

# ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, СТАТИСТИКА ТА ЙМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ

## Лекція 8.

Розора Ірина Василівна

Київ, 2022

# Зміст I

- 1 Мультиплікативна властивість м.сп.
  - Сума дисперсії незалежних в.в.
  
- 2 Генератриса розподілів (твірна функція)
  - Властивості генератрис
  - Приклади обчислення генератрис
  - Генератриса для суми незалежних в.в.
  - Випадкова сума в.в.
  
- 3 Коваріація та коефіцієнт кореляції

# Зміст

- 1 **Мультиплікативна властивість м.сп.**
  - Сума дисперсії незалежних в.в.
- 2 Генератриса розподілів (твірна функція)
  - Властивості генератрис
  - Приклади обчислення генератрис
  - Генератриса для суми незалежних в.в.
  - Випадкова сума в.в.
- 3 Коваріація та коефіцієнт кореляції

## Теорема

Нехай  $\xi$  і  $\eta$  — незалежні д.в.в. з  $M|\xi| < \infty$ ,  $M|\eta| < \infty$ . Тоді

$$M|\xi \cdot \eta| < \infty$$

та

$$M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta. \quad (1)$$

## Доведення

Нехай розподіли  $\xi, \eta$  відповідно дорівнюють

$\xi$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$
$P$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$

$\eta$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\dots$
$P$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$\dots$

Нехай

$$A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}, \quad B_j = \{\omega : \eta(\omega) = y_j\}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

## Доведення

Оскільки за умовою теореми в.в.  $\xi, \eta$  є незалежними, то

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j) \quad \forall i, j \geq 1,$$

або ж

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j) = p_i q_j.$$

Через  $z_k$  позначимо усі різні значення  $(x_i \cdot y_j)$  і

$$I_k = \{(i, j) | x_i \cdot y_j = z_k\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} P\{\xi \cdot \eta = z_k\} &= P\left(\bigcup_{(i,j) \in I_k} A_i \cap B_j\right) = \sum_{(i,j) \in I_k} P(A_i \cap B_j) = \\ &= \sum_{(i,j) \in I_k} P(A_i)P(B_j) = \sum_{(i,j) \in I_k} p_i p_j. \end{aligned}$$

## Доведення

$$\begin{aligned} M\xi \cdot M\eta &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} y_j q_j = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j \cdot p_i q_j = \end{aligned}$$

Згрупуємо цю суму за різними значеннями  $z_k = x_i y_j$  :

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\infty} z_k \sum_{(i,j) \in I_k} p_i q_j = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} z_k P\{\xi \cdot \eta = z_k\} = M(\xi \cdot \eta). \end{aligned}$$

## Зауваження

Співвідношення (1) називається мультиплікативною властивістю математичного сподівання.

## Зауваження

Методом матем. індукції цю властивість можна поширити на  $n$  в.в.:

Якщо  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — сумовні незалежні в.в., то  $\exists M(\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n)$  і

$$M(\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n) = M\xi_1 \cdot \dots \cdot M\xi_n.$$



### Теорема (Про суму дисперсії незалежних в.в.)

Нехай  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — незалежні в.в. та  $M\xi_i^2 < \infty, 1 = \overline{1, n}$ . Тоді

$$D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n D(\xi_i).$$

## Доведення I

За означенням дисперсії

$$D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = M\left(\sum_{i=1}^n \xi_i - M\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)\right)^2 =$$

використаємо адитивну та однорідну власт. для матем. сподів.

$$= M\left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - M\xi_i)\right)^2 =$$

$$= M\left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - M\xi_i)^2 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n (\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j)\right) =$$

## Доведення II

за адитивністю матем.сподівання

$$= \sum_{i=1}^n M(\xi_i - M\xi_i)^2 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n M((\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j)) =$$

оскільки  $\xi_i, \xi_j, i \neq j$ , — незалежні, то за теоремою про спадковість незалежності  $\xi_i - M\xi_i, \xi_j - M\xi_j, i \neq j$ , також незалежні. Тому за мультиплікативною власт. матем.сподівання

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n M(\xi_i - M\xi_i)^2 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n M(\xi_i - M\xi_i)M(\xi_j - M\xi_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n M(\xi_i - M\xi_i)^2 + 0 = \sum_{i=1}^n D\xi_i. \end{aligned}$$

## Зміст

- 1 Мультиплікативна властивість м.сп.
  - Сума дисперсії незалежних в.в.
- 2 Генератриса розподілів (твірна функція)
  - Властивості генератрис
  - Приклади обчислення генератрис
  - Генератриса для суми незалежних в.в.
  - Випадкова сума в.в.
- 3 Коваріація та коефіцієнт кореляції

Під час дослідження цілочисельних невід'ємних в.в. корисними є генератриса (твірні функції), які визначають наступним чином.

