# Практикум з математичного аналізу

для студентів спеціальності "Інженерія програмного забезпечення"
факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Семестр 2

Ляшко С. І., Аджубей Л. Т., Затула Д. В.

# Зміст

# Передмова

Курс математичного аналізу є основою фундаментальної математичної підготовки для випускників природничих спеціальностей у класичних університетах.

Даний практикум з математичного аналізу призначений студентам спеціальності 121 "Інженерія програмного забезпечення" факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Він відповідає програмі курсу, яка складається з 58 годин лекцій та 56 годин практичних занять. Практикум складається з двох частин, кожна з яких містить 14 практичних занять і відповідає матеріалу одного семестру.

Основною метою, яку переслідували автори, є забезпечення навчальним матеріалом практичних занять в рамках стислого курсу математичного аналізу. В посібнику кожна тема містить всі необхідні означення і твердження, що дозволяє розв'язувати запропоновані задачі без додаткової літератури. В якості основного теоретичного матеріалу і практичних завдань використані підручники і збірник задач з математичного аналізу авторів І. І. Ляшко, С. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук, І. М. Александрович, О. І. Молодцов, Д. А. Номіровський, Б. В. Рубльов та інші [?,1,3,4].

**Тематичний план практичних занять. Семестр 2**

| |
|---|
| **Первісна та інтеграл Ньютона-Лейбніца** |
| 15. Первісна. Елементарні методи інтегрування. |
| 16. Інтегрування раціональних функцій. |
| 17. Інтегрування ірраціональних функцій методом раціоналізації. |
| 18. Інтегрування тригонометричних функцій та їх раціональних комбінацій. |
| **Інтеграл Рімана** |
| 19. Означення інтеграла Рімана та його зв'язок з інтегралом Ньютона-Лейбніца. |
| 20. Основні теореми інтегрального числення. |
| 21. Застосування інтеграла Рімана. |
| **Функції багатьох змінних** |
| 22. Простір $m$-вимірних функцій, їх границя та неперервність. |
| 23. Похідна і диференціал функції багатьох змінних. Похідні та диференціали вищих порядків. |
| 24. Екстремуми функцій багатьох змінних. |
| **Числові та функціональні ряди. Невласні інтеграли** |
| 25. Ряди з невід'ємними членами. Ряди з членами довільного знаку. |
| 26. Функціональні послідовності і ряди. Степеневі ряди. |
| 27. Ряди Фур'є. |
| 28. Невласні інтеграли. |

# Розділ 5. Первісна та інтеграл Ньютона-Лейбніца

## Тема 11. Первісна. Елементарні методи інтегрування

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Функція $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ***первісною функції*** $f(x)$, якщо $D_f = D_F$ і $\forall x \in D_f$ виконується: $F'(x) = f(x)$. Оскільки $\dfrac{dF}{dx} = f(x)$, $dF = f(x)\,dx$, то $F(x) = \int f(x)\,dx$ називається ***невизначеним інтегралом.***

**Теорема (про структуру первісної).** Нехай $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — первісна для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тоді $\forall x \in D_f = D_F$: $F'(x) = f(x)$. Для того, щоб довільна функція $\Phi(x)$ була первісною для $f(x) \;\Leftrightarrow\; \Phi(x) - F(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Сукупність всіх первісних функцій для $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* і $\int f(x)\,dx = \{F(x) + C \,|\, x \in D_f, C \in \mathbb{R}\}$, де $F'(x) = f(x)$. Як правило, позначення множини опускають і пишуть $F(x) + C$.

### Інтеграл Ньютона–Лейбніца

Інтеграл Ньютона–Лейбніца, який запроваджується до розгляду, заміняє собою невизначений інтеграл, який традиційно вивчають лише з точки зору правил та техніки його обчислення, не займаючись застосуваннями [1, с. 196].

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ***інтегровною в сенсі Ньютона–Лейбніца*** на множині $X \subset D_f$, якщо $\forall x \in X$ вона має первісну, тобто

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \overset{def}{\Leftrightarrow} \{F(a) = 0 \,\wedge\, \forall x \in X : F'(x) = f(x)\}.$$

Функція $F(x)$ називається ***інтегралом Ньютона–Лейбніца*** з фіксованою нижньою межею $a$ і змінною верхньою $x$. Її значення $F(b)$ в точці $b \in X$ називається ***визначеним інтегралом Ньютона–Лейбніца*** і позначається $\int_a^b f(t)\,dt$, де $t$ — змінна інтегрування, від вибору якої величина інтегралу не залежить. Якщо $f$ інтегровна в сенсі Ньютона–Лейбніца на множині $X$ і множина точок її розриву — не більш ніж зліченна, то $F(x)$ — це первісна у широкому розумінні.

**Теорема (формула Ньютона–Лейбніца).** Якщо $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ інтегровна в сенсі Ньютона–Лейбніца на $D_f$ і $F$ — її первісна, то $\forall a \in D_f$ і $\forall b \in D_f$ існує $\int_a^b f(x)\,dx$, однозначно визначений, і має місце рівність:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \overset{def}{=} F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

**Властивості інтеграла Ньютона–Лейбніца** [1, с. 177–179]. Нехай функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ інтегровні в сенсі Ньютона–Лейбніца, $D_f = D_g$ та $a, b, c \in D_f$.

**1.** *Антисиметричність*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

**2.** *Адитивність*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

**3.** *Диференційовність*: $\forall x \in D_f$

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x); \quad \left(\int_x^a f(t)\,dt\right)' = -f(x).$$

**4.** *Лінійність*: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ функція $(\lambda f + \mu g)(x)$ також інтегровна в сенсі Ньютона–Лейбніца і

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

**Таблиця основних інтегралів**

1) $\int 0\,dx = C$;

2) $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$;

3) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$;

4) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0, a \neq 1$;

5) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

6) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$;

8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$;

9) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$;

10) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$.

11) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + C$;

12) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x + C$.

13) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$;

14) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$;

15) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0$;

16) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

## Методи обчислення інтеграла Ньютона–Лейбніца

**Теорема (метод заміни змінної).** Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, при цьому $\exists \varphi'(x)\,\forall x \in X$, $X = D_{f \circ \varphi}$. Якщо $f(\tau)$, де $\tau = \varphi(x)$, — інтегровна за Ньютоном-Лейбніцем функція на множині $X$, то функція $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ також інтегровна та $\forall a, b \in X$ має місце формула заміни змінної в інтегралі:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\tau)\,d\tau, \quad \tau=\varphi(x).$$

**Зауваження.** Якщо в інтегралі чисельник є похідною від знаменника, то

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f'(t)\,dt}{f(t)} = \ln|f(t)|\Big|_{x_0}^{x} = \ln|f(x)| \quad \forall x: f(x)\neq 0.$$

**Теорема (метод інтегрування частинами).** Нехай $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ і $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $D_u = D_v$, $\exists u'(x), v'(x)$ для довільного $x\in D_u$, і нехай існує первісна для функції $u'(x)\cdot v(x)$. Тоді існує первісна для $u(x)\cdot v'(x)$ і має місце формула інтегрування частинами:

$$d(u\cdot v) = u\,dv + v\,du, \quad u\,dv = d(u\cdot v) - v\,du \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b u\,dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v\,du \;\Rightarrow\; \int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du, \;\; \forall (a,b)\in D_u.$$

### Первісна у широкому розумінні

Функція $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ називається ***первісною у широкому розумінні*** для функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ на множині $X\subset D_F$, якщо $F$ неперервна та існує $F'(x)=f(x)$ для всіх точок множини $X$, можливо, за виключенням не більш ніж зліченної її підмножини.

# Практичне заняття 15

**Приклад 1.** *Обчислимо невизначений інтеграл* $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^3+4x^2-8x}{3x^3}\,dx.$

⌜

В результаті почленного ділення чисельника на знаменник отримуємо суму степеневих функцій:

$$\int \frac{x^4-2x^3+4x^2-8x}{3x^3}\,dx = \int\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{4}{3x} - \frac{8}{3x^2}\right)dx.$$

Далі скористаємося лінійністю інтеграла і таблицею основних інтегралів:

$$\int\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{4}{3x} - \frac{8}{3x^2}\right)dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\cdot x + \frac{4}{3}\cdot\ln|x| - \frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) + C =$$

$$= \frac{x^2}{6} - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\ln|x| + \frac{8}{3x} + C, \;\; x\neq 0.$$

⌟

**Приклад 2.** *Обчислимо невизначений інтеграл* $\displaystyle\int \frac{e^{x+1}}{2^{x-1}}\,dx.$

⌜

Перетворимо підінтегральну функцію до зручного вигляду та скористаємося табличним інтегралом $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$:

$$\int \frac{e^{x+1}}{2^{x-1}}\,dx = 2e\int\frac{e^x}{2^x}\,dx = 2e\int\left(\frac{e}{2}\right)^x dx = 2e\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^x\left(\ln\frac{e}{2}\right)^{-1} + C.$$

⌟

**Приклад 3.** *Обчислимо невизначений інтеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

⌜

Зведемо інтеграл до табличного: $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$. Для цього зробимо лінійну заміну змінної: $x + \frac{\pi}{6} = t,\ \ dx = dt$. Тоді $\forall x \notin \left\{\frac{\pi}{3} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$\int \frac{dx}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$$

⌟

**Приклад 4.** *Обчислимо невизначений інтеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$.

⌜

Зведемо інтеграл до табличного: $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$. Для цього винесемо сталу $a$ з-під знаку інтеграла:

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}x^2\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{b}{a}x\right)^2}.$$

Тепер зробимо лінійну заміну змінної: $t = \dfrac{b}{a}x,\ \ dx = \dfrac{a}{b}\,dt$. Тоді:

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{b}{a}x\right)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{a}{b}\,dt = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}x + C.$$

⌟

**Приклад 5.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^7}{\sqrt{1-t^{16}}}\,dt$.

⌜

Функцію $f(t) = \dfrac{t^7}{\sqrt{1-t^{16}}}$ можна представити у вигляді $f(t) = g(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, де $\varphi(t) = t^8$. Тому зробимо раціональну підстановку $y = \varphi(t)$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{t^7}{\sqrt{1-t^{16}}}\,dt = \left| t = \sqrt[8]{y},\ dt = \frac{1}{8\sqrt[8]{y^7}}\,dy \right| = \int_{x_0^8}^{x^8} \frac{\sqrt[8]{y^7}}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{dy}{8\sqrt[8]{y^7}} =$$

$$= \frac{1}{8}\arcsin y\,\Big|_{x_0^8}^{x^8} = \frac{1}{8}\arcsin x^8,\quad |x| \leqslant 1.$$

⌟

**Приклад 6.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{e^{\operatorname{tg} t} + \operatorname{ctg} t}{\cos^2 t}\,dt$.

⌜

Оскільки підінтегральна функція залежить лише від функції $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$ та її похідної $\varphi'(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t}$, то зробимо раціональну заміну змінної:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{e^{\operatorname{tg} t} + \operatorname{ctg} t}{\cos^2 t}\,dt = \left| y = \operatorname{tg} t,\ dy = \frac{dt}{\cos^2 t} \right| = \int_{\operatorname{tg} x_0}^{\operatorname{tg} x} \left(e^y + \frac{1}{y}\right)dy =$$

$$= \left(e^y + \ln|y|\right)\Big|_{\operatorname{tg} x_0}^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x} + \ln|\operatorname{tg} x|,\quad x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

⌟

Обчисліть невизначені інтеграли, використовуючи таблицю основних інтегралів:

**15.1** $\displaystyle\int \frac{x^5+2x^3-4x^2-x+11}{x^2}\,dx$;

**15.2** $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,dx$;

**15.3** $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,dx$;

**15.4** $\displaystyle\int 2\cos^2\frac{x}{2}\,dx$;

**15.5** $\displaystyle\int (\cos 2x\sin x-\sin 2x\cos x)\,dx$;

**15.6** $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2\,x\,dx$;

**15.7** $\displaystyle\int \mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{ch}\,x\,dx$;

**15.8** $\displaystyle\int \frac{3^{x+1}+e^{3x}-e^{x-1}}{e^x}\,dx$.

Обчисліть невизначені інтеграли, використовуючи лінійну заміну змінної:

**15.9** $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$;

**15.10** $\displaystyle\int \sqrt[3]{(5-8x)^4}\,dx$;

**15.11** $\displaystyle\int e^{-3x+1}\,dx$;

**15.12** $\displaystyle\int \sin\,(2x-3)\,dx$;

**15.13** $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+9}$;

**15.14** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца, використовуючи раціональну заміну змінної:

**15.15** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^3}{t^2-4}\,dt$;

**15.16** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t}{\sqrt{b^2t^2+a^2}}\,dt$;

**15.17** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} t^4\sin\,(t^5+3)\,dt$;

**15.18** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} t\sqrt{b^2t^2+a^2}\,dt$;

**15.19** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1}{t^3}e^{-\frac{1}{t^2}}\,dt$;

**15.20** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{\sin t}\cos t\,dt$;

**15.21** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t\ln t}$;

**15.22** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t\ln t\ln\ln t}$.

# Тема 12. Інтегрування раціональних функцій

***Раціональна функція однієї змінної*** (або ж ***дробово-раціональна функція***) — це алгебраїчний вираз, що є відношенням двох многочленів, коефіцієнти яких належать множині дійсних чисел, тобто має вигляд:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0},$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_m$, $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — сталі, $m$ та $n$ — невід'ємні цілі числа.

Якщо $m \geqslant n$, то дріб неправильний. Кожен неправильний дріб може бути представлений у вигляді суми многочлена $W(x)$ (ціла частина) та правильного дробу $\left(\frac{R}{Q}\right)$: $\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$. З класу правильних дробів виділяють 4 типи основних *елементарних дробів*: $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^n}$, $\frac{Mx+N}{x^2+2px+q}$ та $\frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^n}$, де $a, p, q, M, N \in \mathbb{R}$, а $n > 1$ — ціле число. При цьому $x^2 + 2px + q$ не має дійсних коренів у випадку, якщо дискримінант $D < 0 \ \Leftrightarrow \ p^2 - q < 0 \ \Leftrightarrow \ q - p^2 > 0$.

### Розвинення правильних дробів на прості

Вигляд розвинення правильних дробів на прості залежить від розвинення многочлена $Q_n(x)$ на множники. Кожен многочлен $n$-го степеня з дійсними коефіцієнтами і коефіцієнтом 1 при $x^n$ можна однозначно представити у вигляді співмножників виду $x - a$ та $x^2 + px + q$. Якщо маємо співмножники, що співпадають, то:

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_k)^{n_k} \times \\ \times (x^2+p_1x+q_1)^{m_1}(x^2+p_2x+q_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_rx+q_r)^{m_r},$$

де $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ — корені многочлена $Q_n(x)$; $n_i$, $i = \overline{1,k}$ — кратності коренів $a_i$; $p_j, q_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,r}$ — коефіцієнти тричленів; $m_j$, $j = \overline{1,r}$ — кратності квадратичних тричленів. При цьому $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i + 2\sum\limits_{j=1}^{r} m_j = n$.

