Теорія ймовірностей, статистика та ймовірнісні процеси

Лекція 3.

Розора Ірина Василівна

Київ, 2022

Зміст I

Зміст

Проводиться стохастичний експеримент з ПЕП Ω.

Означення

Клас множин F_0 називається алгеброю, заданою на Ω, якщо

1. $$\Omega \in F_0$$
2. $$A \in F_0 \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in F_0$$
3. $$A \in F_0,\, B \in F_0 \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in F_0$$

Проводиться стохастичний експеримент з ПЕП Ω.

Означення

Клас множин F_0 називається алгеброю, заданою на Ω, якщо

1. $$\Omega \in F_0$$
2. $$A \in F_0 \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in F_0$$
3. $$A \in F_0, B \in F_0 \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in F_0$$

Проводиться стохастичний експеримент з ПЕП Ω.

Означення

Клас множин F_0 називається алгеброю, заданою на Ω, якщо

1. $$\Omega \in F_0$$
2. $$A \in F_0 \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in F_0$$
3. $$A \in F_0,\, B \in F_0 \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in F_0$$

Зауваження

Якщо F_0 — алгебра, то з

$$A \in F_0,\ B \in F_0 \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in F_0.$$

Дійсно,

$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in F_0$$

Зауваження

Якщо F_0 — алгебра, то з

$$A \in F_0,\ B \in F_0 \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in F_0.$$

Дійсно,

$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in F_0$$

Зауваження

Якщо F_0 — алгебра, то з

$$A_i \in F_0, i = \overline{1, n} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in F_0.$$

Це твердження можна довести методом матем. індукції (ММІ)

Зауваження

Якщо F_0 — алгебра, то з

$$A_i \in F_0, i = \overline{1, n} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in F_0.$$

Це твердження можна довести методом матем. індукції (ММІ)

Вправа:

1. Показати, що якщо $A, B \in F_0$, то $A \setminus B \in F_0$, $B \setminus A \in F_0$, $A \triangle B \in F_0$.

2. Клас множин F_0 є алгеброю $\Leftrightarrow$

1. $$\Omega \in F_0$$

2. $$A \setminus B \in F_0$$

Приклад

1. Тривіальна алгебра

$$\{\Omega, \emptyset\}$$

2. Нехай A — деяка підмножина Ω.Тоді

$$\{\Omega, \emptyset, A, \overline{A}\} - \text{алгебра.}$$

3. $\Omega = [0, 1)$, F_0 — система підмножин з Ω, кожна з яких є скін. сумою неперетинних інтервалів вигляду $[a, b)$. Тоді F_0 — алгебра.

Означення

Клас множин F називається σ-алгеброю, заданою на Ω, якщо

- ($F1$, нормованість)
$$\Omega \in F$$
- ($F2$, доповнення)
$$A \in F \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in F$$
- ($F3$, зліч. об'єднання)
$$\forall n \geq 1,\ A_n \in F, \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$$

Зауваження

Множини з σ-алгебри F ще називають подіями.

Зауваження

$F1 - F3$ — перша група аксіом Т.Йм.
"Клас усіх випадкових подій є σ-алгеброю F".

Приклад

Множина $F = 2^{\Omega}$ всіх підмножин Ω утворює σ-алгебру.

Означення

Нехай K — деякий клас підмножин з Ω. Найменшою σ-алгеброю, що містить клас K, називається σ-алгебра $\sigma(K)$:

- $K \subset \sigma(K)$
- $$\sigma(K) = \bigcap_{S \supset K, S - \sigma - \text{алгебра}}$$

Борелеві множини на **R**

Означення

σ-алгеброю борелевих (борелівських) множин на **R** називають мінімальну σ-алгебру σ-алгебру $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$, породжену класом проміжків $[a, b)$. Множини з σ-алгебри $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$ називаються борелевими (борелівськими) множинами на **R**.

Приклад

Покажемо, що множина $\{a\}$, $\forall a \in \mathbf{R}$, є борелевою.

Дійсно, оскільки за правилом де Моргана

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}} \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}), \Rightarrow$$

$$\{a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} [a, a + \frac{1}{i}) \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

Борелеві множини на $\mathbf{R}$

Означення

σ-алгеброю борелевих (борелівських) множин на $\mathbf{R}$ називають мінімальну σ-алгебру σ-алгебру $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$, породжену класом проміжків $[a, b)$. Множини з σ-алгебри $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$ називаються борелевими (борелівськими) множинами на $\mathbf{R}$.