Нехай  $\xi$  – цілочисельна невід'ємна в.в. з розподілом імовірностей

$$P(\xi = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

### Означення

Генератрисою  $G_\xi(t)$  розподілу в.в.  $\xi$  (чи послідовності  $\{p_k, k = 0, 1, \dots\}$ ) називають ряд

$$G_\xi(t) = Mt^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k, \quad |t| \leq 1.$$

## Зауваження

Оскільки будь-який степеневий ряд однозначно визначений своїми коефіцієнтами, то зв'язок між розподілами і відповідними генератрисами взаємно однозначний.

$$G_{\xi}(t) = Mt^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k, \quad |t| \leq 1.$$

Виконуються такі власт.:

- $G_{\xi}(1) = p_0 + p_1 + \dots = 1$
- Розподіл імовірностей  $p_k$  відновлюють за генератрисою, беручи похідну відповідного порядку у точці нуля:

$$p_k = \frac{1}{k!} G_{\xi}^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, \dots$$

Зокрема,  $G_{\xi}(0) = P(X = 0)$ .

- Генератрису  $G_{\xi}(t)$  можна використовувати для простого знаходження моментів різних порядків.

## Властивості генератрис

- Розвинемо функцію  $t^\xi$  у ряд Тейлора в околі точки 1:

$$t^\xi = 1 + \xi(t-1) + \xi(\xi-1)\frac{(t-1)^2}{2!} + \xi(\xi-1)(\xi-2)\frac{(t-1)^3}{3!} + \dots$$

Тоді

$$\begin{aligned} G_\xi(t) = Mt^\xi &= 1 + (t-1)M\xi + \frac{(t-1)^2}{2!}M\xi(\xi-1) + \\ &+ \frac{(t-1)^3}{3!}M\xi(\xi-1)(\xi-2) + \dots \end{aligned}$$

- Диференціюючи цей вираз по  $t$  і покладаючи  $t = 1$ , отримуємо математичне сподівання.

$$M\xi = G'_\xi(1).$$



- Подальше диференціювання дає формули, які можна використати для визначення моментів інших порядків.

$$M(\xi(\xi - 1) \cdots (\xi - k + 1)) = G_\xi^{(k)}(1).$$

У частковому випадку при  $k = 2$

$$\begin{aligned} M(\xi(\xi - 1)) &= G_\xi''(1) \Rightarrow \\ \Rightarrow M\xi^2 &= G_\xi''(1) + M\xi = G_\xi''(1) + G_\xi'(1). \end{aligned}$$

Тому дисперсію за допомогою генератрис можна знайти як

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = G_\xi''(1) + G_\xi'(1) - (G_\xi'(1))^2.$$

## Біноміальний розподіл

Знайдемо генератрису для біноміального розподілу та за допомогою неї знайдемо матем. сподівання та дисперсію.  
 $\xi \sim Bi(n, p)$ .

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < p < 1.$$

$$M\xi = np, \quad D\xi = npq$$

Генератриса для  $\xi$

$$G_\xi(t) = Mt^\xi = \sum_{k=0}^n t^k p_n(k) = \sum_{k=0}^n t^k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k (tp)^k (1-p)^{n-k} = (pt + 1 - p)^n.$$

Використали формулу Біном-Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{l=0}^n C_n^l a^l b^{n-l}$$

Отже,

$$G_{\xi}(t) = (pt + 1 - p)^n.$$

Матем. сподівання:

$$M\xi = G'_{\xi}(1) = np (pt + 1 - p)^{n-1} |_{t=1} = np$$

$$G''_{\xi}(1) = n(n-1)p^2 (pt + 1 - p)^{n-2} |_{t=1} = n(n-1)p^2.$$

Дисперсія:

$$\begin{aligned} D\xi &= G''_{\xi}(1) + G'_{\xi}(1) - (G'_{\xi}(1))^2 = \\ &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p). \end{aligned}$$