Будь-який правильний раціональний дріб єдиним способом розкладається на скінченне число елементарних дробів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{A_{n_1}}{x-a_1} + \frac{B_1}{(x-a_2)^{n_2}} + \frac{B_2}{(x-a_2)^{n_2-1}} + \\ + \ldots + \frac{B_{n_2}}{x-a_2} + \ldots + \frac{K_1}{(x-a_k)^{n_k}} + \frac{K_2}{(x-a_k)^{n_k-1}} + \ldots + \frac{K_{n_k}}{x-a_k} + \ldots + \\ + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_rx+q_r)^{m_r}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_rx+q_r)^{m_r-1}} + \ldots + \frac{M_rx+N_r}{x^2+p_rx+q_r}. \qquad (1)$$

Для того, щоб визначити невідомі коефіцієнти, множимо обидві частини на $Q(x)$. Із рівності многочленів у лівій і правій частинах (1) випливає рівність коефіцієнтів при однакових степенях $x$. Прирівнюємо їх і отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод знаходження коефіцієнтів розвинення правильного раціонального дробу у суму простих дробів називається ***методом невизначених коефіцієнтів***.

# Практичне заняття 16

**Приклад 1.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{A\,dt}{t-a}$, *де* $a, A \in \mathbb{R}$.

⌜

Зведемо інтеграл до табличного лінійною заміною $y = t - a$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{A\,dt}{t-a} = \int_{x_0-a}^{x-a} \frac{A\,dy}{y} = A\ln|y|\Big|_{x_0-a}^{x-a} = A\ln|x-a|, \quad x \neq a.$$

⌟

**Приклад 2.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{A\,dt}{(t-a)^n}$, *де* $a, A \in \mathbb{R}$ *та* $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

⌜

Зведемо інтеграл до табличного лінійною заміною $y = t - a \neq 0$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{A\,dt}{(t-a)^n} = \int_{x_0-a}^{x-a} \frac{A\,dy}{y^n} = A\int_{x_0-a}^{x-a} y^{-n}\,dy = A \cdot \frac{y^{1-n}}{1-n}\Big|_{x_0-a}^{x-a} = A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n}.$$

⌟

**Приклад 3.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{(Mt+N)\,dt}{t^2+2pt+q}$, *де* $M, N, p, q \in \mathbb{R}$.

⌜

Позначимо $b^2 = q - p^2 > 0$ та зробимо лінійну заміну змінної $y = t + p$:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x} \frac{(Mt+N)\,dt}{t^2+2pt+q} = \int_{x_0}^{x} \frac{(Mt+N)\,dt}{(t+p)^2+q-p^2} = \left| \begin{array}{c} t = y-p \\ dy = dt \end{array} \right| = \\
&= \int_{x_0+p}^{x+p} \frac{(My-Mp+N)\,dy}{y^2+b^2} = M\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{y\,dy}{y^2+b^2} + \int_{x_0+p}^{x+p} \frac{(N-Mp)\,dy}{y^2+b^2} = \\
&= \frac{M}{2}\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{dy^2}{y^2+b^2} + (N-Mp)\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{dy}{y^2+b^2} = \\
&= \frac{M}{2}\ln\left(y^2+b^2\right)\Big|_{x_0+p}^{x+p} + (N-Mp)\cdot\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{y}{b}\Big|_{x_0+p}^{x+p} = \\
&= \frac{M}{2}\ln\left|(x+p)^2+q-p^2\right| + \frac{N-Mp}{\sqrt{q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + C.
\end{aligned}$$

⌟

**Приклад 4.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{(Mt+N)\,dt}{((t+p)^2+b^2)^n}$, *де* $M, N, p, b \in \mathbb{R}$ *та* $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

⌜

Позначимо $b^2 = q - p^2 > 0$ та зробимо лінійну заміну змінної $y = t + p$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(Mt+N)\,dt}{((t+p)^2+b^2)^n} = \left| \begin{array}{c} t = y - p \\ dy = dt \end{array} \right| = \int_{x_0+p}^{x+p} \frac{(M(y-p)+N)\,dy}{(y^2+b^2)^n} =$$

$$= \frac{M}{2}\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{2y\,dy}{(y^2+b^2)^n} + (N - Mp)\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{dy}{(y^2+b^2)^n}.$$

Тоді:

$$\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{2y\,dy}{(y^2+b^2)^n} = \int_{x_0+p}^{x+p} \frac{d(y^2+b^2)}{(y^2+b^2)^n} = \left.\frac{(y^2+b^2)^{1-n}}{1-n}\right|_{x_0+p}^{x+p} = \frac{((x+p)^2+b^2)^{1-n}}{1-n}.$$

Позначимо другий інтеграл як $I_n = \displaystyle\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{dy}{(y^2+b^2)^n}$ та запишемо для нього рекурентну формулу, використовуючи формулу інтегрування частинами:

$$I_n = \left| \begin{array}{cc} u = \dfrac{1}{(y^2+b^2)^n}, & du = \dfrac{-2ny}{(y^2+b^2)^{n+1}}\,dy \\ dv = dy, & v = y \end{array} \right| =$$

$$= \left.\frac{y}{(y^2+b^2)^n}\right|_{x_0+p}^{x+p} + 2n\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{y^2\,dy}{(y^2+b^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x+p}{((x+p)^2+b^2)^n} + 2n\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{y^2+b^2-b^2}{(y^2+b^2)^{n+1}}\,dy =$$

$$= \frac{x+p}{((x+p)^2+b^2)^n} + 2n\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{dy}{(y^2+b^2)^n} - 2nb^2\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{dy}{(y^2+b^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x+p}{((x+p)^2+b^2)^n} + 2nI_n - 2nb^2 I_{n+1}.$$

Тобто

$$2nb^2 I_{n+1} = \frac{x+p}{((x+p)^2+b^2)^n} + (2n-1)I_n;$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2nb^2}\left(\frac{x+p}{((x+p)^2+b^2)^n} + (2n-1)I_n\right), \quad I_1 = \frac{1}{b}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+p}{b}.$$

⌟

**Приклад 5.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{2t^3-6t^2-11}{(1-t)^2(4+t^2)}\,dt.$

⌜

Оскільки підінтегральна функція є правильним раціональним дробом, то розкладемо її на прості дроби відповідно до формули (1):

$$\frac{2t^3-6t^2-11}{(1-t)^2(4+t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+4};$$

$$2t^3-6t^2-11 = A(1-t)(t^2+4) + B(t^2+4) + (Ct+D)(1-t)^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях $t$, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти $A, B, C$ та $D$:

$$
\begin{array}{l} t^3: \\ t^2: \\ t^1: \\ t^0: \end{array}
\begin{cases} 2 = -A + C \\ -6 = A + B - 2C + D \\ 0 = -4A + C - 2D \\ -11 = 4A + 4B + D \end{cases}
\Leftrightarrow \quad
\begin{cases} A = 0 \\ B = -3 \\ C = 2 \\ D = 1 \end{cases}
$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \frac{2t^3 - 6t^2 - 11}{(1-t)^2(4+t^2)}\,dt = &-3\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{(1-t)^2} + \int_{x_0}^{x} \frac{2t+1}{t^2+4}\,dt = \\
&= 3\int_{x_0}^{x} \frac{d(1-t)}{(1-t)^2} + \int_{x_0}^{x} \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} + \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^2+4} = \\
&= \left(-\frac{3}{1-t} + \ln\left(t^2+4\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{x_0}^{x} = \\
&= \frac{3}{x-1} + \ln\left(x^2+4\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}, \quad x \neq 1.
\end{aligned}
$$

⌟

**Приклад 6.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\int_{x_0}^{x} \ln t\,dt$.

⌜

Застосуємо формулу інтегрування частинами для того, щоб отримати інтеграл від похідної функції $f(t) = \ln t$:

$$
\int_{x_0}^{x} \ln t\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = \ln t, & du = \frac{1}{t}\,dt \\ dv = dt, & v = t \end{array} \right| = t\ln t\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} dt = x(\ln x - 1), \quad x > 0.
$$

⌟

**Приклад 7.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\int_{x_0}^{x} e^{at}\cos bt\,dt$.

⌜

Двічі скористаємося формулою інтегрування частинами:

$$
\begin{aligned}
I = \int_{x_0}^{x} e^{at}\cos bt\,dt = &\left| \begin{array}{ll} u = \cos bt, & du = -b\sin bt\,dt \\ dv = e^{at}\,dt, & v = \frac{1}{a}e^{at} \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{a}e^{at}\cos bt\Big|_{x_0}^{x} + \frac{b}{a}\int_{x_0}^{x} e^{at}\sin bt\,dt = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = \sin bt, & du = b\cos bt\,dt \\ dv = e^{at}\,dt, & v = \frac{1}{a}e^{at} \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{at}\sin bt\Big|_{x_0}^{x} - \frac{b^2}{a^2}\int_{x_0}^{x} e^{at}\cos bt\,dt.
\end{aligned}
$$

Тобто отримали рівність, з якої можна виразити значення інтеграла:

$$
I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}I;
$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx).$$

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца шляхом розкладу правильних дробів на прості:

**16.1** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{4t}{2t+1}\,dt;$

**16.2** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt;$

**16.3** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{3t^4}{t^2+t-2}\,dt;$

**16.4** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^4+1}{t^3-t^2+t-1}\,dt;$

**16.5** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^4-1};$

**16.6** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^3-6t^2+9t+7}{(t-2)^3(t-5)}\,dt;$

**16.7** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^4-7t^3-8t^2-23t-11}{(t^2+4t+5)(t-3)^2(t+2)}\,dt;$

**16.8** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{4t^4-t^3+7t^2+2}{(t-1)(t^2+1)^2}\,dt.$

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца за допомогою формули інтегрування частинами:

**16.9** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} t\cos t\,dt;$

**16.10** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} te^{-t}\,dt;$

**16.11** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^t\sin t\,dt;$

**16.12** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \operatorname{arctg}\sqrt{t}\,dt;$

**16.13** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \arccos t\,dt;$

**16.14** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} (\arcsin t)^2 dt;$

**16.15** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} t\operatorname{tg}^2 t\,dt;$

**16.16** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} 3t^2\ln(1+t)\,dt;$

**16.17** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sin\ln t\,dt;$

**16.18** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t\operatorname{arctg} t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt.$

# Тема 13. Інтегрування ірраціональних функцій методом раціоналізації

***Ірраціональна функція*** — це елементарна функція, побудована зі степеневих функцій з раціональними показниками, яка не зводиться до раціональної або дробово-раціональної функції. Основним методом інтегрування ірраціональних функцій є пошук підстановок, які дають змогу позбутися від ірраціональностей у підінтегральній функції та звести задачу до інтегрування раціональної або дробово-раціональної функції. Такі підстановки називаються ***раціоналізуючими***.

***Раціональна функція*** $R(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ — це довільна функція, яка отримана в результаті скінченного числа арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення та ділення) над змінними $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і довільними числами.

Нехай $k_1, k_2, \ldots, k_n$ та $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — деякі цілі числа, $n \in \mathbb{N}$, а $r$ — спільне кратне чисел $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

**1.** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} R\left(t; t^{\frac{k_1}{l_1}}; \ldots; t^{\frac{k_n}{l_n}}\right) dt$ зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції за допомогою підстановки $t = y^r,\ dt = r y^{r-1} dy$.

**2.** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} R\left(t; \left(\frac{at+b}{ct+s}\right)^{\frac{k_1}{l_1}}; \ldots; \left(\frac{at+b}{ct+s}\right)^{\frac{k_n}{l_n}}\right) dt$ зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції підстановкою $y^r = \dfrac{at+b}{ct+s},\ dt = d\left(\dfrac{sy^r - b}{a - cy^r}\right)$.

### Інтеграли, що містять квадратний тричлен

**1.** Для інтеграла вигляду $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{P_m(t)}{\sqrt{at^2+bt+c}}\, dt$, де $P_m(t)$ — многочлен степеня $m \geqslant 1$, має місце рівність:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{P_m(t)}{\sqrt{at^2+bt+c}}\, dt = Q_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{at^2+bt+c}},$$

де $Q_{m-1}(x)$ — многочлен $(m-1)$-го степеня з невизначеними коефіцієнтами, $\lambda$ — стала, що також є невизначеним коефіцієнтом. Диференціюючи це рівняння, маємо, що

$$P_m(x) = Q'_{m-1}(x) \cdot (ax^2+bx+c) + Q_{m-1}(x) \cdot \frac{2ax+b}{2} + \lambda.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $x$, отримаємо систему лінійних рівнянь, з якої знаходяться всі невідомі коефіцієнти.

**2.** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{(t-d)^n \cdot \sqrt{at^2+bt+c}}$, де $n \in \mathbb{N}$ та $d \notin [x_0, x]$, зводиться до інтеграла вигляду $\operatorname{sgn}(d-x) \displaystyle\int \frac{y^{n-1}\, dy}{\sqrt{a^* y^2 + b^* y + c^*}}$ заміною $t - d = \dfrac{1}{y}$.

**3.** Інтеграл $\int_{x_0}^{x} R\big(t; \sqrt{at^2+bt+c}\big)\,dt$ зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції при застосуванні однієї з ***підстановок Ейлера***.

***Перша підстановка Ейлера*** $\sqrt{at^2+bt+c} = y - \sqrt{a}t$ застосовується у випадку, якщо $a > 0$. У такому разі $t = \dfrac{y^2-c}{2\sqrt{a}y+b}$ та

$$\sqrt{at^2+bt+c} = y - \sqrt{a}\cdot\frac{y^2-c}{2\sqrt{a}y+b} = \frac{\sqrt{a}y^2+by+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}y+b}.$$

Після інтегрування отриманого дробу повертаємось до змінної $t$ підстановкою $y = \sqrt{at^2+bt+c} + \sqrt{a}t$.

