Lectures by ADJUBEY

Структура навчальної дисципліни. Тематичний план лекцій і лабораторних занять.

1 СЕМЕСТР

№ п/п	Номер і назва теми	Кількість годин		
		лекції	практичні	самостійна робота
Частина 1. Логічні символи. Множини. Відображення. Упорядковані простори. Числові послідовності.				
1	**Тема 1.** Логічні символи. Множини. Метод математичної індукції.	2	2	4
2	**Тема 2.** Бінарні відношення. Відображення(функції). Упрорядковані простори.	2	2	4
3	**Тема 3.** Границя числової послідовності, властивості збіжних послідовностей. Теореми про границі.	2	2	4
4	**Тема 4.** Границя монотонної послідовності. Терема Вейєрштрасса**.** Число е.	2	2	4
5	**Тема 5.** Підпослідовності.Часткові границі. Верхня та нижні границі. Теорема Больцано_-Вейєрштрасса. Фундаментальні послідовності. Критерій Коші.	2	2	4
6	**Тема 6.** Теореми Коші та Штольца.	1	2	4
	Контрольна робота 1.1	1		
Частина 2. Границя та неперервність функції				
7	**Тема 7.** Границя функції в точці. Символи Ландау.	2	2	4
8	**Тема 8.** Порівняння функцій в околі граничної точки. Асимптотичні формули.	2	2	4

9	**Тема 9.** Неперервність функції та властивості неперервних функцій. Точки розриву.	2	2	4
10	**Тема 10.** Рівномірно неперервні функції	1	2	4
	Контрольна робота 1.2	1		
Частина 3. Диференційне числення				
11	**Тема 11.** Похідна та диференціал функції та їх властивості	2	2	6
12	**Тема 12.** Похідні та диференціали вищих порядків.Формула Лейбніца.	2	2	4
13	**Тема 13.** Формули Тейлора та Маклорена. Правила Лопіталя.	2	2	6
14	**Тема 14.** Основні теореми диференціального числення. Застосування похідної до дослідження властивостей функції та побудови її графіка	2	1	6
	Практична контрольна робота 1		**1**	
	Консультація		2	
	ВСЬОГО	**28**	**30**	**62**

Загальний обсяг – 120 год., в тому числі:

Лекцій – 28 год.

Лабораторні заняття – 28 год.

Консультації – **2** год.

Самостійна робота – **62** год.

Рекомендовані джерела:

Основні:

1. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Краткий курс в современном изложении. – Киев, Факт, 2004 – 560 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. 2 тома – Москва, Наука, 1 том 1968 – 440 с, 2 том 1968 – 464 с.

3. Ляшко С.И., Боярчук А.К. и др. Сборник задач и упражнений по математическому анализу – Москва-Санкт-Петербург-Киев, Диалектика, 2001 – 432 с.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу – Москва, Наука, 1977 – 528 с.
5. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г. и др. Справочное пособие по математическому аналізу. Часть 1. Введение в аналіз, производная, интеграл. – Киев, Вища школа, 1978 – 696 с.
6. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г. и др. Справочное пособие по математическому аналізу. Часть 2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. – Киев, Вища школа, 1979 – 736 с.

Додаткові:

7. Березанский Ю.М., Г.Ф.Ус, Шефтель З.Г. Функциональный анализ. - К.: Вища школа, 1990. - 600 с
8. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К Математичний аналіз. 2 частини – Київ, Вища школа, 1 частина 1992 – 495 с, 2 частина 1993 – 375 с.
9. Ляшко И.И., Боярчук А.К. и др. Математический анализ. 3 части – Киев, Вища школа, 1 часть 1983 – 495 с, 2 часть 1985 – 551 с.
10. Зорич В.А. Математический аналіз. 2 части – Москва, МЦНМО, 1 часть 2001 – 664 с, 2 часть 2002 – 794 с.
11. Архипов Г.И., Садівничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому аналізу – Москва, Высшая школа, 1999 – 695 с.
12. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. 2 части – Москва, Наука, 1 часть 1982 – 616 с, 2 часть 1980 – 448 с.
13. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. 2 части – Москва, Наука, 1 часть 1978 – 392 с, 2 часть 1978 – 432 с.
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва, Наука, 1981 – 544 с.
15. Шилов Г.Е. Функции нескольких переменных. – Москва, Наука, 1972 – 624 с.
16. Халмош П. Теория меры. – Москва, ИЛ, 1953 – 291 с.
17. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – Москва, Мир, 1967 – 251 с.
18. Очан Ю.С. Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного. – Москва, Просвещение, 1965 – 231 с.
19. Александрович І.М., Молодцов О.І., Номіровський Д.А та інші Математичний аналіз. Топологія дійсної прямої. – Київ, КНУ, 2010 – 103 с.
20. Рубльов Б.В. Математичний аналіз. Теорія послідовностей. – Київ, КНУ, 2010 – 95 с.
21. Ляшко С.І., Александрович І.М., Молодцов О.І. та інші Невласні інтеграли. Інтеграли, залежні від параметра. – Київ, КНУ, 2010 – 151 с.
22. Гончаренко Ю.В., Ляшко С.И. Задачи и упражнения по курсу математического анализа. Функции вещественной переменной. – Киев, Кий, 2001 – 308 с.

Електронні ресурси:

Практикум з математичного аналізу для студентів спеціальності «Інженерія програмного забезпечення» факультету комп'ютерних наук та кібернетики http://csc.knu.ua/uk/library
http://om.univ.kiev.ua/users_upload/319/upload/file/book.pdf

Вступ у математичний аналіз.

В XVII-XVIII століттях народжується вища математика, яка на відміну від елементарної, будується на поняттях змінної величини та функціональної залежності. Французький математик та філософ Рене Декарт (1595-1650) розробив аналітичну геометрію, яка за допомогою метода координат зводить вивчення геометричних об'єктів до вивчення співвідношень між числами, тобто мову геометрії переводить на аналітичну мову. Силу метода координат важко переоцінити, особливо при вивченні математичного аналізу. В кінці XVII століття англійський фізик, астроном, математик Ісаак Ньютон (1642-1727) і німецький філософ і математик Готфрид Лейбніц (1646-1716) в загальних рисах завершують побудову інтегрального та диференційного числень.

1. Деякі логічні символи.

$\forall$ - для будь-якого, для кожного;

$\exists$ - існує, знайдеться; $\exists!$ – існує єдиний елемент;

: - такий, що…; $\stackrel{def}{=}$ - дорівнює за означенням;

$n! \stackrel{def}{=} \prod_{k=1}^{n} k$ ***факторіал*,** (визначається для усіх чисел множини Z^+), $0! \stackrel{def}{=} 1$;

$(2n)!! \stackrel{def}{=} \prod_{k=1}^{n}(2k)$, $(2n+1)!! \stackrel{def}{=} \prod_{k=1}^{n}(2k+1)$ ***подвійні факторіали***;

$C_n^k \stackrel{def}{=} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ***біноміальні коефіцієнти***;

Нехай математичне твердження складається з висловлювання A та деякого висловлювання B. A⇒B (з A випливає B - висновок)⇒ - імплікація. Якщо з B⇒A, то A⇔B – еквівалентне твердження (необхідна і достатня умова). C=A∧B – C вірне, якщо має місце твердження A і B одночасно, ∧ - знак кон'юнкції. Якщо деякий елемент має властивість A або B, то пишуть A∨B і читають A «або» B, ∨ - знак диз'юнкції.

2. Деякі позначення теорії множин.

Німецький математик Г. Кантор (1845-1919) автор теорії множин. Множина – первісне поняття. Множина складається з елементів. Той факт, що елемент a належить множині A позначають: a∈A або A∋a, ∈ - символ належності; a∉A, ∉ - не належить.

A={a, b, c} – множина A складається з елементів a, b, c.

A={a|P(a)} – множина A складається з елементів a, що мають властивість p.

{a∈A|P(a)} – множина елементів a із множини A, що мають властивість p.

Множина A називається підмножиною B, якщо всі елементи A належать множині B, позначають A⊂B, або B⊃A. Множини A та B рівні, якщо A⊂B і B⊃A. Множина, яка не містить жодного елемента називається порожньою, позначається ∅. Для довільної множини M ∅∈M. Для множини M множина всіх підмножин позначається expM.

Основні числові множини

N – множина натуральних чисел; {1, 2, 3…}

Z – множина цілих чисел; {0, ±1, ±2, ±3…}

Q – множина раціональних чисел; {x=$\frac{p}{q}$, p, q∈Z, q≠0}

R – множина дійсних чисел;

C – множина комплексних чисел; {z=x+iy}, x, y∈R.

N⊂Z⊂Q⊂R⊂C

Z^+={x|x∈Z; x≥0} або N∪{0} – множина невід'ємних чисел

Z^- - множина недодатніх чисел

R^+={x∈R, x≥0}

Наприклад :

$M = \{n \in Z \mid \exists k \in Z : n = 2k\}$ – таким чином визначається множина усіх парних цілих чисел

Найпростіші операції над множинами

$\exp M$, 2^M ***множина усіх підмножин множини*** M .

При визначенні операцій, будемо вважати, що усі множини є підмножинами деякої універсальної множини M , тобто всі вони належать $\exp M$.

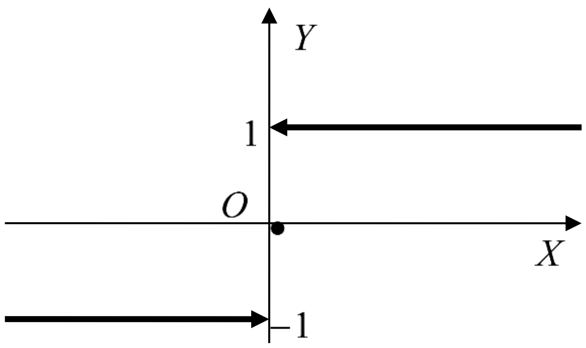
1. Об'єднанням двох множин A та B називається множина $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$ Нехай A – множина індексів і для $\forall \alpha \in A$ задана множина M_α: $\bigcup_{j=1}^{n} M_j = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha = \{x | x \in M_1 \vee x \in M_2 \vee \ldots x \in M_n\}$ або $\bigcup_{\alpha \in A}^{n} M_\alpha = \{x | \exists \alpha_0 \in A: M_{\alpha_0} \ni x\}$.
2. Перетином двох множин A та B називається множина $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$; $\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha = \{x | x \in M_1 \wedge x \in M_2 \wedge \ldots \wedge x \in M_n\}$ або $\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha = \{x | \forall \alpha \in A \Rightarrow M_\alpha \ni x\}$.
3. Різницею множин M_1 та M_2 називається множина $M_1 \setminus M_2 = \{x | x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$. Якщо $M_1 \supset M_2$, то $M_1 \setminus M_2$ називається також доповненням M_2 в M_1 і позначається $C_{M_1} M_2$, або CM_2.
   Симетричною різницею множин M_1 та M_2 називається множина $M_1 \Delta M_2 = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$.
4. $CA \overset{def}{=} M \setminus A$ – ***доповнення*** множини A
5. для зліченої сукупності множин $A_i, i \in N$:

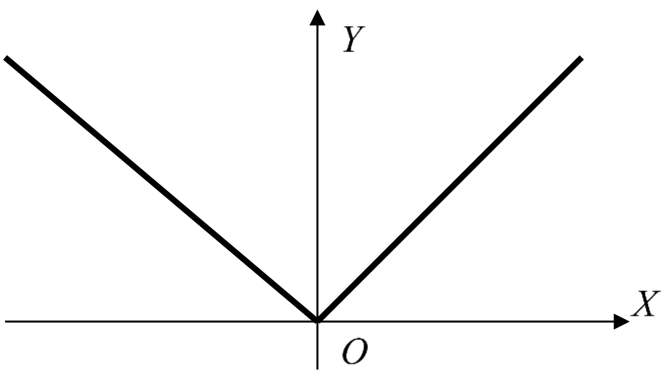
$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \overset{def}{=} \{a \mid \forall i \in N \;\; a \in A_i\}$ – перетин множин;

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \overset{def}{=} \{a \mid \exists i \in N \;\; a \in A_i\}$ – об'єднання множин;

Нагадаємо деякі важливі функції, що часто вживаються в подальших дослідженнях:

$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ – ***сігнум*** (*знак*). $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ – ***модуль*** (*абсолютна величина*).

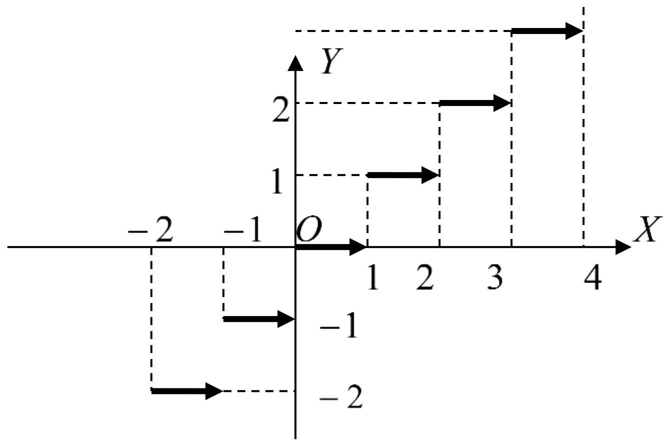


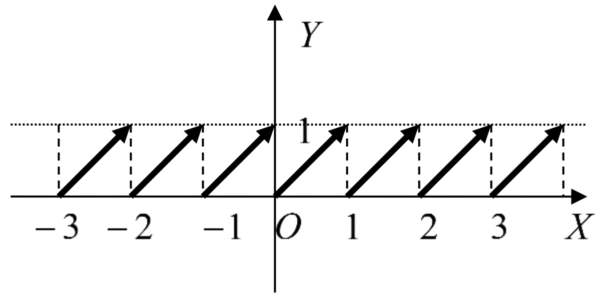


Останні дві функції пов'язує формула: $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$.

$[x]$ – *найбільше ціле, що не перевищує* x – ***ціла частина*** (*ант'є*), наприклад $[3{,}5]=3$, $[7]=7$, $[-\pi]=-4$;

$\{x\}=x-[x]$ – ***дробова частина***; наприклад: $\{2{,}3\}=0{,}3$, $\{0{,}7\}=0{,}7$, $\{-0{,}7\}\underset{x}{=}0{,}3$.

