Алгоритмічна (не)розв'язність масових проблем

Масова проблема (алгоритмічно) розв'язна, якщо відповідний предикат рекурсивний, інакше вона нерозв'язна.
Масова проблема частково (алгоритмічно) розв'язна, якщо відповідний предикат $\in$ ЧРП.

Проблема зупинки: "$\varphi_x(y)\downarrow$".
Проблема самозастосовності: "$\varphi_x(x)\downarrow$".
Обидва предикати не РП, але ЧРП.

Покажемо нерозв'язність проблеми самозастосовності.

Позначимо "$\varphi_x(x)\downarrow$" через $S(x)$.

Супротивне: нехай $S(x)$ — РП.

Тоді $\chi_s(x) = \begin{cases} 0, & \varphi_x(x)\downarrow \\ 1, & \varphi_x(x)\uparrow \end{cases}$ — РФ.

Розглянемо $f(x) = \chi_s - 1 =$

$$= \begin{cases} \perp, & \varphi_x(x)\downarrow, \\ 0, & \varphi_x(x)\uparrow \end{cases} \text{ — ЧРФ}$$

Нехай n-й номер в ЧРФ ! :

$$f(x) \sim \varphi_n(x)$$

Візьмемо $x := n$:

$$f(n) = \varphi_n(n) = \begin{cases} \perp, & \varphi_n(n)\downarrow, \\ 0, & \varphi_n(n)\uparrow. \end{cases}$$

протиріччя

Отже, $S(x)$ — не РП.

Діагональна множина

$D = \{ x \mid \varphi_x(x) \downarrow \}$ – нерекурсивна РПМ

(РПМ не РМ)

$\ulcorner$ χ_D співпадає з характеристичною функцією предиката "$\varphi_x(x)\downarrow$" $\Rightarrow$ вона нерекурсивна.

D – область визначення ЧРФ

$u(x) = \varphi_x(x) \Rightarrow$ тому $\in$ РПМ $\lrcorner$

$\overline{D} = \{ x \mid \varphi_x(x) \uparrow \}$ – не $\in$ РПМ

$\ulcorner$ Інакше за теоремою Поста D та $\overline{D}$ мали б бути РМ $\lrcorner$

"$\varphi_x(x)\uparrow$" не ЧРП (як область істинності не-РПМ $\overline{D}$).

Приклад. Чи існує РФ $s(x, y)$:

$$\mathcal{D}_{s(x,y)} = E_x \setminus \mathcal{D}_y, \quad \forall x, y \in \mathbb{N}.$$

$\ulcorner$

$$z \in E_x \ \& \ z \notin \mathcal{D}_y \quad (z \in \overline{\mathcal{D}_y})$$

Візьмемо x, y такі, що:

$E_x = \mathbb{N}$

$\mathcal{D}_y = \mathcal{D}$

$$E_x \setminus \mathcal{D}_y = \mathbb{N} \setminus \mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}} \text{ не РПМ}$$

Але $\mathcal{D}_{s(x,y)}$ – РПМ!

Отже, не існує такої $s(x, y)$. $\lrcorner$