***Друга підстановка Ейлера*** $\sqrt{at^2+bt+c} = ty + \sqrt{c}$ застосовується у випадку, якщо $c > 0$. У такому разі $t = \dfrac{2\sqrt{c}y-b}{a-y^2}$ та

$$\sqrt{at^2+bt+c} = y\cdot\frac{2\sqrt{c}y-b}{a-y^2} + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}y^2-by+a\sqrt{c}}{a-y^2}.$$

***Третя підстановка Ейлера*** $\sqrt{at^2+bt+c} = y(t-t_1)$ застосовується у випадку, якщо квадратний тричлен $at^2+bt+c$ має різні дійсні корені $t_1, t_2$ та коефіцієнт $a > 0$. Тоді

$$\sqrt{at^2+bt+c} = \sqrt{a(t-t_1)(t-t_2)} = \sqrt{a}\,|t-t_1|\sqrt{\frac{t-t_2}{t-t_1}} \;\Rightarrow\; y = \sqrt{\frac{a(t-t_2)}{t-t_1}}$$

і маємо інтеграл $\displaystyle\int_{x_0}^{x} R_1\left(t; \sqrt{\frac{a(t-t_2)}{t-t_1}}\right)dt.$

Зазначимо, що застосування підстановок Ейлера призводить до громіздких обчислень. Тому, як альтернативу, використовують інші способи інтегрування. Зокрема, у тричлені можна виділити повний квадрат:

$$at^2+bt+c = a\left(\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right).$$

Тоді інтеграл $\int_{x_0}^{x} R\big(t; \sqrt{at^2+bt+c}\big)\,dt$ за допомогою заміни $y = t + \dfrac{b}{2a}$ в залежності від знаків $a$ та $(4ac-b^2)$ зводиться до інтеграла одного з видів:

**4.** $\int R\Big(y; \sqrt{q^2-y^2}\Big)\,dy$, що заміною $y = q\sin u$ зводиться до $\int R(\sin u, \cos u)\,du$.

**5.** $\int R\Big(y; \sqrt{y^2+q^2}\Big)\,dy$, що заміною $y = q\,\mathrm{tg}\,u$ зводиться до $\int R(\sin u, \cos u)\,du$.

**6.** $\int R\Big(y; \sqrt{y^2-q^2}\Big)\,dy$, що заміною $y = \dfrac{q}{\cos u}$ зводиться до $\int R(\sin u, \cos u)\,du$.

## Інтегрування диференціальних біномів

Вираз $x^m(a+bx^n)^p$, де $m, n, p$ — раціональні числа, називається ***диференціальним біномом***.

**Теорема (Чебишева).** Первісна функції $x^m(a+bx^n)^p$ виражається через елементарні функції тільки в наступних трьох випадках: 1) $p$ — ціле число; 2) $\dfrac{m+1}{n}$ — ціле; 3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ — ціле.

Для зазначених випадків наведемо підстановки, які призводять до інтегрування раціональних функцій.

**1.** Нехай $p$ — ціле число, $m=\dfrac{k}{l}$ та $n=\dfrac{r}{s}$, де $k,l,r,s$ — цілі. Інтеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ заміною $x=y^\lambda$, $dx=\lambda y^{\lambda-1}\,dy$, де $\lambda$ — найменше спільне кратне чисел $l$ та $s$, зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції.

**2.** Нехай $\dfrac{m+1}{n}$ — ціле число, $p=\dfrac{\mu}{\lambda}$. Тоді інтеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ заміною $a+bx^n=y^\lambda$ зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції.

**3.** Нехай $\dfrac{m+1}{n}+p$ — ціле число, $p=\dfrac{\mu}{\lambda}$. Тоді інтеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ заміною $\dfrac{a+bx^n}{x^n}=y^\lambda$ зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції.

# Практичне заняття 17

**Приклад 1.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{t}+1}{t^2-\sqrt{t}}\,dt.$

⌜

Зведемо задачу до інтегрування дробово-раціональної функції за допомогою заміни $t=y^2$, $dt=2y\,dy$:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{t}+1}{t^2-\sqrt{t}}\,dt=\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}}\frac{y+1}{y^4-y}\cdot 2y\,dy=2\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}}\frac{y+1}{y^3-1}\,dy.$$

Оскільки отримали правильний дріб під знаком інтеграла, то можемо розкласти його на прості дроби:

$$\frac{y+1}{y^3-1}=\frac{y+1}{(y-1)(y^2+y+1)}=\frac{A}{y-1}+\frac{By+C}{y^2+y+1};$$

$$y+1=A(y^2+y+1)+(By+C)(y-1).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях $y$, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти $A,B$ та $C$:

$$\begin{array}{l} y^2: \\ y^1: \\ y^0: \end{array}\begin{cases} 0=A+B \\ 1=A-B+C \\ 1=A-C \end{cases} \Leftrightarrow \quad A=\frac{2}{3},\ B=-\frac{2}{3},\ C=-\frac{1}{3}.$$

Тоді

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{t}+1}{t^2-\sqrt{t}}\,dt=2\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}}\frac{\frac{2}{3}\,dy}{y-1}-2\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}}\frac{\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}}{y^2+y+1}\,dy=$$

$$= \frac{4}{3}\ln|y-1|\Big|_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}} - \frac{2}{3}\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}} \frac{2y+1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dy =$$

$$= \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt{x}-1\right| - \frac{2}{3}\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt{x}-1\right| - \frac{2}{3}\ln\left|\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|\Bigg|_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt{x}-1\right| - \frac{2}{3}\ln\left|x+\sqrt{x}+1\right|, \quad x \neq 1.$$

⌟

**Приклад 2.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,dt.$

⌜

Зведемо задачу до інтегрування дробово-раціональної функції за допомогою заміни $\dfrac{t-1}{t+1} = y^2 \;\Rightarrow\; t = \dfrac{y^2+1}{1-y^2},\; dt = \dfrac{4y}{(y^2-1)^2}\,dy$. Оскільки $D_f = (-\infty,-1) \cup$ $\cup\, [1,+\infty)$, то позначимо $g(x) = -1$, якщо $x < -1$, та $g(x) = 1$, якщо $x > 1$. Тоді:

$$\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,dt = \int_{\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} |y|\cdot\frac{4y}{(y^2-1)^2}\,dy = g(x)\cdot\int_{\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \frac{4y^2}{(y^2-1)^2}\,dy.$$

Розкладемо правильний дріб під знаком інтеграла на прості дроби:

$$\frac{4y^2}{(y^2-1)^2} = \frac{4y}{(y-1)^2(y+1)^2} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{(y-1)^2} + \frac{C}{y+1} + \frac{D}{(y+1)^2};$$

$$4y^2 = A(y-1)(y+1)^2 + B(y+1)^2 + C(y+1)(y-1)^2 + D(y-1)^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях $y$, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти $A, B, C$ та $D$:

$$\begin{array}{l} y^3: \\ y^2: \\ y^1: \\ y^0: \end{array} \begin{cases} 0 = A + C \\ 4 = A + B - C + D \\ 0 = -A + 2B - C - 2D \\ 0 = -A + B + C + D \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -1 \\ D = 1 \end{cases}$$

Тоді

$$\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,dt = g(x)\cdot\int_{\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\left(\frac{1}{y-1} + \frac{1}{(y-1)^2} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{(y+1)^2}\right)dy =$$

$$= g(x)\cdot\left(\ln|y-1| - \frac{1}{y-1} - \ln|y+1| - \frac{1}{y+1}\right)\Bigg|_{\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} =$$

$$= g(x)\cdot\left(\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| - \frac{2y}{y^2-1}\right)\Bigg|_{\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\right| + (x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty).$$
$\lrcorner$

**Приклад 3.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{6t^3-t-1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\,dt.$

$\ulcorner$

Підінтегральна функція має вигляд $\dfrac{P_3(t)}{\sqrt{at^2+bt+c}}$, тобто можемо представити інтеграл у вигляді

$$\int_{x_0}^{x} \frac{6t^3-t-1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\,dt = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+2x+2} + \lambda\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+2}}.$$

Після диференціювання даної рівності маємо:

$$6x^3-x-1 = (2Ax+B)\cdot(x^2+2x+2) + (Ax^2+Bx+C)\cdot(x+1) + \lambda.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях $x$, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти $A, B, C$ та $\lambda$:

$$\begin{array}{l} x^3: \\ x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} 6 = 3A \\ 0 = 5A + 2B \\ -1 = 4A + 3B + C \\ -1 = 2B + C + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -5 \\ C = 6 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Тоді

$$\int_{x_0}^{x} \frac{6t^3-t-1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\,dt = (2x^2-5x+6)\sqrt{x^2+2x+2} + 3\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+2}} =$$
$$= (2x^2-5x+6)\sqrt{x^2+2x+2} + 3\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2+1}} =$$
$$= (2x^2-5x+6)\sqrt{x^2+2x+2} + 3\ln\left|t-1+\sqrt{(t+1)^2+1}\right|\Big|_{x_0}^{x} =$$
$$= (2x^2-5x+6)\sqrt{x^2+2x+2} + 3\ln\left|x-1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|.$$
$\lrcorner$

**Приклад 4.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+t-1}}.$

$\ulcorner$

Зведемо інтеграл до більш простого вигляду заміною $\dfrac{1}{t} = y$, $-\dfrac{1}{t^2}\,dt = dy$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+t-1}} = -\int_{\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{x}} \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}-1}} = -\operatorname{sgn} x\int_{\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{x}}\frac{y\,dy}{\sqrt{1+y-y^2}}.$$

Оскільки $1+y-y^2 = \dfrac{5}{4} - \left(\dfrac{1}{4} - y + y^2\right) = \dfrac{5}{4} - \left(\dfrac{1}{2} - y\right)^2$, то лінійною заміною змінної $z = \dfrac{1}{2} - y$ зведемо інтеграл до двох табличних:

$$\int_{\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{x}} \frac{y\,dy}{\sqrt{1+y-y^2}} = \int_{\frac12-\frac{1}{x_0}}^{\frac12-\frac1x} \frac{\left(z+\frac12\right)dz}{\sqrt{\frac54 - z^2}} =$$

$$= -\frac12 \int_{\frac12-\frac{1}{x_0}}^{\frac12-\frac1x} \frac{d\left(\frac54 - z^2\right)}{\sqrt{\frac54 - z^2}} + \frac12 \int_{\frac12-\frac{1}{x_0}}^{\frac12-\frac1x} \frac{dz}{\sqrt{\frac54 - z^2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac54 - z^2}\,\Bigg|_{\frac12-\frac{1}{x_0}}^{\frac12-\frac1x} + \frac12 \arcsin\frac{2z}{\sqrt5}\Bigg|_{\frac12-\frac{1}{x_0}}^{\frac12-\frac1x}.$$

Отже,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+t-1}} = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{\frac54 - \left(\frac12 - \frac1x\right)^2} - \frac{\operatorname{sgn} x}{2} \arcsin\frac{2\left(\frac12 - \frac1x\right)}{\sqrt5} =$$

$$= \frac1x \sqrt{x^2+x-1} - \frac{\operatorname{sgn} x}{2} \arcsin\frac{x-2}{\sqrt5 x}, \quad x \neq 0.$$

┘

**Приклад 5.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t - \sqrt{t^2+2t+4}}$.

┌

Підінтегральна функція має вигляд $R\big(t; \sqrt{at^2+bt+c}\big)$, причому у даному випадку $a = 1 > 0$. Тож зручно буде застосувати першу підстановку Ейлера $\sqrt{t^2+2t+4} = y - t \;\Leftrightarrow\; t = \dfrac{y^2-4}{2(y+1)}$, в результаті чого отримаємо інтеграл від дробово-раціональної функції: $\sqrt{t^2+2t+4} = \dfrac{y^2+2y+4}{2(y+1)}$; $dt = \dfrac{y^2+2y+4}{2(y+1)^2}\,dy$;

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t - \sqrt{t^2+2t+4}} = \int_{x_0+\sqrt{x_0^2+2x_0+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} \frac{1}{\frac{y^2-4}{2(y+1)} - \frac{y^2+2y+4}{2(y+1)}} \cdot \frac{y^2+2y+4}{2(y+1)^2}\,dy =$$

$$= -\int_{x_0+\sqrt{x_0^2+2x_0+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} \frac{y^2+2y+4}{2(y+1)(y+4)}\,dy =$$

$$= -\frac12 \int_{x_0+\sqrt{x_0^2+2x_0+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} \left(1 - \frac{3y}{(y+1)(y+4)}\right) dy.$$

Оскільки отримали правильний дріб під знаком інтеграла, то можемо розкласти його на прості дроби:

$$\frac{3y}{(y+1)(y+4)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+4} = \frac{(A+B)y + 4A + B}{(y+1)(y+4)}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях $y$, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти $A$ та $B$:

$$\begin{matrix} y^1: \\ y^0: \end{matrix} \begin{cases} 3 = A + B \\ 0 = 4A + B \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 4 \end{cases}$$

Тоді

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t-\sqrt{t^2+2t+4}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+2x+4}\right) + \frac{1}{2}\int_{x_0+\sqrt{x_0^2+2x_0+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} \left(\frac{-1}{y+1}+\frac{4}{y+4}\right) dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+2x+4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\ln|y+1|+4\ln|y+4|\right)\Big|_{x_0+\sqrt{x_0^2+2x_0+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+2x+4}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right|\right) +$$

$$+ 2\ln\left|x+4+\sqrt{x^2+2x+4}\right|.$$

⌟

**Приклад 6.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{t}\,dt.$

⌜

Оскільки вираз під знаком інтеграла $\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{t}\,dt = t^{-1}\left(1+t^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} dt$ є диференціальним біномом, то застосуємо теорему Чебишева. Маємо, що $p = \dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, але $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{-1+1}{\frac{1}{2}} = 0 \in \mathbb{Z}$, тому використаємо другу підстановку Чебишева: $y^3 = 1+t^{\frac{1}{2}} \;\Leftrightarrow\; t = (y^3-1)^2;\ dt = 6y^2(y^3-1)\,dy$. Тоді:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{t}\,dt = \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{y}{(y^3-1)^2}\cdot 6y^2(y^3-1)\,dy = 6\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{y^3\,dy}{y^3-1}.$$

Після виділення із неправильного дробу під знаком інтеграла цілої частини маємо:

$$6\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{(y^3-1+1)\,dy}{y^3-1} = 6\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} dy + \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{6\,dy}{y^3-1}.$$

Отриманий правильний дріб у другому інтегралі розкладемо на прості дроби:

$$\frac{6}{y^3-1} = \frac{6}{(y-1)(y^2+y+1)} =$$

$$= \frac{A}{y-1} + \frac{By+C}{y^2+y+1} = \frac{(A+B)y^2+(A-B+C)y+A-C}{(y-1)(y^2+y+1)}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях $y$, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти $A, B$ та $C$:

$$\begin{matrix} y^2: \\ y^1: \\ y^0: \end{matrix} \begin{cases} 0 = A+B \\ 0 = A-B+C \\ 6 = A-C \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad A=2,\ B=-2,\ C=-4.$$

