Варіант - 2

1. Нерівність Коші - Буняковського:
$\forall x, y \in V$ (евклідового простору) виконується: $(x,y)^2 \le |x|^2 |y|^2$.
При цьому рівність виконується $\Leftrightarrow$ вектори x та y лінійно залежні, тобто крайні.

Доведення:
Якщо принаймні один з векторів x або y співпадає з θ, то нерівність виконується, причому як рівність.
Припустимо, що $x \ne \theta$ і $y \ne \theta$.
Нехай t - незалежна змінна. Тоді для $\forall t$:
$(x-ty, x-ty) \ge 0$ (за аксіомою: $\forall x \in V: (x,x) \ge 0$, $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=\theta$)
Тоді, $(x,x) - 2t(x,y) + t^2(y,y) \ge 0$. Маємо квадратний тричлен від змінної t з дійсними коефіцієнтами, причому $(y,y) > 0$. Якщо для дискримінанта виконується: $D > 0$, то тричлен має різні дійсні корені, а тому при деяких значеннях він приймає від'ємні значення, чого бути не може. Звідси випливає, $D \le 0$, тобто

$4(x,y)^2 - 4(x,x)(y,y) \le 0$

$(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$ $\Rightarrow$ $(x,y)^2 \le |x|^2 |y|^2$

Що й вимагалося довести.
Крім того, рівність виконується $\Leftrightarrow D=0$, тобто тричлен має єдиний корінь $t = t_0$. А тому $(x-t_0y, x-t_0y) = 0$.
За аксіомою $((x,x)=0 \Leftrightarrow x=\theta)$: $x - t_0 y = \theta \Rightarrow x = t_0 y$.
Тобто вектори лінійно залежні.
Навпаки, якщо x, y - лінійно залежні, то вони крайні, а тому при деякому $\alpha \in \mathbb{R}$: $x = \alpha y \Rightarrow (x,y)^2 = (\alpha y, y)^2 =$
$= \alpha^2 (y,y)^2 = \alpha^2 |y|^4 = |y|^2 |\alpha y|^2 = |x|^2 |y|^2$ $\square$.

2. $\mathbb{R}^4$ $a_1 = (1;1;3;0)$ $a_2 = (2;1;1;-1)$ $a_3 = (1;2;8;1)$

1) $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. $\lambda_{21} = -\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)} = -\frac{6}{11}$;

$b_1 = a_1 = (1;1;3;0)$.

$b_2 = a_2 + \lambda_{21} \cdot b_1$ $b_2 = a_2 + \lambda_{21} b_1 = (2;1;1;-1) + \left(-\frac{6}{11}; -\frac{6}{11}; -\frac{18}{11}; 0\right) =$

$= \left(\frac{16}{11}; \frac{5}{11}; -\frac{7}{11}; -1\right)$

$b_3 = a_3 + \lambda_{31} b_1 + \lambda_{32} b_2$ $\lambda_{31} = -\frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)} = -\frac{27}{11}$

$\lambda_{32} = -\frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)} = -\left(\frac{-41 \cdot 11}{11 \cdot 41}\right) = 1$

$b_3 = (1;2;8;1) - \frac{27}{11} \cdot (1;1;3;0) + \left(\frac{16}{11}; \frac{5}{11}; -\frac{7}{11}; -1\right) =$

$= (1;2;8;1) - (1;2;8;1) = (0;0;0;0)$.

Маємо ортогональний базис $L_{орт} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$:

$L_{орт} = \left\langle (1;1;3;0), \left(\frac{16}{11}; \frac{5}{11}; -\frac{7}{11}; -1\right) \right\rangle$

Побудуємо ортонормований базис:

$c_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{(1;1;3;0)}{\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1;1;3;0)$

$c_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{\left(\frac{16}{11}; \frac{5}{11}; -\frac{7}{11}; -1\right)}{\sqrt{\frac{41}{11}}} = \frac{\frac{1}{11}(16;5;-7;-11)}{\sqrt{\frac{41}{11}}} = \frac{1}{\sqrt{451}}(16;5;-7;-11)$

$B_{он} = \langle c_1, c_2 \rangle$ $c_1 = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (1;1;3;0)$ $c_2 = \frac{1}{\sqrt{451}} \cdot (16;5;-7;-11)$

Маємо ортонормований базис.

2) $x = (0;1;2;3)$ $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ rank $= 2$, тоді a_1, a_2 база L.

Кут між вектором та підпростором — це кут між вектором та його проекцією на підпростір.

