1. Поняття оберненого оператора

Нехай $\mathcal{A}$ - лін. опер. на лін. пр. V
Якщо до нього існує лінійний оператор $\mathcal{B}$ на пр. V такий, що $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}=\mathcal{E}$, то оператор $\mathcal{B}$ наз. оберненим до опер. $\mathcal{A}$ і позн. $\mathcal{B}=\mathcal{A}^{-1}$.

Питання 1) чи до кожного опер. існує обернений?
2) скільки до даного опер. може існувати обернених?
3) як знайти обернений оператор?

① Нехай $\mathcal{O}$ - нульовий опер. на лін. пр. V
Тоді $\forall$ лін. опер $\mathcal{A}$ на V: $\mathcal{O}\cdot\mathcal{A}=\mathcal{A}\cdot\mathcal{O}=\mathcal{O}$,
тобто до нульового оператора не існує оберненого.

② Припустимо до даного лін. опер. $\mathcal{A}$ на пр. V існують опер $\mathcal{B}$ та $\mathcal{F}$ на пр. V, такі що $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}=\mathcal{E}$, $\mathcal{A}\mathcal{F}=\mathcal{F}\mathcal{A}=\mathcal{E}$.
Тоді $\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{F}=\mathcal{B}(\mathcal{A}\mathcal{F})=\mathcal{B}\mathcal{E}=\mathcal{B}$
З іншого боку $\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{F}=(\mathcal{B}\mathcal{A})\mathcal{F}=\mathcal{E}\mathcal{F}=\mathcal{F}$
Тобто $\mathcal{B}=\mathcal{F}$.
Лема Якщо до лін. опер. існує обернений, то він єдиний.

③ Існування оберненого оператора.
Теорема Лін. опер. на скінч. вим. пр. має обернений $\Longleftrightarrow$ в даному базисі йому відповідає невироджена матриця.
Дов. Припустимо до лін. опер. $\mathcal{A}$ на лін. пр. V існує обернений і $a_1, a_2, \dots, a_n$ - деякий базис пр. V, в якому оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця A, а оператору $\mathcal{A}^{-1}$ – матриця B.
В $\forall$ базисі одиничному опер. $\mathcal{E}$ відповідає одинична матриця E.
Оскільки для операторів викон. $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}=\mathcal{E}$, то для матриць $AB=E$, тобто $B=A^{-1}$ і A - невироджена.
Припустимо, в даному базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ оператору $\mathcal{A}$ відповідає невироджена матриця A. Тобто існує матриця A^{-1}.
Позначимо через $\mathcal{B}$ лін. опер. на пр. V, якому в цьому базисі відпов. матр. A^{-1}. Для матриць викон. $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.
Тоді для операторів $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}=\mathcal{E}$, тобто за озн. $\mathcal{B}=\mathcal{A}^{-1}$. □

Заув. Нехай $\mathcal{A}$ – лін. опер. на скінч. вим. пр. V, якому в деякому фікс. базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ відповідає матр. A. Якщо для $\mathcal{A}$ існує обернений, то в цьому ж базисі оператору $\mathcal{A}^{-1}$ відповідає обернена матр. A^{-1}.

Еквівалентні умови існування оберненого оператора

Теор. Нехай $\mathcal{A}$ – лін. опер. на скінч. вим. пр. V. Тоді наступні умови еквівалентні:

1) для $\mathcal{A}$ існує $\mathcal{A}^{-1}$;
2) опер. $\mathcal{A}$ базис простору переводить в базис простору;
3) опер. $\mathcal{A}$ будь-яку лін. незал. сист. векторів переводить в лін. незал. систему;
4) $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$
5) $\operatorname{Im} \mathcal{A} = V$
6) в $\forall$ базисі оператору $\mathcal{A}$ відповідає невироджена матриця
7) опер. $\mathcal{A}$ взаємнооднозначний, тобто з $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \mathcal{A}(x_1) \neq \mathcal{A}(x_2)$.

2

Матриця білінійної функції в базисі.

