Лекція 9. Теорія виробництва (продовження 2)

§1. Еластичність випуску та можливості заміщення

Якщо відбувається пропорційна зміна всіх виробничих витрат (ресурсів), то кажуть про <u>зміну масштабів виробництва</u>. Технологічні процеси виробництва класифікуються в залежності від степеня зростання виробництва залежно від масштабу виробництва.

Припустимо, що в певній точці простору виробничих витрат (ресурсів) X усі виробничі витрати збільшуються з масштабом α $(\alpha > 1)$, набуваючи значення $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_m)$.

Виробництво характеризується <u>*сталим (постійним) доходом від розширення масштабу*</u> виробництва, якщо випуск продукції зростає в тій самій пропорції, що і виробничі витрати (ресурси):

$$F(\alpha x) = \alpha F(x), \quad \alpha > 1 \qquad (1)$$

Виробництво характеризується *зростаючим доходом від розширення масштабу* виробництва, якщо випуск продукції зростає більшою мірою, ніж виробничі витрати (ресурси):

$$F(\alpha x) > \alpha F(x), \quad \alpha > 1 \qquad (2)$$

Виробництво характеризується *спадним доходом від розширення масштабу* виробництва, якщо випуск продукції зростає меншою мірою, ніж виробничі витрати (ресурси):

$$F(\alpha x) < \alpha F(x), \quad \alpha > 1 \qquad (3)$$

Зрозуміло, що в різних точках простору витрат X виробнича функція $F(x)$ може поводити себе по різному: мати зростаючий, спадний або сталий дохід від розширення масштабів виробництва.

Локальним показником вимірювання доходу від розширення масштабів виробництва, визначеним у деякій точці $x \in X$ простору виробничих витрат, є *<u>еластичність виробництва</u>* (або *<u>сумарна еластичність виробництва</u>*):

$$\varepsilon(x) = \lim_{\alpha \to 1} \frac{\alpha}{F(\alpha x)} \frac{\partial F(\alpha x)}{\partial \alpha} = \lim_{\alpha \to 1} \frac{\partial lnF(\alpha x)}{\partial ln\alpha}, \qquad (4)$$

тобто еластичність виробництва (випуску) відносно параметру масштабу α.

У випадку сталого (постійного) доходу від розширення масштабу виробництва маємо

$$\varepsilon(x) = 1,$$

спадного (зростаючого) доходу від розширення масштабу виробництва маємо відповідно

$$\varepsilon(x) < 1 \quad (\varepsilon(x) > 1).$$

З означення (4) та співвідношень (1) – (3) отримаємо інший вираз для еластичності виробництва:

$$\varepsilon(x) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{\alpha}{F(\alpha x)}\frac{\partial F(\alpha x)}{\partial \alpha} = \lim_{\alpha\to 1}\frac{\alpha}{F(\alpha x)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F(\alpha x)}{\partial(\alpha x_i)}x_i = $$
$$= \frac{1}{F(x)}(MP(x))^T x = \frac{1}{F(x)}\sum_{i=1}^{m} MP_i(x)x_i \qquad (5)$$

Визначимо *еластичність виробництва відносно зміни виробничих витрат* $i^{ого}$ *виду* (еластичність виробництва за виробничим фактором *i*):

$$\varepsilon_i(x) = \frac{x_i}{F(x)}\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = \frac{x_i}{F(x)}MP_i(x) \qquad (6)$$

Відповідно, сумарна еластичність виробництва у довільній точці простору виробничих витрат буде дорівнювати сумі еластичностей виробництва за всіма виробничими факторами в цій точці:

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i(x) \qquad (7)$$

Можливості заміщення одних виробничих факторів іншими характеризують технологічний процес виробництва, а отже і виробничу функцію $F(x)$, з боку різних комбінацій витрат виробничих факторів , що породжують однакові умови випуску продукції.

Зокрема, можна використовувати для визначення можливостей заміщення одного фактора виробництва іншим у процесі їх використання *аналіз ізоквант*.

Ізокванта (або *виробнича поверхня байдужості*) – множина виробничих витрат, необхідних для виробництва одного і того ж самого обсягу продукції:

$$IQ(q^0) = \{x \in X: F(x) = q^0\}, \qquad (8)$$

де $q^0 -$ заданий рівень виробництва продукції.

Тобто, ізокванти є гіперповерхнями рівня функції $F(x)$ у просторі X.

Гранична (маргінальна) норма технологічного заміщення $j^{ого}$ виробничого фактору (ресурсу) $i^{им}$ (*$MRTS_{ij}$* (*Marginal Rate of Technical Substitution*) визначається обсягом $j^{ого}$ ресурсу, який може замінити кожна одиниця $i^{ого}$ ресурсу, не викликаючи при цьому зміни обсягів виробництва:

$$MRTS_{ij} = -\frac{\Delta x_j}{\Delta x_i} \qquad (9)$$

Локальною характеристикою заміщення між виробничими витратами x_i та x_j $(i \neq j)$, коли всі інші виробничі витрати залишаються постійними (незмінними) в точці $x \in D$, є ***<u>еластичність заміщення</u>*** між виробничими витратами i та j, яка визначається наступним чином:

$$\sigma_{ij}(x) = \frac{d\ln\left(\frac{x_i}{x_j}\right)}{d\ln\left(\frac{MP_i(x)}{MP_j(x)}\right)}, \quad i,j = \overline{1,m}. \qquad (10)$$

Еластичність $\sigma_{ij}(x)$ показує відсоткову зміну співвідношення виробничих витрат, поділену на відсоткову зміну співвідношення їх граничних (маргінальних) продуктів. При цьому $\sigma_{ij}(x) \geq 0$ в деякій особливій області D.