Приклад

Покажемо, що множина $\{a\}$, $\forall a \in \mathbf{R}$, є борелевою.
Дійсно, оскільки за правилом де Моргана

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}} \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}), \Rightarrow$$

$$\{a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} [a, a + \frac{1}{i}) \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

Борелеві множини на $\mathbf{R}$

Означення

σ-алгеброю борелевих (борелівських) множин на $\mathbf{R}$ називають мінімальну σ-алгебру σ-алгебру $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$, породжену класом проміжків $[a, b)$. Множини з σ-алгебри $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$ називаються борелевими (борелівськими) множинами на $\mathbf{R}$.

Приклад

Покажемо, що множина $\{a\}$, $\forall a \in \mathbf{R}$, є борелевою.
Дійсно, оскільки за правилом де Моргана

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}} \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}), \Rightarrow$$

$$\{a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} [a, a + \frac{1}{i}) \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

Приклад

Будь-яка зліч. множина числової прямої є борел. множиною.

Дійсно, за власт. F3

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

Приклад

$$\forall a < b \in \mathbf{R} \quad (a, b) \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

$$(a, b) = [a, b) \cap \overline{\{a\}} \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

Приклад

Будь-яка зліч. множина числової прямої є борел. множиною. Дійсно, за власт. F3

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\} \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

Приклад

$$\forall a < b \in \mathbf{R} \quad (a, b) \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

$$(a, b) = [a, b) \cap \overline{\{a\}} \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

Приклад

Будь-яка зліч. множина числової прямої є борел. множиною. Дійсно, за власт. F3

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

Приклад

$$\forall a < b \in \mathbf{R} \quad (a, b) \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

$$(a, b) = [a, b) \cap \overline{\{a\}} \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

Приклад

Будь-яка зліч. множина числової прямої є борел. множиною. Дійсно, за власт. F3

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\} \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

Приклад

$$\forall a < b \in \mathbf{R} \quad (a, b) \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

$$(a, b) = [a, b) \cap \overline{\{a\}} \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

Вправа:

Показіть, що $\forall a \in \mathbf{R}$

- $$(a, +\infty) \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}), \quad [a, +\infty) \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$
- $$(-\infty, a) \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}), \quad (-\infty, a] \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$
- будь-яка відкрита множина є борел.
- будь-яка замкнена множина є борел.

Означення

Кажуть, що множина K замкнена відносно монотонної збіжності, якщо

- $A_n \in K: \quad A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots, \quad n \geq 1$, випливає, що
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in K$$
- $B_n \in K: \quad B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots, \quad n \geq 1$, випливає, що
$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in K$$

Теорема

Для того, щоб алгебра F_0 була σ-алгеброю $\Leftrightarrow$ F_0 замкнена відносно монотонної збіжності.

Доведення. I

$\Rightarrow$ (Необхідність.) Нехай F_0 — σ-алгебра, покажемо, що вона замкнена відносно монотон. збіжності, тобто

$$\forall A_n \in F_0 : \quad A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots , \quad n \geq 1, \quad \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F_0.$$

Дана властивість випливає з властивості $F3$ для σ-алгебри. Покажемо, що і для спадної послідовності її границя буде лежати в σ-алгебрі.
Отже, нехай

$$B_n \in F_0 : \quad B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots , \quad n \geq 1.$$

Покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in F_0.$$

Доведення. II

Якщо $B_n \downarrow$ (є спадною послідовністю), то

$$\overline{B_n} \uparrow$$

є зростаючою:

$$\overline{B_1} \subset \overline{B_2} \subset \cdots \subset \overline{B_n} \subset \cdots, \quad n \geq 1.$$

Тому

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n} \in F_0.$$

А з другої властивості ($F2$, доповнення) для σ-алгебри впливає, що і

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in F_0$$

Доведення. III

що потрібно було довести.

$\Leftarrow$ (Достатність.) Нехай алгебра F_0 буде замкненою відносно монотон. збіжності. Покажемо, що F_0 є σ-алгеброю. Досить довести, що виконується властивість $F3$ (зліч. об'єднання)

$$\forall n \geq 1 A_n \in F_0, \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F_0.$$

Утворимо нову послідовність

$$C_m = \bigcup_{n=1}^{m} A_n, \quad m \geq 1$$

з властивостями

Доведення. IV

- $C_1 \subset C_2 \subset \cdots$. Отже, $C_m \uparrow$
- $$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Оскільки $C_m \uparrow$ є монотонно зростаючою послідовністю, то із монотон. замкненості F_0 випливає, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in F_0$, тому і $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F_0$, що і потрібно було довести. $\square$

У т. йм. із кожною випадковою подією пов'язують числову міру її вірогіднотсті — ймовірніть. Оскільки для частотного означення ймовірності, у скін. та зліч. йм. схемах виконувались властивості невід'ємності, нормованості та адитивності, то природньо постулювати такі аксіоми йм.

