Екзаменаційна робота
з чисельних методів
студента факультету
комп'ютерних наук та
кібернетики
групи ІПС-32
Ольховатого Ігоря

Під час написання даної роботи я зобов'язуюся дотримуватися принципів академічної доброчесності.

Білет - 24

1 $f(x,y,z) = \dfrac{x-y^2}{z}$, $x = 3.1$, $y = 0.81$, $z = 1.13$.

$\Delta(f^*) = \left|\dfrac{1}{z}\right| \Delta(x^*) + \left|\dfrac{-2y}{z}\right| \Delta(y^*) + \left|\dfrac{x-y^2}{z^2}\right| \Delta(z^*)$

= Оскільки всі значущі цифри є правильними, тоді $\Delta(f^*) = 0$

$f(x^*; y^*; z^*) = \alpha \neq 0.$

$\delta(f^*) = \frac{0}{\alpha} = 0$

2 $x^3 + 4x - 6 = 0.$ $\varepsilon = 0{,}001$

Модифікований метод Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

$f(x) = x^3 + 4x - 6$, $f'(x)$ – перша похідна

$f'(x) = 3x^2 + 4$

Умова припинення $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

Як початкове наближення візьмемо

$x_0 = 1$. (Метод можна застосовувати бо $f'(x) \neq 0$ і $f''(x)$ неперервна)

$x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0) = 1.142$

$x_2 = x_1 - f(x_1) / f'(x_1) = 1.133$

$|x_2 - x_1| = 0.009 > \varepsilon$, отже для досягнення потрібної точності треба більше ітерацій.

3. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A = A^T$, отже можемо використати метод квадратних коренів

$d_{11} = sgn(-1) = -1$

$\cancel{s}\ s_{11} = \sqrt{|a_{11}|} = 1$

$s_{12} = \dfrac{a_{12}}{d_{11} s_{11}} = \dfrac{1}{-1 \cdot 1} = -1.$

$s_{13} = \dfrac{a_{13}}{d_{11} s_{11}} = \dfrac{2}{-1 \cdot 1} = -2.$

$d_{22} = sgn(a_{12} - s_{12}^2 d_{11}) = sgn(1 - (-1)^2 \cdot (-1))$

$= sgn(1 - 1(-1)) = sg(1+1) = 1.$

$$s_{22} = \sqrt{|a_{22} - s_{12}^2 d_{11}|} = \sqrt{|3 - (-1)^2(-1)|} =$$

$$= \sqrt{|3 - 1 \cdot (-1)|} = \sqrt{|3+1|} = 2.$$

$$s_{23} = \frac{a_{23} - s_{12} d_{11} s_{11}}{d_{22} s_{22}} = \frac{2 - (-1)\cdot(-1)\cdot 1}{1 \cdot 2} =$$

$$= \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$d_{33} = \operatorname{sgn}(a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}) =$$

$$= \operatorname{sgn}\left(-4 - (-2)^2 \cdot (-1) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1\right) =$$

$$= \operatorname{sgn}\left(-4 - 4 \cdot (-1) - \frac{1}{4}\right) = \operatorname{sgn}\left(-4 + 4 - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \operatorname{sgn}\left(-\frac{1}{4}\right) = -1.$$

$$s_{33} = \sqrt{|a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}|} =$$

$$= \sqrt{\left|-4 - (-2)^2 \cdot (-1) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1\right|} =$$

$$= \sqrt{\left|-4 - 4 \cdot (-1) - \frac{1}{4}\right|} = \sqrt{\left|-\frac{1}{4}\right|} = \frac{1}{2}.$$

$$S=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 0.5\\ 0 & 0 & 0.5\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$SD=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}y_1=9\frac{1}{2}.\\ y_2=3/2\\ y_3=4\end{matrix}$$

~~Відповідь: 4~~

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\frac{1}{2}\\ 3/2\\ 4\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x_1=28.75\\ x_2=3.25\\ x_3=8\end{matrix}$$

Відповідь: $(28.75;\ 3.25;\ 8)$.

4. $f(x)=\mathrm{tg}\,x,\ x\in(-\pi/2;\ \pi/2)$.

$\varepsilon=10^{-6}$.

Використаємо формулу для похибки квадратичної інтерполяції

$$R(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \cdot (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).$$

Знайдемо максимальне значення похідної $f(x) = tg(x)$ на даному інтервалі: $\frac{f^{(3)}_{max}}{6} h^3 = \varepsilon$

$$f^{(3)}(x) = 2(tg^2(x)+1)(3tg^2(x)+1)$$

Оскільки $tg(x) \to \infty$ при $x = \pm\frac{\pi}{2}$, то візьмемо значення близьке до кінця інтервалу.

$f^{(3)}(x) =$ при $x \to \pm\frac{\pi}{2} \to \infty$

Тоді розв'язок $\frac{f^{(3)}_{max}}{6} h^3 = \varepsilon$ існуватиме лише за нескінченно малого кроку h.

$$h \to \frac{1}{\infty}.$$

5. $f(x)$

x_i	0	1	2
y_i	1	-2	3

$f'(1)$ за формулою II-го порядку апроксимації

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$h = 1$; $f(0) = 1$; $f(1) = (-2)$ $f(2) = 3$.

Тоді $f'(1) = \frac{f(2) - f(0)}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$

~~Відп~~ $\underline{f'(1) = 1}$.