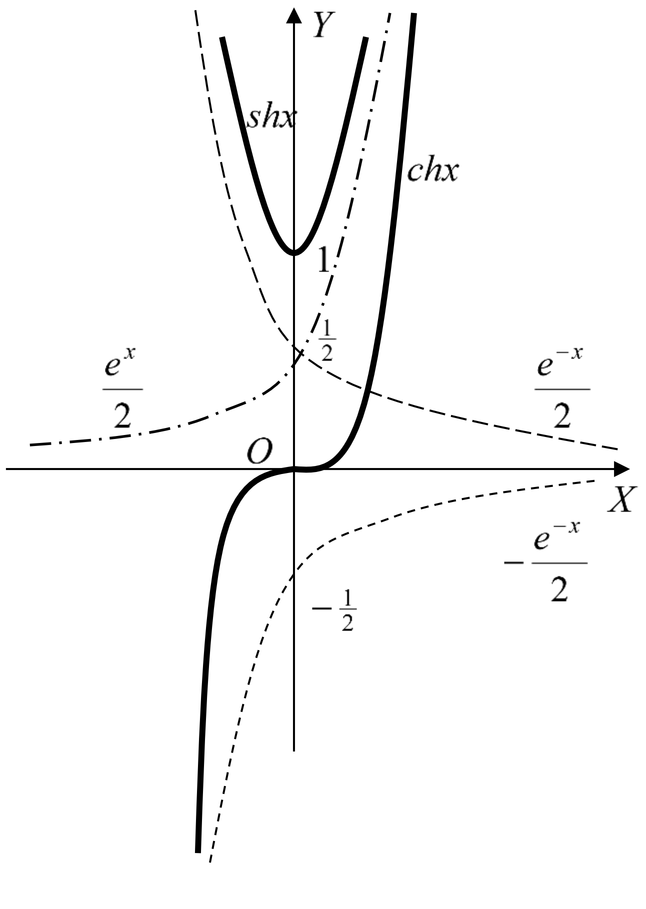


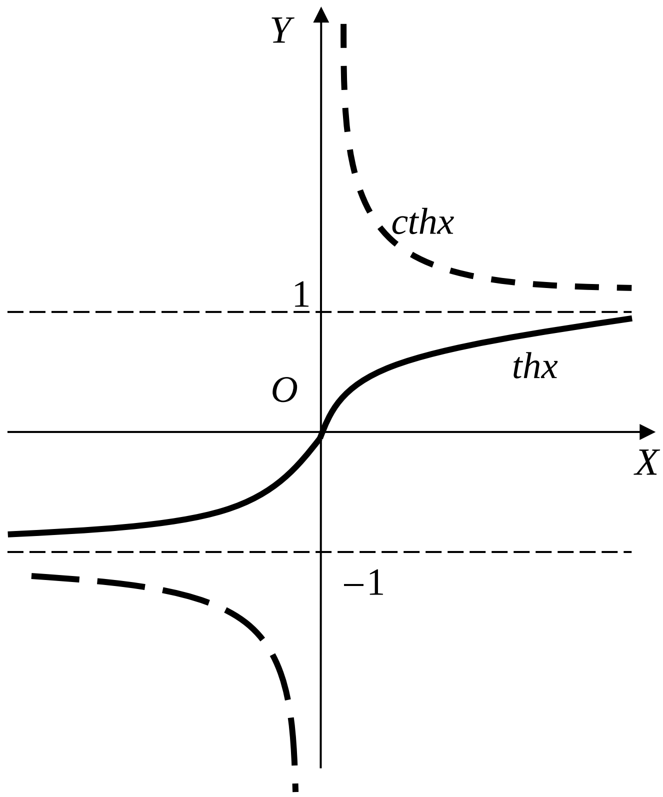


$sh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ – ***синус гіперболічний***; $ch x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ – ***косинус гіперболічний***;

$th x=\dfrac{sh x}{ch x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ – ***тангенс гіперболічний***; $cth x=\dfrac{ch x}{sh x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ ***котангенс гіперболічний***.

Функція Діріхле: $D(x)=\begin{cases}1, & x\in \mathrm{Q},\\ 0, & x\in \mathrm{R}\setminus \mathrm{Q}.\end{cases}$





Має місце ***принцип двоїстості***:

Довільне математичне твердження можна записати за допомогою логічних символів ($\forall, \exists$ та деякої умови P). В цьому випадку заперечення сформульованого твердження (протилежне твердження) ми дістанемо шляхом заміни кожного квантора на протилежний, а властивість P на її заперечення.

Наприклад:*Твердження:* послідовність (a_n) обмежена $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists M \quad \forall n \in N \ |a_n| \le M$.

Протилежне твердження: послідовність (a_n) необмежена $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall M \quad \exists n \in N \ |a_n| > M$.

Наведемо деякі з ***властивостей натуральних чисел***, що стануть в нагоді при вивченні індукції, а також в теорії послідовностей.

1. Якщо деяка множина $E \subset \mathrm{N}$ така, що $1 \in E$, а також разом з числом $x \in E$ множині E також буде належати і число $x+1$, то $E = \mathrm{N}$.

2. За числом $n \in \mathrm{N}$ в цій множині безпосередньо йде число $(n+1) \in \mathrm{N}$, тобто не існує натуральних чисел x, що задовольняють умови: $n < x < n+1$.

3. Будь-яка непорожня підмножина натуральних чисел містить найменший елемент.

Розглянемо дуже важливий математичний принцип – ***метод математичної індукції***, який базується на таких двох умовах та на вищенаведених властивостях натуральних чисел.

Властивість. *(Принцип математичної індукції)*

Умова 1: Твердження A_1 – істинне.

Умова 2: $\forall n \in \mathrm{N}$ із істинності твердження A_n випливає істинність A_{n+1}.

Висновок: Усі твердження $A_1, A_2, \ldots$ істинні.

Приклад . Довести рівність $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

При $n = 1$ ми маємо: $1 \cdot 1 = 2! - 1 = 1$ – справджується.

Припустимо, що вірно для деякого n : $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$. Покажемо, що $\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = (n+2)! - 1$. Зробимо перетворення лівої частини рівності належним чином:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot k! = \sum_{k=1}^{n} k\cdot k! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! =$$
$$= (n+1)!(n+1+1) - 1 = (n+2)! - 1,$$

що й треба було довести.

<u>Теорема 1.</u> *(Біном Ньютона)*

$\forall \{a,b\} \in \mathrm{R}\ \forall n \in \mathrm{N}$ справджується рівність: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

Доведення.

Тепер можемо скористатися математичною індукцією. При $n=1$

$$(a+b) = \sum_{k=0}^{1} C_1^k a^k b^{1-k} = a+b \text{ – справджується.}$$

Нехай при деякому $n \in N$ виконується $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$, треба довести, що

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} .$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1} =$$
$$= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} =$$
$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^{k-1} + C_n^k\right) a^k b^{n+1-k} +$$
$$+ b^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} = (a+b)^{n+1},$$

що й треба було довести.

Для доведення скористались властивістю біноміальних коефіцієнтів, яку отримали безпосередньо з означення :

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1+k}{k(n-k+1} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^{k}.$$

ЛЕКЦІЯ 2. Поняття відображення(функції)

Упорядкована пара та декартовий добуток.

Поняття впорядкованої пари (x, y) є первісним як і поняття множини. Пара (x, y) є впорядкованою, якщо вказаний порядок: x – перший елемент, y – другий елемент. Пари (x_1, y_1) і (x_2, y_2) рівні тоді і тільки тоді, коли $x_1=x_2 \wedge y_1=y_2$. Аналогічно визначається ***кортеж*** $(x_1, x_2, ..., x_n)$, що складається з n координат.

За допомогою упорядкованої пари вводиться ще одна операція над множинами – операція прямого або декартового добутку.

Означення 1.

Декартовим (прямим) добутком множин X та Y називається множина $X \times Y \overset{def}{=} \{(x, y) | \, x \in X \wedge y \in Y\}$. За допомогою методу математичної індукції визначається упорядкований набір n+1 елементів $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})=((x_1, x_2, ..., x_n), x_{n+1})$, n≥2 та декартів добуток n+1 множин $x_1 \times x_2 \times ... \times x_{n+1} = (x_1 \times x_2 \times ... \times x_n) \times x_{n+1}$. Так само ***декартовим добутком*** n ***множин*** $X_1, X_2, ..., X_n$ називається множина $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \overset{def}{=} \{(x_1, x_2, ..., x_n) | \, x_k \in X_k, \, k = \overline{1,n}\}$. Якщо множини X, Y співпадають ($\forall i = \overline{1,n} \;\; X_i = X$), то їх декартів добуток позначається як $X \times Y = X^2$ ($X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = X^n$).

Треба розуміти різницю між такими декартовими добутками як $X \times Y \times Z$ та $(X \times Y) \times Z$ - елементами першого є впорядковані трійки (x, y, z), де $x \in X, y \in Y, z \in Z$ а елементами другого – впорядкована пара $((x, y), z)$, першим елементом, якого є також впорядкована пара $(x, y) \in X \times Y$, а другим – елемент $z \in Z$.

Бінарне відношення.

Відношення – це термін для зв’язку між поняттями, предметами та інше.

Означення 2.

Множина Г називається ***бінарним відношенням*** між елементами множин X та Y, якщо вона є підмножиною їх прямого добутку: Г⊂(X×Y).

Наприклад, множину $\Gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ можна вважати бінарним відношенням між множинами $X = [-1,1],\ Y = (-2,2)$.

Оскільки бінарне відношення – це множина, то над нею можна виконувати деякі операції.

Означення 3.

<u>Першою та другою</u> <u>проекцією</u> бінарного відношення $\Gamma \subset X \times Y$ називаються відповідно множини

$$\Gamma_1 = \text{Пр}_1\Gamma = \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in \Gamma\}$$

$$\Gamma_2 = \text{Пр}_2\Gamma = \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in \Gamma\}$$

Означення 4.

Першим перерізом Γ за допомогою елемента x∈X бінарного відношення називається множина

Γ_1(x)={y∈Y|(x, y)∈Γ}.

Означення 5.

Множина Γ_1(y)={x∈X|(x, y)∈Γ} називається другим перерізом Γ за допомогою елемента y.

Означення 6.

Для кожного бінарного відношення $\Gamma \subset X \times Y$ можна визначити ***обернене бінарне відношення*** $\Gamma^{-1} \subset Y \times X$ за правилом: $\Gamma^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \Gamma\}$.

Бінарне відношення Γ називається ***функціональним***, якщо воно не містить різних упорядкованих пар з однаковими першими компонентами

<u>**Приклад 1.**</u> Знайти $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_1(x), \Gamma_2(y)$ для бінарного відношення $\Gamma = \{(x, y) \mid 1 \le y - x \le 4\},\ X = Y = [0,10]$.

Зобразимо це бінарне відношення (рис. 1), тоді можемо вже знайти усі перерізи та проекції:

$$\Gamma_1=[0,9],\ \Gamma_2=[1,10],\ \Gamma_1(x)=\begin{cases}[x+1,x+4],\ x\in[0,6]\\ [x+1,10],\ x\in(6,9]\\ \varnothing,\ x\in(9,10]\end{cases},\ \Gamma_2(y)=\begin{cases}[y-4,y-1],\ y\in[4,10]\\ [0,y-1],\ y\in[1,4)\\ \varnothing,\ y\in[0,1)\end{cases}.$$

.

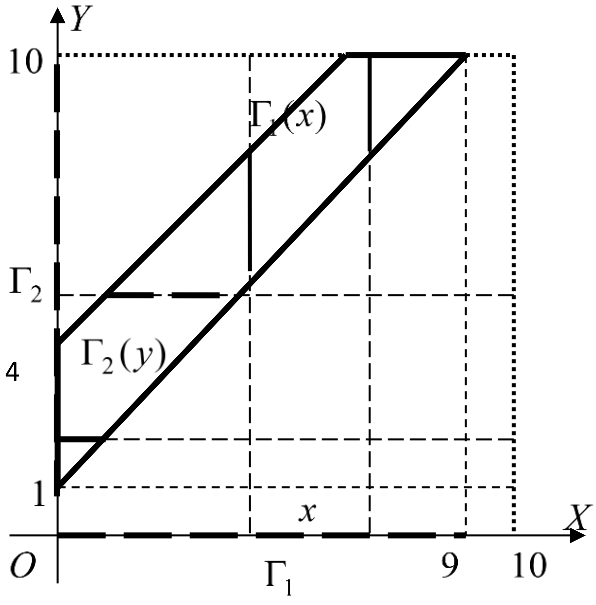


Рис. 1

Приклад 2. Бінарне відношення $\Gamma=\{(x,y)\mid x=y^2\}\subset R\times R$ не є функціональним (бо $(1,1)\in\Gamma,(1,-1)\in\Gamma$), а от бінарне відношення $\Gamma=\{(x,y)\mid x=y^2\}\subset R^+\times R^+$ є функціональним.

Означення 7.

Упорядкована трійка множин (X,Y,Γ) називається ***відображенням*** (або ***функцією***) ***з множини*** X ***в множину*** Y, якщо Γ є функціональним бінарним відношенням між елементами множин X та Y. При цьому множина X називається ***областю відправленн відображення***, Y - ***областю прибуття відображення,*** а Γ - ***графіком відображення***.

В більшості випадків прийнято позначати відображення якою-небудь малою латинською літерою, наприклад, f. При цьому замість $f=(X,Y,\Gamma)$ записують $f:X\to Y$, або $y=f(x),\ x\in X$, або $x\mapsto f(x),\ x\in X$, розуміючи, що графік відображення нам відомий.

Перша (друга) проекція графіка відображення f називається ***<u>областю</u>*** або ***<u>множиною визначення</u>*** (***областю*** або ***<u>множиною значень</u>***) відображення f та позначається D_f $\left(E_f\right)$.

<u>Приклад 3.</u> Розглянемо відображення, що задається таким чином: $y = \sin x,\ x \in X,\ y \in Y$.

1) Якщо $X = Y = R$, то $D_f = R,\ E_f = [-1,1]$.

2) Якщо $X = [0,2\pi],\ Y = R$, то $D_f = [0,2\pi],\ E_f = [-1,1]$.

3) Якщо $X = [0,2\pi],\ Y = [0,1]$, то $D_f = [0,\pi] \bigcup \{2\pi\},\ E_f = [0,1]$

Якщо $x \in D_f$ і пара $(x, y) \in \Gamma$, то елемент y називається ***<u>значенням функції</u>*** f на елементі x і позначається $f(x)$.

Якщо відома область визначення D_f і значення $f(x)\ \forall x \in D_f$, то ***графік*** $\Gamma(f)$ ***відображення*** f будується за правилом: $\Gamma(f) = \left\{ (x, f(x)) \middle|\ x \in D_f \right\}$.

Якщо для відображення $f : X \to Y : D_f = X$, то воно **називається** ***<u>відображенням множини</u>*** $\underline{X}$ ***<u>в множину</u>*** $\underline{Y}$ і позначається $X \xrightarrow{f} Y$; якщо $D_f = X,\ E_f = Y$, то воно називається ***<u>відображенням множини</u>*** $\underline{X}$ ***<u>на множину</u>*** $\underline{Y}$ і позначається $X \xrightarrow[HA]{f} Y$.