Означення

Числову функцію $P : F \to [0, 1]$,визначену на класі випадкових подій F, називають ймовірністю (імовірнісною мірою), якщо виконуються такі вл.:

- (P1, невід'ємність)

$$\forall A \in F \; P(A) \geq 0;$$

- (P2, нормованість) $P(\Omega) = 1$;
- (P3, σ -адитивність)

$$\forall n \geq 1 A_n \in F : \; A_i \cap A_j = \emptyset, \; i \neq j,$$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Означення

Функція $P(\cdot)$ називається адитивною ймовірністю, якщо замість вл. $P3$) виконується слабша умова

- ($P3'$, адитивність)

$$\forall A, B \in F: \ A \cap B = \emptyset, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Зауваження

Властивість адитивності еквівалентна скін. адитивності:

- ($P3''$, скін. адитивність)

$$\forall n \geq 1 A_i \in F: \ A_i \cap A_j = \emptyset, \ i \neq j, \ i, j = \overline{1, n}$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Зауваження

Другу групу аксіом Т.йм. можна сформулювати так: "Імовірність є σ-адитивною невід'ємною нормованою функцією на класі всіх випадкових подій."

Зауваження

Аксіомами т.йм. є $F1 - F3$ та $P1 - P3$.

Зміст

Означення

Імовірнісним постором називається трійка (Ω, F, P), де
Ω — ПЕП (будь-яка абстрактна множина),
F — клас усіх випадкових подій, підмножин з Ω, які утворюють σ-алгебру з власт. $F1 - F$,
P— імовірнісна міра з власт. $P1 - P3$.

- ($F1$, нормованість) $\Omega \in F$
- ($F2$, доповнення) $A \in F \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in F$
- ($F3$, зліч. об'єднання) $\forall n \geq 1 A_n \in F, \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

- (P1, невід'ємність) $\forall A \in F \; P(A) \geq 0;$
- (P2, нормованість) $P(\Omega) = 1;$
- (P3, σ -адитивність) $\forall n \geq 1 A_n \in F : \; A_i \cap A_j = \emptyset, \; i \neq j,$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Зміст

1. Ймовірність доповнення

Нехай $A \in F$, тоді

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Оскільки $A \in F$, то з $F2$(доповнення) $\Rightarrow \overline{A} \in F$.

$$\Omega = A \cup \overline{A}, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

Із власт. $P2$ (нормованості) та Р3 (σ-адитивності) випливає

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$

1. Ймовірність доповнення

Нехай $A \in F$, тоді

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Оскільки $A \in F$, то з $F2$(доповнення) $\Rightarrow \overline{A} \in F$.

$$\Omega = A \cup \overline{A}, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

Із власт. $P2$ (нормованості) та P3 (σ-адитивності) випливає

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$

2. Ймовірність неможливої події

$$P(\emptyset) = 0.$$

Оскільки

$$\emptyset = \overline{\Omega},$$

то з першої власт. про ймовірність доповнення та P2 випливає

$$P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

2. Ймовірність неможливої події

$$P(\emptyset) = 0.$$

Оскільки

$$\emptyset = \overline{\Omega},$$

то з першої власт. про ймовірність доповнення та P2 випливає

$$P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

3. Ймовірність вкладеної різниці

$$A, \in F \quad A \subset B \Rightarrow \quad P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

Представимо подію B вигляді об'єднання двох несумісних подій.

$$B = A \cup (B \setminus A), \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

Отже, за власт. P3

$$P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

3. Ймовірність вкладеної різниці

$$A, \in F \quad A \subset B \Rightarrow \quad P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

Представимо подію B вигляді об'єднання двох несумісних подій.

$$B = A \cup (B \setminus A), \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

Отже, за власт. P3

$$P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

3. Ймовірність вкладеної різниці

$$A, \in F \quad A \subset B \Rightarrow \quad P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

Представимо подію B вигляді об'єднання двох несумісних подій.

$$B = A \cup (B \setminus A), \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

Отже, за власт. P3

$$P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

4. Монотонність ймовірності

$$A, B \in F, \quad A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$$

Із власт. невід'ємності Р1 випливає, що $P(B \setminus A) \geq 0$. Тоді із попередньої власт. (ймов. вкладеної різниці) маємо

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \geq 0 \quad \Rightarrow P(A) \leq P(B).$$

