі?
4. (8 балів) Випадкова величина зосереджена на відрізку [0,1] і її щільність на ньому дорівнює cx^7. Знайти сталу c, функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію.
5. (10 балів) У таблиці наведено дані про колонії бактерій, що містяться у трьох тістечок.

Вид тістечка	Розміри колонії			Разом
	Малі	Середні	Великі	
Еклер	92	37	46	175
Наполеон	53	15	19	87
Горіхове	75	19	12	106
Разом	220	71	77	368

Чи можна стверджувати, що існує залежність між видами тістечок і розмірами бактеріальних колоній, що містяться в них з довірчою йм. 0,95?

БІЛЕТ № 18

1. (8 балів) Мультиплікативна властивість математичного сподівання для дискретних випадкових величин.
2. (7 балів) Обчислення характеристичної функції для константи та для розподілу Пуассона.
3. (8 балів) Фомула Байєса. Дві фабрики виробляють деяку продукцію. Частина браку на першій фабриці становить 3%, на другій – 5%. Навмання обрано фабрику і придбано 100 одиниць продукції. Яка ймовірність того, що серед 100 виробів буде 2 бракованих?
4. (7 балів) Нехай ξ набуває значень ± 1, ± 2 кожне з ймовірністю ¼, а $\eta=\xi^2$. Знайти сумісний розподіл η і ξ. Довести, що вони залежні, але некорельовані.
5. (10 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – вибірка з розподілу Релея, тобто із щільністю з $f(x,\theta)=\frac{x}{\theta}\exp\{-\frac{x^2}{\theta}\}$, якщо $x>0$.

Знайти оцінку методом максимальної вірогідності для параметра θ. Дослідити її на незміщеність, консистентність та ефективність.

БІЛЕТ № 19

1. (8 балів) Нерівності Коші-Буняковського і Шварца.
2. (8 балів) Теорема про центрованість функції впливу.
3. (6 балів) Тільки один з N ключів підходить до замка. Яка ймовірність того, що буде перебрано саме K ключів до того, як буде знайдено потрібний ключ?
4. (9 балів) Колесо вагону має тріщину на зовнішньому краю. Нехай ξ – висота тріщини над землею при випадковій зупинці вагону. Знайти функцію розподілу, щільність та середнє для ξ.
5. (9 балів) 10 школярів протягом літніх канікул перебували в спортивному таборі. На початку сезону і після його завершення у них визначали місткість легенів(у мілілітрах). За результатами вимірювань необхідно визначити, чи істотно змінився цей показник під впливом інтенсивних фізичних вправ (довірча йм. 0,95).

Школяр	До	Після	Школяр	До	Після
1	3400	3800	6	3100	3200
2	3600	3700	7	3200	3200
3	3000	3300	8	3400	3300
4	3500	3600	9	3200	3500
5	2900	3100	10	3400	3600

БІЛЕТ № 21

1. (7 балів) Теорема про найбільше ймовірне значення для біноміального розподілу.
2. (8 балів) Теорема про мультиплікативну властивість для математичного сподівання.
3. (7 балів) Знайти ймовірність того, що в k цифр, кожна з яких вибрана навмання (вибірка з поверненням):а) не входить 9; б) не входить 8; в) не входить ні 9, ні 8; г) не входить або 9, або 8.
4. (8 балів) Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром λ. Знайти розподіл, математичне сподівання та дисперсію для $\eta = \xi^{\alpha}$, $\alpha>0$.
5. (10 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – вибірка з біноміального розподілу з параметрами N і p. Чи буде $\hat{p} = \frac{1}{nN}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ незміщеною та консистентною оцінкою параметра p? Дослідити дану оцінку на ефективність.

БІЛЕТ № 22

1. (5 балів) Формула Байєса. Приклад.

2. (10 балів) Закон великих чисел у формі Хінчина.

3. (8 балів) У результаті перевірки 500 контейнерів зі скляними виробами було добуто такі дані про кількість пошкоджених виробів:

i	n_i	i	n_i
0	199	5	3
1	169	6	1
2	87	7	1
3	31	8 і більше	0
4	9	Разом	500

(i – число пошкоджених виробів, n_i– к-ть контейнерів з i пошкодженими виробами). Чи можна вважати, що к-ть пошкоджених виробів, яка припадає на контейнер, підпорядковується закону Пуассона з довірчою ім. 0.95.

4. (8 балів) Нехай ξ та η – незалежні випадкові величини рівномірно розподілені на [0,2]. Знайти функцію розподілу та щільність для $\eta+\xi$.