Отже,

$$G_{\xi}(t) = (pt + 1 - p)^n.$$

Матем. сподівання:

$$M\xi = G'_{\xi}(1) = np(pt + 1 - p)^{n-1} |_{t=1} = np$$

$$G''_{\xi}(1) = n(n-1)p^2(pt + 1 - p)^{n-2} |_{t=1} = n(n-1)p^2.$$

Дисперсія:

$$\begin{aligned} D\xi &= G''_{\xi}(1) + G'_{\xi}(1) - (G'_{\xi}(1))^2 = \\ &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p). \end{aligned}$$

Отже,

$$G_{\xi}(t) = (pt + 1 - p)^n.$$

Матем. сподівання:

$$M\xi = G'_{\xi}(1) = np(pt + 1 - p)^{n-1} |_{t=1} = np$$

$$G''_{\xi}(1) = n(n-1)p^2(pt + 1 - p)^{n-2} |_{t=1} = n(n-1)p^2.$$

Дисперсія:

$$\begin{aligned} D\xi &= G''_{\xi}(1) + G'_{\xi}(1) - (G'_{\xi}(1))^2 = \\ &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1 - p). \end{aligned}$$

## Розподіл Пуассона

Розглянемо  $\xi \sim P(\lambda)$ ,

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$M\xi = D\xi = \lambda.$$

Знайдемо генератрису

$$\begin{aligned} G_\xi(t) &= Mt^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} t^k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} t^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda + t\lambda}. \end{aligned}$$

## Розподіл Пуассона

Отже, генератриса для пуассонівської в.в. дорівнює

$$G_{\xi}(t) = e^{-\lambda+t\lambda}.$$

Матем. сподівання:

$$M\xi = G'_{\xi}(1) = \lambda e^{-\lambda+t\lambda} \big|_{t=1} = \lambda.$$

$$G''_{\xi}(1) = \lambda^2 e^{-\lambda+t\lambda} \big|_{t=1} = \lambda^2.$$

Дисперсія:

$$D\xi = G''_{\xi}(1) + G'_{\xi}(1) - (G'_{\xi}(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Вправа. Знайти генератрису для геометричного, від'ємного біноміального розподілів та обчислити матем. сподівання та дисперсію.



## Розподіл Пуассона

Отже, генератриса для пуассонівської в.в. дорівнює

$$G_{\xi}(t) = e^{-\lambda+t\lambda}.$$

Матем. сподівання:

$$M\xi = G'_{\xi}(1) = \lambda e^{-\lambda+t\lambda} |_{t=1} = \lambda.$$

$$G''_{\xi}(1) = \lambda^2 e^{-\lambda+t\lambda} |_{t=1} = \lambda^2.$$

Дисперсія:

$$D\xi = G''_{\xi}(1) + G'_{\xi}(1) - (G'_{\xi}(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

**Вправа.** Знайти генератрису для геометричного, від'ємного біноміального розподілів та обчислити матем. сподівання та дисперсію.

## Розподіл Пуассона

Отже, генератриса для пуассонівської в.в. дорівнює

$$G_{\xi}(t) = e^{-\lambda+t\lambda}.$$

Матем. сподівання:

$$M\xi = G'_{\xi}(1) = \lambda e^{-\lambda+t\lambda} \big|_{t=1} = \lambda.$$

$$G''_{\xi}(1) = \lambda^2 e^{-\lambda+t\lambda} \big|_{t=1} = \lambda^2.$$

Дисперсія:

$$D\xi = G''_{\xi}(1) + G'_{\xi}(1) - (G'_{\xi}(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

**Вправа.** Знайти генератрису для геометричного, від'ємного біноміального розподілів та обчислити матем. сподівання та дисперсію.

### Теорема (Про генератрису суми н.в.в.)

Якщо  $\xi$  та  $\eta$  – незалежні невід'ємні цілочисельні в.в. з генератрисами  $G_\xi(t)$  і  $G_\eta(t)$  відповідно, то сума  $\xi + \eta$  має генератрису

$$G_{\xi+\eta}(t) = G_\xi(t) G_\eta(t).$$

### Зауваження

Можна показати цю властивість і для  $n$  незалежних в.в.