Тоді
$$\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\frac{6\,dy}{y^3-1}=\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\frac{2\,dy}{y-1}-\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\frac{(2y+4)\,dy}{y^2+y+1}=$$
$$=2\ln|y-1|\Big|_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}-\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\frac{2y+4}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dy.$$
Оскільки
$$\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\frac{2y+4}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dy=\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\frac{d\left(\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\right)}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+3\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$
$$=\left(\ln\left|\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|+\frac{3\cdot 2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(y+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}},$$
то
$$\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{t}\,dt\;=\;6\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+2\ln\left|\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-1\right|-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3}}-$$
$$-\;\ln\left|\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}+\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1\right|,\;\;x\neq 0.$$
⌟

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца:

**17.1** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t^2}-\sqrt{t}}\,dt;$

**17.2** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{t(\sqrt{t}+\sqrt[5]{t^2})};$

**17.3** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{t^2}{\sqrt{t-1}}\,dt;$

**17.4** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{t^2+\sqrt{t+1}}{\sqrt[3]{t+1}}\,dt;$

**17.5** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{t\sqrt[3]{2+t}}{t+\sqrt[3]{2+t}}\,dt;$

**17.6** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\cdot\frac{dt}{t};$

**17.7** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{3t^2-5t}{\sqrt{3-2t-t^2}}\,dt;$

**17.8** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{3t^3}{\sqrt{t^2+4t+5}}\,dt;$

**17.9** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+4t-4}};$

**17.10** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{(t-1)\sqrt{t^2+t+1}};$

**17.11** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{1+\sqrt{t^2+2t+2}};$

**17.12** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{2\,dt}{\sqrt{t^2+t+1}-t};$

**17.13** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{1+\sqrt{1-2t-t^2}};$

**17.14** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}t^{-1}\left(1+t^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}dt;$

**17.15** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}}\,dt;$

**17.16** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{2t}\,dt;$

**17.17** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{t^{11}\sqrt{1+t^4}};$

**17.18** $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{t^3}}}{t^2\cdot\sqrt[8]{t}}\,dt.$

# Тема 14. Інтегрування тригонометричних функцій та їх раціональних комбінацій

Інтеграли вигляду $\int_{x_0}^{x} R(\sin t; \cos t)\,dt$, де у загальному випадку $R$ — деяка раціональна функція, зводяться до інтегралів від дробово-раціональних функцій за допомогою ***універсальної тригонометричної підстановки*** $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} = y$. При цьому $t = 2\operatorname{arctg} y,\ dt = \dfrac{2\,dy}{1+y^2}$;

$$\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = 2\cdot\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\cdot\cos^2\frac{t}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} = \frac{2y}{1+y^2};$$

$$\cos t = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1 = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} = \frac{1-y^2}{1+y^2}.$$

Зазначимо, що застосування підстановки $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} = y$ можливе лише при $t \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k)$, де $k$ — довільне ціле число.

У деяких частинних випадках існують такі способи інтегрування $R(\sin t; \cos t)$.

**1.** Якщо $R(\sin t; \cos t)$ — непарна функція за змінною $\sin t$, тоді раціоналізація досягається заміною $y = \cos t$.

**2.** Якщо $R(\sin t; \cos t)$ — непарна функція за змінною $\cos t$, тоді раціоналізація досягається заміною $y = \sin t$.

**3.** Якщо $R(-\sin t; -\cos t) = R(\sin t; \cos t)$, то заміна $y = \operatorname{tg} t$ призведе до інтегрування дробово-раціональної функції, при цьому застосування підстановки можливе при $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k, \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$, де $k \in \mathbb{Z}$. У такому разі: $\sin t = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$, $\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ та $dt = \dfrac{dy}{1+y^2}$.

**4.** Інтеграл $\int_{x_0}^{x} \sin^n t \cos^m t\,dt$ у випадку раціональних $m$ і $n$ зводиться до інтегрування диференціального біному підстановкою $y = \sin^2 t,\ dy = 2\sin t\cos t\,dt$:

$$\int_{x_0}^{x} \sin^n t\cos^m t\,dt = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \sin^{n-1} t\,(1-\sin^2 t)^{\frac{m-1}{2}}\cdot 2\sin t\cos t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\sin^2 x_0}^{\sin^2 x} y^{\frac{n-1}{2}}(1-y)^{\frac{m-1}{2}}\,dy.$$

Якщо $m, n$ — парні натуральні числа, то використовуємо формули пониження степеня: $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

Наведемо деякі інтеграли, що не обчислюються за допомогою елементарних функцій: $\int_{x_0}^{x} e^{-t^2}\,dt$ — *інтеграл Пуассона*, $\int_{x_0}^{x} \sin t^2\,dt$ та $\int_{x_0}^{x} \cos t^2\,dt$ — *інтеграли Френеля*, $\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\ln t}$ — *інтегральний логарифм*, $\int_{x_0}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$ — *інтеграл Діріхле*.

# Практичне заняття 18

**Приклад 1.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \cos^5 t\, dt$.

⌜

Оскільки підінтегральна функція є непарною по змінній $\cos t$, тобто виконується умова $R(\sin t; -\cos t) = -R(\sin t; \cos t)$, то застосуємо підстановку $y = \sin t$:

$$\int_{x_0}^{x} \cos^5 t\, dt = \int_{x_0}^{x} \cos^4 t\, d(\sin t) = \int_{x_0}^{x} (1-\sin^2 t)^2\, d(\sin t) = \int_{\sin x_0}^{\sin x} (1-y^2)^2\, dy =$$

$$= \left(y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{\sin x_0}^{\sin x} = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5}.$$

⌟

**Приклад 2.** *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{3\sin t + \cos t}$.

⌜

Оскільки підінтегральна функція не є непарною по змінним $\sin t$ та $\cos t$, а також не виконується умова $R(-\sin t; -\cos t) = R(\sin t; \cos t)$, то застосуємо універсальну тригонометричну підстановку $y = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{3\sin t + \cos t} = \int_{\operatorname{tg}\frac{x_0}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \frac{1}{\frac{6y}{1+y^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2}} \cdot \frac{2\,dy}{1+y^2} = -2\int_{\operatorname{tg}\frac{x_0}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \frac{d(y-3)}{(y-3)^2 - 10} =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln\left|\frac{y-3-\sqrt{10}}{y-3+\sqrt{10}}\right| \Bigg|_{\operatorname{tg}\frac{x_0}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3 - \sqrt{10}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3 + \sqrt{10}}\right|.$$

⌟

**Приклад 3.** *Знайдемо рекурентну формулу для інтеграла Ньютона–Лейбніца* $I_n = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\cos^n t}$, *де* $n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ *та* $[x_0, x] \bigcap \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \varnothing$.

⌜

Скористаємося формулою інтегрування частинами:

$$I_n = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\cos^n t} = \left| \begin{array}{cc} u = \dfrac{1}{(\cos t)^{n-2}}, & du = -\dfrac{n-2}{(\cos t)^{n-1}} \cdot (-\sin t)\, dt \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 t}\, dt, & v = \operatorname{tg} t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^{n-2} t}\Bigg|_{x_0}^{x} - (n-2)\int_{x_0}^{x} \operatorname{tg} t \cdot \frac{\sin t}{\cos^{n-1} t}\, dt =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)\int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{\cos^n t} - \frac{1}{\cos^{n-2} t}\right) dt =$$

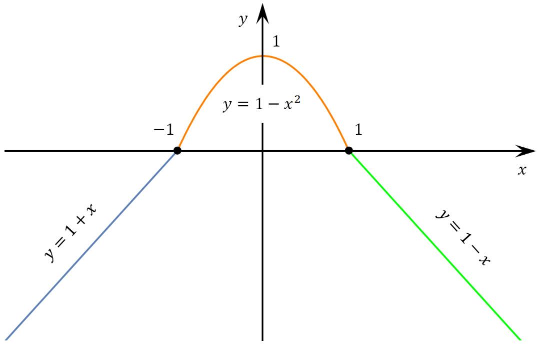
$$= \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^{n-2} x} - (n-2) \cdot (I_n - I_{n-2}).$$

Отримали рівність, з якої можна виразити значення інтеграла $I_n$ через $I_{n-2}$:

$$I_n = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \cdot I_{n-2}.$$

**Приклад 4.** *Знайдемо первісну у широкому розумінні для функції*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leqslant 1; \\ 1 - |x|, & |x| > 1. \end{cases}$$




Побудуємо графік функції $f(x)$. На проміжках $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ та $(1, +\infty)$ функція $f$ має первісну $F$, причому

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + C_1, & x < -1; \\ x - \frac{x^3}{3} + C_2, & x \in (-1, 1); \\ -\frac{x^2}{2} + x + C_3, & x > 1. \end{cases}$$

Співвідношення між сталими $C_1$, $C_2$ та $C_3$ визначимо з умови неперервності первісної $F$ на множині $D_f = \mathbb{R}$: $F(-1-0) = F(-1+0)$, $F(1-0) = F(1+0)$. Тому

$$\frac{1}{2} - 1 + C_1 = -1 + \frac{1}{3} + C_2, \quad 1 - \frac{1}{3} + C_2 = -\frac{1}{2} + 1 + C_3.$$

Отже, $C_1 = C_2 - \frac{1}{6}$ та $C_3 = C_2 + \frac{1}{6}$, звідки первісна функції $f$:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{6} + C, & x < -1; \\ x - \frac{x^3}{3} + C, & x \in [-1, 1]; \\ -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{6} + C, & x > 1. \end{cases}$$

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца:

**18.1** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sin^3 t \cdot \sin 4t \, dt;$

**18.2** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sin^2 t \cdot \cos^3 t \, dt;$

**18.3** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\sin^3 t}{\cos^4 t} \, dt;$

**18.4** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sin^4 t \cdot \cos^2 t};$

**18.5** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sin 2t};$

**18.6** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\cos t};$

**18.7** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{3 - 2\cos t};$

**18.8** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{5 - 3\sin t};$

**18.9** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{1 + 5\cos t};$

**18.10** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{2\sin t - \cos t + 5};$

**18.11** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{8\cos^2 t \sin t}{\sin t + \cos t}\, dt;$

**18.12** $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{2\sin t \cos t}{1 + \sin^4 t}\, dt.$

Знайдіть рекурентні формули для інтегралів Ньютона–Лейбніца:

**18.13** $\displaystyle I_n = \int_{x_0}^{x} \cos^n t\, dt,\ n \in \mathbb{N};$

**18.14** $\displaystyle J_n = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sin^n t},\ n \in \mathbb{N}.$

Знайдіть первісні у широкому розумінні для функцій:

**18.15** $f(x) = \operatorname{sgn}\, x,\ \ x \in \mathbb{R};$

**18.16** $f(x) = \operatorname{sgn}\left(x^2 + x - 2\right),\ x \in \mathbb{R};$

**18.17** $f(x) = [3x],\ \ x \in \left(0, \dfrac{4}{3}\right);$

**18.18** $f(x) = \{x\},\ \ x \in (-1, 2);$

**18.19** $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0; \\ x, & 0 < x \leqslant 1; \\ \sin \pi x, & x > 1. \end{cases}$

**18.20** $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant \dfrac{\pi}{4}; \\ \cos x, & \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 3\sin 3x, & x \geqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

# Розділ 6. Інтеграл Рімана

## Тема 15. Означення інтеграла Рімана та його зв'язок з інтегралом Ньютона–Лейбніца

Сукупність точок $P = P([a,b]) = \left\{x_k \mid k = \overline{0,n}\right\}$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$, таких, що

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b,$$

називається ***розбиттям*** відрізка $[a,b]$. Множина точок $\xi_P = \left\{\xi_k \mid k = \overline{0,n-1}\right\}$: $\forall k = \overline{0,n-1}\ \ \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ називається ***сукупністю проміжних точок***, що відповідає розбиттю $P$. Величина $\|P\| = \max\limits_{k=\overline{0,n-1}} \Delta x_k$, де $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, називається ***діаметром (нормою) розбиття*** $P$.

Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. ***Інтегральною сумою Рімана*** для функції $f$ по розбиттю $P = P([a,b])$ і набору проміжних точок $\xi_P$ називається число

$$S_P(f, \xi_P) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Число $I \in \mathbb{R}$ називається ***інтегралом Рімана*** функції $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$\forall \left(P = P([a,b]), \xi_P\right),\ \|P\| < \delta\ \Rightarrow\ |I - S_P(f,\xi_P)| < \varepsilon.$$

При цьому зазвичай число $I$ записують таким чином: $\int_a^b f(x)\,dx$.

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\|P\|\to 0} S_P(f,\xi_P) = I$, яка не залежить ні від способу розбиття, ні від вибору сукупності проміжних точок, то $f$ — ***інтегровна за Ріманом*** функція, а сама границя $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Множина функцій, інтегровних за Ріманом на відрізку $[a,b]$, позначається як $R([a,b])$.

**Теорема (про інтегральні суми для інтеграла Ньютона–Лейбніца).** Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ інтегровна в розумінні Ньютона–Лейбніца на $[a,b]$ і $\int_a^b f(x)\,dx$ — інтеграл Ньютона–Лейбніца. Тоді $\forall P = P([a,b])$ існує така $\xi_P$, що виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot(x_{k+1} - x_k) = S_P(f,\xi_P)\,.$$

**Теорема (про зв'язок інтегралів Рімана та Ньютона–Лейбніца).** Якщо інтеграли Рімана та Ньютона–Лейбніца функції $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ існують одночасно, то вони рівні один одному.

**Теорема (інтегровність неперервної функції).** Якщо $f \in C([a,b])$, то $f$ — інтегровна за Ріманом на відрізку $[a,b]$. Тобто $C([a,b]) \subset R([a,b])$.

**Теорема (інтегровність функції зі скінченною множиною точок розриву).** Якщо функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ обмежена на $[a,b]$ та $f \in C([a,b]\setminus A)$, де $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \subset [a,b]$, то $f$ — інтегровна за Ріманом на відрізку $[a,b]$.

Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — обмежена на відрізку $[a,b]$ функція. Для кожного $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ визначимо числа $m_k = \inf\limits_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$ та $M_k = \sup\limits_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$. Тоді ***нижньою*** та ***верхньою інтегральними сумами Дарбу*** для функції $f$ і розбиття $P = P([a,b])$ називаються, відповідно, числа

$$\underline{S_P}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad \overline{S_P}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Числа $\underline{\int} f(x)\,dx = \sup\limits_P \underline{S_P}(f)$ та $\overline{\int} f(x)\,dx = \inf\limits_P \overline{S_P}(f)$ називаються, відповідно, ***нижнім*** та ***верхнім інтегралами Дарбу*** функції $f$ на відрізку $[a,b]$.

**Лема (зв'язок між інтегралами Дарбу).** Для будь-якої обмеженої функції $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ виконується нерівність: $\underline{\int} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int} f(x)\,dx$.

Функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ називається ***інтегровною за Дарбу*** на $[a,b]$, якщо $\underline{\int} f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx$. При цьому спільне значення верхнього та нижнього інтегралів називається ***інтегралом Дарбу***, який співпадає з інтегралом Рімана і позначається $\int_a^b f(x)\,dx$.

**Теорема (критерій інтегровності функції).** Для того, щоб обмежена функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ була інтегровною на $[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P = P([a,b]) : \ 0 \leqslant \overline{S_P}(f) - \underline{S_P}(f) < \varepsilon.$$

**Теорема (Дарбу).** [9, c. 142] Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, а також задано розбиття $P = P([a,b])$ та набір проміжних точок $\xi_P$. Якщо $\exists \lim\limits_{\|P\|\to 0} S_P(f, \xi_P) = I$, то $f \in R([a,b])$ і при цьому $\int_a^b f(x)\,dx = I$.

Для формулювання критерію інтегровності за Ріманом (теорема Лебега) розглянемо деякі нові поняття.

***Мірою*** сегмента $[a,b]$ (інтервалу $(a,b)$, півінтервалу $[a,b)$ чи $(a,b]$) називають його довжину: $\mu([a,b]) = b - a$.

Множина $X \subset \mathbb{R}$ має ***лебегову*** (***жорданову***) ***міру нуль***, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує зліченне покриття $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ (скінченне покриття $(I_j)_{j=\overline{1,n}}$) інтервалами, сумарна довжина яких не перевищує $\varepsilon$, тобто $\forall m \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{j=1}^{m} \mu(I_j) < \varepsilon$ $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \mu(I_j) < \varepsilon\right)$.

**Властивості множин лебегової та жорданової міри нуль.**

**1.** Якщо $X$ має лебегову (жорданову) міру нуль, і $X_1 \subset X$, то й $X_1$ має лебегову (жорданову) міру нуль.

**2.** Якщо $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$ $\left(X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} X_j\right)$ і кожна з множин $X_j$ має лебегову (жорданову) міру нуль, то множина $X$ також має лебегову (жорданову) міру нуль.

**3.** Будь-яка множина жорданової міри нуль є множиною лебегової міри нуль.

**4.** Будь-яка зліченна (скінченна) множина точок має лебегову (жорданову) міру нуль.

**5.** Існує більш ніж зліченна (більш ніж скінченна) множина, що має лебегову (жорданову) міру нуль.

**Теорема (компакт лебегової міри нуль).** Компакт $K \subset \mathbb{R}$ лебегової міри нуль є множиною жорданової міри нуль.

**Теорема (Лебега).** Нехай $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — обмежена функція і $E$ — множина точок її розриву. Тоді $f \in R([a,b]) \Leftrightarrow \mu(E) = 0$.

**Властивості інтегровних за Ріманом функцій** [1, с. 250].

Нехай функції $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ інтегровні за Ріманом на відрізку $[a,b]$.

**1.** *Лінійність*: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ функція $(\lambda f + \mu g) \in R([a,b])$ та

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

**2.** *Інтегровність модуля*: $|f| \in R([a,b])$.

**3.** *Інтегровність добутку*: $f \cdot g \in R([a,b])$.

**4.** *Інтегровність звуження*: $\forall\,[a^*, b^*] \subset [a,b]\ \ f \in R([a^*, b^*])$.

**5.** *Адитивність по області інтегрування*: якщо $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$, $f \in R([a,c])$ та $f \in R([c,b])$, то $f \in R([a,b])$ і

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

**6.** *Інтеграл Рімана з нерівними функціями*: якщо $f(x) \leqslant g(x)\ \ \forall x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

**Наслідок (інтеграл від невід'ємної функції).** Якщо $f \in R([a,b])$ та $f(x) \geqslant 0\ \ \forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

**Наслідок (інтеграл Рімана від додатної функції).** Якщо $f \in R([a,b])$, $f(x) \geqslant 0\ \ \forall x \in [a,b]$, та $\exists x_0 \in (a,b)$, що $f$ неперервна в точці $x_0$ і $f(x_0) > 0$, то $\exists c > 0$: $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant c$.

**Наслідок (двобічна оцінка інтеграла).** Якщо $f \in R([a,b])$ та $\forall x \in [a,b]$ виконується нерівність $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

**Наслідок (модуль інтеграла).** Якщо $f \in R([a,b])$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

# Практичне заняття 19

**Приклад 1.** *Для функції $f(x) = 2 - x$, $x \in [a, b] = [-1, 3]$, побудуємо нижню та верхню інтегральні суми Дарбу із розбиттям сегмента $[a, b]$ на $4n$ рівних частин та обчислимо інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ як границю інтегральних сум.*

$\ulcorner$

Відповідно до умови, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{4n} = \dfrac{1}{n}$ $\forall k = \overline{0, 4n-1}$. Тому маємо таке розбиття відрізка $[a, b]$: $x_0 = -1$, $x_1 = -1 + \dfrac{1}{n}$, $\ldots$ , $x_{4n} = -1 + \dfrac{4n}{n} = 3$.

Оскільки функція $f(x) = 2 - x$ є монотонно спадною на відрізку $[a, b]$, то $\forall k = \overline{0, 4n-1}$:

$$m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1}) = 2 - x_{k+1} = 3 - \frac{k+1}{n};$$

$$M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_k) = 2 - x_k = 3 - \frac{k}{n}.$$

Обчислимо нижню та верхню інтегральні суми Дарбу:

$$\underline{S_{P_{4n}}}(f) = \sum_{k=0}^{4n-1} m_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{4n-1} \left(3 - \frac{k+1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot 12n - \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{4n-1} (k+1) =$$
$$= 12 - \frac{4n(4n+1)}{2n^2} = 4 - \frac{2}{n};$$
$$\overline{S_{P_{4n}}}(f) = \sum_{k=0}^{4n-1} M_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{4n-1} \left(3 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot 12n - \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{4n-1} k =$$
$$= 12 - \frac{(4n-1)4n}{2n^2} = 4 + \frac{2}{n}.$$

При цьому оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S_{P_{4n}}}(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{S_{P_{4n}}}(f) = 4$, то $\int_{-1}^{3} (2 - x)\,dx = 4$. $\lrcorner$

**Приклад 2.** *Обчислимо інтеграл Рімана $\int_0^2 a^x\,dx$, де $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0, 1\}$, як границю інтегральних сум.*

$\ulcorner$

Функція $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, є неперервною і тому інтегровною за Ріманом на відрізку $[0, 2]$. Тому існує границя інтегральних сум, що за теоремою Дарбу співпадає з інтегралом Рімана:

$$\lim_{\|P\| \to 0} S_P(f, \xi_P) = \int_0^2 a^x\,dx.$$

Для обчислення цієї границі розіб'ємо відрізок $[0, 2]$ на $2n$ рівних частин:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{2n-1}{n}, 2\right\},\ n \geqslant 1,$$

та оберемо набір проміжних точок

$$\xi_{P_n} = \left\{ \xi_k = \frac{k}{n} \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \,\middle|\, k = \overline{0, 2n-1} \right\},\ n \geqslant 1.$$

Тоді $\Delta x_k = \dfrac{1}{n}\ \ \forall k = \overline{0, 2n-1}$ та

$$S_{P_n}(f, \xi_{P_n}) = \sum_{k=0}^{2n-1} a^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a^2-1}{a^{\frac{1}{n}-1}} \cdot \frac{1}{n} \to \frac{a^2-1}{\ln a} = \int_0^2 a^x\,dx,\ n \to \infty.$$

⌟

**Приклад 3.** *Дослідимо інтегровність за Ріманом функції Діріхле на довільному відрізку* $[a, b] \subset \mathbb{R}$:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]; \\ 0, & x \in [a, b] \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

⌜

Множина точок розриву функції Діріхле — весь відрізок $[a, b]$, тобто її мірою є довжина відрізка $b - a$. Звідси за теоремою Лебега маємо, що функція $D \notin R([a, b])$ для довільних $-\infty < a < b < +\infty$.

Також цей факт можна довести за означенням інтеграла Рімана як границі інтегральних сум. Для цього покажемо, що не існує границі інтегральних сум функції Діріхле. Оберемо довільне розбиття відрізка $P = P([a, b]) = \left\{x_k \,|\, k = \overline{0, n}\right\}$. Для кожного проміжку розбиття $[x_k, x_{k+1}]$ існують точки $\xi_k \in \mathbb{Q} \cap [x_k, x_{k+1}]$ та $\theta_k \in [x_k, x_{k+1}] \backslash \mathbb{Q}$. Складемо дві інтегральні суми Рімана для функції Діріхле по розбиттю $P$ і наборів проміжних точок $\xi_P = \left\{\xi_k \,|\, k = \overline{0, n-1}\right\}$ та $\theta_P = \left\{\theta_k \,|\, k = \overline{0, n-1}\right\}$:

$$S_P(f, \xi_P) = \sum_{k=0}^{n-1} D(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot (x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0 = b - a;$$

$$S_P(f, \theta_P) = \sum_{k=0}^{n-1} D(\theta_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 0 \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0.$$

Очевидно, що не існує границі інтегральних сум функції Діріхле на довільному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

⌟

**Приклад 4.** *Доведемо збіжність послідовності* $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3 + k^2 n}$, $n \geqslant 1$, *та виразимо значення границі цієї послідовності через визначений інтеграл.*

⌜

Перетворимо вираз із $a_n$ так, щоб він набув вигляду, схожого до інтегральної суми Рімана:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2 + k^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n^2}{n^3 + n^2 \cdot n} - \frac{0^2}{n^3 + 0^2 \cdot n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, $x \in [0,1]$, значення якої присутні у сумі. Оскільки $f \in C([0,1])$, то $f \in R([0,1])$. Таким чином, $a_n - \dfrac{1}{2n}$ є інтегральною сумою Рімана для функції $f$ по рівномірному розбиттю

$$P_n = P_n([0,1]) = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\},\ n \geqslant 1,$$

відрізка $[0,1]$ та набору проміжних точок

$$\xi_{P_n} = \left\{ \frac{k}{n} \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \,\middle|\, k = \overline{0, n-1} \right\},\ n \geqslant 1.$$

Тобто $a_n = S_{P_n}(f, \xi_{P_n}) + \dfrac{1}{2n}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$, то

$$a_n \to \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = (x - \operatorname{arctg} x)\,\Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4},\ n \to \infty.$$

$\lrcorner$

Для заданої функції $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ побудуйте нижню та верхню інтегральні суми Дарбу із розбиттям сегмента $[a,b]$ на $mn, n \in \mathbb{N}$, рівних частин, якщо:

**19.1** $f(x) = x^2,\ [a,b] = [-1,1],\ m = 2;$

**19.2** $f(x) = x^3,\ [a,b] = [-2,3],\ m = 1;$

**19.3** $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ [a,b] = [-2,1],\ m = 3;$

**19.4** $f(x) = |x|,\ [a,b] = [-3,2],\ m = 5;$

**19.5** $f(x) = [x],\ [a,b] = [-4,0],\ m = 4;$

**19.6** $f(x) = \{x\},\ [a,b] = [1,3],\ m = 2;$

**19.7** $f(x) = \max\{x, 1-x\},\ [a,b] = [-2,2],\ m = 8.$

Для заданої функції $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ оцініть різницю між верхньою та нижньою інтегральними сумами Дарбу для деякого розбиття $P = P([-1,1])$. Чи можливо за рахунок отриманої оцінки зробити висновок щодо інтегровності функції $f$ за Ріманом на відрізку $[-1,1]$?

**19.8** $f(x) = x;$

**19.9** $f(x) = -|x|.$

Обчисліть інтеграли Рімана, розглядаючи їх як границі інтегральних сум Рімана:

**19.10** $\displaystyle\int_0^3 \{x\}\,dx;$

**19.11** $\displaystyle\int_{-3}^2 \operatorname{sgn} x\,dx;$

**19.12** $\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^1 [x]\,dx;$

**19.13** $\displaystyle\int_{-1}^5 \big(1+|x|\big)\,dx;$

**19.14** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx;$

**19.15** $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x^2}.$

Знайдіть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ за допомогою інтегральних сум та інтеграла Рімана, де:

**19.16** $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2}$;

**19.17** $a_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k}$;

**19.18** $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(4k-3)^3}{k^4}$;

**19.19** $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

**19.20** $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k}{n^2} \cdot \operatorname{arcctg}\frac{k}{n^3}$;

**19.21** $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{k}{n}\right) \cdot \sin\frac{\pi k}{n^2}$;

**19.22** $a_n = n\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n^2}} \cdot \sin\frac{k}{n^2} \cdot \operatorname{tg}\frac{k^2}{n^3}$;

**19.23** $a_n = \left(\prod\limits_{k=1}^{2^n-1} \left(1+\frac{k}{2^n}\right)\right)^{\frac{1}{2^n}}$;

**19.24** $a_n = n\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \cdot \operatorname{arctg}\frac{k^2}{n^3}$;

**19.25** $a_n = n\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^4+k^4} \cdot \operatorname{arctg}\frac{k}{n} \cdot \sin\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$.

З'ясуйте, чи є функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ інтегровною за Ріманом на $[a,b]$, якщо:

**19.26** $f(x) = [x]\cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha > 0$, $[a,b] = \left[1, \frac{17}{2}\right]$;

**19.27** $f(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]$, $[a,b] = \left[\frac{1}{3}, 11\right]$;

**19.28** $f(x) = \begin{cases} \left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right], & x \neq 0; \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ $\quad [a,b] = [0,1]$.

# Тема 16. Основні теореми інтегрального числення

**Теорема (перша теорема про середнє).** [1, с. 254] Якщо $\{f, g\} \subset R([a, b])$ та $\forall x \in [a, b]$ $g(x) \geqslant 0$ $(g(x) \leqslant 0)$, то існує таке $\mu \in \mathbb{R}$, що має місце рівність:

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = \mu \int_a^b g(x)\, dx, \tag{2}$$

де $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = m \leqslant \mu \leqslant M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

**Наслідок (для неперервної функції).** Якщо в умовах першої теореми про середнє $f \in C([a, b])$, то існує $\xi \in [a, b]$ таке, що формула (2) набуває вигляду:

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx.$$

**Наслідок (формула середнього значення).** Якщо $f \in C([a, b])$, то існує $\xi \in [a, b]$: $\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi) \cdot (b - a)$.