Функція $f_1 = \left(X_1, Y_1, \Gamma_1\right)$ називається ***<u>звуженням функції</u>*** $f = \left(X, Y, \Gamma\right)$, якщо $\Gamma_1 \subset \Gamma$. В цьому випадку функція f називається ***<u>продовженням функції</u>*** f_1 з множини D_{f_1} на множину D_f. Якщо A - деяка підмножина D_f, то існує таке звуження функції f_1 функції f, що має властивість $A = D_{f_1}$, тоді функція f_1 називається ***<u>звуженням функції</u>*** $\underline{f}$ ***<u>на множину</u>*** $\underline{A}$ і позначається $f\big|_A$.

Приклад 4. Позначимо з **прикладу 3** функції f_1, f_2, f_3, тоді ми маємо такий взаємозв'язок між ними: f_3 є звуженням і f_1, і f_2; f_2 є звуженням f_1; f_1 є продовженням f_2 з множини $[0,2\pi]$ на R, а також f_3 з множини $[0,\pi]\bigcup\{2\pi\}$ на R, крім того можна позначити $f_2 = f_1\big|_{[0,2\pi]}$.

Нехай $f: X \to Y$. Якщо $(x, y)\in\Gamma_f$, то елемент y називається ***<u>образом елемента</u>*** x при відображенні f, в свою чергу тоді елемент x називається ***<u>прообразом елемента</u>*** y і позначається $f^{-1}(y)$. Для будь-якої підмножини $A\subset D_f$ підмножина E_f, що задається умовою $\{y\in E_f \mid \exists x\in A \;\; y = f(x)\}$ називається ***<u>образом множини</u>*** A і познача4ється символом $f(A)$. Аналогічно для будь-якої підмножини $A'\subset E_f$ підмножина D_f, що задається умовою $\{x\in D_f \mid \exists y\in A' \;\; y = f(x)\}$ називається ***<u>прообразом множини</u>*** A' і позначається символом $f^{-1}(A')$.

<u>Приклад 5.</u>y=x^2, X=Y=R, A=[-3, 5]⊂D_f, f(A)={f(x)|x∈A}=[0, 25], A′⊂E_f, A′=[2, 3],

f^{-1}(A′)={x|f(x)∈A′}=[-$\sqrt{3}$, -$\sqrt{2}$]⋃[$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$].

Приклад 6. Для функції $y=\sqrt{x},\; x\in R$ знайти образи та прообрази множин $A=[-1,1],\; B=[4,9]$.

$f(A),\; f^{-1}(A)$ не існують, тому що $D_f = E_f = R^+$, а $A\not\subset R^+$; $f(B)=[2,3]$, $f^{-1}(B)=[16,81]$.

Відображення $f=(X,Y,\Gamma)$ називається ***<u>оборотним</u>***, якщо бінарне відношення Γ^{-1} є функціональним бінарним відношенням між елементами множин Y та X. В цьому випадку відображення (Y, X, Γ^{-1}) називається ***<u>оберненим відображенням</u>*** до f і позначається f^{-1}.

Оборотне відображення f множини X на множину Y називається ***<u>взаємно-однозначним</u>*** або ***<u>бієктивним</u>*** (***<u>бієкція</u>***) і позначається $X \xleftrightarrow{f} Y$.

Приклад 7. Дослідити на оборотність відображення $f(x) = tgx$, $x \in X$, де 1) $X = R$; 2) $X = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

В першому випадку відображення не є оборотним, бо Γ^{-1} не функціональне $\left((0,0) \in \Gamma^{-1} \wedge (0,\pi) \in \Gamma^{-1}\right)$. В другому випадку відображення оборотне і бієктивне, обернене задається формулою $f^{-1}(y) = arctgy + \pi,\ y \in R$.

Нехай задані відображення $f: X \to Y,\ \varphi: T \to X$. ***Композицію відображень*** f і φ записують у вигляді $f \circ \varphi$. Її область визначення складається з усіх тих значень $t \in D_\varphi$, для яких $\varphi(t) \in D_f$. Значення композиції обчислюються за формулою: $(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)),\ \forall t \in D_{f \circ \varphi}$.

Приклад 8. $f(x) = x^2,\ x \in [-10,10],\ \varphi(t) = \sqrt{t},\ t \in R$. Знайти композицію $f \circ \varphi$.

Зрозуміло, що $(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)) = \left(\sqrt{t}\right)^2 = t$, але для яких t це виконується треба з'ясувати. $D_\varphi = R^+,\ \varphi(t) = \sqrt{t} \in [-10,10] \ \Rightarrow\ t \in [0,100]$ $\Rightarrow\ D_{f \circ \varphi} = [0,100]$.

Якщо задані відображення $T \xleftrightarrow{\varphi} X,\ T \xrightarrow{\psi} Y$, то існує відображення $X \xrightarrow{f = \psi \circ \varphi^{-1}} Y$. Його називають ***параметрично заданим*** за допомогою відображень φ і ψ. Змінна t при цьому називається *параметром*.

Приклад 9. Визначити в явному вигляді функцію $x \mapsto y(x)$, що задається параметрично: $x(t) = \sin^2 t,\ y(t) = \cos^2 t,\ t \in R$.

Зрозуміло, що $E_x = E_y = [0,1]$, тому в якості T можна вибрати множину $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, тоді $y = 1 - x,\ x \in [0,1]$.

Розглянемо відображення $X \times Y \xrightarrow{F} G$, а також рівняння

$$F(x, y) = c, \qquad \textbf{(1)}$$

де $c \in G$ - деяка точка. Якщо $\forall x \in X\ \exists!\, y = f(x) \in Y$ таке, що $F(x, f(x)) = c$, тоді вважаємо, що визначено функцію $X \xrightarrow{f} Y$. При цьому f називається ***неявною функцією***, що задається за допомогою рівняння **(1)**.

Терміни, рівносильні терміну «функція».

Якщо X, Y – числові множини, то використовують поняття «числова функція». Якщо X – множина натуральних чисел, то функцію називають послідовністю. Якщо X – довільної природи, а Y – числова множина, то f – функціонал. Якщо X та Y деякі множини, то термін функція замінюють відображенням. Якщо X та Y векторні простори, то для функції використовують термін перетворення або «оператор».

Класифікація функцій одного аргументу.

В залежності від характеру дій, які потрібно виконати над значенням аргументу, щоб отримати відповідне значення функції, встановлена наступна класифікація функцій.

1)Якщо над значенням аргумента x і деякими сталими виконуються дії: +, -, ×, піднесення в цілу і додатню степінь (скінчену кількість раз), то виходить ціла раціональна функція або многочлен.

$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$, m$\in Z^+$, $a_i, i = 1, n$ – const.

2)Функція, яка представлена у вигляді частки від ділення двох цілих раціональних функцій, називається дробово – раціональною функцією:

$$P(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}$$

Сукупність цілих раціональних і дробово – раціональних функцій утворюють клас раціональних функцій.

3)Якщо над аргументом x крім п’яти перерахованих алгебраїчних дій виконується дія добування кореня скінчену кількість разів і результат не є раціональною функцією, то вийде ірраціональна функція: $f(x) = \sqrt{\frac{5x^2+4x-7}{3x^2-8x+4}} + (\sqrt[5]{x} + 1)^3$. Сукупність раціональних і ірраціональних функцій утворюють клас явних алгебраїчних функцій.

4)Всяка неалгебраїчна функція називається трансцендентною функцією. Елементарними трансцендентними функціями є:

а) показникова функція $a^x, a > 0, a \neq 1$

б) $log_a x, a > 0, a \neq 1$

в) тригонометричні функції sin x, cos x, tg x, ctg x, sec x, cosec x

г) обернені тригонометричні функції: Arcsin x, Arccos x, Arctg x, Arcctg x, Arcsec x, Arccosec x.

Функції алгебраїчні, елементарні трансцендентні і скінченні їх комбінації носять назву елементарних функцій. Це основний запас функцій, які будемо використовувати в курсі.

Відношення порядку і частково упорядкований простір

Нехай задано множину M. Бінарне відношення $\sigma \subset M \times M$ називається ***відношенням часткового порядку*** на множині M, якщо виконуються такі умови (аксіоми):

1. $\forall a \in M \ (a,a) \in \sigma$ (***рефлексивність***);
2. $(a,b) \in \sigma \wedge (b,a) \in \sigma \ \Rightarrow \ a = b$ (***антисиметричність***);
3. $(a,b) \in \sigma \wedge (b,c) \in \sigma \ \Rightarrow \ (a,c) \in \sigma$ (***транзитивність***).

Поряд з позначенням $(a,b) \in \sigma$ будемо також вживати позначення $a \le b$ навіть, якщо частковий порядок не задається умовою "*менше або дорівнює*".

Тоді запишемо умови більш звично:

1. $\forall a \in M \ a \le a$
2. $(a \le b) \Lambda (b \le a) \Rightarrow a=b$
3. $(a \le b) \Lambda (b \le c) \Rightarrow a \le c$

Приклад 1. Відношення часткового порядку:

1. На R звичайне відношення "*менше або дорівнює*" є частковим порядком.
2. На $[0; 1]$ звичайне відношення "*менше або дорівнює*" є також частковим порядком.
3. Для довільної множини M в просторі $\exp M$ бінарне відношення σ : $(A, B) \in \sigma \Leftrightarrow A \subset B$ є частковим порядком.
4. Для множини $\{1;\ 2;\ ...;\ 12\}$ бінарне відношення σ : $(a,b) \in \sigma \Leftrightarrow \frac{b}{a} \in N$ є частковим порядком.

5. На R^2 визначимо відношення часткового порядку σ таким чином:

$$((x_1, y_1),(x_2, y_2)) \in \sigma \Leftrightarrow (x_1 \le x_2) \wedge (y_1 \le y_2).$$

Упорядкована пара $\Omega = (M, \sigma)$ (або $(M, \le)$), яка складається з множини M (***основний простір***) та відношення часткового порядку σ на ній називається ***<u>частково упорядкованим простором</u>*** (*<u>ЧУП</u>*), елементи множини M – ***<u>точками ЧУП</u>***. Точки x_1, x_2 називаються ***<u>порівняними</u>***, якщо $x_1 \le x_2$ або $x_2 \le x_1$, в протилежному випадку – ***<u>непорівняними</u>***. Якщо ЧУП не містить непорівняних елементів, то він називається ***<u>упорядкованим простором</u>*** (*<u>УП</u>*), або ***<u>лінійно упорядкованим простором</u>***.

<u>Приклад 2.</u> В попередньому прикладі ЧУП є приклади 3–5, УП – приклади 1, 2.

Якщо $\Omega = (M, \sigma)$ – ЧУП, то очевидно, що обернене бінарне відношення σ^{-1} є також відношенням часткового порядку, а ЧУП (M, σ^{-1}) називається ***<u>протилежним ЧУП</u>*** по відношенню до Ω і позначається Ω^{-1}.

Розширена множина дійсних чисел

Розглянемо УП $(\mathrm{R}, \le)$ і розширимо його за допомогою символів "$+\infty, -\infty$" Продовжимо на цю множину відношення порядку менше або дорівнює та арифметичні дії. Розширену дійсну вісь позначимо $\overline{\mathrm{R}}$. У випадках, коли байдуже яку з двох нескінченостей використовувати, будемо вживати символ просто "∞". Тоді для точок з $\overline{\mathrm{R}}$ ми маємо такі визначення відповідних операцій:

1. Якщо $x, y \in \mathrm{R}$, то вирази $x \le y$, $x \pm y$, $x \cdot y$, $\frac{x}{y}$ $(y \ne 0)$ мають в $\overline{\mathrm{R}}$ той самий зміст, що й в R.

2. $\forall x \in \mathrm{R}$ $-\infty < x < +\infty$; ***3.*** $\forall x \in \mathrm{R}$ $-\infty \pm x = -\infty, +\infty \pm x = +\infty$;

4. $\forall x \ne 0$ $x \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, \text{ якщо } x > 0 \\ \mp\infty, \text{ якщо } x < 0 \end{cases}$; ***5.*** $\forall x \ne 0$ $\dfrac{\pm\infty}{x} = \begin{cases} \pm\infty, \text{ якщо } x > 0 \\ \mp\infty, \text{ якщо } x < 0 \end{cases}$;

6. $\forall x \in \mathrm{R}$ $\frac{x}{\infty} = 0$.

Верхня та нижня межі множини в частково упорядкованому просторі

Нехай Ω=(M, σ) – частково упорядкований простір, а X⊂M. Елемент $x_{\max} \in X$ $\left(x_{\min} \in X\right)$ називається ***найбільшим*** (***найменшим***) ***елементом множини*** X , якщо $\forall x \in X \;\; x \le x_{\max} \;\; \left(x_{\min} \le x\right)$.

Зрозуміло, що навіть в УП зовсім не кожна множина має найбільший чи найменший елемент.

Приклад 3. В просторі $(\overline{\mathrm{R}}, \le)$ розглянемо множину $X = \left\{\frac{1}{n+1}, 1-\frac{1}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathrm{N}\right\}$. Вона не має ні найбільшого ні найменшого елемента $\left(\ldots\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right)$.

Спробуємо узагальнити поняття найбільшого та найменшого елементів.

Нехай $\Omega = (M, \sigma)$ – ЧУП, X – деяка множина простору, елемент $\overline{x} \in M$ $\left(\underline{x} \in M\right)$ називається ***мажорантою*** (***мінорантою***) ***множини*** X , якщо $\forall x \in X \;\; x \le \overline{x} \;\left(\underline{x} \le x\right)$. Якщо множина X має мажоранту (міноранту) вона називається ***обмеженою зверху*** (***знизу***). Множина, що обмежена зверху і знизу називається ***обмеженою***. Найменша мажоранта (найбільша міноранта) множини X , якщо вона існує називається ***верхньою*** (***нижньою***) ***межею*** множини X , або ***супремумом*** (***інфімумом***) та позначається $\sup X \;\left(\inf X\right)$.

Відмітимо, що якщо множина має скінчену верхню межу (нижню межу), то одночасно вона має ∞ кількість верхніх (нижніх) меж.

Нехай Ω – горизонтальна пряма, упорядкована зліва направо. Множина X=[0,1) точок прямої, розташованих між точками 0 та 1, де 0∈ X , 1 не∈ X , не має найбільшого елемента, але має верхню межу sup X = 1. Ця множина має найменший елемент, що дорівнює 0, і одночасно має inf X=0. Якщо розглянути X як самостійний упорядкований простір, то в ньому немає верхньої межі (оскільки точка 1 не належить X) і одночасно немає найбільшого елемента.

Приклад 4. В просторі $(\overline{\mathrm{R}}, \le)$ для наведених множини маємо

множина	$x_{\max}$	$x_{\min}$	$\sup X$	$\inf X$

$[0,1]$	1	0	1	0
$(0,2)$	-	-	2	0
Q	-	-	$+\infty$	$-\infty$
$[-\pi,3]\bigcap Q$	3	-	3	$-\pi$

Розглянемо деякі властивості меж множин. Всі множини розглядаються в деякому ЧУП $\Omega=(M,\leq)$.