$x = y + z$, де y - проекція x на L, $y \in L$.

$y = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$

$\begin{cases} (x, a_1) = \alpha_1 (a_1, a_1) + \alpha_2 (a_2, a_2) \\ (x, a_2) = \alpha_1 (a_2, a_1) + \alpha_2 (a_2, a_2) \end{cases}$

$(a_1, a_1) = 1+1+9+0 = 11$

$(a_1, a_2) = 2+1+3+0 = 6$

$(a_2, a_2) = 4+1+1+1 = 7$

$(x, a_1) = 0+1+6+0 = 7$

$(x, a_2) = 0+1+2-3 = 0$

$\begin{cases} 11\alpha_1 + 6\alpha_2 = 7 \\ 6\alpha_1 + 7\alpha_2 = 0 \end{cases}$

$\alpha_1 = -\frac{7}{6}\alpha_2$

$-\frac{41}{6}\alpha_2 = 7$

$\alpha_2 = -\frac{42}{41} \quad \alpha_1 = \frac{49}{41}$

$y = \frac{49}{41} a_1 - \frac{42}{41} a_2 =$

$= \frac{1}{41} \cdot \left((49; 49; 147; 0) - (84; 42; 42; -42)\right) =$

$= \frac{1}{41} \cdot (-35; 7; 105; 42)$ – проекція

Тоді $\cos\alpha = \frac{(x,y)}{\|x\| \|y\|} = \frac{343}{41} : \sqrt{\frac{343}{41}} = \frac{1}{2}$.

$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

Отже, кут між $x = (0; 1; 2; 3)$ та $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ 60°.

3. $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ – ортонормований, V – евклідовий. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

1) Оскільки V евклідовий простір, а базис e_1, e_2, e_3 ортонормований, тоді в цьому базисі оператору A^* відповідає матриця A^T, тобто $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, але $A^T = A$. Якщо матриці рівні, то рівні і їхні оператори $\Rightarrow A = A^*$, тобто оператор A самоспряжений.

Перевіримо це: За означенням $\forall x, y \in V: (A(x), y) = (x, A(y))$.

Нехай $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. $A(x) = x' = (x_1', x_2', x_3')$

$x_1' = 2x_1 + x_2$

$x_2' = x_1 - 2x_2 + 2x_3$

$x_3' = 2x_2 + 2x_3$

$(A(x), y) = ((2x_1 + x_2)y_1, (x_1 - 2x_2 + 2x_3)y_2, (2x_2 + 2x_3)y_3)$.

З іншого боку, $A(y) = y' = (y_1', y_2', y_3')$

$y_1' = 2y_1 + y_2$

$y_2' = y_1 - 2y_2 + 2y_3$

$y_3' = 2y_2 + 2y_3$

$(x, A(y)) = (A(y), x) = ((2x_1 + x_2)y_1, (x_1 - 2x_2 + 2x_3)y_2, (2x_2 + 2x_3)y_3)$

Таким чином, $(A(x), y) = (x, A(y))$, тобто оператор самоспряжений.

2) За теоремою, для $\forall$ симетричної матриці $\exists$ матриця B (діагональна), що $B = Q^T A Q$. Матриця B буде мати вигляд:
$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - дійсні власні числа A.

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+3)$$

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -3. \in \mathbb{R}$.

Для λ_1: $(A-2E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_2 = 0$, $x_1 = -2x_3$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
-2	0	1

$a_1 = (-2; 0; 1)$

Для λ_2: $(A-3E) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad x_1 = x_2 \quad x_3 = 2x_1$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
1	1	2

$a_2 = (1; 1; 2)$

Для λ_3: $(A+3E) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -10 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
1	-5	2

$a_3 = (1; -5; 2)$. $\qquad B_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ - базис із власних векторів
$a_1 = (-2; 0; 1)$, $a_2 = (1; 1; 2)$, $a_3 = (1; -5; 2)$, в якому матриця A має діагональний вигляд $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

3) $A_K = T^{-1} A T \qquad a_1 \perp a_2 \quad a_1 \perp a_3 \quad a_2 \perp a_3$

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{(-2; 0; 1)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2; 0; 1)$$

$$b_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \frac{(1; 1; 2)}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1; 1; 2)$$

$$b_3 = \frac{a_3}{\|a_3\|} = \frac{(1; -5; 2)}{\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}}(1; -5; 2)$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

$B_2 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ - ортонормований базис, в якому A_K має діагональний вид $\quad A_K = T^{-1} A T$

Перевірка:
$(T^{-1} = T^t)$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

$$A_k = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt5} & 0 & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt6} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt5} & 0 & \frac{2}{\sqrt5} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt6 \\ -\sqrt{\frac{3}{10}} & \sqrt{\frac{15}{2}} & -\sqrt{\frac{6}{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt6} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = A_k = D.$$

діагональний вид матриці A.

