Зв'язок матриць лін. оператора в різних базисах.

<u>Теорема</u> Нехай $\mathcal{A}$ — лін. опер. в скінч. вим. пр. V над полем F, $B_1=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, $B_2=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ — два базиси простору V, $F=(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — матриця переходу від базису B_1 до B_2, оператору $\mathcal{A}$ в базисі B_1 відповідає матриця $A=(\lambda_{ij})_{i,j=1}^{n}$, а в базисі B_2 — матриця $B=(\beta_{ij})_{i,j=1}^{n}$.

Тоді $B=F^{-1}AF$.

<u>Дов.</u> За озн. матр. переходу

$$b_1=\alpha_{11}a_1+\alpha_{21}a_2+\dots+\alpha_{n1}a_n,$$
$$b_2=\alpha_{12}a_1+\alpha_{22}a_2+\dots+\alpha_{n2}a_n,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$b_n=\alpha_{1n}a_1+\alpha_{2n}a_2+\dots+\alpha_{nn}a_n.$$

Позначимо через $\mathcal{F}$ — лін. опер. на пр. V такий, що $\mathcal{F}(a_1)=b_1$, $\mathcal{F}(a_2)=b_2$, ..., $\mathcal{F}(a_n)=b_n$.

Оператор $\mathcal{F}$ базис переводить в базис, а тому існує обернений опер. $\mathcal{F}^{-1}$.

При цьому $\mathcal{F}^{-1}(b_1)=a_1$, $\mathcal{F}^{-1}(b_2)=a_2$, ..., $\mathcal{F}^{-1}(b_n)=a_n$.

В базисі B_1 оператору $\mathcal{F}$ відповідає матриця F, а тому оператору $\mathcal{F}^{-1}$ — матриця F^{-1}, а тому оператору $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{F}$ — матриця $F^{-1}AF$.

Для доведення рівності $F^{-1}AF=B$ достатньо показати, що фактично в базисі B_1 оператору $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{F}$ відповідає матриця B.

Маємо $(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{F})(a_i)=(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{A})(\mathcal{F}(a_i))=(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{A})(b_i)=$

$=\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{A}(b_i))=\mathcal{F}^{-1}(\beta_{1i}b_1+\beta_{2i}b_2+\dots+\beta_{ni}b_n)=$

$=\beta_{1i}\mathcal{F}^{-1}(b_1)+\beta_{2i}\mathcal{F}^{-1}(b_2)+\dots+\beta_{ni}\mathcal{F}^{-1}(b_n)=$

$=\beta_{1i}a_1+\beta_{2i}a_2+\dots+\beta_{ni}a_n$.

Таким чином, i-ий стовпчик матриці $F^{-1}AF$ співпадає з i-им стовпчиком матриці B.

Тому $F^{-1}AF=B$. □

<u>Озн.</u> Дві квадр. матриці A і B з елементами з поля F однакового порядку наз. подібними, якщо існує така невироджена кв. матриця T того ж порядку, що $B=T^{-1}AT$.

Остання теорема показує, що матриці лінійного оператора в різних базисах подібні.

Симетричні та кососиметричні білінійні функції

Озн. Білінійна функція $f(x,y)$ на пр. V над полем $\mathbb{R}$ наз. симетричною, якщо $\forall x,y \in V: f(x,y) = f(y,x)$.

Припустимо V – скінченновимірний простір, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – деякий його фіксований базис. Тоді $\forall i,j=\overline{1,n}: f(a_i,a_j) = f(a_j,a_i)$.
Тобто матриця симетричної білінійної функції в $\forall$ базисі симетрична.
Зрозуміло, що на просторі розмірності n $\forall$ симетрична матриця порядку n задає симетричну білінійну функцію.

Озн. Білінійна функція $f(x,y)$ на пр. V над полем $\mathbb{R}$ називається кососиметричною, якщо $\forall x,y \in V: f(x,y) = -f(y,x)$.

Озн. Квадратна матриця A називається кососиметричною, якщо $A^T = -A$.

Припустимо $f(x,y)$ – кососиметрична білінійна функція на скінченновимірному векторному просторі V, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – деякий фіксований базис простору. Тоді $\forall i,j=\overline{1,n}: f(a_i,a_j) = -f(a_j,a_i)$.
Тобто в $\forall$ базисі кососиметричній білінійній функції відповідає кососиметрична матриця.

Зрозуміло також, для кососиметричної білінійної функції $\forall x \in V: f(x,x) = 0$.

Дослідження довільної білінійної функції в певному розумінні зводиться до дослідження симетричної та кососиметричної білінійних функцій.