Теорема 1*.* *(Про зв'язок між найбільшим елементом та верхньою межею множини)*

Нехай $x_{\max}$ найбільший елемент множини X, тоді ця множина обмежена і $\sup X = x_{\max}$.

Доведення. Оскільки $x_{\max}$ – найбільший елемент, то $\forall x \in X \quad x \leq x_{\max} \;\Rightarrow\; X$ обмежена зверху множина та $x_{\max}$ її мажоранта. Якщо $\overline{x}$ довільна мажоранта $\Rightarrow \; \forall x \in X \quad x \leq \overline{x}$, але з того, що $x_{\max} \in X \;\Rightarrow\; x_{\max} \leq \overline{x}$, тобто $x_{\max}$ найменша мажоранта $\Rightarrow\; x_{\max} = \sup X$.

Теорема доведена.

Теорема 2. *(Перехід до верхньої межі в нерівностях)*

Нехай $\forall x \in X \;\; x \leq b$. Якщо X має верхню межу, то $\sup X \leq b$.

Доведення. b – є мажорантою X, а $\sup X$ – найменша з мажорант, з чого безпосередньо слідує, що $\sup X \leq b$.

Теорема доведена.

Теорема 3. *(Монотонність верхньої межі)*

Нехай $X \subset Y \subset M$. Якщо X та Y мають верхні межі, то $\sup X \le \sup Y$.

Доведення. Нехай $b = \sup Y \Rightarrow \forall y \in Y \ y \le b$, але ж $X \subset Y \Rightarrow \forall x \in X \subset Y \ x \le b \Rightarrow$ за теоремою 2 $\sup X \le b = \sup Y$.

Теорема доведена.

Спеціальні множини в упорядкованому просторі

Визначимо в довільному ЧУП $\Omega = (M, \le)$ спеціальні множини, які нам добре відомі у випадку $(\overline{R}, \le)$. Для їх кращого розуміння в довільному просторі, ми їх проілюструємо для двох прикладів. Будемо вважати, що в просторі $(\overline{R}, \le)$ параметри дорівнюють $a = -1,\ b = 2$, а в просторі $([0;1], \le)$ – $a = 0{,}2;\ b = 0{,}6$.

Проміжок	Визначення	$(\overline{\mathrm{R}}, \le)$	$([0;1], \le)$
сегмент	$[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$	$[-1,\ 2]$	$[0{,}2;\ 0{,}6]$
інтервал	$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$	$(-1,\ 2)$	$(0{,}2;\ 0{,}6)$
напівінтервали	$[a,b) = \{x \mid a \le x < b\}$	$[-1,\ 2)$	$[0{,}2;\ 0{,}6)$
	$(a,b] = \{x \mid a < x \le b\}$	$(-1,\ 2]$	$(0{,}2;\ 0{,}6]$
ліві промені	$\{x \mid x < b\}$	$[-\infty,\ 2)$	$[0;\ 0{,}6)$
	$\{x \mid x \le b\}$	$[-\infty,\ 2]$	$[0;\ 0{,}6]$
праві промені	$\{x \mid a \le x\}$	$[-1,\ +\infty)$	$[0{,}2;\ 1]$
	$\{x \mid a < x\}$	$(-1,\ +\infty]$	$(0{,}2;\ 1]$

Якщо $x_0 = x_{\max}$ $(x_0 = x_{\min})$ – найбільша (найменша) точка УП $\Omega = (M, \le)$. Множина $O(x_0)$ називається ***околом*** цієї точки, якщо $\exists a \in M:\ (a < x_0) \wedge (a, x_0] \subset O(x_0)$ $((x_0 < a) \wedge [x_0, a) \subset O(x_0))$. Якщо x_0 довільна точка M (ні найменша, ні найбільша), то множина $O(x_0)$ називається її ***околом***, якщо $\exists a, b \in M:\ (a < x_0 < b) \wedge (a, b) \subset O(x_0)$.

.

Означення 1.

Множина $X \in M$ називається ***відкритою*** в просторі Ω, якщо вона або порожня, або є околом $\forall$ своєї точки.

Означення 2.

Множина $X \subset M$ називається ***замкненою***, якщо її заповнення, тобто множина C=M\X відкрита

Означення 3.

Точка $x_0 \in X \subset M$ називається ***внутрішньою*** множини X, якщо множина X є її околом.

Означення 4.

Точка $x_0 \in M$ називається ***точкою дотикання*** множини X, якщо в $\forall$ її околі знайдеться точка з множини X. $\forall$ $x \in X$ є точкою дотикання цієї множини, але не навпаки.

Означення 5.

Точка $x_0 \in M$ називається ***граничною*** точки X. Якщо $\forall$ окіл цієї точки містить в собі хоча б одну точку множини X, відмінну від X_0.

Означення 6.

Упорядкований простір Ω (а також частково упорядкований простір) називається ***повним***, якщо в ньому кожна не порожня і обмежена зверху множина X має верхню межу.

ЛЕКЦІЯ 3

Числові послідовності. Теорія границь послідовностей.

В подальшому будемо розглядати лише УП $(\overline{R},\leq)$ або $([a,b],\leq)$, всі множини будуть вибиратися саме з цих просторів.

Означення 1.

<u>Числовою послідовністю</u> (x_n) називається відображення $N \xrightarrow{f} \overline{R}$, де $x_n = f(n),\ n \in N$ називається ***<u>n-м членом послідовності</u>***. Іноді послідовності також позначають таким чином: $(x_n)_{n\in A}$ $(A \subset Z$, або просто $x_1, x_2,...$.

Кількість членів п-ті нескінченна, упорядкована подібно натуральному ряду за зростанням номерів (а не за величинами членів послідовності)

$x_n=n$:N $\to$ N, ($x_1=1$, $x_2=2$,..., $x_n=n$...)

$x_n=n^2$:N $\to$ N, ($x_1=1$, $x_2=4$,...,$x_n=n^2$...)

$x_n=1/n$:N $\to$ Q, ($x_1=1$, $x_2=1/2$,..., $x_n=1/n$...)

$x_n=(-1)^n$:N $\to$ Z

x_n – член послідовності

Означення 2.

$(x_n)_1^\infty (y_n)_1^\infty \subset R$ - послідовності ***рівні,*** коли $x_n = y_n \forall n \in N$

Означення 3. ***<u>Сумою, різницею, добутком та часткою послідовностей</u>*** (x_n) та (y_n) з R називаються відповідно послідовності – $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n y_n)$ та $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ (у випадку частки вважаємо $y_n \neq 0$). Останнім обмеженням можна знехтувати, якщо розглядати послідовності (x_n) та (y_n) з простору $\overline{R}$, тоді можна вважати $\forall x \in \overline{R} \setminus \{0\}$ $\left|\frac{x}{0}\right| = +\infty$, але при розгляданні подібних випадків, будемо наголошувати на цьому факті окремо.

Означення 4.

Послідовність називається ***<u>обмеженою</u>*** (***<u>обмеженою зверху, обмеженою знизу</u>***) відповідно до обмеженості множини її значень $\{x_n \mid n \in N\}$, або $\exists M \in R : \forall n \in N : |x_n| \le M$, якщо послідовність обмежена, то для запису використовують $x_n = O(1)$ (***О-велике***).

Означення 5.

Послідовність x_n називається стаціонарною, якщо всі її елементи рівні, тобто $\forall n \in N x_n = C$

Означення 6.

ε*-околом* т. $a \in R$ називається множина $\{x \in R \| x - a| < \varepsilon\}$, або (а-$\varepsilon$, а+$\varepsilon$), Δ- ***околом*** точки $\infty, -\infty, +\infty$ називаються відповідно множини

$\{x \in \overline{R} \| x| > \Delta\}$, $\{x \in \overline{R} | x < -\Delta\}$, $\{x \in \overline{R} | x > \Delta\}$

Означення 7.

Точка** $a \in R$ **називається границею послідовності (x_n), якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon):$ $\forall n \ge N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ (***метричне означення границі***), при цьому будемо записувати $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, або $x_n \to a$ при $n \to \infty$ (або просто $x_n \to a$).

Якщо використати поняття околу в УП можна дати еквівалентне ***топологічне означення границі:*** точка a називається ***границею послідовності*** (x_n), якщо $\forall O_a$ $\exists N(\varepsilon): \ \forall n \ge N(\varepsilon) \ x_n \in O_a$.

Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності

Означення 8.

Послідовність (x_n) називається *нескінченно малою*, якщо її границя дорівнює 0, або $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in N : n \ge N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$, або $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$

Наприклад, послідовність $x_n = 10^{7-n}$ стає нескінченно малою в процесі зміни n.

$$\left|\frac{10^7}{10^n}\right| < \varepsilon, \quad n > \lg\frac{10^7}{\varepsilon}.$$

Якщо $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, то при цьому будемо записувати $x_n = o(1)$ де о(1) – читається (***о-мале*** від одиниці).

Символи $o(1)$, $O(1)$ називаються ***символами Ландау***.

Означення 9.

Послідовність (x_n) називається *нескінченно великою*, якщо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall E > 0\ \exists N(E) : \forall n \geq N(E) \Rightarrow |x_n| > E \text{, або } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} | x_n | = +\infty .$$

Якщо всі члени послідовності з деякого номера стають додатними або від"ємними, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall E > 0\ \exists N(E) : \forall n \geq N(E) \Rightarrow\ x_n > E ;$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall E > 0\ \exists N(E) : \forall n \geq N(E) \Rightarrow\ x_n < -E .$$

Відміна топологічного означення від метричного полягає в тому, що воно спрацьовує у випадку $a \in \{\pm\infty\}$ (тобто $\forall a \in \overline{R}$), достатньо лише розглянути відповідний окіл такої точки a .

В подальшому також будемо визначати:

Якщо послідовність має скінченну границю, вона називається ***збіжною***, в протилежному випадку – ***розбіжною***. Якщо послідовність має скінченну чи нескінченну границю одночасно, будемо казати, що вона ***збіжна в*** $\overline{R}$.

Має місце теорема про зв'язок нескінченно малої і нескінченно великої послідовностей.

Теорема 1.

Величина, обернена до нескінченно великої є нескінченно мала і навпаки.

Доведення:

Візьмемо $\forall\varepsilon > 0$. З того, що $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow \forall \quad \mathrm{E} > 0 \quad (\mathrm{E} = \frac{1}{\varepsilon})\ \exists\ N = N(\frac{1}{\varepsilon}) : \forall n > N \quad |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ і для тих же *n* $\frac{1}{|x_n|} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} = o(1)$ ($x_n \neq 0$).

Теорема 2. *(Зв'язок метричного і топологічного означень границі послідовності)*

Метричне та топологічне означення границі числової послідовності еквівалентні $\left(\forall a \in \overline{R}\right)$.

Доведення. Проведемо його лише для випадку $a \in R$, випадки $a \in \{\infty, \pm\infty\}$ розглядаються аналогічно. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Метричне $\Rightarrow$ *топологічне*. Нехай O_a – довільний окіл точки a $\Rightarrow$ $\exists(b,c) \subset O_a : a \in (b,c)$. Покладемо $\varepsilon = \min\{a-b, c-a\} > 0$ тоді $\exists N(\varepsilon)$: $\forall n \ge N(\varepsilon)$ $\Rightarrow$ $|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow x_n \in (b,c) \subset O_a$.

Топологічне $\Rightarrow$ *метричне*. Нехай ε - довільне додатне число, оскільки інтервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ є околом точки a, то за топологічним означенням границі $\exists N(\varepsilon)$: $\forall n \ge N(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

Теорема доведена.

Приклад 1. Знайти границю: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}$, $k > 0$.

Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$, тоді розглянемо $|x_n - 0| = \frac{1}{n^k} < \varepsilon \Leftrightarrow$ $n > \sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}}$. Виберемо $N(\varepsilon) = \left[\sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}}\right] + 1$, тоді $\forall n \ge N(\varepsilon) \Rightarrow n > \sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}} \Rightarrow n^k > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n^k} < \varepsilon \Rightarrow$ $|x_n| < \varepsilon$ – що й треба було показати.

Теорема 3. (*Про структуру збіжної послідовності, або критерій збіжності послідовності через нескінченно малу)*

Якщо послідовність (x_n) збіжна і має границю $a \in R$, то вона представляється у вигляді суми стаціонарної послідовності та нескінченно малої і навпаки:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + o(1)$$

Доведення: З означення границі легко одержати:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \ge N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - a) = 0.$$

Таким чином, кожна збіжна послідовність є сумою стаціонарної послідовності та нескінченно малої.

<u>Теорема 4.</u> *(Про обмеженість зверху збіжної послідовності)*

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Якщо $a < b$, то $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow x_n < b$.

Доведення. Ця теорема є безпосереднім наслідком топологічного означення границі послідовності, тому що промінь $(-\infty, b)$ є околом точки a .

Теорема доведена.

<u>Наслідок 1.</u> *(Про обмеженість знизу збіжної послідовності)*

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Якщо $a > b$, то $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow x_n > b$.

<u>Наслідок 2.</u> *(Про послідовності з різними границями)*

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Якщо $a < b$, то $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow x_n < y_n$.

Доведення. Нехай $c = \frac{1}{2}(a+b)$, тоді з теореми та першого наслідку $\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \; x_n < c$ и $\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \; y_n > c$, тоді виберемо $N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow \forall n \geq N \; x_n < c < y_n$.

Наслідок доведено.

<u>Наслідок 3.</u> *(Про єдиність границі)*

Якщо послідовність збіжна, то її границя єдина.

Доведення. Достатньо припустити, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, де $a < b$, тоді з наслідку 2 ми одержимо, що $\forall n \geq N \; x_n < x_n$ – суперечність, що завершує *доведення наслідку*.

<u>Наслідок 4</u>. *(Перехід до границі в нерівностях)*

Нехай нерівність $x_n \le y_n$ виконується для нескінченної кількості індексів n . Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $a \le b$.

Доведення. Припустимо, що $a > b$, тоді з наслідку 2 одержимо, що $\exists N : \forall n \ge N \ \Rightarrow$ $x_n > y_n$, тобто протилежна нерівність виконується лише для скінченої кількості індексів, що суперечить умові.

Наслідок доведено.

Теорема 5. *(Про двох поліцаїв)*

Якщо для послідовностей $(x_n), (y_n), (z_n)$ $\exists N' : \forall n \ge N'$ $y_n \le x_n \le z_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доведення. З існування границь ми маємо: $\forall \varepsilon > 0 \ \Rightarrow$

$$\begin{cases} \exists N_1 : \forall n \ge N_1 \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon \Rightarrow y_n - a > -\varepsilon \\ \exists N_2 : \forall n \ge N_2 \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon \Rightarrow z_n - a < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \exists N = \max\{N_1, N_2\} : \forall n \ge N \Rightarrow$$ нерівності

виконуються одночасно

$$a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Теорема доведена.