Припустимо $f(x,y)$ – білінійна функція на просторі V над полем $\mathbb{R}$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – деякий фіксований базис простору V.

Матрицею білінійної функції на просторі V в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ називається матриця

$$A = \begin{pmatrix} f(a_1,a_1) & f(a_1,a_2) & \dots & f(a_1,a_n) \\ f(a_2,a_1) & f(a_2,a_2) & \dots & f(a_2,a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(a_n,a_1) & f(a_n,a_2) & \dots & f(a_n,a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця білінійної функції в даному базисі цілком визначає білінійну функцію.

Нехай $x, y \in V$ – довільні вектори, які в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ мають координати $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, A – матриця білінійної функції f в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$.
Тоді значення білінійної функції f на векторах x, y можна знайти за формулою

$$f(x,y) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

Зв'язок матриць білінійної функції в різних базисах.

Теорема Нехай білінійній функції $f(x,y)$ на скінченновимірному просторі V над полем $\mathbb{R}$ в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ відповідає матриця $A = (\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, а в базисі $b_1, b_2, \dots, b_n$ — матриця $B = (\beta_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, F — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \dots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Тоді $B = F^T A F$.

Доведення Нехай $x, y \in V$ — довільні вектори, які в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ задаються координатами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, а в базисі $b_1, b_2, \dots, b_n$ — координатами $x = (x_1', x_2', \dots, x_n')$, $y = (y_1', y_2', \dots, y_n')$.

Оскільки F — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \dots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \dots, b_n$, то виконуються рівності:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}.$$

Тоді $f(x,y) = (x_1, x_2, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1', x_2', \dots, x_n') F^T \cdot A \cdot F \cdot \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}.$

З іншого боку, $f(x,y) = (x_1', x_2', \dots, x_n') B \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}.$

Покажемо, що $B = F^T A F$

Припустимо, що $F^T A F = (\gamma_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, і покажемо, що $\forall\, i,j = \overline{1,n} : \beta_{ij} = \gamma_{ij}$.

Зафіксуємо індекси i, j. Тоді $\beta_{ij} = f(b_i, b_j)$.

З іншого боку, $f(b_i, b_j) = (0, \dots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \dots, 0) F^T A F \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \gamma_{ij}.$

Тобто $\beta_{ij} = \gamma_{ij}$. $\square$

Наслідок. Ранг матриці білінійної функції не залежить від вибору базису.

Доведення. Якщо A, B – матриці білінійної функції $f(x,y)$ у різних базисах, то $B = F^T A F$ для деякої невиродженої матриці F. Як відомо, домноження матриці зліва і справа на невироджену матрицю не змінює її рангу. Тому ранги матриць A і B рівні. □

З останнього наслідку випливає коректність наступного означення.

Озн. Рангом білінійної функції на скінченновимірному просторі називають ранг її матриці в деякому базисі.

Озн. Квадратні матриці A і B називаються конгруентними, якщо $\exists$ невироджена матриця F така, що $B = F^T A F$.

З останньої теореми випливає, що матриці білінійної функції в різних базисах конгруентні.

Матриця білінійної функції в деякому базисі цілком задає цю функцію.

З іншого боку, нехай A – квадратна матриця з дійсними елементами порядку n, V – векторний простір над полем $\mathbb{R}$ розмірності n. Тоді матриця A задає на просторі V деяку білінійну функцію.

Дійсно, зафіксуємо деякий базис простору V $a_1, a_2, \dots, a_n$, $x, y \in V$ – довільні вектори, які в цьому базисі мають координати $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Покладемо $$f(x,y) = (x_1, x_2, \dots, x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Функція f є білінійною функцією на просторі V, якій в даному базисі відповідає матриця A.