Зрозуміло, що $\exists$ білінійні функції, які не є симетричними чи кососиметричними.
Нехай $f(x,y)$ – довільна білінійна функція на просторі V.
Покладемо $\forall x,y \in V: \quad g(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x,y) + f(y,x)\right)$.
Оскільки сума двох білінійних функцій є білінійною функцією, а також добуток білінійної функції на дійсне число є білінійною функцією, то $g(x,y)$ – білінійна функція.
При цьому $\forall x,y \in V \quad g(y,x) = g(x,y)$, тобто $g(x,y)$ – симетрична білінійна функція.
Далі, покладемо $\forall x,y \in V: h(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x,y) - f(y,x)\right)$.
Тоді $h(x,y)$ – білінійна функція і $\forall x,y \in V: h(y,x) = -h(x,y)$.
Тобто $h(x,y)$ – кососиметрична білінійна функція.
2 Причому $\forall x,y \in V: f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$.
Таким чином, $\forall$ білінійна функція є сумою деякої симетричної та деякої кососиметричної білінійних функцій.

3. $a_1=(1;1;-1;-1)$ $a_2=(5;-4;7;1)$ $a_3=(3;-3;5;1)$

$a_4=(9;-6;11;1)$ $L=\langle a_1,a_2,a_3,a_4\rangle$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\5&-4&7&1\\3&-3&5&1\\9&-6&11&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&-9&12&6\\0&-6&8&4\\0&-15&20&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&-6&8&4\\0&-15&20&10\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}a_1\\a_2\end{array}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&-6&8&4\end{pmatrix}\ \text{rank}=2.$$

$B=\{a_1,a_3\}$ – $B(L)$. Розмірність $\dim L=2$.

4. $3x^2-7y^2+3z^2+8xy-8yz-8xz-4x+6y+8z-5=0$

Розглянемо к.ф. $f(x,y,z)=3x^2-7y^2+3z^2+8xy-8yz-8xz$.

$$A=\begin{pmatrix}3&4&-4\\4&-7&-4\\-4&-4&3\end{pmatrix}\quad \chi(\lambda)=\begin{vmatrix}3-\lambda&4&-4\\4&-7-\lambda&-4\\-4&-4&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}-7-\lambda&-4\\-4&3-\lambda\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}4&-4\\-4&3-\lambda\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}4&-7-\lambda\\-4&-4\end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)(\lambda^2+4\lambda-37)-4(-4\lambda-4)-4(-4\lambda-44)=-\lambda^3-\lambda^2+81\lambda+81=-(\lambda+1)(\lambda^2+81)$$

$$=-(\lambda+1)(\lambda-9)(\lambda+9)\qquad \lambda_1=9.\ \lambda_2=-1\ \lambda_3=-9.$$

Для $\lambda_1=9$: $\begin{pmatrix}-6&4&-4\\4&-16&-4\\-4&-4&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&-12&-8\\4&-16&-4\\-4&-4&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&-12&-8\\0&-40&-20\\0&20&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&-6&-4\\0&2&1\end{pmatrix}\sim$

$\sim\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&2&1\end{pmatrix}$ $x_1=-x_3$, $x_2=-\frac{x_3}{2}$ ФСР:

x_1	x_2	x_3
-2	-1	2

$a_1=(-2;-1;2)$
$b_1=\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Для $\lambda_2=-1$: $\begin{pmatrix}4&4&-4\\4&-6&-4\\-4&-4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&4&-4\\0&-10&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-10&0\end{pmatrix}$ $x_2=0$, $x_1=x_3$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
1	0	1

$a_2=(1;0;1)$ $b_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Для $\lambda_3=-9$: $\begin{pmatrix}12&4&-4\\4&2&-4\\-4&-4&12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&2&-4\\0&-2&8\\0&-2&8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&-2\\0&-1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&2\\0&-1&4\end{pmatrix}$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
-1	4	1

$a_3=(-1;4;1)$ $b_3=\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{4}{3\sqrt{2}};\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$

$$Q=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}\\-\frac{1}{3}&0&\frac{4}{3\sqrt{2}}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$f(x,y,z)=9(x')^2-(y')^2-9(z')^2$

$x=-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'-\frac{1}{3\sqrt{2}}z'$

$y=-\frac{1}{3}x'+\frac{4}{3\sqrt{2}}z'$

$$z = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' +$$

$$9(x')^2 - (y')^2 - 9(z')^2 - 4\cdot\left(-\frac{2}{3}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{3\sqrt{2}}z'\right) + 6\cdot\left(\frac{-1}{3}x' + \frac{4}{3\sqrt{2}}z'\right) +$$

$$+8\left(\frac{2}{3}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{3\sqrt{2}}z'\right) - 5 = 0$$

$$9(x')^2 - (y')^2 - 9(z')^2 + 6x' + 2\sqrt{2}y' + 6\sqrt{2}z' - 5 = 0$$

$$(9(x')^2 + 6x' + 1) - (9(z')^2 - 6\sqrt{2}z' + 2) - ((y')^2 - 2\sqrt{2}y' + 2) - 2 = 0$$

$$\alpha_1 = 3x' + 1 \qquad \alpha_3 = 3z' - \sqrt{2}$$
$$\alpha_2 = y' - \sqrt{2}$$
$$= \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - 2\alpha_3^2 - 2 = 0$$

Тип: двохпорожнинний гіперболоїд.