Приклад 2. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^4 + k}$.

Розглянемо такі очевидні нерівності:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^4 + k} = \frac{1}{n^4 + 1} + \ldots + \frac{1}{n^4 + n} \geq \frac{n}{n^4 + n} = \frac{1}{n^3 + 1} > \frac{1}{2n^3} = y_n,$$

аналогічно $x_n = \frac{1}{n^4+1} + \ldots + \frac{1}{n^4+n} < \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3} = z_n$, з попереднього прикладу ми знаємо, що $y_n \to 0$, $z_n \to 0$ при $n \to \infty$, а тому за теоремою і $x_n \to 0$.

2) $y_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + 1}}$, $0 \leftarrow \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + 2*n+1}} < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + 1}} < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2}} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0 \qquad 0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2*2*\ldots*2}{1*2*3*\ldots*n} < 2*\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \to 0$.

Для довільної послідовності (x_n) позначимо через $\sup x_n$ (або $\sup\limits_{n\in N} x_n$) та $\inf x_n$ відповідно верхню та нижню межу множини $\{x_n \mid n \in N\}$.

Має місце наступне **твердження**: *(Зв'язок між нижньою (верхньою) межею та границею послідовності)*

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in R$. Тоді послідовність (x_n) має нижню межу і $a \geq \inf x_n$, причому $a = \inf x_n \Leftrightarrow \forall n \in N \ x_n \geq a$.

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in R$. Тоді послідовність (x_n) має верхню межу і $a \leq \sup x_n$, причому $a = \sup x_n \Leftrightarrow \forall n \in N \ x_n \leq a$.

Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена, тобто $\exists \{a, b\} \subset R: \ \forall n \in N$ $a \leq x_n \leq b$.

<u>Дії над символами Ландау</u>

1. $O(1) + O(1) = O(1)$ (*сума двох обмежених – обмежена*);

2. $o(1) + o(1) = o(1)$ (*сума двох нескінченно малих – нескінченно мала*);

3. $O(1) + o(1) = O(1)$;

4. $O(1)\cdot O(1)=O(1)$ (*добуток двох обмежених – обмежена*);

5. $o(1)\cdot o(1)=o(1)$ (*добуток двох нескінченно малих – нескінченно мала*);

6. $O(1)\cdot o(1)=o(1)$ (*добуток нескінченно малої на обмежену є нескінченно малою*).

Доведення. Доведемо деякі з них, наприклад ***2*** та ***6***.

2. Позначимо $x_n=o(1), y_n=o(1) \Rightarrow \forall\varepsilon>0$ ($\exists N_1: \forall n>N_1 \Rightarrow |x_n|<\varepsilon$) і ($\exists N_2: \forall n>N_2$ $\Rightarrow |y_n|<\varepsilon$) $\Rightarrow \forall n>\max\{N_1,N_2\}$ $|x_n+y_n|\le|x_n|+|y_n|<2\varepsilon$, а тому $(x_n+y_n)=o(1)$.

6. Позначимо $x_n=o(1), y_n=O(1) \Rightarrow$ ($\forall\varepsilon>0\ \exists N_1: \forall n>N_1 \Rightarrow |x_n|<\varepsilon$) і ($\exists M\in R\ \forall n\in N$ $|y_n|\le M$) $\Rightarrow \forall n>N_1$ $|x_n y_n|=|x_n||y_n|<\varepsilon M=\varepsilon_1$.

Теорема доведена.

<u>**Приклад 4.**</u> Дослідити на збіжність послідовності: $x_n=\frac{n^3+n^2}{n^4+n}$, $y_n=\frac{\sin n}{n}$, $\frac{arctg(e^n+1)}{n^2+5}$,

$$0\le x_n<\tfrac{n^3+n^2}{n^4}=z_n=\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n^2}=o(1)+o(1)=o(1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

$$\sin n=O(1),\ \tfrac{1}{n}=o(1)\Rightarrow y_n=o(1)\cdot O(1)=o(1)\Rightarrow \lim_{n\to\infty}y_n=0$$

Для третьої послідовності $x_n=\dfrac{1}{n^2+5}=o(1)$.

$|y_n|=|arctg(e^n+1)|<\dfrac{\pi}{2}$, $y_n=O(1) \Rightarrow o(1)*O(1)=o(1)$, отже послідовність нескінченно мала, її границя дорівнює 0.

<u>**Наслідок.**</u> *(Інші дії над символами Ландау).*

1. $O(1)-O(1)=O(1)$; ***2.*** $o(1)-o(1)=o(1)$

3. $C\cdot O(1)=O(1)$ $(C=const)$; ***4.*** $C\cdot o(1)=o(1)$ $(C=const)$.

Теорема 7. *(Арифметичні дії над збіжними послідовностями)*

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, $(x, y \in R)$ то

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = x \pm y$ ***2.*** $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = xy$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}\ \ (y \neq 0).$

Доведення. З теореми про структуру збіжної послідовності запишемо послідовності $x_n = x + o(1)\ \ y_n = y + o(1)$, тоді одержимо, що

$$x_n \pm y_n = x + o(1) \pm y \pm o(1) = x \pm y + o(1),$$

і твердження ***1*** *доведене.*

Послідовності $(x_n),(y_n)$ обмежені, тобто дорівнюють $O(1)$, а тому

$$x_n y_n = (x + o(1))(y + o(1)) = xy + xo(1) + yo(1) + o(1)o(1) = xy + o(1),$$

і твердження ***2*** *доведене*.

Приклад 5. Знайти границю: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_0}{b_m n^m + b_{m-1}n^{m-1} + \ldots + b_0}$.

Якщо $m > k$, то поділимо чисельник та знаменник на n^m :

$$\frac{\frac{a_k}{n^{m-k}} + \frac{a_{k-1}}{n^{m-k+1}} + \ldots + \frac{a_0}{n^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \ldots + \frac{b_0}{n^m}} \to \frac{0 + 0 + \ldots + 0}{b_m + 0 + 0 + \ldots + 0} \to 0;$$

Якщо $m < k$, то $\frac{1}{x_n} \to 0$, а тому $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$;

Якщо $m = k$, то поділимо чисельник та знаменник на n^m :

$$\frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{n} + \ldots + \frac{a_0}{n^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \ldots + \frac{b_0}{n^m}} \to \frac{a_m + 0 + \ldots + 0}{b_m + 0 + \ldots + 0} \to \frac{a_m}{b_m}.$$

Теорема 8. *(Границя показникової та логарифмічної послідовностей)*

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in R$. Тоді послідовність a^{x_n} $(a>0)$ збігається до a^x, а послідовність $\log_a x_n$ до $\log_a x$ (при $x>0, a>0, a\neq 1$).

Доведення. Спочатку для показникової послідовності. При $a=1$ все очевидно. Нехай, наприклад, $a>1$. Тоді виберемо довільне $\varepsilon>0$ і розглянемо ланцюг нерівностей:

$$\left|a^{x_n}-a^x\right|<\varepsilon \Leftarrow a^x\left|a^{x_n-x}-1\right|<\varepsilon \Leftarrow \left|a^{x_n-x}-1\right|<\tfrac{\varepsilon}{a^x}=\varepsilon_1 \Leftarrow -\varepsilon_1<a^{x_n-x}-1<\varepsilon_1 \Leftarrow$$
$$1-\varepsilon_1<a^{x_n-x}<1+\varepsilon_1 \Leftarrow \log_a(1-\varepsilon_1)<x_n-x<\log_a(1+\varepsilon_1) \Leftarrow$$
$$\left(\varepsilon_2=\min\{-\log_a(1-\varepsilon_1),\log_a(1+\varepsilon_1)\}>0\right) \Leftarrow -\varepsilon_2<x_n-x<\varepsilon_2 \Leftarrow \left|x_n-x\right|<\varepsilon_2.$$

Із збіжності (x_n) до x випливає, що для

$$\varepsilon_2>0\ \exists N:\ \forall n>N\ \left|x_n-x\right|<\varepsilon_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left|a^{x_n}-a^x\right|<\varepsilon,$$

що й треба було довести. Випадок $0<a<1$ розглядається аналогічно.

Так само випадок логарифмічної послідовності розглянемо при $a>1$. Знову виберемо довільне $\varepsilon>0$ і розглянемо ланцюг нерівностей:

$$\left|\log_a x_n-\log_a x\right|<\varepsilon \Leftarrow -\varepsilon<\log_a x_n-\log_a x<\varepsilon \Leftarrow \log_a x-\varepsilon<\log_a x_n<\log_a x+\varepsilon \Leftarrow$$
$$\log_a(xa^{-\varepsilon})<\log_a x_n<\log_a(xa^{\varepsilon}) \Leftarrow xa^{-\varepsilon}<x_n<xa^{\varepsilon} \Leftarrow x(a^{-\varepsilon}-1)<x_n-x<x(a^{\varepsilon}-1)$$
$$\Leftarrow \left(\varepsilon_1=\min\left\{x(1-a^{-\varepsilon}),x(a^{\varepsilon}-1)\right\}\right) \Leftarrow -\varepsilon_1<x_n-x<\varepsilon_1 \Leftarrow \left|x_n-x\right|<\varepsilon_1.$$

І знову з умови $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ випливає, що

$$\varepsilon_1>0\ \exists N:\ \forall n>N\ \left|x_n-x\right|<\varepsilon_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left|\log_a x_n-\log_a x\right|<\varepsilon,$$

що й треба довести. Другий випадок розглядається аналогічно.

Теорема доведена.

Наслідок. *(Границя степенево-показникової послідовності)*

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in R$, а $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y > 0$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n)^{x_n} = y^x$.

Доведення. Все випливає з перетворень: $y_n^{x_n} = e^{x_n \ln y_n} \to e^{x \ln y} = y^x$.

Наслідок доведено.

Невизначені вирази

При припущенні, що послідовності x_n, y_n мають скінченні границі, були розглянуті вирази $x_n \pm y_n, x_n * y_n, \frac{x_n}{y_n}, (y_n \neq 0)$. Розглянемо випадки, коли $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \pm\infty$ або $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, якщо мова йде про частку.

1. Потрібно знайти границю частки $\frac{x_n}{y_n}$, коли $x \to 0, \ y \to 0 \ \left(\frac{0}{0}\right)$.

   Ця границя, залежно від законів зміни x_n, y_n може приймати різні значення, або може не існувати. Покажемо це на прикладах.

   Нехай $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$ обидві послідовності прямують до нуля. Їх відношення $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0$. Якщо ж навпаки, $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n^2}$, то $\frac{x_n}{y_n} = n \to \infty$

   Для $x_n = \frac{a}{n}, y_n = \frac{1}{n}$ маємо $\frac{x_n}{y_n} = a$ тобто границя частки є постійне число a.

   Якщо $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, y_n = \frac{1}{n}$ то відношення $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^{n+1}$ немає границі.

   Вираз $\frac{x_n}{y_n}$ коли $x \to 0, y \to 0$ називають невизначеністю вигляду $\frac{0}{0}$

2. У випадку коли $x \to \pm\infty, y \to \pm\infty$ також може бути подібна обставина.

   Наведемо приклади:

$$x_n = n \to \infty, y_n = n^2 \to \infty \qquad \frac{x_n}{y_n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$$

$$x_n = n^2 \to \infty, y_n = n \to \infty \qquad \frac{x_n}{y_n} = n \to \infty$$

$$x_n = a * n \to \pm\infty \ (a >< 0), y_n = n \to \infty \qquad \frac{x_n}{y_n} = a$$

$x_n = [2+(-1)^{n+1}]\, n \to \infty,\ \ y_n = n \to \infty \qquad \frac{x_n}{y_n} = 2+(-1)^{n+1}$ - не має границі.

Вираз $\frac{x_n}{y_n}$ є невизначеністю вигляду $\frac{\infty}{\infty}$.

3. Якщо $x_n \to 0,\ \ y_n \to \pm\infty$ то при дослідженні поведінки добутку $x_n * y_n$ зустрічаємось з особливістю, як і в 1) та 2).

   Наприклад:

$$x_n = \frac{1}{n^2} \to 0,\ y_n = n \to \infty \qquad x_n * y_n = \frac{1}{n} \to 0;$$

$$x_n = \frac{1}{n} \to 0,\ y_n = n^2 \to \infty \qquad x_n * y_n = n \to \infty;$$

$x_n = \frac{a}{n} \to 0,\ y_n = n \to \infty \qquad x_n * y_n = a \to a \quad x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0,\ y_n = n \to \infty \qquad x_n * y_n = (-1)^n$ - не має границі.

   Говорять що вираз являє собою невизначеність вигляду $0*\infty$

4. Розглянемо суму ($x_n + y_n$). Особливим тут є випадок, коли x_n та y_n прямують до нескінченостей різних знаків

$$x_n = 2*n \to \infty, \quad y_n = -n \to -\infty, \qquad x_n + y_n = n \to \infty;$$

$$x_n = n \to \infty, \quad y_n = -2*n \to -\infty, \qquad x_n + y_n = -n \to -\infty;$$

$$x_n = n + a \to \infty, \quad y_n = -n \to -\infty, \qquad x_n + y_n = a \to a;$$

$x_n = n + (-1)^n \to \infty, \quad y_n = -n \to -\infty, \qquad x_n + y_n = (-1)^n$ - немає границі.

   Це невизначеність вигляду $\infty*(-\infty)$

Розглянемо деякі важливі границі послідовностей

1) Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0$

   При а=1, рівність очевидна.

   Нехай $a > 1.\ \sqrt[n]{a} > 1$ і $a = [1 + (\sqrt[n]{a} - 1)]^n =$

$=1+n*(\sqrt[n]{a}-1)+\ldots+(\sqrt[n]{a}-1)^n > n*(\sqrt[n]{a}-1)$, звідси $0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a}{n}<\varepsilon$ при $n>\frac{a}{\varepsilon}$, тобто $\sqrt[n]{a}\to 1$ при $n\to\infty$.