4. $f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3$

1) $(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матрична форма.

$$f(y_1, y_2, y_3) = \Delta_1 y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} y_3^2 = 7y_1^2 + \frac{19}{7} y_2^2 - \frac{55}{19} y_3^2$$

$\Delta_1 = 7 > 0$ $\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 35 - 16 = 19 > 0$ $\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -55 < 0$

Отже, за критерієм Сильвестра, квадратична форма знакозмінна

2) $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad f(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 0 \\ -4 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 39\lambda - 55 =$

$= -(\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda-11)$

$\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 5$; $\lambda_3 = 11$ – власні числа.

Тоді, $f(y_1, y_2, y_3) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = -y_1^2 + 5y_2^2 + 11y_3^2$
(канонічний вигляд)

3) Для $\lambda_1 = -1$: $\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$x_2 = -x_3$
$x_1 = -\frac{x_3}{2}$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
1	2	-2

$a_1 = (1; 2; -2)$

Для $\lambda_2 = 5$: $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad x_1 = 2x_2$, $\quad x_2 = \frac{x_3}{2}$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
2	1	2

$a_2 = (2; 1; 2)$

Для $\lambda_3 = 11$:

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & -6 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_2 = 2x_3 \\ x_1 = -x_2 \end{array}$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
-2	2	1

$a_3 = (-2; 2; 1)$

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{3}(1; 2; -2)$$

$$b_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \frac{1}{3}(2; 1; 2)$$

$$b_3 = \frac{a_3}{\|a_3\|} = \frac{1}{3}(-2; 2; 1)$$

$B = \{b_1, b_2, b_3\}$

$$O = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = O \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

O – ортогональне перетворення, що приводить до канонічного вигляду.

$$x_1 = \frac{1}{3}(y_1 + 2y_2 - 2y_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{3}(2y_1 + y_2 + 2y_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(-2y_1 + 2y_2 + y_3)$$

Перевірка: $f(x_1 x_2 x_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3 =$

$= 7 \cdot \frac{1}{9} \cdot (y_1 + 2y_2 - 2y_3)^2 + 5 \cdot \frac{1}{9} \cdot (2y_1 + y_2 + 2y_3)^2 + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot (-2y_1 + 2y_2 + y_3) -$

$-8(y_1 + 2y_2 - 2y_3)(2y_1 + y_2 + 2y_3) \cdot \frac{1}{9} + 8(2y_1 + y_2 + 2y_3)(-2y_1 + 2y_2 + y_3) \cdot \frac{1}{9} =$

$= \frac{1}{9} \cdot ((7y_1^2 + 28y_1y_2 - 28y_1y_3 + 28y_2^2 - 56y_2y_3 + 28y_3^2) +$

$+ (20y_1^2 + 20y_1y_2 + 40y_1y_3 + 5y_2^2 + 20y_2y_3 + 20y_3^2) + (12y_1^2 - 24y_1y_2 - 12y_1y_3 + 12y_2^2 +$

$+ 12y_2y_3 + 3y_3^2) + (-16y_1^2 - 40y_1y_2 + 16y_1y_3 - 16y_2^2 - 16y_2y_3 + 32y_3^2) +$

$+ (-32y_1^2 + 16y_1y_2 - 16y_1y_3 + 16y_2^2 + 40y_2y_3 + 16y_3^2) = \frac{1}{9}(-9y_1^2 + 45y_2^2 + 99y_3^2) =$

$= -y_1^2 + 5y_2^2 + 11y_3^2$

4) Заміна: $f(y_1 y_2 y_3) = -y_1^2 + 5y_2^2 + 11y_3^2 = \left| \begin{array}{l} z_1 = y_1 \\ z_2 = \sqrt{5}\, y_2 \\ z_3 = \sqrt{11}\, y_3 \end{array} \right| =$

$= -z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ – нормальний канонічний вигляд.

$k = 2$ – додатній індекс інерції

$r - k = 1$ – від'ємний індекс інерції

$(k, r-k) = (2, 1)$ сигнатура.