# Поняття лінійного (векторного) простору.

Озн. Нехай $F$ - деяке поле. Непорожня множина $V$ наз. векторним (лінійним) простором над полем $F$, якщо для її елементів введено дві операції: $+$ та $\cdot$ на елементи з поля $F$, причому виконуються умови:

1) $\forall a, b \in V: \ a+b = b+a$
2) $\forall a, b, c \in V: \ (a+b)+c = a+(b+c)$
3) $\exists \theta \in V \ \forall a \in V: \ a+\theta = \theta + a = a$, $\theta$ - нуль-вектор
4) $\forall a \in V \ \exists -a \in V: \ a+(-a) = \theta$, $-a$ - протилежний до $a$
5) $\forall a \in V: \ 1 \cdot a = a$
6) $\forall a \in V \ \forall \alpha, \beta \in F: \ (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$
7) $\forall a, b \in V, \ \forall \alpha \in F: \ \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$
8) $\forall \alpha, \beta \in F \ \forall a \in V: \ (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$.

Елементи векторного простору $V$ будемо називати векторами, а елементи відповідного поля $F$ - скалярами.

## Наслідки аксіом векторного простору:

(1) Нульовий елемент $\theta$ у векторному просторі $V$ єдиний

⌈Припустимо існують два нуль-вектори $\theta_1, \theta_2 \in V$, що задовольняють умові 3). Тоді $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2$. ⌋

(2) $\forall a \in V$ протилежний елемент $-a$ єдиний

⌈Припустимо, що для даного $a \in V$ існують два протилежних елементи $(-a)'$ та $(-a)''$. Тоді

$$(-a)' = (-a)' + \theta = (-a)' + [a + (-a)''] = [(-a)' + a] + (-a)'' = \theta + (-a)'' = (-a)''$$ ⌋

(3) $\forall a \in V: \ 0 \cdot a = \theta$

⌈$0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$

Додамо до обох частин рівності $-0 \cdot a$. Тоді

$$\underset{\theta}{\underbrace{-0a + 0 \cdot a}} = -0a + (0 \cdot a + 0 \cdot a) = (-0a + 0a) + 0 \cdot a = \theta + 0 \cdot a = 0 \cdot a$$ ⌋

(4) $\forall a \in V: \ -a = (-1)a$

⌈Як вже було доведено, для даного елемента $a$ існує єдиний $-a$, але $a + (-1)a = 1 \cdot a + (-1)a = (1-1)a = 0 \cdot a = \theta$.

Тому $-a = (-1)a$. ⌋

⑤ $\forall a, b \in V \ \exists! x \in V: \ a = b + x$.

Елемент $x$ наз. різницею елементів $a$ і $b$ та позн. $a - b = x$.

⌈Припустимо $x = a + (-b)$. Тоді $b + x = b + a + (-b) =$
$= b + (-b) + a = \theta + a = a$

Тобто елемент $x$ існує.

Якщо для деякого елемента $y \in V$ також виконується
$a = b + y$, то $a + (-b) = b + y + (-b) = \theta + y = y$
$\Rightarrow y = a + (-b) = x$, тобто елемент $x$ єдиний ⌋

⑥ $\forall \alpha \in F: \alpha \cdot \theta = \theta$

⌈$\alpha \cdot \theta = \alpha(\theta + \theta) = \alpha\theta + \alpha\theta$

Додамо до обох частин $-\alpha\theta$

$\underbrace{-\alpha\theta + \alpha\theta}_{\theta} = -\alpha\theta + \alpha\theta + \alpha\theta = \theta + \alpha\theta = \alpha\theta$. ⌋

⑦ Для елементів $\alpha \in F$, $a \in V$ рівність $\alpha a = \theta$ виконується $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ або $\alpha = 0$, або $a = \theta$.

⌈Припустимо $\alpha \neq 0$. Тоді $\exists \alpha^{-1} \in F$ і $\alpha^{-1}\alpha a = \alpha^{-1}\theta \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 \cdot a = \theta$, тобто $a = \theta$. ⌋

2.

## Теорема Жордана

Нехай $F$ - деяке поле, $\lambda \in F$ - деяке число, $k \in \mathbb{N}$.

Озн. Жордановою клітиною порядку $k$ з параметром $\lambda$ наз. квадратна матриця

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

$$J_1(\lambda) = (\lambda), \quad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Озн. Жордановою матрицею наз. квадратна матриця, яка має таку будову: вздовж головної діагоналі стоять жорданові клітини, решта елементів $= 0$.

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ O & O & \cdots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

Частковим випадком жорданової матриці є діагональна матриця. Всі її жорданові клітини порядку 1.

<u>Озн.</u> Поле $F$ наз. алгебраїчно замкненим, якщо кожен многочлен ненульового степеня з коефіцієнтами з цього поля має в цьому полі корінь.