Якщо 0<a<1, то $\frac{1}{a}>1$ і, як позначено вище, $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\to 1$ і зведено до першого випадку:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1$$

2) Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$n=\left(1+\left(\sqrt[n]{n}-1\right)\right)^n=1+n*(\sqrt[n]{n}-1)+\frac{n*(n-1)}{2}*(\sqrt[n]{n}-1)^2+\ldots+(\sqrt[n]{n}-1)^n>\frac{n*(n-1)}{2}*(\sqrt[n]{n}-1)^2$ при n>2

$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\sqrt{\frac{2}{n-1}<\varepsilon}$ при $\forall\ \varepsilon>0$ і $n>1+2*\varepsilon^{-2}$

3) Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k}=\infty,\quad a>1$ при k>0 є невизначеністю $\frac{\infty}{\infty}$

Покладемо $a=1+\alpha,\ \alpha>0;\quad a^n=(1+\alpha)^n=1+n*\alpha+\frac{n*(n-1)}{2}*\alpha^2+\ldots+\alpha^n>\frac{n*(n-1)}{2}*(a-1)^2$,

при $n>2\quad n-1>\frac{n}{2}$ і $a^n>\frac{n^2}{4}*(a-1)^2$, і при k=1 маємо $\frac{a^n}{n}>\frac{n}{4}(a-1)^2\to\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty$

При k>1 принаймні для достатньо великих k вірно $\frac{a^n}{n^k}=\left(\frac{a^{\frac{n}{k}}}{n}\right)^k\to\infty$

Цей результат тим більше вірний при k<1

ЛЕКЦІЯ 4

Монотонні послідовності

Послідовність (x_n) називається ***неспадною*** (***зростаючою***), якщо $\forall n \in N$ $x_n \le x_{n+1}$ $(x_n < x_{n+1})$; послідовність (x_n) називається ***незростаючою*** (***спадною***), якщо $\forall n \in N$ $x_n \ge x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$. Усі послідовності, що задовольняють наведеним означенням, називаються ***монотонними***, а зростаючі та спадні послідовності називаються ***строго монотонними***.

$x_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ - монотонно спадна,

$x_n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$ - монотонно зростаюча,

$x_n = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{n}, n = 2*k, k = 1, 2, \ldots. \\ \frac{n}{n+1}, n = 2*k-1 \end{matrix}\right\}$ - не є монотонною.

Теорема1. *(теорема Вейєрштрасса)*

Кожна обмежена зверху (знизу) неспадна (незростаюча) послідовність (x_n) збігається, причому

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup x_n \overset{def}{=} \sup\{x_n | n \in N\}$$

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = \inf x_n \overset{def}{=} \inf\{x_n | n \in N\})$$

Доведення:.

Нехай $x_n \le M$ (M-const; n=1,2, 3…). Тоді для множини $\{x_n, n \in N\} \subset R$ значень послідовності у повному просторі R(простір називається повним, якщо в ньому кожна непорожня обмежена зверху множина має верхню межу) повинна існувати точна верхня межа a=sup{x_n}. Це число a і буде границею послідовності. За означенням точної верхньої межі $x_n \le a\ \forall n \in N$ і для $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0:\quad x_{n_0} > a - \varepsilon$. При $n > n_0$ для монотонної послідовності $x_n \ge x_{n_0}$, тобто $x_n > a - \varepsilon$, але для цих значень номера n виконуються нерівності $a + \varepsilon > a \ge x_n \ge x_{n_0} > a - \varepsilon$, або $|\ x_n - a\ | < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Якщо послідовність <u>не обмежена зверху</u>, то $\forall E > 0\ \exists\, n_0 : x_{n_0} > E$ і з монотонності випливає, що $\forall n > n_0\ x_n > x_{n_0} > E$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Всі висновки справедливі і для $m \le x_n$, тобто послідовність <u>*збіжна до скінченного числа*</u> тоді і тільки тоді, коли вона обмежена.

<u>Приклад 1.</u>

Розглянемо послідовність $x_n = \dfrac{a^n}{n!},\quad a > 1$, яка представляє невизначеність вигляду $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Розглянемо $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} * \dfrac{n!}{a^n} = \dfrac{a}{n+1},\qquad x_{n+1} = x_n * \dfrac{a}{n+1}$, при n>a-1

послідовність стає спадною, а знизу вона обмежена нулем. За теоремою Вейєрштрасса вона має границю, яку позначимо c: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Щоб знайти границю, перейдемо до границі в рівності $x_{n+1} = x_n * \dfrac{a}{n+1}$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n * \dfrac{a}{n+1}$.

Будемо мати c=c*0$\Rightarrow c = 0$, отже $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

<u>Приклад 2.</u> Нехай $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n},\ \ n \in N$. Дослідити послідовність (x_n) на збіжність.

Спочатку доведемо обмеженість зверху послідовності методом математичної індукції. $n = 1\ x_1 \le 2$ – виконується. Припустимо, що для деякого натурального $n\quad x_n \le 2\ \Rightarrow$ $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \le \sqrt{2 + 2} = 2$ - обмеженість зверху доведена, знизу очевидно послідовність обмежена нулем, тобто послідовність (x_n) обмежена. Дослідимо на монотонність. $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + x_n - x_n^2 = -(x_n + 1)(x_n - 2) \ge 0$ при $x_n \in [0,2]\ \Rightarrow\ (x_n)$ – неспадна $\Rightarrow$ за теоремою Вейєрштрасса – послідовність збіжна . Позначимо її границю через x. Внаслідок того, що її члени додатні, випливає, що $x \ge 0$. Перепишемо рекурентну рівність у такому вигляді: $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$. Бачимо, що послідовність у лівій частині збіжна до x^2, а у лівій – до $2 + x$. Робимо граничний перехід у останній рівності і маємо, що повинна виконуватись рівність: $x^2 = 2 + x \Rightarrow x = 2$, бо другий корінь цього рівняння $x = -1 < 0$.

Число е як границя послідовності

Розглянемо такі три послідовності $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $z_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Проведемо дослідження стосовно їх збіжності, при цьому спробуємо це зробити якомога більш різними шляхами. Почнемо з (x_n). З формули бінома Ньютона одержимо:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{n}C_n^1 + \frac{1}{n^2}C_n^2 + \frac{1}{n^3}C_n^3 + \ldots + \frac{1}{n^n}C_n^n =$$

$$= 1 + \frac{1}{n}n + \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots + \frac{1}{n^n}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n!} =$$

$$= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \ldots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!} \le$$

$$\le 2 + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\frac{1}{3!} + \ldots + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\frac{1}{n!} +$$

$$+ \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{(n+1)!} = x_{n+1}, \qquad \textbf{(1)}$$

як легко побачити, порівнюючи відповідні доданки у x_n і x_{n+1}, ця послідовність зростаюча. Крім того з нерівності **(1)** легко одержати таке обмеження: $x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = z_n \le 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$, а тому (x_n) як і (z_n) є монотонними та обмеженими (монотонність (z_n) очевидна). Тому вони обидві збіжні. ***Границю послідовності*** (x_n) ***називають числом*** $e = 2{,}718281\ldots$. Знову розглянемо праву частину **(1)**. Якщо зафіксувати деяке $k < n$, ми одержимо:

$$x_n > 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \ldots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}. \qquad \textbf{(2)}$$

Зробимо в цій нерівності граничний перехід при $n \to \infty$, ми одержимо, що ліва частина прямує до e, а права до виразу $2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{k!} = z_k$. З теореми про перехід до границі в нерівностях одержимо, що $\forall k \in N \quad x_k \le z_k \le e$, а тому з теореми про двох поліцаїв $\lim\limits_{k \to \infty} z_k = e$.

Для різноманіття проведемо дослідження останньої послідовності іншим чином.

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{n}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} >$$

$$> \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \frac{n}{n+1} = \frac{(n^2+n-1)n}{(n^2-1)(n+1)} = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$$

$\Rightarrow$ (y_n) монотонно спадна, крім того з ланцюгу нерівностей ми маємо:

$$x_1 = 2 < x_n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n < \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n < y_1 = 4 \ \Rightarrow$$

тобто вона й обмежена, а тому збіжна. З теореми про границю добутку одержимо:

$$y_n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1} = x_n \cdot \left(1+\tfrac{1}{n}\right) \to e \cdot 1 = e,$$

таким чином усі розглянуті послідовності збігаються до e .

<u>Приклад 3.</u> З одержаних вище властивостей послідовностей (x_n) та (y_n) можемо записати такі нерівності:

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1} \ \Rightarrow \ \tfrac{1}{n+1} < \ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right) < \tfrac{1}{n}.$$

<u>Приклад 4</u>. Розглянемо послідовність $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$.

Покажемо, що вона монотонна і обмежена. Розглянемо $x_{n_{+1}} - x_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0$, $x_{n_{+1}} < x_n$ і послідовність спадна. Покажемо, що послідовність обмежена знизу:

$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n > \ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\ln(1+\frac{1}{3})+...+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n =$

$\ln(2*\frac{3}{2}*\frac{4}{3}*...\frac{n+1}{n}*\frac{1}{n}) = \ln(\frac{n+1}{n}) > 0$,отже послідовність є збіжною, її границю позначають за Ейлером константою С $\approx 0{,}5$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ =С. З теореми про структуру збіжної послідовності маємо: $\sum\limits_{\kappa=1}^{n}\frac{1}{\kappa} = C+\ln n + o(1)$.

Приклад 5. Знайти границю :

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n}) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{\kappa=1}^{2n}\frac{1}{\kappa}-\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{1}{\kappa})$$
$$= \ln 2n + C + o(1) - \ln n - C = \ln 2$$

ЛЕКЦІЯ 5

Підпослідовності.Фундаментальні послідовності.Критерій Коші.

Нехай (x_n) – деяка послідовність, (n_k) зростаюча послідовність натуральних чисел. Послідовність $(y_k)=(x_{n_k})$ називається ***<u>підпослідовністю</u>*** послідовності (x_n).

<u>Приклад 1.</u> Для послідовності $x_n=(-1)^n$ підпослідовностями є

1) $1,1,1,\ldots$; ***2)*** $-1,-1,-1,\ldots$; ***3)*** $1,1,-1,1,1,-1,1,1,-1,\ldots$.

<u>Теорема 1.</u> *(Підпослідовності збіжної послідовності)*

Нехай послідовність (x_n) збігається і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a\in\overline{\mathrm{R}}$. Тоді будь-яка її підпослідовність (x_{n_k}) також збіжна і $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$.

Доведення. Нехай $(y_k)=(x_{n_k})$ довільна підпослідовність послідовності (x_n). За означенням границі: $\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n\ge N\ \Rightarrow\ |x_n-a|<\varepsilon$. З того, що (n_k) – зростаюча послідовність натуральних чисел, зрозуміло, що $n_k\to+\infty\ \Rightarrow\ \exists K(N)$: $\forall k\ge K\ \Rightarrow\ n_k\ge N$. Поєднуючи два останні твердження, ми одержимо, що $\forall\varepsilon>0\ \exists K:\ \forall k\ge K\ \Rightarrow\ n_k\ge N$ $\Rightarrow\ |x_{n_k}-a|<\varepsilon\Leftrightarrow|y_k-a|<\varepsilon$, з чого випливає, що $y_k\to a$ при $k\to\infty$.

Теорема доведена.

Точка a називається ***<u>частковою границею послідовності</u>*** (x_n), якщо з неї можна вилучити підпослідовність (x_{n_k}), границя якої дорівнює a .

<u>Приклад 2.</u> У послідовності $1,2,3,1,2,3,1,2,3,\ldots$ легко збагнути, що сукупністю часткових границь є множина $\{1,2,3\}$.

Приклад 3. У послідовності $1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,\ldots$ частковими границями є N.

Наслідок. *(Множина часткових границь збіжної послідовності)*

Якщо послідовність (x_n) збігається до числа $a \in \overline{\mathrm{R}}$, то множина її часткових границь є одноелементна множина $\{a\}$.

Нехай A-множина часткових границь. $A \in \overline{\mathrm{R}}$. Серед часткових границь необхідно знайдуться найбільша і найменша, вони називаються найбільшою та найменшою границею послідовності (x_n)і позначаються $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ та $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \overset{def}{=} \sup A$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \overset{def}{=} \inf A$.

Теорема 2. *(Критерій збіжності послідовності через верхню та нижню границі)*

Для будь-якої обмеженої послідовності (x_n) виконується нерівність $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. Рівність можлива тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n .$$

Властивість 1. *(Перша властивість верхньої (нижньої) границі)*

Верхня (нижня) границя послідовності (x_n) є її частковою границею.

Властивість 2. *(Друга властивість верхньої (нижньої) границі)*

Верхня (нижня) границя послідовності (x_n) є її найбільшою (найменшою) частковою границею.

Теорема 3. *(Про монотонну підпослідовність)*

З будь-якої обмеженої послідовності (x_n) можна виділити монотонну підпослідовність.

<u>Теорема 4.</u> *(Больцано-Вейєрштрасса)*

З кожної обмеженої послідовності (x_n) можна виділити збіжну підпослідовність.

Якщо тепер розглянути всі послідовності в просторі $\overline{\mathrm{R}}$, то всі твердження та означення знову мають місце, якщо вважати збіжною послідовність, що прямує до $+\infty$ або $-\infty$. Для необмеженої зверху (знизу) послідовності (x_n) покладемо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$ $\left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty\right)$. Тоді легко зрозуміти, що кожна послідовність має верхню та нижню границю, крім того, кожна монотонна послідовність має границю.

Критерій Коші.

Послідовність (x_n) називається ***<u>фундаментальною</u>***, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon): \; \forall n \geq N(\varepsilon) \;\; \forall p \in N \;\Rightarrow\; |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

<u>Теорема 1.</u> *(Критерій Коші)*

Послідовність (x_n) дійсних чисел збігається тоді і тільки тоді, коли вона фундаментальна.

Доведення. Необхідність. Нехай існує $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon): \; \forall n \geq N(\varepsilon)$:

$$|x_n - x| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \forall n \geq N(\varepsilon) \forall p \in N \;\; |x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x| + |x_n - x| < 2\varepsilon .$$

Необхідність доведена.

Достатність. Якщо (x_n) – фундаментальна, то вона обмежена, що випливає з раніше доведених тверджень. За теоремою Больцано-Вейєрштрасса існує збіжна підпослідовність (x_{n_k}). Із означення фундаментальності $x_k - x_{n_k} = o(1) \;\Rightarrow\; x_k = x_{n_k} + o(1)$

, а далі за теоремою про суму двох збіжних послідовностей, одержимо, що x_k збігається.

Достатність доведена.

Теорема доведена.

Послідовність (x_n) ***має обмежену варіацію***, якщо $\exists c>0 \ \ \forall n\in N: \ \sum\limits_{k=2}^{n}|x_k - x_{k-1}| \le c$.

Лема 1. *(Про послідовність з обмеженою варіацією)*

Послідовність (x_n), що має обмежену варіацію – збіжна.

Доведення. Позначимо $y_n = \sum\limits_{k=2}^{n}|x_k - x_{k-1}|$, вона обмежена та неспадна, з чого слідує, що вона збіжна, і за критерієм Коші – фундаментальна $\Rightarrow$

$$\forall\varepsilon>0 \ \exists N(\varepsilon): \ \forall n\ge N(\varepsilon) \ \forall p\in N \ \Rightarrow \ |y_{n+p}-y_n|<\varepsilon \ \Rightarrow$$

$$|x_{n+p}-x_n| = |x_{n+p}-x_{n+p-1}+x_{n+p-1}-x_{n+p-2}+...+x_{n+1}-x_n| \le \ \le |x_{n+p}-x_{n+p-1}| +$$

$$|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}| + ... + |x_{n+1}-x_n| = \sum_{k=n}^{n+p-1}|x_{k+1}-x_k| = |y_{n+p}-y_n| < \varepsilon$$

(x_n) – фундаментальна $\Rightarrow$ збіжна.