**Теорема (заміна змінної в інтегралі Рімана).** Якщо $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C([a, b])$; $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ є диференційовною на $[\alpha, \beta]$ і $\varphi' \in R([\alpha, \beta])$, $E_\varphi \subset D_f$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, тоді має місце рівність:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi'(t)\, dt,$$

**Теорема (інтегрування частинами).** Нехай $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ — диференційовні функції та $f' \cdot g \in R([a, b])$. Тоді $f \cdot g' \in R([a, b])$ і виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g(x)f'(x)\, dx,$$

### Інтеграл Рімана як функція верхньої межі

Якщо $f \in R([a, b])$ та $x \in [a, b]$ — довільна точка, то за властивістю інтегровності звуження $f \in R([a, x])$. Таким чином, можемо визначити функцію $\Phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, де

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a, b].$$

$\Phi(x)$ визначає інтеграл Рімана як *функцію верхньої межі інтегрування.*

**Теорема (про неперервність $\Phi(x)$).** Якщо $f \in R([a, b])$, то $\Phi \in C([a, b])$.

**Теорема (основна теорема інтегрального числення).** Якщо функція $f \in R([a, b])$, то функція $\Phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, де $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, диференційовна в кожній точці $x \in [a, b]$, в якій функція $f$ — неперервна і $\Phi'(x) = f(x)$.

**Наслідок 1.** Якщо $f \in C([a, b])$, то функція $f$ має на сегменті $[a, b]$ первісну $\Phi$, де $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

**Наслідок 2.** Якщо $f \in R([a,b])$ і множина точок розриву функції $f$ не більш ніж зліченна, то функція $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, де $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, є *первісною (у широкому розумінні)* функції $f$ на сегменті $[a,b]$.

**Теорема (основна формула інтегрального числення).** Якщо функція $f \in R([a,b])$ і множина точок розриву функції $f$ не більш ніж зліченна, а $F$ — будь-яка первісна (у широкому розумінні) функції $f$ на сегменті $[a,b]$, то виконується рівність (*формула Ньютона-Лейбніца*):

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \stackrel{def}{=} F(b) - F(a).$$

**Теорема (друга теорема про середнє).** [1, c. 257] Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ є монотонною функцією, $g \in R([a,b])$. Тоді $\exists \xi \in [a,b]$, для якого виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b)\int_{\xi}^b g(x)\,dx.$$

Якщо при цьому $f$ — незростаюча на $[a,b]$ і $f(x) \geqslant 0\ \ \forall x \in [a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,dx$. Якщо $f$ — неспадна на $[a,b]$ і $f(x) \geqslant 0\ \ \forall x \in [a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int_{\xi}^b g(x)\,dx$.

### Інтеграл Рімана як складна функція верхньої межі інтегрування

Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$, $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, $E_{\varphi} \subset [a,b]$, існує похідна функції $\varphi'(x)\ \ \forall x \in [\alpha,\beta]\backslash X$ (за виключенням не більше, ніж зліченної множини точок $X \subset [\alpha,\beta]$). Розглянемо $\Phi(x) = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(y)\,dy$, де $\varphi(x_0) = t_0 \in [a,b]$. Можемо розглядати цей інтеграл як композицію $F \circ \varphi :\ F(t) = \int_{t_0}^t f(y)\,dy$, $t \in [a,b]$, $\Phi(x) = (F \circ \varphi)(x)$. За правилом знаходження похідної складної функції будемо мати $\Phi = F \circ \varphi$, $\Phi'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, тобто отримали, що $\dfrac{d}{dx}\Phi(x) = \dfrac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(y)\,dy = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

Якщо розглянути інтеграл Рімана як складну функцію нижньої межі інтегрування і об'єднати обидва випадки, то отримаємо:

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(y)\,dy = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \tag{3}$$

### Наближене обчислення інтеграла Рімана

Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in R([a,b])$. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на $n$ рівних проміжків: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, де $a = x_0$, $b = x_n$.

**1.** Замінюючи площі криволінійних трапецій $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$ на площі відповідних прямокутників шириною $\big(x_k - x_{k-1}\big)$ та висотою $f\big(y_k\big)$, $y_k = \dfrac{1}{2}\big(x_{k-1} + x_k\big)$, отримаємо ***формулу прямокутників*** для наближеного обчислення інтеграла Рімана від функції $f$ по проміжку $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) + R_n \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right),$$

де $R_n$ — залишковий член, значення якого визначає похибку обчислення. Зокрема, якщо $f \in C^{(2)}([a,b])$, то $\exists \xi \in [a,b]$: $R_n = \dfrac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot f''(\xi)$. Тоді величина *абсолютної похибки* у формулі прямокутників оцінюється так:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \max_{x\in[a,b]} \bigl|f''(x)\bigr|.$$

**2.** Шляхом заміни $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$ на площі відповідних трапецій, дістаємо ***формулу трапецій***:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{n} \bigl(f(x_{k-1}) + f(x_k)\bigr) + R_n \approx \frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{n} \bigl(f(x_{k-1}) + f(x_k)\bigr),$$

де $R_n$ — залишковий член. За умови, що $f \in C^{(2)}([a,b])$, існує таке $\xi \in [a,b]$: $R_n = -\dfrac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot f''(\xi)$. Тоді справедливою є така оцінка *абсолютної похибки* у формулі трапецій:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{x\in[a,b]} \bigl|f''(x)\bigr|.$$

# Практичне заняття 20

**Приклад 1.** *Оцінимо значення інтеграла* $I = \int\limits_0^1 \dfrac{x^5\,dx}{1+x}$ *за першою теоремою про середнє.*

⌜

Позначимо $f_1(x) = x^5$ та $f_2(x) = \dfrac{1}{1+x}$ для $x \in [0,1]$. Оскільки $\forall x \in [0,1]$ : $f_i(x) \geqslant 0$, $i = \overline{1,2}$, та $\{f_1, f_2\} \subset R([0,1])$ то, згідно із першою теоремою про середнє, можемо оцінити значення інтеграла $I$ двома способами.

1) Оберемо $f_1(x) = x^5$ в якості функції $f$ у першій теоремі про середнє. Тоді існує таке $\mu_1 \in \mathbb{R}$, що має місце рівність:

$$I = \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\,dx = \mu_1 \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \mu_1 \cdot \ln 2,$$

де $0 = \inf\limits_{x\in[0,1]} x^5 \leqslant \mu_1 \leqslant \sup\limits_{x\in[0,1]} x^5 = 1$. Тобто $I \in [0, \ln 2]$.

2) Тепер нехай $f_2$ буде в якості функції $f$ у першій теоремі про середнє. Тоді $\exists\, \mu_2 \in \mathbb{R}$ таке, що:

$$I = \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\,dx = \mu_2 \int_0^1 x^5\,dx = \mu_2 \cdot \frac{1}{6},$$

де $\dfrac{1}{2} = \inf\limits_{x\in[0,1]} \dfrac{1}{1+x} \leqslant \mu_1 \leqslant \sup\limits_{x\in[0,1]} \dfrac{1}{1+x} = 1$. Тобто $I \in \left[\dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{6}\right]$. Порівнюючи дві оцінки, можемо зробити висновок, що оцінка значення інтеграла $I$ другим способом — більш точна. ⌟

**Приклад 2.** *Оцінімо значення* $I = \int\limits_0^1 \frac{e^x\,dx}{1+x^2}$ *за другою теоремою про середнє.*

⌜

Позначимо $f_1(x) = e^x$ та $f_2(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ для $x \in [0,1]$. Так як обидві функції є монотонними на відрізку $[0,1]$ та $\{f_1, f_2\} \subset R([0,1])$, то застосуємо другу теорему про середнє до оцінювання значення інтеграла $I$ двома способами.

1) Оскільки $f_1$ зростає на $[0,1]$ та $f_1(x) \geqslant 0\ \ \forall x \in [0,1]$, то $\exists\, \xi_1 \in [0,1]$:

$$I = \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\,dx = f_1(1)\int_{\xi_1}^1 f_2(x)\,dx = e\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\xi_1\right).$$

Маємо, що $\operatorname{arctg}\xi_1 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, звідки оцінка значення інтеграла: $0 \leqslant I \leqslant \frac{e\pi}{4}$.

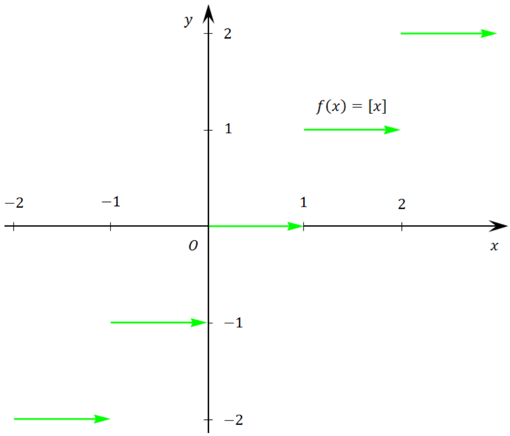
2) Оскільки $f_2$ — спадна функція на $[0,1]$ та $f_2(x) \geqslant 0\ \ \forall x \in [0,1]$, то $\exists\, \xi_2 \in [0,1]$:

$$I = \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\,dx = f_2(0)\int_0^{\xi_2} f_1(x)\,dx = 1\cdot\left(e^{\xi_2} - 1\right).$$

Маємо, що $e^{\xi_2} \in [1, e]$, звідки оцінка значення інтеграла: $0 \leqslant I \leqslant e - 1$. У підсумку, ця оцінка є більш точною. ⌟

**Приклад 3.** *Обчислимо* $\int\limits_0^3 [x]\,dx$.

⌜




На довільному проміжку $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, функція $f$ має первісну $F$:

$$F_{(n,n+1)}(x) = nx + C_n = [x]\cdot x + C_n.$$

Визначимо співвідношення між сталими $\ldots, C_{-2}, C_{-1}, C_0, C_1, C_2, \ldots$ з умови неперервності первісної $F$ на множині $D_f = \mathbb{R}$:

$$F(n-0) = F(n+0),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Тому

$$(n-1)\cdot n + C_{n-1} = n\cdot n + C_n \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C_n = C_{n-1} - n.$$

Продовжуючи за індукцією, отримаємо $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$C_n = (C_{n-2} - (n-1)) - n = \cdots = C_0 - \sum_{i=1}^{n} i = C_0 - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Оскільки $\forall x \in [n, n+1), n \in \mathbb{Z}\colon\ n = [x]$, то остаточно маємо, що при $C_0 = 0$:

$$F(x) = [x]\cdot x - \frac{n(n+1)}{2} = [x]\cdot x - \frac{[x]\big([x]+1\big)}{2}$$

є первісною для $f$, неперервною $\forall x \in D_F = D_f$ і при цьому $F'(x) = f(x) = [x]$

$\forall x \in D_f \setminus \mathbb{Z}$. Таким чином, за формулою Ньютона–Лейбніца:

$$\int_0^3 [x]\,dx = F(x)\Big|_{x=0}^{x=3} = \left([x]\cdot x - \frac{[x]\big([x]+1\big)}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=3} = 3.$$

Також цей результат можна отримати за допомогою властивості адитивності інтеграла Рімана: $f \in R\big([n, n+1]\big)\ \ \forall n \in \mathbb{Z}$, тому

$$\int_0^3 [x]\,dx = \int_0^1 [x]\,dx + \int_1^2 [x]\,dx + \int_2^3 [x]\,dx = 0 + 1 + 2 = 3.$$

$\lrcorner$

**Приклад 4.** *Для функції* $f = \int\limits_{xt}^{\sqrt{x^2+t^2}} \cos y^2\,dy$ *знайдемо похідні* $\dfrac{df}{dx}$*, вважаючи* $t$ *фіксованим параметром, та* $\dfrac{df}{dt}$*, вважаючи* $x$ *фіксованим параметром.*

$\ulcorner$

Розглянемо функцію $f$ як складну функцію меж інтегрування і скористаємося формулою (3):

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{xt}^{\sqrt{x^2+t^2}} \cos y^2\,dy = \cos\left(x^2+t^2\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+t^2}} - t\cdot\cos\left(x^2t^2\right);$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{xt}^{\sqrt{x^2+t^2}} \cos y^2\,dy = \cos\left(x^2+t^2\right)\cdot\frac{t}{\sqrt{x^2+t^2}} - x\cdot\cos\left(x^2t^2\right).$$

$\lrcorner$

**Приклад 5.** *Обчислимо наближене значення інтеграла* $I = \int\limits_3^5 \dfrac{dx}{\ln x}$ *за допомогою формул прямокутників/трапецій із точністю до* 0,01.

$\ulcorner$

Позначимо $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, $x > 1$. Первісна цієї функції визначається інтегральним логарифмом та не виражається у елементарних функціях. Для того, щоб застосувати формули наближеного обчислення інтеграла, визначимо необхідну кількість $(n)$ відрізків розбиття проміжку інтегрування $[3,5]$. При $x > 1$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x\ln^2 x},\qquad f''(x) = \frac{2+\ln x}{x^2\ln^3 x},\qquad f'''(x) = -2\cdot\frac{\ln^2 x + 3\ln x + 3}{x^3\ln^4 x}.$$

Оскільки $f''(x)$ є неперервно–диференційовною функцією на множині $(1,+\infty)$ і при цьому $f'''(x) < 0\ \ \forall x > 1$, то $f''(x)$ монотонно спадає на $(1,+\infty)$. Таким чином, $f''(x) \leqslant f''(3)\ \ \forall x \in [3,5]$. Відповідно до оцінки абсолютної похибки у формулі прямокутників, маємо:

$$|R_n| \leqslant \frac{(5-3)^3}{24n^2}\cdot\max_{x\in[3,5]}\left|f''(x)\right| < 0{,}01 \quad\Leftrightarrow\quad n^2 > \frac{100\cdot 2^3}{24}\cdot f''(3) \approx 8{,}66 \quad\Leftarrow\quad n \geqslant 3.$$

Тобто оптимальне значення $n = 3$ для формули прямокутників та $n = 5 \ \Rightarrow$ $\Rightarrow\ n^2 > 17{,}32$ для формули трапецій. Згідно із формулою прямокутників:

$$I = \int_3^5 \frac{dx}{\ln x} \approx \frac{5-3}{3}\cdot\left(f\left(\frac{10}{3}\right) + f(4) + f\left(\frac{14}{3}\right)\right) \approx 1{,}4674.$$

З іншого боку, за формулою трапецій отримуємо:

$$I \approx 0{,}2 \cdot \bigl(f(3) + 2\cdot f(3{,}4) + 2\cdot f(3{,}8) + 2\cdot f(4{,}2) + 2\cdot f(4{,}6) + f(5)\bigr) \approx 1{,}4736.$$

Справжнє значення $I \approx 1{,}471$ узгоджується із заданою точністю обчислення. $\lrcorner$

Доведіть рівності:

**20.1** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$, якщо $f \in C\bigl([0,1]\bigr)$;

**20.2** $\displaystyle\int_0^{a} x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)\,dt$, якщо $a > 0$ та $f \in C\left(\bigl[0,a^2\bigr]\right)$;

**20.3** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\,dt}{\sin t}$.

Обчисліть інтеграли Рімана:

**20.4** $\displaystyle\int_{-2}^{2} \bigl|x^2 - 1\bigr|\,dx$;

**20.5** $\displaystyle\int_{0}^{2} |1 - x|\,dx$;

**20.6** $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$;

**20.7** $\displaystyle\int_{0}^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\,dx$;

**20.8** $\displaystyle\int_{0}^{100\pi} \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx$;

**20.9** $\displaystyle\int_{0}^{4} [x^2]\,dx$;

**20.10** $\displaystyle\int_{-2\pi}^{8\pi} [\cos x]\,dx$;

**20.11** $\displaystyle\int_{2}^{\pi-1} \{x^2 - 1\}\,dx$;

**20.12** $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{x + x^3}$;

**20.13** $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$.

Зробіть вказані заміни змінних у інтегралах (якщо це можливо):

**20.14** $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{x^2 + 1}\,dx, \quad x = \frac{1}{\cos t}$;

**20.15** $\displaystyle\int_{0}^{3} x\sqrt[3]{1 - x^2}\,dx, \quad x = \sin t$;

**20.16** $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{12 - 5\cos x}, \quad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

**20.17** $\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)\cos x\,dx,\ \ f \in R\bigl([0,\pi]\bigr), \quad t = \sin x$;

**20.18** $\displaystyle\int_{4}^{7} (x^2 - 6x + 13)\,dx, \quad t = x^2 - 6x + 13$.

Чи справедливе формальне застосування формули Ньютона–Лейбніца у інтегралах:

**20.19** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$;

**20.20** $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2 x\,(2 + \operatorname{tg}^2 x)}$;

**20.21** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx$;

**20.22** $\displaystyle\int_{-2}^{3} \operatorname{sgn}\, x\,dx$?

Знайдіть на області визначення похідні $\dfrac{df}{dx}$, вважаючи $t$ фіксованим параметром, та $\dfrac{df}{dt}$, вважаючи $x$ фіксованим параметром, якщо:

**20.23** $f = \displaystyle\int\limits_{t^2 \sin\sqrt{t}}^{x^2 t} \frac{e^y}{y}\, dy;$

**20.24** $f = \displaystyle\int\limits_{\sin(t+x)}^{\cos(t^2+x^2)} y^2 \cos\sqrt{y}\, dy.$

Знайдіть границі:

**20.25** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\, dt;$

**20.26** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^{x^2} \operatorname{arctg} t^2\, dt}{\int\limits_{x^3}^{x^5} \operatorname{arctg} t\, dt};$

**20.27** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\int\limits_0^{x} e^{t^2}\, dt\right)^2}{\int\limits_0^{x} e^{2t^2}\, dt};$

**20.28** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t^2}{t}\, dt}{\int\limits_{x^2}^{x^4} \sin t^{\frac{3}{2}}\, dt}.$

З'ясуйте, значення якого з двох інтегралів більше:

**20.29** $\displaystyle\int_1^2 \ln^2 x\, dx$ чи $\displaystyle\int_1^2 \ln x\, dx$?

**20.30** $\displaystyle\int_0^1 2^{x^2}\, dx$ чи $\displaystyle\int_0^1 2^{x^3}\, dx$?

**20.31** $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\, dx$ чи $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\, dx$?

**20.32** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\, dx$ чи $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$?

**20.33** $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\, dx$ чи $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\, dx$?

Оцініть значення інтегралів за допомогою теорем про середнє:

**20.34** $\displaystyle\int_0^2 e^{x^2-x}\, dx;$

**20.35** $\displaystyle\int_0^{100} \frac{e^{-x}\, dx}{x+100};$

**20.36** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\, dx;$

**20.37** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{19}\, dx}{\sqrt[3]{1+x^6}};$

**20.38** $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \sin x^2\, dx;$

**20.39** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\cos x\, dx}{1+x^2};$

**20.40** $\displaystyle\int_{10}^{20} \frac{x^2\, dx}{x^4+x+1};$

**20.41** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} (x-1)\operatorname{arctg} x\, dx.$

Обчисліть наближені значення інтегралів за допомогою формул прямокутників/трапецій із точністю до 0,01:

**20.42** $\displaystyle\int_2^3 \frac{e^x}{x+1}\, dx;$

**20.43** $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+x^4}\, dx.$

# Тема 17. Застосування інтеграла Рімана

**Площа плоскої фігури в декартових прямокутних координатах.** Нехай $f(x)$ — неперервна невід'ємна на $[a,b]$ функція. *Площа* $S$ множини $\Phi = \{(x,y)\,|\, a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ (криволінійної трапеції) дорівнює

$$S \overset{def}{=} S\big([a,b]\big) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Якщо $f(x) \leqslant 0$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$ і за абсолютною величиною він дорівнює площі $S$ відповідної криволінійної трапеції $-S = \int_a^b f(x)\,dx$.

Площа, обмежена кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$, ординатами $x = a$, $x = b$ за умови $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx. \tag{5}$$

**Випадок параметричної функції.** Нехай функція $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$. При цьому функції $x(t), y(t)$ неперервно–диференційовні та $x^2(t) + y^2(t) \neq 0$ $\forall t \in [\alpha,\beta]$, а також крива є замкненою: $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$. Тоді:

$$S(\Phi) = \int_\alpha^\beta x(t)\cdot y'(t)\,dt. \tag{6}$$

**Площа плоскої фігури в полярних координатах.** *Криволінійним сектором* називається плоска фігура, що обмежена неперервною кривою і променями, які виходять з полюса $O$ і утворюють з полярною віссю кути $\varphi_1$ та $\varphi_2$: $\Phi = \big\{(\rho,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, 0 \leqslant \rho \leqslant f(\varphi),\ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2\big\}$. Тоді:

$$S \overset{def}{=} S\big([\varphi_1,\varphi_2]\big) = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\,d\varphi. \tag{7}$$

**Довжина дуги кривої.** Нехай $f \in C^{(1)}\big([a,b]\big)$ та крива задана рівнянням $L = f(x)$ у прямокутних координатах. *Довжина дуги $AB$ кривої $L$*, що міститься між вертикальними прямими $x = a$ та $x = b$, визначається формулою

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx. \tag{8}$$

Якщо крива $\gamma$ задана у полярних координатах: $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$, де $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, то її довжина визначається за формулою:

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \big(\rho'(\varphi)\big)^2}\,d\varphi. \tag{9}$$

Якщо крива $\gamma$ задана параметрично, тобто $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, і при цьому $\{\varphi,\psi\} \subset C^{(1)}\big([t_1,t_2]\big)$, то її довжина визначається за формулою:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\cdot\varphi'(t)\,dt. \tag{10}$$

**Обчислення об'ємів.** Якщо тіло $T$ має об'єм і $S = S(x)$, $x \in [a,b]$, де $S \in C\big([a,b]\big)$ — площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі абсцис у точці $x$, то величина цього об'єму обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{11}$$

Якщо криволінійна трапеція $\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, де $f \in C\big([a,b]\big)$, обертається навколо вісі $Ox$, то *об'єм* утвореного *тіла обертання* обчислюється за формулою:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{12}$$

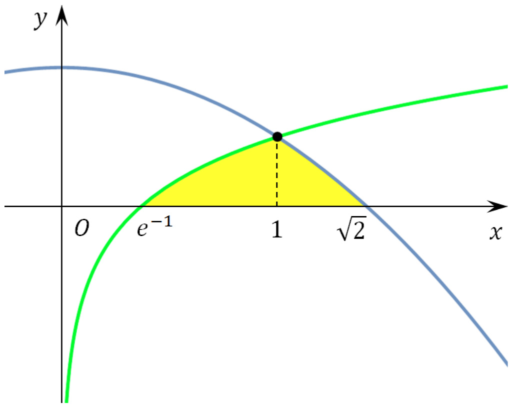
Також за умови, що $f$ є однозначною функцією, об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції $\Phi$ навколо вісі $Oy$, обчислюється за формулою:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\,f(x)\,dx. \tag{13}$$

# Практичне заняття 21

**Приклад 1.** *Обчислимо площу фігури, обмеженої кривими* $y = 2 - x^2$, $y = 0$ *та* $y = \ln x + 1$ *у прямокутній декартовій системі координат.*

⌜




Позначимо функції $f_1(x) = 2 - x^2$ та $f_2(x) = \ln x + 1$. Оскільки $f_2$ монотонно зростає на $D_{f_2} = (0, +\infty)$ і при цьому $f_1$ — монотонно спадна на тій же множині, то існує єдина точка перетину заданих кривих, абсциса якої дорівнює $x_0 = 1$.

Також можна визначити абсциси точок перетину кривих із віссю $Ox$:

$$2 - x^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{2};$$
$$\ln x + 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = e^{-1}.$$

Використовуючи формулу (4) та властивість лінійності інтеграла Рімана, маємо:

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \big(\ln x + 1\big)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} \big(2 - x^2\big)\,dx = x \ln x\,\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + \left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{e} + \frac{5 + 4\sqrt{2}}{3}.$$

⌟

**Приклад 2.** *Обчислимо площу фігури, обмеженої петлею лемніскати Бернуллі:* $\big(x^2 + y^2\big)^2 = a^2\big(x^2 - y^2\big)$, *де* $a > 0$.

⌜

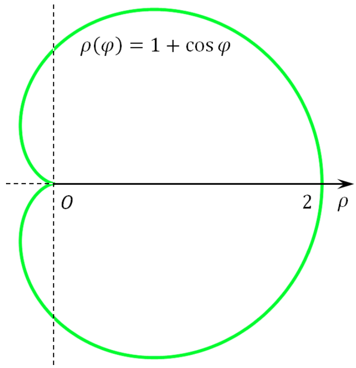
Перейдемо до полярної системи координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тоді рівняння лемніскати можна переписати таким чином: $\rho^4 = a^2\rho^2\cos 2\varphi$. Враховуючи невід'ємність полярного радіуса, маємо таке рівняння кривої: $\rho = |a|\sqrt{\cos 2\varphi}$, де кут $\varphi \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left[\frac{3\pi}{4} + \pi n, \frac{5\pi}{4} + \pi n\right] \bigcap \mathbb{R}^+$. Тоді, згідно із формулою (7), маємо:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \rho^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d(2\varphi) = \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}.$$

**Приклад 3.** *Обчислимо довжину дуги кардіоїди:* $\rho = 1 + \cos\varphi$.

Оскільки $\forall\varphi \geqslant 0:\ \rho(\varphi) \geqslant 0$, а також за рахунок симетричності графіка кардіоїди відносно полярної вісі, досить обрати довільний проміжок $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 + \pi$ та застосувати формулу (9) для обчислення довжини дуги цієї кривої:

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$
$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi =$$
$$= 8\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\!\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 8\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8.$$




**Приклад 4.** *Обчислимо довжину дуги однієї арки циклоїди:* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, *де* $a > 0$.

Зафіксуємо деяке початкове значення параметра $t_1$. Враховуючи періодичність функції $\cos t$, маємо, що $y(t_1 + 2\pi n) = y(t_1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому одна арка циклоїди відповідає зміні параметра $t$ на величину $2\pi$. Нехай $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$. При цьому маємо: $x(t_1) = y(t_1) = y(t_2) = 0$, $x(t_2) = 2a\pi$. Для обчислення довжини дуги застосуємо формулу (10):

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{(a(1-\cos t))'}{(a(t-\sin t))'}\right)^2} \cdot \big(a(t - \sin t)\big)'\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}} \cdot a(1-\cos t)\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt =$$
$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\, dt = 4a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, d\!\left(\frac{t}{2}\right) = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

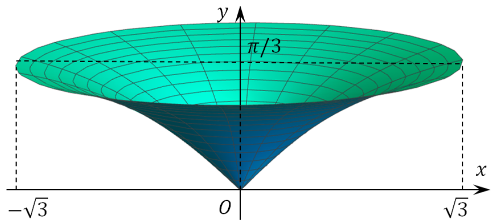
**Приклад 5.** *Знайдемо об'єм тіла, утвореного обертанням фігури навколо вісі* $Oy$, *що обмежена лініями* $y = \operatorname{arctg} x$, $y = 0$ *та* $y = \frac{\pi}{3}$.

Крива $y = \operatorname{arctg} x$ і пряма $y = \frac{\pi}{3}$ перетинаються у одній точці із абсцисою $x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Застосуємо формулу (13):

$$V_y = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \operatorname{arctg} x \, dx, & v = \dfrac{1}{1+x^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2\pi x}{1+x^2}\bigg|_0^{\sqrt{3}} - 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} - 2\pi \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right).$$




Обчисліть площі фігур, обмежених кривими у прямокутній декартовій СК:

**21.1** $y = x^2,\ y = x^4;$

**21.2** $x^2 + y^2 = 4x,\ y = x;$

**21.3** $y = \dfrac{1}{1+x^2},\ y = \dfrac{x^2}{2};$

**21.4** $y = \dfrac{16}{x^2},\ y = 17 - x^2,\ x > 0;$

**21.5** $xy = 20,\ x^2 + y^2 = 41,\ x \geqslant 0;$

**21.6** $y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 8;$

**21.7** $y = \sin^3 x,\ y = \cos^3 x,\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right];$

**21.8** $y = 2^x,\ y = 2,\ x = 0.$

Обчисліть площі фігур, обмежених кривими у полярній СК:

**21.9** $\rho = a \sin 3\varphi,\ a > 0,\ \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right];$

**21.10** $\rho = \sin^2 \dfrac{\varphi}{2},\ \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right];$

**21.11** $\rho = a(1 + \cos\varphi),\ a > 0;$

**21.12** $\rho = 2\cos\varphi,\ \rho \geqslant 1.$

Обчисліть площі фігур, обмежених петлями кривих, що задані параметрично або неявно (параметр $a > 0$):

**21.13** $x = 2t - t^2,\ y = 2t^2 - t^3;$

**21.14** $x = \cos^3 t,\ y = \sin t;$

**21.15** $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2 xy;$

**21.16** $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2).$

Знайдіть довжини дуг кривих або петель кривих (параметр $a > 0$):

**21.17** $y = \ln x,\ x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}];$

**21.18** $\rho = a \sin\varphi;$

**21.19** $\rho = \dfrac{a}{1 + \cos\varphi},\ \varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right];$

**21.20** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$

**21.21** $x = \sqrt{3}t^2,\ y = t - t^3;$

**21.22** $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ t \in [0, \ln\pi].$

Знайдіть об'єми тіл, обмежених поверхнями:

**21.23** $x^2 + y^2 = a^2,\ y^2 + z^2 = a^2;$

**21.24** $2z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9},\ z^2 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9};$

**21.25** $x + y + z^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями

**21.26** $y = 2x - x^2,\ y = 0$, навколо: а) вісі $Ox$; б) вісі $Oy$;

**21.27** $xy = 4,\ x = 1$ та $y = 0$, навколо вісі $Ox$;

**21.28** $y = e^x,\ x = 0,\ x = 2$ та $y = 0$, навколо: а) вісі $Ox$; б) вісі $Oy$.

# Відповіді та вказівки

**15.1** $\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 4x - \ln|x| - \frac{11}{x} + C,\ x \neq 0$; **15.2** $\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}} + C$; **15.3** $\ln|x| + +2\,\mathrm{arctg}\,x + C,\ x \neq 0$; **15.4** $x + \sin x + C$; **15.5** $\cos x + C$; **15.6** $\mathrm{tg}\,x - x + C$; **15.7** $\frac{1}{4}\,\mathrm{ch}\,2x + C$; **15.8** $3 \cdot \left(\frac{3}{e}\right)^x \cdot \left(\ln\frac{3}{e}\right)^{-1} + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{x}{e} + C$; **15.9** $-\frac{1}{8(2x-3)^4} + C$, $x \neq \frac{3}{2}$; **15.10** $\frac{3}{56}\sqrt[3]{(5-8x)^7} + C$; **15.11** $-\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C$; **15.12** $-\frac{1}{2}\cos(2x-3) + C$; **15.13** $\frac{1}{3\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}}{3}x + C$; **15.14** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2} + C,\ |x| \leqslant \frac{2}{3}$; **15.15** $\frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x^2-4|$, $x \neq \pm 2$; **15.16** $\frac{1}{b^2}\sqrt{b^2x^2+a^2}$; **15.17** $-\frac{1}{5}\cos(x^5+3)$; **15.18** $\frac{1}{3b^2}(b^2x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}$; **15.19** $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}},\ x \neq 0$; **15.20** $e^{\sin x}$; **15.21** $\ln|\ln x|,\ x > 0$; **15.22** $\ln|\ln\ln x|,\ x > e$.