З основної теореми алгебри випливає, що алгебраїчно замкненим полем є поле комплексних чисел.
В алгебраїчно замкненому полі кожен многочлен ненульового степеня можна розкласти в добуток лінійних многочленів.

<u>Теорема</u> (Жордана)

$\forall$ квадратна матриця $A$ з елементами з алгебраїчно замкненого поля $F$ подібна до деякої жорданової матриці з елементами з поля $F$.
Тобто $\exists$ така невироджена матриця $T$ з елементами з поля $F$, що матриця $B = T^{-1}AT$ жорданова.
Матриця $B$ наз. жордановою нормальною формою матриці $A$.

Сформулюємо теорему в термінах теорії лінійних операторів.

Для $\forall$ лінійного оператора $\mathcal{A}$ на скінченновимірному векторному просторі $V$ над алгебраїчно замкненим полем $F$ $\exists$ базис простору $V$, в якому оператору $\mathcal{A}$ відповідає жорданова матриця. Цей базис наз. жордановим базисом оператора $\mathcal{A}$.

3. $B_e = \{e_1, e_2, e_3\}$  $B_f = \{f_1, f_2, f_3\}$

$e_1 = (1;0;0)$  $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$  $A_g = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -11 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

$e_2 = (0;1;0)$  $f_2 = e_1 - e_2 + 2e_3$

$e_3 = (0;0;1)$  $f_3 = e_1 + e_3$

$B = T^{-1}AT$  $T = (f_1 | f_2 | f_3)$  $f_1 = (1;0;0) + (0;1;0) + (0;0;1) =$

$= (1;1;1)$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  $T^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$  $f_2 = (1;-1;2)$

$f_3 = (1;0;1)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right).$

$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -11 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}-\lambda & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}-\lambda & \frac{-\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} =$

$= \left(\frac{1}{4}-\lambda\right) \begin{vmatrix} \frac{1}{4}-\lambda & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} + \left(-\frac{3}{4}\right) \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{4} \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4}-\lambda \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{vmatrix} =$

$= \left(\frac{1}{4}-\lambda\right)\left(\lambda^2 + \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(-\frac{3\lambda}{4} - \frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{-\sqrt{6}\lambda}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right) = 1 - \lambda^3 =$

$= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1)$  $\lambda_1 = 1$  $\lambda_2 = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

$\lambda_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$

Для $\lambda_1=1$: $(A-E)=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{6}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{-\sqrt{6}}{3} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{6}{4} \end{pmatrix} \sim$

$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad x_1=x_2$, $x_3=0$ $\quad$ ФСР:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |

$a_1=(1;1;0)$ $\quad c_1=\frac{a_1}{\|a_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$

Для $\lambda_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$: $(A-\lambda_3 E)=\begin{pmatrix} \frac{3-2i\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3-2i\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \sim$

$\sim\begin{pmatrix} 1 & \frac{2i\sqrt{3}+3}{7} & \frac{2i\sqrt{2}+\sqrt{6}}{7} \\ 0 & \frac{3-5i\sqrt{3}}{7} & \frac{-5\sqrt{6}-3i\sqrt{2}}{14} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2i\sqrt{3}+3}{7} & \frac{2i\sqrt{2}+\sqrt{6}}{7} \\ 0 & \frac{3-5i\sqrt{3}}{7} & \frac{-5\sqrt{6}-3i\sqrt{2}}{14} \\ 0 & \frac{5\sqrt{6}+3i\sqrt{2}}{14} & \frac{3-5i\sqrt{3}}{14} \end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix} 1 & \frac{2i\sqrt{3}+3}{7} & \frac{2i\sqrt{2}+\sqrt{6}}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{i\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{3-5i\sqrt{3}}{7} & \frac{-5\sqrt{6}-3i\sqrt{2}}{14} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2i\sqrt{3}+3}{7} & \frac{2i\sqrt{2}+\sqrt{6}}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-i\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{i\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{i\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_1+\frac{i\sqrt{2}}{2}x_3=0$, $\quad x_2-\frac{i\sqrt{2}}{2}x_3=0$ $\quad$ ФСР:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|
| $-\frac{i}{\sqrt{2}}$ | $\frac{i}{\sqrt{2}}$ | 1 |

$a_2=\left(-\frac{i}{\sqrt{2}};\frac{i}{\sqrt{2}};1\right)=(0;0;1)+i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$

$a_3=a_2+ia_3 \Rightarrow a_2=(0;0;1)$ $\quad a_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$.

$a_1\perp a_2$, $a_1\perp a_3$, $a_2\perp a_3$.

$c_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$, $c_2=(0;0;1)$, $c_3=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$.

$Q=(c_1|c_2|c_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$B = Q^{-1} A Q.$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-\sqrt{6}}{4} \\ \frac{-\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{-\sqrt{2}}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$