Лема доведена.

Приклад 4.

Довести збіжність послідовності: $x_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$

Розглянемо

$|x_{n+p}-x_n| =$

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=$$

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

$\forall n \geq N(\varepsilon) \forall p \in N$

Приклад 5.

Довести розбіжність послідовності: $x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$

Із критерія Коші та принципа двоїстості для доведення розбіжності послідовності випливає, що

$\exists \varepsilon > 0 \ : \forall \ n \in N \ \exists p \in N : \left| x_{n+p} - x_n \right| \geq \varepsilon$. Розглянемо $\left| x_{n+p} - x_n \right| =$

$$=\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+2)}+\ldots\frac{1}{(n+p)}>\frac{p}{(n+p)}=\frac{1}{2}>\varepsilon, для \varepsilon \in (0{,}1/2) при$$

$p = n.$

Лекція 6.

Теорема Коші. Теорема Штольца.

Нехай $(a_n), (b_n)$ – числові послідовності. Послідовність (a_n) називається знехтуваною у порівнянні з (b_n) , якщо $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |a_n| \leq \varepsilon |b_n|$. Будемо записувати $a_n = o(b_n)$ та вважати, що ***послідовність*** a_n ***є малою в порівнянні з послідовністю*** b_n.

<u>Лема 2.</u> *(Критерій о-малості послідовності)*

$$a_n = o(b_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{b_n} = 0.$$

Доведення. $\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{b_n} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \ \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\tfrac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall n \geq N(\varepsilon) \ |a_n| \leq \varepsilon |b_n|$

.

Лема доведена.

<u>Теорема 2.</u> *(Винесення о-малого за знак суми)*

Нехай $\forall k \in N \ \ b_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n} b_k \to +\infty$ при $n \to \infty$ і $a_n = o(b_n)$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = o\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$

Доведення. З умови $a_n = o(b_n)$ ми маємо, що $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in N \ \ \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| \leq \varepsilon b_n$ $\Rightarrow \left|\sum_{k=N(\varepsilon)}^{n} a_k\right| \leq \varepsilon \sum_{k=N(\varepsilon)}^{n} b_k \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} b_k$. Крім того з умови $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = +\infty$ випливає, що $\exists N'(\varepsilon) \in N$: $\forall n \geq N'(\varepsilon) \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{N'} a_k\right| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} b_k \Rightarrow \forall n \geq \max\{N(\varepsilon), N'(\varepsilon)\} \ \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq 2\varepsilon \sum_{k=1}^{n} b_k \Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{n} a_k = o\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$.

Теорема доведена.

<u>Наслідок 1</u>. *(Границя відношення часткових сум)*

Нехай $\forall n \in N \;\; b_n > 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = +\infty$. Якщо $\frac{a_n}{b_n} = l \in \overline{\mathrm{R}}$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = l$.

Доведення. Нехай $l \in \mathrm{R}$. Оскільки $\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} - l = \frac{\sum_{k=1}^{n} (a_k - l\,b_k)}{\sum_{k=1}^{n} b_k}$, і $\frac{a_k}{b_k} - l = o(1)$, то за теоремою 2 права частина прямує до нуля.

Якщо $l = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0 \;\Rightarrow\; \exists N : \forall n \geq N \;\; b_n < a_n \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = +\infty \;\Rightarrow$ за ,теоремою 2 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = +\infty$. Аналогічно для випадку $l = -\infty$.

Теорема доведена.

<u>Наслідок 2.</u> *(теорема Коші)*

Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in \overline{\mathrm{R}}$, то існує $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = l$.

Доведення. Для доведення достатньо в останньому наслідку покласти $b_n = 1$.

Теорема доведена.

<u>Теорема 3.</u> *(Штольца)*

Якщо послідовність (y_n) монотонно прямує до $+\infty$, та $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \overline{\mathrm{R}}$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$.

Доведення. Для доведення достатньо в наслідку покласти $a_{n+1} = x_{n+1} - x_n$, $a_1 = x_1$; $b_{n+1} = y_{n+1} - y_n$, $b_1 = y_1$. Тоді $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $y_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \forall n \in N$.

Теорема доведена.

<u>Приклад 1.</u> Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{\sum_{k=1}^{n} (2k+1)^2}$.

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 ;\ y_n = \sum_{k=1}^{n} (2k+1)^2 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+3)^2} = \frac{1}{4} \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{\sum_{k=1}^{n} (2k+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Для довільних додатних дійсних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ визначимо:

середнє арифметичне – $\xi_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$;

середнє геометричне – $\eta_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$;

середнє гармонічне – $\gamma_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$;

середнє степеневе порядку $p \in N$ – $c_n^{(p)} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

<u>Приклад 2.</u> Границя середніх – арифметичного, гармонічного, геометричного.

Нехай послідовність додатних дійсних (x_n) чисел така, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \overline{R^+}$. Довести тоді, що до тієї ж самої границі збігаються також середнє арифметичне (ξ_n), середнє геометричне (η_n) і середнє гармонічне (γ_n) чисел $x_1, x_2, ..., x_n$.

Твердження для середнього арифметичного безпосередньо випливає з теореми Коші. Для середнього гармонічного також з цієї теореми легко одержати, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}{n} = \frac{1}{l}$, тому що $\frac{1}{x_k} \to \frac{1}{l}$, з чого маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = l$. Для середнього геометричного все випливає з теореми про двох поліцаїв та нерівності між середніми: $\gamma_n \le \eta_n \le \xi_n$, а тому і $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = l$.

<u>**Теорема 4.**</u> *(Границя кореня n-го степеня)*

Якщо для послідовності додатних чисел (x_n) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = l \in \overline{R}$, то

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l .$$

Доведення. Якщо покласти $\frac{x_n}{x_{n-1}} = y_n$, $x_0 = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \lim y_n = l$

За останнім прикладом (для середнього геетричного) маємо:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y_1 y_2 ... y_n} == \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x_n}{x_{n-1}} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} ... \frac{x_2}{x_1} \frac{x_1}{1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l .$$

Теорема доведена.

Лекція 7

Границя функції

Нехай x_0 довільна точка на R. Множина

$$O_\varepsilon(x_0)=\{x\,|\,|x-x_0|<\varepsilon\}=(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\subset R$$

називається ε ***-околом точки*** x_0. Множина $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(x_0)=O_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\}$ називається проколотим ε ***-околом точки*** x_0.

Множини

$$O_E(-\infty)=(-\infty,-E),\ O_E(+\infty)=(E,+\infty),\ O_E(\infty)=(-\infty,-E)\cup(E,+\infty)$$

називаються відповідно E ***–околами*** $-\infty,+\infty$ та просто ∞.

Нехай $X\subset R$ деяка множина, $x_0\in\overline{R}$. ε ***–околом точки*** $x_0\in X$ ***в множині*** X називається перетин множин $O_\varepsilon(x_0)\cap X$.

Приклад 1. Якщо розглянути множину $X=\left\{0,\frac{1}{n}\,\middle|\,n\in N\right\}$, тоді при $\varepsilon=\frac{1}{10}$,

ε ***–околом точки*** $x_0\in X$ ***в множині*** X буде множина $O_\varepsilon(0)\cap X=\left\{\frac{1}{11},\frac{1}{12},\frac{1}{13},\ldots\right\}$.

Означення 1. Нехай $X\subset R$, точка $x_0\in\overline{R}$ називається ***граничною точкою*** множини X, якщо $\forall\varepsilon>0\ O_\varepsilon(x_0)\cap(X\setminus\{x_0\})\neq\varnothing$, іншими словами, гранична точка x_0 множини X є точкою дотикання множини $X\setminus\{x_0\}$. Точка множини X, яка не є граничною, називається ***ізольованою***. Можна розписати це визначення з використанням принципу двоїстості, тобто запишемо заперечення визначення граничної точки: $\exists\varepsilon>0$: $O_\varepsilon(x_0)\cap(X\setminus\{x_0\})=\varnothing$, тобто в деякому околі точка x_0 є єдиною точкою множини, що повністю задовольняє уявленню про ізольовану точку.

Лема 1. *(Окіл граничної точки)*

Якщо $x_0 \in R$ – гранична точка множини $X \subset R$, то $\forall \varepsilon > 0$ множина $O_\varepsilon(x_0) \cap X$ нескінченна.

Доведення. Від супротивного. Якщо множина $O_\varepsilon(x_0) = \{x_1, ..., x_n\}$ – скінчена, то позначимо $\forall k = \overline{1, n}$ $r_k = |x_k - x_0| > 0$. Виберемо $0 < \varepsilon_0 < \min\limits_{1 \le k \le n} r_k$ $\Rightarrow$ $O_{\varepsilon_0}(x_0) \cap (X \setminus \{x_0\}) = \varnothing$ – суперечність.

Лема доведена.

З цієї леми можна дати еквівалентне означення граничної точки та точки дотикання до деякої множини $X \subset R$.

Означення 2. Точка $x_0 \in R$ називається ***точкою дотикання*** (***граничною точкою***) множини X, якщо можна виділити послідовність (x_n) точок з множини X $(X \setminus \{x_0\})$, що збігається до x_0.

Нехай $f : R \to R$ і x_0 – гранична точка множини D_f.

Означення 3. Число $\alpha \in \overline{R}$ називається ***частковою границею функції*** f ***в точці*** x_0, якщо

$$\exists (x_n) \subset D_f : (x_n \to x_0) \wedge (\forall n \in N \; x_n \ne x_0) \wedge (f(x_n) \to \alpha) \text{ при } n \to \infty.$$

Множину всіх часткових границь функції f у точці x_0 позначимо $E_f(x_0)$.

Приклад 2. Розглянемо функцію $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \in R$, для неї $D_f = R \setminus \{0\}$, точка $\{0\}$ – є граничною для D_f. Тоді $E_f(0) = [-1, 1]$, так як $(\forall \alpha \in [-1, 1])$ $\sin \frac{1}{x} = \alpha$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{x_n} = (-1)^n \arcsin \alpha + n\pi$ $\Rightarrow$ $x_n = \frac{1}{(-1)^n \arcsin \alpha + n\pi} \to 0$ при $n \to \infty$. Крім того, очевидно, що зовні проміжку $[-1, 1]$ часткових границь функції нема.

Аналогічно послідовностям, визначимо ***верхню*** та ***нижню границю функції*** $f:R\to R$ ***в точці*** $x_0\in D_f'$ за формулами:

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) \overset{def}{=} \sup E_f(x_0);\ \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) \overset{def}{=} \inf E_f(x_0).$$

Означення 4. Нехай $f:R\to R$ і $x_0\in D_f'$. Якщо множина $E_f(x_0)$ складається з одного числа $\alpha\in\overline{R}$, то воно називається ***границею функції*** f ***в точці*** x_0 і позначається $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (***границя за Гейне***).

В **Прикладі 2.** розглянемо дві послідовності $(x_n)=\dfrac{1}{2\pi n}\to 0,(y_n)=\dfrac{1}{2\pi n+\pi/2}\to 0$.

Відповідні значення функції на цих послідовностях прямують до різних значень:

$f(x_n)\to 0, f(y_n)\to 1$.Отже, границі не існує.

Означення 5. Нехай $f:R\to R$ і $x_0\in D_f'$. Число α називається ***границею функції*** f ***в точці*** x_0 (при $x\to x_0$), якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x\in D_f:\ 0<|x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-\alpha|<\varepsilon$ (***границя за Коші***).

Теорема 1. *(Зв'язок означень границі функції за Коші та Гейне)*

Означення границі функції в точці за Коші та Гейне еквівалентні.

Доведення. *Коші* $\Rightarrow$ *Гейне*. Нехай $\alpha=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ за Коші. Розглянемо довільну послідовність $(x_n)\subset D_f\setminus\{x_0\}$: $x_n\to x_0$ при $n\to\infty$. Тоді $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D_f$ $0<|x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-\alpha|<\varepsilon$, тоді $\exists N(\delta)$: $\forall n\geq N(\delta)\ |x_n-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x_n)-\alpha|<\varepsilon\ \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\alpha$. Тобто $E_f(x_0)=\{\alpha\}$, за Гейне доведено.

Гейне $\Rightarrow$ *Коші.* Нехай $\alpha=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ за Гейне. Від супротивного, якщо $\alpha\neq\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ за Коші, то $\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x\in D_f:\ 0<|x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-\alpha|\geq\varepsilon$. Виберемо $\delta_n=\frac{1}{n}$, тоді $\forall n\ \exists x_n\in D_f\setminus\{x_0\}:\ 0<|x-x_0|<\delta_n\ \wedge\ |f(x_n)-\alpha|\geq\varepsilon\ \Rightarrow\ ((x_n)\subset D_f)\ \wedge\ (\forall n\ x_n\neq x_0)\ \wedge$ $(x_n\to x_0)\ \wedge\ (f(x_n)\not\to\alpha)\Rightarrow$ суперечність.

Теорема доведена.

Теорема 2. *(Арифметичні дії з границями функцій)*

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\beta$ та $D_f = D_g$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(f \pm g)(x)=\alpha \pm \beta$, $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=\alpha\beta$, і якщо $\beta \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\alpha}{\beta}$.

Доведення спирається на аналогічну теорему для збіжних послідовностей та означення Гейне границі функції в точці.

Приклад 3. Остання умова $D_f = D_g$ необхідна, бо інакше навіть за умови, що x_0 є гранична точка для D_f та для D_g може бути невизначеною $f+g$: $f = x$, $x \in Q$; $g = x$, $x \in R \setminus Q$ $\Rightarrow$ 0 – гранична точка для обох множин, але в околі точки 0 функція $f+g$ не визначена.

Наслідок 1. *(Про функції з нерівними границями)*

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\beta$, $D_f = D_g$ та $\alpha < \beta$. Тоді $\exists \overset{\circ}{O}_\varepsilon(x_0)$: $\forall x \in \overset{\circ}{O}_\varepsilon(x_0)$ $f(x) < g(x)$.

Наслідок 2. *(Про нерівні функції)*

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\beta$, $D_f = D_g$. Якщо $\exists \overset{\circ}{O}_\varepsilon(x_0)$: $\forall x \in \overset{\circ}{O}_\varepsilon(x_0)$ виконується одна з умов:

1) $f(x) > g(x)$; ***2)*** $f(x) \geq g(x)$; ***3)*** $f(x) > \beta$; ***4)*** $f(x) \geq \beta$,

то $\alpha \geq \beta$.

Наслідок 3. *(Теорема про двох поліцаїв для функцій)*

Нехай функції $f, g, h : R \to R$ мають спільну область визначення D_f та точка $x_0 \in D'_f$. Якщо $\exists \overset{\circ}{O}_\varepsilon(x_0)$: $\forall x \in \overset{\circ}{O}_\varepsilon(x_0)$ $f(x) \le g(x) \le h(x)$ та $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \alpha$, то $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \alpha$.