## Доведення.

За означенням

$$G_{\xi}(t) = Mt^{\xi}, \quad G_{\eta}(t) = Mt^{\eta}.$$

$$G_{\xi+\eta}(t) = Mt^{\xi+\eta} = M(t^{\xi}t^{\eta}) =$$

Оскільки  $\xi$  та  $\eta$  — незалежні, то за т. про спадковість незалежності  $t^{\xi}$  та  $t^{\eta}$  також є незалежними. Використовуючи мультиплікативну власт. матем. сподів., маємо

$$= M(t^{\xi}) M(t^{\eta}) = G_{\xi}(t) G_{\eta}(t).$$



## Теорема (Інваріантність пуассонівського розподілу відносно суми)

Нехай  $\xi_i$ —незалежні в.в. з  $\xi_i \sim \Pi(\lambda_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Тоді

$$\xi_1 + \xi_2 \sim \Pi(\lambda_1 + \lambda_2).$$

### Доведення.

Показали, що генератриса для пуассонівської в.в. дорівнює

$$G_{\xi_i}(t) = e^{-\lambda_i + t\lambda_i}, \quad i = 1, 2.$$

За т. про генератрису суми незал.в.в.

$$\begin{aligned} G_{\xi_1 + \xi_2}(t) &= G_{\xi_1}(t) G_{\xi_2}(t) = \\ &= e^{-\lambda_1 + t\lambda_1} e^{-\lambda_2 + t\lambda_2} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) + t(\lambda_1 + \lambda_2)} \end{aligned}$$

## Вправа.

Нехай  $\xi_i$ —незалежні в.в. з  $\xi_i \sim Bi(n_i, p)$ ,  $i = 1, 2$ . Тоді

$$\xi_1 + \xi_2 \sim Bi(n_1 + n_2, p).$$

Нехай  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — послідовність цілочисельних незалежних однаково розподілених (н.о.р.) із генераторисою  $G_\xi(t)$ . В.в.  $\nu$  не залежить від  $\xi_i$  та має генератрису  $G_\nu(t)$ . Розглянемо випадкову суму, задану таким чином:

$$S_0 = 0, \quad S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i, \quad \nu \geq 1.$$

### Теорема

*Генератриса  $G_{S_\nu}(t)$  дорівнює суперпозиції*

$$G_{S_\nu}(t) = G_\nu(G_\xi(t)).$$

## Доведення

$$G_{S_\nu}(t) = Mt^{S_\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P\{S_\nu = n\} =$$

Вик. формулу повної ймовірності

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{m=0}^{\infty} P\{S_\nu = n | \nu = m\} P\{\nu = m\} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} t^n P\{S_m = n\} P\{\nu = m\} = \end{aligned}$$



## Доведення

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} t^n P\{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m = n\} \right) P\{\nu = m\} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (G_{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m}(t)) P\{\nu = m\} = \end{aligned}$$

Оскільки  $\xi_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  — незалежні, то

$$G_{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m}(t) = G_{\xi_1}(t) G_{\xi_2}(t) \dots G_{\xi_m}(t)$$

## Доведення

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{\infty} (G_{\xi_1}(t) G_{\xi_2}(t) \cdots G_{\xi_m}(t)) P\{\nu = m\} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (G_{\xi}(t))^m P\{\nu = m\} = \\ &= G_{\nu}(G_{\xi}(t)). \end{aligned}$$

## Приклад

Припустимо, що число пошкоджень транспортного засобу описується випадковою величиною  $\nu$ , яка має розподіл Паскаля з параметром  $a > 0$ .

$$p_n = P\{\nu = n\} = \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}}, \quad n \geq 0$$

Звернення до страхової компанії за відшкодуванням при цьому є незалежними і мають ймовірність  $p$ . Показати, що число звернень буде мати розподіл Паскаля з параметром  $pa$ .