3. $e_1=(1;1;1;1)$ $e_2=(1;2;1;3)$ $e_3=(1;1;2;2)$ $e_4=(1;1;1;3)$

$e'_1=(3;-5;7;2)$ $e'_2=(-1;8;-6;5)$ $e'_3=(1;0;1;3)$ $e'_4=(2;2;2;2)$

Нехай f_1, f_2, f_3, f_4 – база, в якій задані координати даних векторів.

$$T_{f\to e}=T=(e_1|e_2|e_3|e_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&3&2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&2&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}=4 \Rightarrow e_1, e_2, e_3, e_4$ – базис.

$$T_{f\to e'}=T^{-1}=(e'_1|e'_2|e'_3|e'_4)=\begin{pmatrix}3&-1&1&2\\-5&8&0&2\\7&-6&1&2\\2&5&3&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-6&-2&0\\-5&8&0&2\\7&-6&1&2\\2&5&3&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-6&-2&0\\0&-22&-10&2\\0&36&15&2\\0&17&7&2\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-6&-2&0\\0&-22&-10&2\\0&2&1&-2\\0&17&7&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-6&-2&0\\0&2&1&-2\\0&0&1&-20\\0&0&-\frac{3}{2}&19\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-6&-2&0\\0&2&1&-2\\0&0&1&-20\\0&0&0&-11\end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}=4 \Rightarrow e'_1, e'_2, e'_3, e'_4$ базис.

$$T_{e\to e'}=\left(T_{f\to e}\right)^{-1}\cdot T_{f\to e'}$$

$$T_{e\to e'}=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&3&-1&1&2\\1&2&1&1&-5&8&0&2\\1&1&2&1&7&-6&1&2\\1&3&2&3&2&5&3&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&3&-1&1&2\\0&1&0&0&-8&9&-1&0\\0&0&1&0&4&-5&0&0\\0&2&1&2&-1&6&2&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&3&-1&1&2\\0&1&0&0&-8&9&-1&0\\0&0&1&0&4&-5&0&0\\0&0&1&2&15&-12&4&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&3&-1&1&2\\0&1&0&0&-8&9&-1&0\\0&0&1&0&4&-5&0&0\\0&0&0&2&11&-7&4&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&0&-\frac{5}{2}&\frac{5}{2}&-1&2\\0&1&0&0&-8&9&-1&0\\0&0&1&0&4&-5&0&0\\0&0&0&1&\frac{11}{2}&-\frac{7}{2}&2&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&-\frac{13}{2}&\frac{15}{2}&-1&2\\0&1&0&0&-8&9&-1&0\\0&0&1&0&4&-5&0&0\\0&0&0&1&\frac{11}{2}&-\frac{7}{2}&2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&0&2\\0&1&0&0&-8&9&-1&0\\0&0&1&0&4&-5&0&0\\0&0&0&1&\frac{11}{2}&-\frac{7}{2}&2&0\end{array}\right)$$

$$T_{e\to e'}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-3&0&4\\-16&18&-2&0\\8&-10&0&0\\11&-7&4&0\end{pmatrix}$$

4. $x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1-\lambda \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4}\right) + \frac{\lambda}{2} - \frac{3}{4} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \frac{9}{4}\lambda = -\frac{\lambda}{4}(2\lambda-3)(2\lambda-3)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3}{2}$, $\lambda_3 = 0$.

Для $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3}{2}$: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1/2\right) \sim (-1; -1; 1)$ $\quad x_1 = x_2 - x_3$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
1	0	1
-1	1	0

$a_1 = (1; 0; 1)$, $a_2 = (-1; 1; 0)$ $\quad a_1 \not\perp a_2$.

$b_1 = (1; 0; 1)$, $b_2 = a_2 - \alpha_{21} b_1 = a_2 - \frac{(a_2 b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = a_2 + \frac{b_1}{2} = \left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$

Для $\lambda_3 = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$x_2 = -x_3$
$x_1 = -x_3$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
-1	-1	1

$b_3 = (-1; -1; 1)$

$c_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{-\sqrt{6}}; \sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$c_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \\ x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \end{cases}$$

Канонічний вигляд: $f(y_1, y_2, y_3) = \frac{3}{2} y_1^2 + \frac{3}{2} y_2^2$.