Геометричне тлумачення еластичностей заміщення – це кривизна ізоквант.

Диференціюємо вздовж ізокванти:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{m} MP_i(x) dx_i = \left(MP(x)\right)^T dx = 0 \tag{11}$$

Якщо всі виробничі витрати, крім витрат виробничих факторів i та j $(i \neq j)$, є фіксованими, то з (11) маємо:

$$MP_i(x) dx_i + MP_j(x) dx_j = 0, \tag{12}$$

звідки кутові коефіцієнти мають вигляд:

$$\left.\frac{dx_i}{dx_j}\right|_{\text{ізокванта}} = -\frac{MP_j(x)}{MP_i(x)}. \tag{13}$$

Таким чином виконується:

$$\sigma_{ij}(x) = \frac{dln\left(\frac{x_i}{x_j}\right)}{dln\left(-\left(\frac{dx_i}{dx_j}\right)_{\text{ізокванта}}\right)}, \quad i, j = \overline{1, m}. \tag{14}$$

§2. Основні типи виробничих функцій (n=2).

1. Лінійна виробнича функція (ВФ):

$$q = F(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2, \qquad x_1, x_2 \in R_+^2,$$

вона одночасно є угнутою і опуклою. Основні характеристики:

$$MP_i(x_1, x_2) = a_i \geq 0, \;\; \varepsilon(x_1, x_2) = 1, \;\; \sigma_{12} = \infty.$$

2. Квадратична ВФ (Аллена):

$$q = F(x_1, x_2) = a_0 x_1 x_2 - a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2, \qquad x_1, x_2 \in R_+^2,$$

Основні характеристики:

$$MP_i(x_1, x_2) = a_0 x_j - 2a_i x_i \geq 0, \qquad a_i \geq 0.$$

3. ВФ з фіксованими пропорціями виробничих факторів (Леонтьєва):

$$q = F(x_1, x_2) = \min\left(\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right), \qquad x_1, x_2 \in R_+^2,$$

де c_i − кількість виробничих витрат $i^{\text{ого}}$ виду, необхідних для виробництва одиниці продукції, $c_i > 0$.

Основні характеристики:

$$\varepsilon(x_1, x_2) = 1, \;\; \sigma_{12} = 0.$$

4. ВФ аналізу способів виробничої діяльності (Канторовича):

$$q = F(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{P} a_k y_k, \qquad x_1, x_2 \in R_+^2,$$

де змінні y_k задовольняють умовам

$$\sum_{k=1}^{P} a_{ik} y_k \le x_i, \ \ i = 1{,}2.$$

Параметр P характеризує кількість способів виробничої діяльності, $y_k -$ рівень інтенсивності використання способу $k, k = \overline{1, P}$, $a_k -$ випуск продукції при одиничній інтенсивності $k^{\text{ого}}$ способу, $a_{ik} -$ кількість виробничого фактору $i^{\text{ого}}$ виду, необхідного при одиничній інтенсивності $k^{\text{ого}}$ способу.

Основні характеристики:

$$\varepsilon(x_1, x_2) = 1, \ \ \sigma_{12} = 0.$$

5. ВФ зі сталою еластичністю заміщення (CES-функція (constant elasticity of substitution)):

$$q = F(x_1, x_2) = a_0 \left(a_1 x_1^{-\beta} + a_2 x_2^{-\beta}\right)^{-\frac{h}{\beta}}, \qquad x_1, x_2 \in R_+^2,$$

де $a_0 > 0 -$ масштабний множник, $a_i \geq 0 -$ параметри розподілу, $h > 0 -$харкатеризує ступінь однорідності, $\beta \geq -1 -$ параметр заміщення.

Основні характеристики:

$$\varepsilon(x_1, x_2) = h, \ \ \sigma_{12} = \frac{1}{1+\beta}.$$

Частинним випадком цієї ВФ є ВФ Солоу:

$$q = F(x_1, x_2) = a_0 \left(a x_1^{-\beta} + (1-a) x_2^{-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}}, \qquad x_1, x_2 \in R_+^2.$$

6. ВФ з лінійною еластичністю заміщення (LES-функція):

$$q = F(x_1, x_2) = a_0(a_1x_1 + a_2x_2)^{a_3}, \qquad x_1, x_2 \in R_+^2,$$

де $a_0 > 0 -$ масштабний множник, $a_i \geq 0 -$ параметри розподілу, $a_3 > 0 -$харкатеризує ступінь однорідності.

Основні характеристики:

$$\varepsilon(x_1, x_2) = a_3, \ \ \sigma_{12} = \infty.$$

7. Загальна мультиплікативна ВФ:

$$q = F(x_1, x_2) = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}, \qquad x_1, x_2 \in R_+^2,$$

де $b_0 > 0 -$ масштабний множник, $b_i \geq 0 -$ еластичність випуску продукції відносно виробничих витрат $i^{\text{ого}}$ виду.

Основні характеристики:

$$\varepsilon(x_1, x_2) = b_1 + b_2, \ \ \sigma_{12} = 1.$$

Зокрема, якщо $b_1 + b_2 = 1$, то маємо ВФ Кобба-Дугласа, для якої $x_1 = K, \ x_2 = L$.

Заув., що ВФ CES можна розглядати як узагальнення функцій Леонтьєва, Кобба-Дугласа і лінійної. При $\beta \to -1$ функція CES прямує до лінійної ВФ, при $\beta \to 0$ функція CES прямує до ВФ Кобба-Дугласа, при $\beta \to \infty$ функція CES прямує до ВФ Леонтьєва.

Побудова виробничих функцій здійснюється економетричними методами аналогічно побудові функцій корисності в теорії споживання.