5. (9 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – вибірка з щільністю

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}\exp\{-\frac{x}{\theta}\},$$

якщо $x>0$. Чи буде

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

ефективною, незміщеною і консистентною оцінкою параметра θ?

БІЛЕТ № 23

1. (7 балів) Геометричний розподіл. Математичне сподівання та дисперсія для нього.
2. (8 балів) Теорема про центрованість функції впливу.
3. (5 балів) З 14 стрільців п'ять влучають у мішень з ймовірністю 0.8, сім – з ймовірністю 0,7 і два стрільці з ймовірністю 0.5. Навмання обраний стрілець зробив постріл, але не влучив у мішень. До якої групи найбільш ймовірно він належить?
4. (10 балів) Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами a і σ^2. Знайти $M(\xi-a)^n$, для будь-якого $n>0$.
5. (10 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – вибірка з біноміального розподілу з параметрами N і p. Чи буде $\hat{p} = \dfrac{1}{nN}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ ефективною, незміщеною та консистентною оцінкою параметра p?

БІЛЕТ № 24

1. (7 балів) Формула повної ймовірності. Приклад.
2. (8 балів) Метод Монте-Карло.
3. (6 балів) В квадрат з вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) навмання кинута точка. Нехай (x,y) – її координати. Знайти для 0<z<1: а) $P(|x-y|<z)$; б) $P(xy<z)$;
4. (9 балів) Нехай ξ та η – незалежні випадкові величини рівномірно розподілені на [0,1]. Знайти функцію розподілу та щільність для $\eta+\xi$.
5. (10 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – вибірка з щільністю $f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}\exp\{-\frac{x}{\theta}\}$, якщо x>0. Знайти кількість інформації за Фішером $I(\theta)$. Чи буде $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ ефективною оцінкою параметра θ?

БІЛЕТ № 26

1. (5 балів) Схема випробувань Бернуллі.

2. (8 балів) Показниковий розподіл, його матем. сподівання та дисперсія. Задача про час безвідмовної роботи.

3. (8 балів) В роки другої світової війни на Лондон впало 537 штаків-снарядів. Уся територія Лондона була розподілена на 576 ділянок площиною 0.25 км^2. Нижче наведено числа ділянок n_k, на які впало k снарядів.

k	0	1	2	3	4	5 і більше
n_k	229	211	93	35	7	1

Чи узгоджуються ці дані про те, що число снарядів, які впали на кожну ділянку, має розподіл Пуассона з параметром $\lambda = 0.9$ (Прийняти рівень значущості 0.1.)

4. (9 балів) Колесо вагону має тріщину на зовнішньому краю. Нехай ξ – висота тріщини над землею при випадковій зупинці вагону. Знайти функцію розподілу, щільність та середнє для ξ.

5. (10 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – вибірка із логарифмічно нормального розподілу із щільністю

$$f(x;\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}\,x}\exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma_0^2}\right\}, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$

$\sigma_0 > 0$ -відоме. Знайти оцінку параметра μ методом моментів. Дослідити дану оцінку на незміщеність.

5. (10 балів) Нехай ξ_1, $\xi_2,\dots\xi_n$ – вибірка з щільністю $f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}\exp\{-\frac{x-m}{\theta}\}$, якщо x>m. Знайти оцінку параметра θ методом моментів. Дослідити її на незміщеність та консистентність.

3. (7 балів) Нехай X – максимальне значення, що з`явилося при підкиданні двох гральних кубиків. Знайти для нього розподіл, математичне сподівання та дисперсію.

4. (8 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – вибірка з рівномірним на $[a,b]$ розподілом. Знайти оцінки параметрів a і b методом моментів.

5. (10 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – вибірка із логарифмічно нормального розподілу із щільністю

$$f(x;\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2 x}} \exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma_0^2}\right\}, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases}$$

$\sigma_0 > 0$ -відоме. Чи є $\hat{\theta} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \xi_i$ ефективною оцінкою параметра μ? Дослідити дану оцінку на незміщеність.

4. (8 балів) Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром λ. Знайти розподіл, математичне сподівання та дисперсію для $\eta = \xi^{\alpha}$, $\alpha > 0$.

5. (10 балів) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – вибірка з біноміального розподілу з параметрами N і p. Чи буде $\hat{p} = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ незміщеною та консистентною оцінкою параметра p? Дослідити дану оцінку на ефективність.

4. (8 балів) Випадкова величина зосереджена на відрізку [0,10] і її щільність на ньому дорівнює cx^4. Знайти сталу c, функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію.