

# ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, СТАТИСТИКА ТА ЙМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ

## Лекція 6.

Розора Ірина Василівна

Київ, 2022

# Зміст I

- 1 Вибірковий ймовірнісний простір
- 2 Деякі дискретні розподіли
- 3 Схема випробувань Бернуллі
  - Послідовність із  $n$  випробувань Бернуллі
- 4 Граничні теореми в схемі Бернуллі
  - Гранична теорема Пуассона
  - Локальна Т Муавра-Лапласа
  - Інтегральна Т Муавра-Лапласа
- 5 Математичне сподівання для д.в.в.

# Зміст

- 1 Вибірковий ймовірнісний простір
- 2 Деякі дискретні розподіли
- 3 Схема випробувань Бернуллі
  - Послідовність із  $n$  випробувань Бернуллі
- 4 Граничні теореми в схемі Бернуллі
  - Гранична теорема Пуассона
  - Локальна Т Муавра-Лапласа
  - Інтегральна Т Муавра-Лапласа
- 5 Математичне сподівання для д.в.в.

В теорії йм. часто говорять про в.в.  $\xi$  із законом розподілу певного виду, не вказуючи при цьому ні йм. простір, ні саму функцію  $\xi(\omega)$ , що задає цю випадкову величину.

У зв'язку з цим розглянемо модель вибіркового ймовірнісного простору. В цій моделі за законом розподілу стандартним чином будується йм. простір і випадкова величина, закон розподілу якої співпадає із заданими законом.

Нехай закон розподілу задається множиною значень

$$X = \{x_1, x_2, \dots\} \quad \text{та ймов. } p_i, \quad i \geq 1. \quad (1)$$

Побудуємо йм. простір і випадкову величину  $\xi$ , для якої (1) є законом розподілу.

Покладемо

$$\Omega = X = \{x_1, x_2, \dots\}.$$

$F = 2^X$ —множина усіх підмножин з  $X$  і

$$\forall A \in F \quad P(A) = \sum_{i: x_i \in A} p_i.$$

Означення

Трійка

$$(\Omega, F, P) = (X, 2^X, P)$$

називається вибірковим ймовірнісним простором.

Для будь-якого  $x \in X$  задамо в.в.  $\xi$  як тотожне переворення

$$\xi(x) = x.$$

Тоді  $\xi(x)$  має закон розподілу, що співпадає з початковим.  
За законом розподілу в.в. відновлюється неоднозначно.  
Можуть існувати декілька в.в. з одним законом розподілу.

# Зміст

- 1 Вибірковий ймовірнісний простір
- 2 Деякі дискретні розподіли
- 3 Схема випробувань Бернуллі
  - Послідовність із  $n$  випробувань Бернуллі
- 4 Граничні теореми в схемі Бернуллі
  - Гранична теорема Пуассона
  - Локальна Т Муавра-Лапласа
  - Інтегральна Т Муавра-Лапласа
- 5 Математичне сподівання для д.в.в.



## Розподіл Бернуллі

### Означення

В.В.  $\xi$  має розподіл Бернуллі з параметром  $p$ ,  $p \in (0, 1)$ , якщо вона приймає тільки два значення: 1 та 0 з ймовірностями  $p$ ,  $1 - p = q$  відповідно.

$\xi$	0	1
$P$	$q$	$p$

$$p + q = 1, \quad p > 0, \quad q > 0.$$

Позначення.  $\xi \sim Be(p)$ .

## Біноміальний розподіл

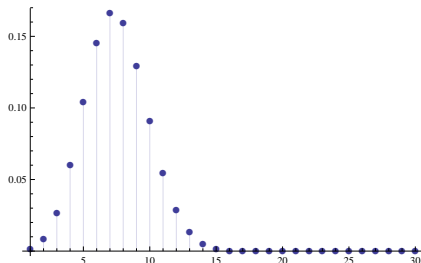
### Означення

Кажуть, що в.в.  $\xi$  має біноміальний розподіл з параметрами  $n$  та  $p$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in (0, 1)$ , якщо

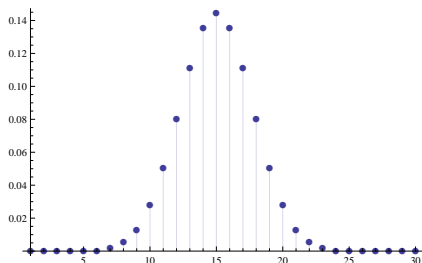
$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < p < 1.$$

Позначення.  $\xi \sim Bi(n, p)$ .

## Біноміальний розподіл



$$n = 30, p = \frac{1}{4}$$



$$n = 30, p = \frac{1}{2}$$

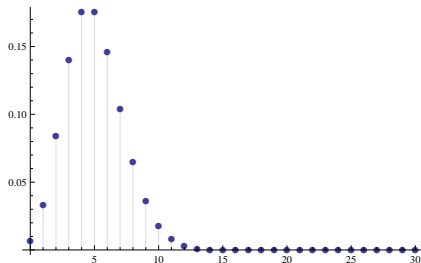
Рис. Біноміальні розподіли

## Розподіл Пуассона

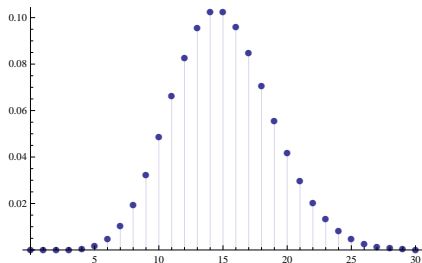
В.в.  $\xi$  має розподіл Пуассона з параметром  $\lambda > 0$ , якщо

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Позначення.  $\xi \sim P(\lambda)$ .



$\lambda = 5$



$\lambda = 15$

Рис. Розподіли Пуассона

## Зміст

- 1 Вибірковий ймовірнісний простір
- 2 Деякі дискретні розподіли
- 3 Схема випробувань Бернуллі**
  - Послідовність із  $n$  випробувань Бернуллі
- 4 Граничні теореми в схемі Бернуллі
  - Гранична теорема Пуассона
  - Локальна Т Муавра-Лапласа
  - Інтегральна Т Муавра-Лапласа
- 5 Математичне сподівання для д.в.в.

## Означення

Послідовністю з  $n$  випробувань Бернуллі називається послідовність з  $n$  випробувань (експериментів) з властивостями

- 1 кожне випробування дихотомічне — закінчується одним з двох результатів: УСПІХ ( $Y, 1$ ) - НЕУСПІХ ( $H, 0$ );
- 2 ймовірність  $Y$  не залежить від номера випробування;
- 3 незалежність у сукупності.

Нехай  $p, p \in (0, 1)$  — ймовірність успіху в одному випробуванні.  
Тоді  $q = 1 - p$  — ймовірність невдачі.

Позначимо через  $\mu_n$  — в.в., яка дорівнює к-сті успіхів в  $n$   
випробуваннях Бернуллі. Тоді ймовірність того, що в цій схемі  
відбулося рівно  $k$  успіхів (це так звана біноміальна  
ймовірність), дорівнює

$$P\{\mu_n = k\} = p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (2)$$



# Зміст

- 1 Вибірковий ймовірнісний простір
- 2 Деякі дискретні розподіли
- 3 Схема випробувань Бернуллі
  - Послідовність із  $n$  випробувань Бернуллі
- 4 Граничні теореми в схемі Бернуллі**
  - Гранична теорема Пуассона
  - Локальна Т Муавра-Лапласа
  - Інтегральна Т Муавра-Лапласа
- 5 Математичне сподівання для д.в.в.

При великих значеннях  $n$  обчислювати йм. у формулі (2) важко.  
Тому у цих випадках можна використати наближені значення.  
Вважаємо, що від  $n$  залежить не тільки число успіхів, але й  
ймовірність успіху  $p = p_n$ .

### Теорема (Теорема Пуассона)

Якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot p_n = \lambda > 0,$$

то для будь-якого  $k = 0, 1, \dots$

$$p_n(k) = P\{\mu_n = k\} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

## Доведення

Покладемо  $\lambda_n = n \cdot p_n$ . Тоді за умовою теореми  
 $\lambda_n \rightarrow \lambda, \quad n \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} p_n(k) &= C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda_n^k}{k!} \frac{(1 - \lambda_n/n)^n}{(1 - \lambda_n/n)^k} = \end{aligned}$$

## Доведення

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{\lambda_n^k (1 - \lambda_n/n)^{-\frac{n}{\lambda_n} \cdot (-\lambda_n)}}{k! (1 - \lambda_n/n)^k} \rightarrow$$
$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Використали одну з чудових границь

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

## Приклад

Розглядається короткострокове страхування життя, коли страхова компанія сплачує 250 000 грн. у випадку смерті застрахованого протягом року, і нічого не виплачує в протилежному випадку. Припустимо, що на цих умовах застраховано 3000 клієнтів в одному віці. З таблиць смертності відомо, що йм. смерті протягом року для них дорівнює 0.003. Знайти ймовірність того, що компанія витратить не більше ніж 2 500 000 грн.

## Розв'язання

Позначимо  $250000 = 1$  у.о. Тоді  $2500000 = 10$  у.о.  
Тоді виплати страхової компанії за  $i$ -тим договором  
страхування ( $i = \overline{1, n}$ ) можна описати такою в.в.

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо відбувся страховий випадок;} \\ 0, & \text{якщо не відбувся страховий випадок.} \end{cases}$$

В.в.

$$\mu_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

характеризує сумарні виплати стр. компанії за даним  
портфелем страхування.

Причому всі власт. послідовності Бернуллі виконуються.

## Розв'язання

Позначимо  $250000 = 1$  у.о. Тоді  $2500000 = 10$  у.о.

Тоді виплати страхової компанії за  $i$ -тим договором страхування ( $i = \overline{1, n}$ ) можна описати такою в.в.

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо відбувся страховий випадок;} \\ 0, & \text{якщо не відбувся страховий випадок.} \end{cases}$$

В.в.

$$\mu_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

характеризує сумарні виплати стр. компанії за даним портфелем страхування.

Причому всі власт. послідовності Бернуллі виконуються.

## Розв'язування

Потрібно знайти

$$P\{\mu_n \leq 10\} = \sum_{k=0}^{10} P\{\mu_n = k\}.$$

Для підрахунку  $P\{\mu_n = k\}$  використаємо Т. Пуассона. За умовою

$$n = 3000, \quad p_n = 0,003.$$

Тоді

$$\lambda \approx 3000 \cdot 0,003 = 9.$$

Отже,



## Розв'язування

$$P\{\mu_n = k\} \approx \frac{9^k e^{-9}}{k!} \Rightarrow$$

$$P\{\mu_n \leq 10\} = \sum_{k=0}^{10} P\{\mu_n = k\} \approx \sum_{k=0}^{10} \frac{9^k e^{-9}}{k!} = 0,706.$$

## Теорема ( Локальна теорема Муавра-Лапласа)

Нехай в схемі незалежних виробувань Бернуллі  $p \in (0, 1)$ —стала,  $q = 1 - p$ . Тоді при  $n \rightarrow \infty$ ,  $npq \rightarrow \infty$  і  $k$  таких, що

$$\left\| \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \right\| := |x_k| \leq c,$$

де  $c$ — деяка стала, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{npq} p_n(k)}{\varphi(x_k)} = 1, \quad (3)$$

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  — щільність стандартного гауссового розподілу.

## Зауваження

Теорема Пуассона діє у випадку, коли ймовірність успіху  $p_n \rightarrow 0$ . У схемі, коли вона віддалена від 0, варто застосовувати локальну теорему Муавра-Лапласа.

## Зауваження

(3) означає асимптотичну еквівалентність

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^2}{2}}.$$

## Доведення.

Є два способи доведення теореми:

- використати формулу Стірлінга для наближеного значення  $n!$  (без д-ня);
- дана теорема є наслідком центральної граничної теореми (ЦГТ), яку будемо доводити пізніше.



## Теорема (Інтегральна теорема Муавра-Лапласа)

Нехай виконуються умови локальної теореми Муавра-Лапласа.  
 $\mu_n$  — кількість успіхів в  $n$  випробуваннях Бернуллі. Тоді для всіх  
 $a < b$  при  $n \rightarrow \infty$

$$P\left\{a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} \rightarrow \int_a^b \varphi(x) dx, \quad (4)$$

де  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  — щільність стандартного гауссового розподілу.

## Доведення

Позначимо

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \Rightarrow \Delta_k = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Тоді, використовуючи схему незалежних випробувань Бернуллі,

$$\begin{aligned} P\left\{a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} &= \sum_{k: a < x_k < b} p_n(k) = \\ &= \sum_{k: a < x_k < b} (\sqrt{npq} p_n(k)) \frac{1}{\sqrt{npq}} \approx \end{aligned}$$

За локальною Т. Муавра-Лапласа  $\sqrt{npq} p_n(k) \approx \varphi(x_k)$ .

$$\approx \sum_{k: a < x_k < b} \varphi(x_k) \Delta_k \rightarrow \int_a^b \varphi(x) dx.$$

## Доведення

Позначимо

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \Rightarrow \Delta_k = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Тоді, використовуючи схему незалежних випробувань Бернуллі,

$$\begin{aligned} P\left\{a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} &= \sum_{k:a < x_k < b} p_n(k) = \\ &= \sum_{k:a < x_k < b} (\sqrt{npq} p_n(k)) \frac{1}{\sqrt{npq}} \approx \end{aligned}$$

За локальною Т. Муавра-Лапласа  $\sqrt{npq} p_n(k) \approx \varphi(x_k)$ .

$$\approx \sum_{k:a < x_k < b} \varphi(x_k) \Delta_k \rightarrow \int_a^b \varphi(x) dx.$$

## Доведення

Позначимо

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \Rightarrow \Delta_k = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Тоді, використовуючи схему незалежних випробувань Бернуллі,

$$\begin{aligned} P\left\{a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} &= \sum_{k: a < x_k < b} p_n(k) = \\ &= \sum_{k: a < x_k < b} (\sqrt{npq} p_n(k)) \frac{1}{\sqrt{npq}} \approx \end{aligned}$$

За локальною Т. Муавра-Лапласа  $\sqrt{npq} p_n(k) \approx \varphi(x_k)$ .

$$\approx \sum_{k: a < x_k < b} \varphi(x_k) \Delta_k \rightarrow \int_a^b \varphi(x) dx.$$



## Зауваження

Умову (4) можна замінити на

$$P\left\{a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a),$$

де

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx -$$

функція розподілу для стандартної гауссової випадкової величини. Її значення можна знайти в стат. таблицях.

## Приклад

Ймовірність деякого виробу бути бракованим дорівнює  $p = 0,005$ . Чому дорівнює ймовірність того, що серед 10 000 навання взятих виробів число бракованих становитиме 40? Розв'язати задачу трьома способами.

## Розв'язання

$$n = 10000, \quad p = 0,005, \quad q = 0,995.$$

- ❶ Використаємо формулу для  $k$ -сті успіхів у випробуваннях Бернуллі.

$$p_{10000}(40) = C_{10000}^{40} 0,005^{40} 0,995^{10000-40} = 0,0197.$$

- ❷ За теоремою Пуассона  $\lambda \approx np = 10000 \cdot 0,005 = 50$

$$p_{10000}(40) \approx \frac{e^{-50} (50)^{40}}{40!} \approx 0,021.$$

## Розв'язання

$$n = 10000, \quad p = 0,005, \quad q = 0,995.$$

- ❶ Використаємо формулу для  $k$ -сті успіхів у випробуваннях Бернуллі.

$$p_{10000}(40) = C_{10000}^{40} 0,005^{40} 0,995^{10000-40} = 0,0197.$$

- ❷ За теоремою Пуассона  $\lambda \approx np = 10000 \cdot 0,005 = 50$

$$p_{10000}(40) \approx \frac{e^{-50} (50)^{40}}{40!} \approx 0,021.$$

## Розв'язання

$$n = 10000, \quad p = 0,005, \quad q = 0,995.$$

- ❶ Використаємо формулу для  $k$ -сті успіхів у випробуваннях Бернуллі.

$$p_{10000}(40) = C_{10000}^{40} 0,005^{40} 0,995^{10000-40} = 0,0197.$$

- ❷ За теоремою Пуассона  $\lambda \approx np = 10000 \cdot 0,005 = 50$

$$p_{10000}(40) \approx \frac{e^{-50} (50)^{40}}{40!} \approx 0,021.$$

## Розв'язання

3) За локальною Т. Муавра-Лапласа

$$\sqrt{npq} = \sqrt{10000 \cdot 0,005 \cdot 0,995} \approx 7,05.$$

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 50}{7,05} = -1,42.$$

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_k) = \frac{1}{7,05\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1,42^2}{2}} = 0,0206.$$

## Приклад

Підкидається гральний кубик 720 разів. Знайти йм. того, що шістка ("6") з'явиться від 90 до 150 разів.

Застосуємо інтегральну Т. Муавра-Лапласа.

$$p = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{5}{6}, \quad n = 720.$$

$$np = 120, \quad \sqrt{npq} = \sqrt{720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 10.$$

## Приклад

Підкидається гральний кубик 720 разів. Знайти йм. того, що шістка ("6") з'явиться від 90 до 150 разів.

Застосуємо інтегральну Т. Муавра-Лапласа.

$$p = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{5}{6}, \quad n = 720.$$

$$np = 120, \quad \sqrt{npq} = \sqrt{720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 10.$$



## Приклад

Підкидається гральний кубик 720 разів. Знайти йм. того, що шістка ("6") з'явиться від 90 до 150 разів.

Застосуємо інтегральну Т. Муавра-Лапласа.

$$p = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{5}{6}, \quad n = 720.$$

$$np = 120, \quad \sqrt{npq} = \sqrt{720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 10.$$

Нехай  $\mu_{720}$  — кількість “6” у 720 підкиданнях. Потрібно підрахувати

$$\begin{aligned} P\{90 \leq \mu_{720} \leq 150\} &= P\left\{\frac{90 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\mu_{720} - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{150 - np}{\sqrt{npq}}\right\} = \\ &= P\left\{\frac{90 - 120}{10} \leq \frac{\mu_{720} - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{150 - 120}{10}\right\} = \\ &= P\{-3 \leq \frac{\mu_{720} - np}{\sqrt{npq}} \leq 3\} \approx \Phi(3) - \Phi(-3) = 0,997. \end{aligned}$$

## Зміст

- 1 Вибірковий ймовірнісний простір
- 2 Деякі дискретні розподіли
- 3 Схема випробувань Бернуллі
  - Послідовність із  $n$  випробувань Бернуллі
- 4 Граничні теореми в схемі Бернуллі
  - Гранична теорема Пуассона
  - Локальна Т Муавра-Лапласа
  - Інтегральна Т Муавра-Лапласа
- 5 Математичне сподівання для д.в.в.

Розглянемо ймов. простір  $(\Omega, F, P)$ , на якому задана д.в.в.

$\xi : \Omega \rightarrow X = \{x_1, x_2, \dots\}$ ,  $x_k \in \mathbf{R}$ —різні.

Позначимо

$$A_k = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_k\}, \quad p_k = P(A_k).$$

Тоді д.в.в зображається як

$$\xi(\omega) = \xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot I_{A_k}(\omega),$$

де індикаторна функція події  $A_k \in \mathcal{F}$ :

$$I_{A_k}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{коли } \omega \in A_k; \\ 0, & \text{коли } \omega \notin A_k. \end{cases}$$

## Означення

Д.в.в.  $\xi$  називається сумовною, якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < \infty.$$

## Означення

Нехай  $\xi$  — сумовна д.в.в. з множиною значень  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  та розподілом  $p_k = P(A_k) = P\{\xi = x_k\}$ ,  $k \geq 1$ . Математичним сподіванням д.в.в.  $\xi$  називається число

$$M\xi = E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k.$$

## Зауваження

При визначенні д.в.в. для нас не важливий порядок нумерації її можливих значень, тому природно вважати, що  $M\xi$  не залежить від порядку доданків. А це можливо при абсолютній збіжності ряду.

## Означення (альтернативне означення)

Математичним сподіванням в.в.  $\xi$ , заданої на дискретному йм. просторі  $(\Omega, F, P)$ , будемо називати суму ряду

$$M\xi = E\xi = \sum_{\omega \in \Omega}^{\infty} \xi(\omega) \cdot P(\omega).$$

### Зауваження

Якщо в.в.  $\xi$  невід'ємна, то ряд в  $M\xi$  або абсолютно збігається, або розбігається до  $+\infty$ . В останньому випадку вважаємо, що  $M\xi = +\infty$ .

### Зауваження

Якщо в точках з координатами  $x_1, x_2 \dots$  знаходяться тіла з масами  $p_1, p_2 \dots$  відповідно, то  $M\xi$ — центр ваги системи мас.

### Теорема (про обчислення м.сп.функції від д.в.в)

Нехай  $\xi : \Omega \rightarrow X = \{x_1, x_2, \dots\}$  — д.в.в., а  $g$  — довільна числова функція, що визначена на  $X$ . Тоді

$$Mg(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) P\{\xi = x_k\}.$$



## Властивості матем. сподівання для д.в.в.

$\xi, \eta$  — сумовні д.в.в.

- **йм. індикатора:**  $MI_A(\omega) = P(A)$
- **нормованість:**  $Mc = c$  для довільної сталої  $c \in \mathbf{R}$ ;
- **невід'ємність:** якщо  $\xi \geq 0$ , то  $M\xi \geq 0$ ;
- **однорідність:**  $M(c\xi) = cM\xi$  для довільної сталої  $c \in \mathbf{R}$ ;
- **адитивність:**  $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$ ;
- **монотонність:** якщо  $\xi \leq \eta$ , то  $M\xi \leq M\eta$ ;
- **додатність:** якщо в.в.  $\xi \geq 0$  та  $M\xi = 0$ , то  $\xi = 0$ ;
- **інваріантність:** якщо  $\xi = \eta$ , то  $M\xi = M\eta$ ;
- **опуклість:**  $|M\xi| \leq M|\xi|$ .

## Доведення I

- йм. індикатора.

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{коли } \omega \in A; \\ 0, & \text{коли } \omega \notin A. \end{cases}$$

$$MI_A(\omega) = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\bar{A}) = P(A).$$

- нормованість. Вправа.

## Доведення II

- невід'ємність.

$$\xi \geq 0 \Leftrightarrow \forall k \geq 1 \ x_k \geq 0 \Rightarrow$$

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \geq 0.$$

- однорідність. Вправа.
- адитивність. Покажемо, що  $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$ . Нехай розподіли  $\xi, \eta$  відповідно дорівнюють

## Доведення III

$\xi$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$
$P$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$

$\eta$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\dots$
$P$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$\dots$

Через  $z_k$  позначимо усі різні значення  $(x_i + y_j)$  і

$$I_k = \{(i, j) | x_i + y_j = z_k\}.$$

Тоді

$$P\{\xi + \eta = z_k\} = \sum_{(i, j) \in I_k} p_i q_j.$$

$$M\xi + M\eta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i + \sum_{j=1}^{\infty} y_j q_j =$$

## Доведення IV

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \left( \sum_{j=1}^{\infty} q_j \right) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j q_j \left( \sum_{i=1}^{\infty} p_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (x_i p_i q_j + y_j q_j p_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (x_i + y_j) p_i q_j = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} z_k \left( \sum_{(i,j) \in I_k} p_i q_j \right) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k P\{\xi + \eta = z_k\} = M(\xi + \eta). \end{aligned}$$

## Доведення V

- **монотонність.** Доведемо, що якщо  $\xi \leq \eta$ , то  $M\xi \leq M\eta$ .  
Оскільки  $\eta - \xi \geq 0$ , то з власт. невід'ємності  
( $M(\eta - \xi) \geq 0$ ), однорідності та адитивності випливає

$$M(\eta - \xi) = M(\eta) + M(-\xi) = M\eta - M\xi \geq 0.$$

ПИТАННЯ?