## Розв'язання

Число звернень до страхової компанії будемо описуватися випадковою величиною  $S$ , яка може бути представлена наступним чином:

$$S = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu,$$

де  $\xi_i$  є незалежними випадковими величинами, що мають розподіл Бернуллі:

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{з ймовірністю } p; \\ 0, & \text{з ймовірністю } 1-p. \end{cases}$$

Знайдемо генератрису випадкових величин  $\nu$  і  $\xi_i$

## Розв'язання

$$G_{\xi}(t) = t^1 \cdot p + t^0 \cdot (1 - p) = 1 - p + pt.$$

$$G_{\nu}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}} = \frac{1}{1+a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{ta}{1+a}} = \frac{1}{1+a-ta}.$$

Оскільки генератриса випадкової величини  $S$  дорівнює суперпозиції генератрис випадкових величин  $\nu$  та  $\xi_i$ , то

$$G_S(t) = G_{\nu}(G_{\xi}(t)) = G_{\nu}(1 - p + pt) = \frac{1}{1 + ap - pat}.$$

Останній вираз є генератрисою розподілу Паскаля з параметром  $pa$ .

# Зміст

- 1 Мультиплікативна властивість м.сп.
  - Сума дисперсії незалежних в.в.
- 2 Генератриса розподілів (твірна функція)
  - Властивості генератрис
  - Приклади обчислення генератрис
  - Генератриса для суми незалежних в.в.
  - Випадкова сума в.в.
- 3 Коваріація та коефіцієнт кореляції

Нехай  $\xi$  та  $\eta$  – дві в.в. зі скінченними другими моментами.

### Означення

Величину

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$$

називають *коваріацією* в.в.  $\xi$  та  $\eta$ .

### Зауваження

Коваріація характеризує зв'язок (лінійний зв'язок) між двома випадковими величинани.

## Властивості коваріації

- Формула обчислення

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta.$$

Доведення.

За означенням

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi\eta - \xi M\eta - \eta M\xi + M\xi M\eta) =$$

використовуємо нормованість, однорідність та адитивність  
матем. сподівання

$$= M(\xi\eta) - M\xi M\eta - M\eta M\xi + M\xi M\eta = M(\xi\eta) - M\xi M\eta$$





## Властивості коваріації



$$\text{cov}(\xi, \xi) = D\xi;$$

Доведення.

Дійсно, за означенням  $\text{cov}(\xi, \xi) = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi$ . □



$$\text{cov}(\xi, c) = \text{cov}(c, \xi) = 0, \quad c \in \mathbb{R};$$

Доведення.

Оскільки  $Mc = c$ , то  $\text{cov}(\xi, c) = M(\xi - M\xi)(c - Mc) = 0$ . □

## Властивості коваріації



$$\text{cov}(\xi, \xi) = D\xi;$$

Доведення.

Дійсно, за означенням  $\text{cov}(\xi, \xi) = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi$ . □



$$\text{cov}(\xi, c) = \text{cov}(c, \xi) = 0, \quad c \in \mathbf{R};$$

Доведення.

Оскільки  $Mc = c$ , то  $\text{cov}(\xi, c) = M(\xi - M\xi)(c - Mc) = 0$ . □

## Властивості коваріації



$$\text{cov}(a\xi + b, \eta) = \text{cov}(\xi, a\eta + b) = a\text{cov}(\xi, \eta), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

### Доведення.

За власт. матем. сп.  $M(a\xi + b) = aM\xi + b$ , тому

$$\begin{aligned}\text{cov}(a\xi + b, \eta) &= M(a\xi + b - M(a\xi + b))(\eta - M\eta) = \\ &= M(a\xi - aM\xi)(\eta - M\eta) = a\text{cov}(\xi, \eta).\end{aligned}$$



## Властивості коваріації



$$\text{cov}(\xi, \eta) \leq \sqrt{M(\xi - M\xi)^2(\eta - M\eta)^2} = \sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta} = \sigma_\xi\sigma_\eta.$$

Доведення.

За нерівністю Коші  $(MXY)^2 \leq MX^2MY^2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\text{cov}(\xi, \eta) &= M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) \leq \\ &\leq \sqrt{M(\xi - M\xi)^2 M(\eta - M\eta)^2} = \sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta} = \sigma_\xi\sigma_\eta.\end{aligned}$$



## Означення

Випадкові величини  $\xi$  і  $\eta$  називаються некорельованими, якщо

$$\text{cov}(\xi, \eta) = 0.$$

- Якщо в.в.  $\xi$  і  $\eta$  незалежні, то  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$ .

## Доведення.

За мультиплікативною власт. для незалежних в.в.