**16.1** $2x - \ln|2x+1|,\ x \neq -\frac{1}{2}$; **16.2** $x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$; **16.3** $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x + \ln|x-1| - -16\ln|x+2|,\ x \notin \{-2, 1\}$; **16.4** $\frac{(x+1)^2}{2} + \ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \mathrm{arctg}\,x,\ x \neq 1$; **16.5** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - -\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x,\ x \neq \pm 1$; **16.6** $\frac{3}{2(x-2)^2} + \ln|x-5|,\ x \notin \{2, 5\}$; **16.7** $\frac{2}{x-3} + 3\ln|x+2| - -3\,\mathrm{arctg}\,(x+2) - \ln(x^2+4x+5),\ x \notin \{-2, 3\}$; **16.8** $3\ln|x-1| + \ln\sqrt{x^2+1} + +\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \mathrm{arctg}\,x\right),\ x \neq 1$; **16.9** $x\sin x + \cos x$; **16.10** $-e^{-x}(x+1)$; **16.11** $\frac{1}{2}\,e^x \cdot \cdot(\sin x - \cos x)$; **16.12** $(x+1)\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x} - \sqrt{x},\ x \geqslant 0$; **16.13** $x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$, $|x| \leqslant 1$; **16.14** $x \cdot (\arcsin x)^2 + 2\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2} - 2x,\ |x| \leqslant 1$; **16.15** $x\,\mathrm{tg}\,x - \frac{x^2}{2} + +\ln|\cos x|,\ x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$; **16.16** $(x^3+1)\cdot\ln(1+x) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x,\ x > -1$; **16.17** $\frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x),\ x > 0$; **16.18** $\sqrt{1+x^2}\cdot\mathrm{arctg}\,x - \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

**17.1** $\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4} + 2\sqrt[6]{x^3} + 3\sqrt[6]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1|,\ x \notin \{0, 1\}$; **17.2** $\ln\frac{|x|}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}} + +\frac{10}{\sqrt[10]{x}} - \frac{5}{\sqrt[5]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}},\ x \neq 0$; **17.3** $\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{4}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1}$, $x \neq 1$; **17.4** $6\sqrt[3]{(x+1)^2}\cdot\left(\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{x+1}{5} + \frac{\sqrt{x+1}}{7} + \frac{1}{4}\right),\ x \neq -1$; **17.5** $\frac{3}{4}y^4 - \frac{3}{2}y^2 - -\frac{3}{4}\ln|y-1| + \frac{15}{8}\ln(y^2+y+2) - \frac{27}{8\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2y+1}{\sqrt{7}}$, де $y = \sqrt[3]{2+x},\ x \neq -1$; **17.6** $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ x \in (-1, 0)\cup(0, 1]$; **17.7** $-\frac{1}{2}(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2} + +14\arcsin\frac{x+1}{2},\ x \in (-3, 1)$; **17.8** $-15\ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2+4x+5}\right| + (x^2 - 5x + 20)\cdot \cdot\sqrt{x^2+4x+5}$; **17.9** $\frac{\mathrm{sgn}\ x}{2}\cdot\arcsin\frac{x-2}{x\sqrt{2}},\ x \in \mathbb{R}\setminus[-2-2\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2}]$; **17.10** $\frac{\mathrm{sgn}\,(x-1)}{\sqrt{3}}\cdot \cdot\left(\ln(2\sqrt{3}|x-1|) - \ln|\sqrt{3}(x+1)\cdot\mathrm{sgn}\,(x-1) + \sqrt{x^2+x-1}|\right),\ x \neq 1$; **17.11** $\ln\left|x + 1 + +\sqrt{x^2+2x+2}\right| + \frac{1}{x+1}\cdot(1 - \sqrt{x^2+2x+2})$; **17.12** $-4\ln|y| + 3\ln|2y-1| + \frac{3}{2y-1}$, де $y = \sqrt{x^2+x+1} - x,\ x \neq -1$; **17.13** $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| - 2\,\mathrm{arctg}\,y$, де $y = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$; **17.14** $3\cdot\left(\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right| + \frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right),\ x \notin \{-1, 0\}$; **17.15** $-\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} - -\frac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5},\ x \neq \pm 1$; **17.16** $3y + \ln\frac{|y-1|}{\sqrt{y^2+y+1}} - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2y+1}{\sqrt{3}}$, де $y = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$, $x \neq 0$; **17.17** $-\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}},\ x \neq 0$; **17.18** $-\frac{8}{9}\sqrt{(1+x^{-3/4})^3}$, $x \neq 0$.

**18.1** $\frac{4}{5}\sin^5 x - \frac{8}{7}\sin^7 x$; **18.2** $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x$; **18.3** $-(\cos x)^{-1} + \frac{1}{3}(\cos x)^{-3}$, $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$; **18.4** $\mathrm{tg}\,x - 2\,\mathrm{ctg}\,x - \frac{1}{3}\,\mathrm{ctg}^3\,x,\ x \notin \left\{\frac{\pi k}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$; **18.5** $\frac{1}{2}\ln|\,\mathrm{tg}\,x\,|$,

$x \notin \left\{\frac{\pi k}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$; **18.6** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$, $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}+\pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$; **18.7** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$, $x \notin \{\pi + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$; **18.8** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)$, $x \notin \{\pi + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$; **18.9** $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{6}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{6}}\right|$, $x \notin \{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \left\{2\cdot\left(\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{2}+\pi k\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$; **18.10** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right)$, $x \notin \{\pi + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$; **18.11** $-2\ln|\operatorname{tg}x+1|-\ln\cos^2 x-$ $-2\cos^2 x+\sin 2x$, $x \notin \left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{\pi}{2}+\pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$; **18.12** $\operatorname{arctg}\left(\sin^2 x\right)$; **18.13** $I_1 = \sin x$, $I_2 = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$ та $\forall n \geqslant 3$: $I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\cdot\sin x + \frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}$; **18.14** $J_1 = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$, $J_2 = -\operatorname{ctg}x$ та $\forall n \geqslant 3$: $J_n = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\cdot J_{n-2}$; **18.15** $|x|+C$; **18.16** $x+4+C$ при $x<-2$, $-x+C$ при $x\in[-2,1]$ та $x-2+C$ при $x>1$; **18.17** $\frac{1}{3}+C$ при $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$, $x+C$ при $x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $2x-\frac{2}{3}+C$ при $x\in\left[\frac{2}{3},1\right)$ та $3x-\frac{5}{3}+C$ при $x\in\left[1,\frac{4}{3}\right)$; **18.18** $\frac{x^2}{2}+x+C$ при $x\in(-1,0)$, $\frac{x^2}{2}+C$ при $x\in[0,1)$ та $\frac{x^2}{2}-x+1+C$ при $x\in[1,2)$; **18.19** $e^x+C$ при $x\leqslant 0$, $\frac{x^2}{2}+1+C$ при $0<x\leqslant 1$ та $-\frac{1}{\pi}\cos\pi x+\frac{3}{2}-\frac{1}{\pi}+C$ при $x>1$; **18.20** $-\cos x+C$ при $x\leqslant\frac{\pi}{4}$, $\sin x-\sqrt{2}+C$ при $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ та $-\cos 3x+1-\sqrt{2}+C$ при $x\geqslant\frac{\pi}{2}$.

**19.1** ; **19.2** $\underline{S_{P_n}}(f) = 16\frac{1}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$, $\overline{S_{P_n}}(f) = 16\frac{1}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$; **19.3** ; **19.4** ; **19.5** ; **19.6** ; **19.7** ; **19.8** ; **19.9** ; **19.10** $\frac{3}{2}$; **19.11** $-1$; **19.12** $-2$; **19.13** 19; **19.14** 2; **19.15** $\frac{3}{4}$; **19.16** $\frac{1}{2}$; **19.17** $\ln 3$; **19.18** ; **19.19** $\frac{1}{e}$; **19.20** ; **19.21** $\frac{5}{6}\pi$; **19.22** ; **19.23** ; **19.24** ; **19.25** ; **19.26 – 19.28** так.

**20.4** 4; **20.5** 1; **20.6** $\frac{2(e-1)}{e}$; **20.7** $200\sqrt{2}$; **20.8** $200\sqrt{2}$; **20.9** $5-\sqrt{2}-\sqrt{3}$; **20.10** $-5\pi$; **20.11** $9-3\pi-\pi^2+\frac{\pi^3}{3}$; **20.12** $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$; **20.13** $e-\sqrt{e}$; **20.14 – 20.16** заміну зробити неможливо; **20.17** $\int_0^1\big(f(\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)\big)\,dt$; **20.18** $\int_5^{20}\frac{t\,dt}{2\sqrt{t-4}}$; **20.19 – 20.21** ні; **20.22** так, 1; **20.23** ; **20.24** ; **20.25** 1; **20.26** $-\frac{2}{3}$; **20.27** 0; **20.28** $\infty$; **20.29** другого; **20.30** першого; **20.31** першого; **20.32** другого; **20.33** першого; **20.34** $\left[\frac{2}{\sqrt[4]{e}},2e^2\right]$ за 1-ою теор. про середнє; **20.35** $\left[\frac{1-e^{-100}}{200},\frac{1}{100}\right]$ за 2-ою теор. про середнє; **20.36** ; **20.37** ; **20.38** ; **20.39** $\left[\frac{\pi}{2}\cdot\cos 1,\frac{\pi}{2}\right]$ за 1-ою теор. про середнє; **20.40** ; **20.41** $\left[\frac{\pi(3-2\sqrt{3})}{6},\frac{\pi(2-\sqrt{3})}{3}\right]$ за 2-ою теор. про середнє; **20.42** $I\approx 3{,}5618$ за формулою прямокутників при $n=4$, $I\approx 3{,}5723$ за формулою трапецій ($n=6$); **20.43** $I\approx 2{,}5576$ за формулою прямокутників при $n=4$, $I\approx 2{,}5723$ за формулою трапецій ($n=5$).

**21.1** $\frac{4}{15}$; **21.2** $\pi-2$; **21.3** $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$; **21.4** 18; **21.5** $\frac{41}{2}\arcsin\frac{9}{41}+20\ln\frac{4}{5}$; **21.6** $\frac{4}{3}+2\pi$; **21.7** $\frac{5\sqrt{2}-2}{3}$; **21.8** $2-\frac{1}{\ln 2}$; **21.9** $\frac{\pi a^2}{12}$; **21.10** $\frac{3\pi-8}{32}$; **21.11** $\frac{3\pi a^2}{2}$; **21.12** $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; **21.13** $\frac{8}{15}$; **21.14** $\frac{3\pi}{4}$; **21.15** $a^2$; **21.16** $\pi a^2\sqrt{2}$; **21.17** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; **21.18** $\sqrt{2}(\pi-1)$; **21.19** $2a$; **21.20** $6a$; **21.21** 4; **21.22** $\pi a$; **21.23** $\frac{16}{3}a^3$; **21.24** ??; **21.25** $\frac{4}{15}$; **21.26** а) $\frac{16\pi}{15}$, б) $\frac{8\pi}{3}$; **21.27** $12\pi$; **21.28** а) $\frac{\pi}{2}(e^4-1)$, б) $4\pi e^2$.

# Рекомендовані джерела


[1] Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. *Математичний аналіз. Частина 1.* — К: Вища школа, 1992. — 495 с.

[2] Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. *Математичний аналіз. Частина 2.* — К: Вища школа, 1993. — 375 с.

[3] Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г. и др. *Справочное пособие по математическому анализу. Часть 1. Введение в анализ, производная, интеграл.* — К.: Вища школа, 1978. — 696 с.

[4] Ляшко С. И., Боярчук А. К. и др. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — Москва–Санкт-Петербург–Киев: Диалектика, 2001. — 432 с.

[5] Дороговцев А. Я. *Математический анализ. Краткий курс в современном изложении.* — К.: Факт, 2004. — 560 с.

[6] Фихтенгольц Г. М. *Основы математического анализа. Том 1.* — М.: Наука, 1968. — 440 с.

[7] Фихтенгольц Г. М. *Основы математического анализа. Том 2.* — М.: Наука, 1968. — 464 с.

[8] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — М.: Наука, 1977. — 528 с.

[9] Денисьєвський М. О., Курченко О. О., Нагорний В. Н., Нестеренко О. Н., Петрова Т. О., Чайковський А. В. *Збірник задач з математичного аналізу. Частина I. Функції однієї змінної.* — К.: ВПЦ “Київський університет”, 2005. — 257 с.

[10] Денисьєвський М. О., Чайковський А. В. *Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних.* — К.: ВПЦ “Київський університет”, 2012. — 276 с.