4. Монотонність ймовірності

$$A, B \in F, \quad A \subset B \;\Rightarrow\; P(A) \leq P(B).$$

Із власт. невід'ємності P1 випливає, що $P(B \setminus A) \geq 0$. Тоді із попередньої власт. (ймов. вкладеної різниці) маємо

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \geq 0 \quad \Rightarrow \; P(A) \leq P(B).$$

5. Множина значень ймовірності

$$\{P(A),\ A \in F\} \subset [0,1].$$

Оскільки

$$\emptyset \subset A \subset \Omega,$$

то за власт. монотонності ймов.(4), йм. неможливої події (2) та P2 (нормованості) отримаємо

$$0 = P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1.$$

5. Множина значень ймовірності

$$\{P(A),\ A \in F\} \subset [0,1].$$

Оскільки

$$\emptyset \subset A \subset \Omega,$$

то за власт. монотонності ймов.(4), йм. неможливої події (2) та P2 (нормованості) отримаємо

$$0 = P(\emptyset) \le P(A) \le P(\Omega) = 1.$$

6. Йм. об'єднання двох подій

$$A, B \in F \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Виразимо подію $A \cup B$ через суму несумісних подій:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B)), \quad A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \emptyset.$$

Тому за власт. P3

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus (A \cap B))) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B)). \ (1)$$

Використаємо власт. 3. йм. вкладеної різниці для подій $A \cap B \subset B$:

$$P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B).$$

Твердження повністю буде доведене, якщо отриману рівність підставити у (1).

6. Йм. об'єднання двох подій

$$A, B \in F \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Виразимо подію $A \cup B$ через суму несумісних подій:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B)), \quad A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \emptyset.$$

Тому за власт. Р3

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus (A \cap B))) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B)). \ (1)$$

Використаємо власт. 3. йм. вкладеної різниці для подій $A \cap B \subset B$:

$$P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B).$$

Твердження повністю буде доведене, якщо отриману рівність підставити у (1).

6. Йм. об'єднання двох подій

$$A, B \in F \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Виразимо подію $A \cup B$ через суму несумісних подій:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B)), \quad A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \emptyset.$$

Тому за власт. Р3

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus (A \cap B))) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B)). \quad (1)$$

Використаємо власт. 3. йм. вкладеної різниці для подій $A \cap B \subset B$:

$$P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B).$$

Твердження повністю буде доведене, якщо отриману рівність підставити у (1).

7. Формула включення-виключення

Нехай A_k, $k = \overline{1, n}$ — випадкові події, тоді

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{1\le i_1\le n} P(A_{i_1}) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) +$$

$$+ \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n).$$

Доведення I

MMI.
1. Для $n = 2$ формула виконується($\Leftarrow$ з власт. 6.)
2. Нехай вик. для n
3. Доведемо, що вик. для $n+1$. Позначимо $B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

$$P(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k) = P(B \cup A_{n+1}) = P(B) + P(A_{n+1}) - P(B \cap A_{n+1}) =$$

До $P(B)$ застосовуємо формулу вкл.-викл.

$$= \sum_{1 \leq i_1 \leq n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) +$$

Доведення II

$$+P(A_{n+1}) - P(\bigcup_{k=1}^{n}(A_k \cap A_{n+1})).$$

До повного доведення залишилось до ост. доданку ще раз заст. формулу для n подій.

Приклад I

Приклад

Студент написав n листів. Поклавши їх у конверти, він "випадковим чином " підписав адреси на конвертах. Яка ймовірність того, що хоча б один лист потрапить до свого адресата?

Приклад

Числа $1, 2, \cdots, n$ розташовані навмання. Знайти ймовірність того, що принаймні одне число співпадає із номером свого місця.

Ел. подія — упорядкована послідовність чисел. Всі ел.події рівноможливі.

$$|\Omega| = n!$$

$$A_i = \{\text{Число i знаходиться на місці з номером i}\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{\text{ хоча б одне на свооєму місці}\}$$

Що означає подія $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$?

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}, \quad P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = \frac{(n-2)!}{n!}, \quad P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

$$\sum_{1 \le i_1 \le n} P(A_{i_1}) = \sum_{1 \le i_1 \le n} \frac{(n-1)!}{n!} = 1.$$

$$\sum_{1\le i_1<i_2\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) = C_n^2\frac{(n-2)!}{n!} = \frac{(n)!}{(n-2)!2!}\frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{2!}.$$

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}) = \frac{1}{k!}$$

Тоді за формулою включення-виключення маємо

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

Вправа. Яка буде границя цієї ймовірності при $n\to\infty$?

ПИТАННЯ?