$M\xi\eta = M\xi M\eta = 0$ . Тому

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta = M\xi M\eta - M\xi M\eta = 0.$$



## Зауваження

Із незалежності випливає некорельованість, але обернене твердження невірне. Із некорельованості не випливає незалежність.

## Приклад.

Нехай  $\xi, \eta$  — незалежні в.в.  $M\xi = M\eta = 0$ . Покладемо  $\gamma = \xi \cdot \eta$ . Зрозуміло, що  $\xi$  і  $\gamma$  залежні. Покажемо, що вони некорельовані:

$$\text{cov}(\xi, \gamma) = M(\xi\gamma) - M\xi M\gamma = M(\xi^2\eta) = M\xi^2 M\eta - 0 \cdot M\gamma = 0.$$

## Властивості коваріації

Має місце рівність

$$D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta \pm 2\text{cov}(\xi, \eta).$$

Зокрема, коли в.в.  $\xi$  та  $\eta$  незалежні, то

$$D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta.$$

Доведення.

Вправа.



## Означення

*Коефіцієнтом кореляції в.в.  $\xi$  та  $\eta$  називають число*

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}} = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}.$$



## Власт. коеф. кореляції

- $\rho(\xi, \xi) = 1$ .
- Внаслідок нерівності Коші коефіцієнт кореляції набуває значень з інтервалу  $[-1, 1]$ .
- $\rho(a\xi + b, \eta) = \text{sign}(a)\rho(\xi, \eta)$ .

Доведення.

$$\begin{aligned}\rho(a\xi + b, \eta) &= \frac{\text{cov}(a\xi + b, \eta)}{\sqrt{\mathbf{D}(a\xi + b) \cdot \mathbf{D}\eta}} = \\ &= \frac{a\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2\mathbf{D}\xi \cdot \mathbf{D}\eta}} = \text{sign}(a)\rho(\xi, \eta).\end{aligned}$$



- Якщо в.в.  $\xi$  та  $\eta$  незалежні, то  $\rho(\xi, \eta) = 0$ .

## Власт. коеф. кореляції



$$|\rho(\xi, \eta)| = 1 \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbf{R} : \xi = a\eta + b.$$

Доведення. Розглянемо

$$A = D \left( \frac{\xi}{\sqrt{D\xi}} \pm \frac{\eta}{\sqrt{D\eta}} \right) \geq 0.$$

За формулою для дисперсії суми в.в. маємо:

$$\begin{aligned} A &= D \left( \frac{\xi}{\sqrt{D\xi}} \right) + D \left( \frac{\eta}{\sqrt{D\eta}} \right) \pm 2\text{cov} \left( \frac{\xi}{\sqrt{D\xi}}, \frac{\eta}{\sqrt{D\eta}} \right) = \\ &= \frac{D\xi}{D\xi} + \frac{D\eta}{D\eta} \pm \frac{2\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}} = 2(1 \pm \rho) \geq 0. \end{aligned}$$

Якщо  $\rho = 1$ , то  $A = D \left( \frac{\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\eta}{\sqrt{D\eta}} \right) = 0$ .

За власт. дисперсії це можливо лише тоді, коли сама в.в. є сталою.

$$\frac{\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\eta}{\sqrt{D\eta}} = M \left( \frac{\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\eta}{\sqrt{D\eta}} \right) \Rightarrow$$

$$\xi = a\eta + b, \quad \text{де}$$

$$a = \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}}, \quad b = M\xi - \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}} M\eta$$

Аналогічно досліджується випадок  $\rho = -1$ .

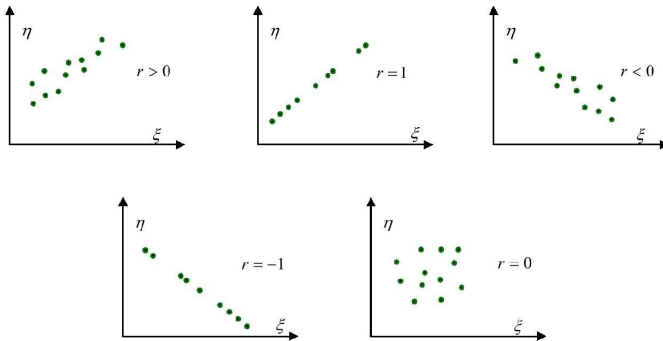


Рис. Графічна інтерпретація коеф. кореляції

# ПИТАННЯ?