Доведення наслідків проводиться за означенням Гейне границі функції в точці.

Теорема 3. *(Про границю композиції функції)*

Нехай ξ_0 – гранична точка множини $D_{f \circ \varphi}$. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{\xi \to \xi_0} \varphi(\xi) = x_0$, і $\exists \overset{\circ}{O}_\varepsilon(\xi_0)$, що $\forall \xi \in \overset{\circ}{O}_\varepsilon(\xi_0) \bigcap D_{f \circ \varphi}$ $\varphi(\xi) \ne x_0$, то $\lim\limits_{\xi \to \xi_0} (f \circ \varphi)(\xi) = \alpha$.

Доведення. Нехай (ξ_n) – довільна послідовність, така що $\forall n \in N$ $\xi_n \in D_{f \circ \varphi} \setminus \{\xi_0\}$ і $\xi_n \to \xi_0$. Тоді $x_n = \varphi(\xi_n) \to x_0$ і $x_n \in D_f \setminus \{x_0\}$. Тому $f(x_n) = (f \circ \varphi)(\xi_n) \to \alpha$ при $n \to \infty$. Згідно означення границі $\lim\limits_{\xi \to \xi_0} (f \circ \varphi)(\xi) = \alpha$.

Теорема доведена.

Означення 6. Нехай $f : R \to R$ і x_0 – гранична точка множини $D_f \bigcap \{x \mid x < x_0\}$ $\left(D_f \bigcap \{x \mid x > x_0\}\right)$. Покладемо $f(x_0 - 0) \overset{def}{=} \lim\limits_{x \to x_0,\, x < x_0} f(x)$ $\left(f(x_0 + 0) \overset{def}{=} \lim\limits_{x \to x_0,\, x > x_0} f(x) \right)$, якщо ця границя існує. Числа $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ називаються відповідно ***лівою*** та ***правою границями функції*** f ***в точці*** x_0. Якщо $f(x_0 - 0) = \pm\infty$, $f(x_0 + 0) = \pm\infty$, то відповідні границі називається ***нескінченими***.

Теорема 4. *(Критерій існування границі функції в точці)*

Функція $f : R \to R$ має границю в точці x_0, граничній для множин $D_f \bigcap \{x \mid x < x_0\}$ і $D_f \bigcap \{x \mid x > x_0\}$ тоді і тільки тоді, коли одночасно існують і рівні між собою односторонні границі $f(x_0 - 0)$ і $f(x_0 + 0)$.

Доведення. Необхідність. Якщо $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$, то $\forall (x_n)\subset D_f:\ x_n\to x_0\ \ (x_n\neq x_0)$ $f(x_n)\to\alpha$. Тоді легко зрозуміти, що $\forall (x_n')\to x_0:\ x_n'<x_0\ \Rightarrow\ f(x_n')\to\alpha$, тобто $f(x_0-0)=\alpha$. Аналогічно $f(x_0+0)=\alpha$.

Достатність. Нехай $f(x_0-0)=f(x_0+0)=\alpha$, розглянемо довільну послідовність точок $(x_n)\subset D_f\setminus\{x_0\}$, що збігається до x_0. Розіб'ємо її на дві частини, члени менші за x_0, та члени більші за x_0. Якщо обидві ці частини нескінчені, то ми маємо дві підпослідовності, які збігаються до x_0, а їх значення збігаються до $f(x_0-0)=\alpha$, і $f(x_0+0)=\alpha$. Якщо одна з цих частин скінчена, то її можна відкинути, на збіжність це не впливає. Тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$.

Теорема доведена.

Зауважимо, що у випадках $x_0=\pm\infty$ мова йде лише про односторонні границі, які ми будемо позначати відповідно $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Приклад 4. Розглянемо функцію $f(x)=\operatorname{sgn} x$ і границю в точці $x_0=0$.

$f(0-0)=-1,\ f(0+0)=1\ \Rightarrow$ не існує $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Означення 7. Нехай $f:R\to R$, x_0 – гранична точка множини D_f. Функція f ***задовольняє в точці x_0 умову Коші***, якщо

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall(x_1,x_2\in D_f):\ x_1,x_2\in \overset{\circ}{O}_\delta(x_0)\ \Rightarrow\ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

Теорема 5. *(Критерій Коші існування границі функції в точці)*

Функція $f:R\to R$ має скінченну границю в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє в ній умову Коші.

Доведення. Необхідність. Якщо $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \ \exists\delta: \ \forall\{x_1,x_2\}\subset D_f$: $\left(0<|x_1-x_0|<\delta \wedge 0<|x_2-x_0|<\delta\right) \Rightarrow |f(x_1)-\alpha|<\varepsilon \wedge |f(x_2)-\alpha|<\varepsilon \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<2\varepsilon$.

Достатність. Виберемо довільне $\varepsilon>0$. Тоді $\exists\delta>0: \ \forall\{x_1,x_2\}\subset D_f$: $\left(0<|x_1-x_0|<\delta \wedge 0<|x_2-x_0|<\delta\right) \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. Зафіксуємо $\delta>0$. Розглянемо довільну послідовність $(x_n)\subset D_f \setminus \{x_0\}$, що збігається до x_0. $\exists N(\delta)$: $\forall n\ge N \ \ \forall p\in N$ $|x_n-x_0|<\delta \wedge |x_{n+p}-x_0|<\delta \Rightarrow$ за виконанням умови Коші одержимо: $|f(x_{n+p})-f(x_n)|<\varepsilon \Rightarrow (f(x_n))$ – фундаментальна послідовність, тобто вона збіжна. Нехай $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, тобто $\alpha\in E_f(x_0)$. Залишилося показати, що $\{\alpha\}=E_f(x_0)$. Якщо $\beta\ne\alpha \wedge \beta\in E_f(x_0) \Rightarrow \exists(x_n')\subset D_f \setminus \{x_0\}$: $x_n'\to x_0 \ \wedge \ f(x_n')\to\beta$ при $n\to\infty$. Розглянемо послідовність $x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3'\ldots$. Ця послідовність також є фундаментальною, а тому збіжною $\Rightarrow$ її границя єдина, що суперечить тому, що $\alpha\ne\beta$ є її різними частковими границями.

Теорема доведена.

<u>Приклад 5.</u> Границя показникової, логарифмічної та степенево-показникової функцій:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \ \ (a>0, x_0\in R)$. ***2.*** $\lim\limits_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0 \ \ (x_0>0)$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a>0$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=b$ та $x_0\in D_u = D_v$.

Вибираємо довільну послідовність $x_n\to x_0$, тоді все випливає з відповідних властивостей послідовностей.

Лекція 8.

Для вивчення поведінки функції в околі деякої точки та порівняння різних функцій в околі точки, корисно запровадити ***символи Ландау*** O і o – ***О-велике*** та ***о-мале*** відповідно аналогічно тому, як вони були визначені для послідовностей.

Нехай функції $f:R\to R$, $g:R\to R$, $x_0\in X'$, де $X=D_f=D_g$. Тоді:

1) якщо існує $M>0$ і окіл $\overset{\circ}{O}_\delta(x_0)$ точки x_0, такі що $\forall x\in\overset{\circ}{O}_\delta(x_0)$ виконується нерівність: $|g(x)|\le M|f(x)|$, то записуємо $g=O(f)$ (O –***<u>велике</u>***);

2) якщо одночасно $g=O(f)\wedge f=O(g)$, то кажуть, що f і g – ***<u>функції одного порядку</u>***;

3) якщо $\forall\varepsilon>0$ існує окіл $\overset{\circ}{O}_\delta(x_0)$ такий, що $\forall x\in\overset{\circ}{O}_\delta(x_0)$ $|g(x)|\le\varepsilon|f(x)|$, то записуємо $g=o(f)$ (o –***<u>мале</u>***);

4) якщо $f-g=o(g)$, то функції f і g називаються ***<u>еквівалентними</u>***, при цьому записують $f\sim g$.

<u>Теорема 6.</u> *(Про функції одного порядку та критерій еквівалентності функцій)*

Функції $f:R\to R$, $g:R\to R$, $x_0\in X'$, де $X=D_f=D_g$, тоді:

1. якщо $\exists\varepsilon>0$: $\forall x\in\overset{\circ}{O}_\varepsilon(x_0)$ $g(x)\neq0$ і $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq0$**,** то функції f і g одного порядку в околі точки x_0;

2. якщо $\exists\varepsilon>0$: $\forall x\in\overset{\circ}{O}_\varepsilon(x_0)$ $g(x)>0$, то $f\sim g\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

Доведення. ***1.*** Якщо $\frac{f}{g}\to c\neq0$, то $\left|\frac{f}{g}\right|\to|c|=c_1>0$ $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon_1>0$ $\exists\delta>0$: $\forall x\in D_f$: $0<|x-x_0|<\delta$ $\Rightarrow$ $\left|\frac{|f(x)|}{|g(x)|}-c_1\right|<\varepsilon_1$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_1<\varepsilon,\ \varepsilon_1<c_1$ $c_1-\varepsilon_1<\frac{|f(x)|}{|g(x)|}<c_1+\varepsilon_1$ $\Rightarrow$ $|f(x)|<|g(x)|(c_1+\varepsilon_1)$ $\Rightarrow$ $f=O(g)$, аналогічно, враховуючи, що $\frac{f(x)}{g(x)}\to\frac{1}{c}\in R\setminus\{0\}$, то $g=O(f)$, тобто f і g – одного порядку.

2. $f \sim g \Rightarrow \forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists \overset{\circ}{O}_\delta(x_0): \ \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(x_0). \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g(x)| < \varepsilon_1 |g(x)| \Rightarrow$ $g(x) - \varepsilon_1 g(x) < f(x) < g(x) + \varepsilon_1 g(x) \Rightarrow 1 - \varepsilon_1 < \frac{f(x)}{g(x)} < 1 + \varepsilon_1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Аналогічно в зворотному напрямі.

Теорема доведена.

Приклад 6. Якщо розглянути функції $f(x) = \sin\frac{1}{x} + 5$ та $g(x) = \cos\frac{1}{x} + 10$ в околі $x_0 = 0$, то зрозуміло, що $f = O(g)$ та $g = O(f)$, але не існує $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, що підкреслює лише достатність відповідної умови.

Сформулюємо тепер властивості символів Ландау, вважаємо при цьому, що для всіх функцій є однаковими множини визначення, всі властивості розписуються в околі точки x_0 – граничній для спільної області визначення.

Властивості. *(Символів Ландау)*

1. $O(O(f)) = O(f)$; ***2.*** $O(f) \cdot O(g) = O(fg)$; ***3.*** $\forall \lambda \in R \ O(\lambda f) = O(f)$;

4. $O(f) + O(f) = O(f)$; ***5.*** $o(o(f)) = o(f)$; ***6.*** $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$;

7. $o(f) + o(f) = o(f)$; ***8.*** $o(O(f)) = o(f)$; ***9.*** $O(o(f)) = o(f)$

Функція $f: R \to R$ називається ***обмеженою*** на множині $X \subset D_f$, якщо множина $f(X)$ обмежена.

Наслідок 1. *(Умова обмеженості функції в точці)*

Якщо $f = O(1)$, то $\exists \overset{\circ}{O}_\varepsilon(x_0)$, де функція обмежена.

Наслідок 2. *(Умова нескінченної малості функції в точці)*

Якщо $f = o(1)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Якщо в деякому околі $\overset{\circ}{O}_{\varepsilon}(x_0)$ $f(x) = ag(x) + o(g(x))$ $(a \neq 0)$, то $f \sim ag$, при цьому функція $x \mapsto ag(x)$ $x \in \overset{\circ}{O}_{\varepsilon}(x_0)$ називається ***<u>головною частиною функції</u>*** f ***<u>при</u>*** $x \to x_0$.

При обчисленні границь функцій часто дуже зручним виявляється замінювати їх на головні частини. Спочатку згадаємо деякі відомі зі школи границі:

<u>Приклад 7.</u> $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

<u>Приклад 8.</u> $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

1) Якщо $x \to +0$, то нехай (x_k) – довільна числова послідовність, що прямує до нуля, тоді існує послідовність натуральних чисел

$$(n_k):\ \forall k \in N\ \ \frac{1}{n_k+1} < x_k \leq \frac{1}{n_k}\ \Rightarrow\ \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

Ліва і права частини нерівності прямують до e, тому середина теж прямує до e.

2) Якщо $x \to -0$, то покладемо $t = -x\ \Rightarrow\ t \to +0\ \Rightarrow$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-t)^{-\frac{1}{t}} = \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{t}}} = \left(1+\tfrac{t}{1-t}\right)^{\frac{1-t}{t}} \cdot \left(1+\tfrac{t}{1-t}\right) \to e\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Тепер ці границі можемо використати для одержання так званих асимптотичних формул.

$$\tfrac{\sin x}{x} = 1 + o(1)\ \Rightarrow\ \sin x = x + o(x) = o(1) \qquad \textbf{(1)}$$

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\tfrac{x}{2} = 1 - 2\left(\tfrac{x}{2} + o\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)^2 = 1 - 2\cdot\tfrac{x^2}{4} + o\left(x^2\right) = 1 - \tfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\ \Rightarrow$$

$$\cos x = 1 + o(1) = 1 + o(x) = 1 - \tfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \qquad \textbf{(2)}$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \ln e = 1 \;\Rightarrow$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) = o(1) \qquad \textbf{(3)}$$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t \\ x = \ln(1+t) \end{array} \right| = \frac{t}{\ln(1+t)} \to 1 \;\Rightarrow$$

$$e^x = 1 + x + o(x) = 1 + o(1) \qquad \textbf{(4)}$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + o(1) = 1 + x \ln a + o(x) \qquad \textbf{(5)}$$

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \alpha \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \to \alpha \;\Rightarrow$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + o(1) = 1 + \alpha x + o(x) \qquad \textbf{(6)}$$

Дуже часто в околі точки x_0 головну частину функції надають у вигляді $a(x - x_0)^n$, $n \in R$. Тоді можна виписати деякі корисні практичні властивості символів Ландау саме для таких степеневих функцій. При цьому вважаємо, що $x_0 = 0$, а $m, n \in R^+$.

<u>Властивості.</u> *(о-малих функцій)*

1. $x^m = o\left(x^n\right),\ m > n$; ***2.*** $o\left(cx^n\right) = c\,o\left(x^n\right) = o\left(x^n\right),\ c \neq 0$;

3. $o\left(x^n\right) + o\left(x^m\right) = o\left(x^n\right),\ m > n$; ***4.*** $x^n \cdot o\left(x^m\right) = o\left(x^{n+m}\right)$;

5. $o\left(x^n\right) o\left(x^m\right) = o\left(x^{n+m}\right)$; ***6.*** $O\left(x^n\right) \cdot o\left(x^m\right) = o\left(x^{n+m}\right)$.

Легко побачити, що формули **(1)-(6)** записані саме у вигляді виділення головної частини степеневого вигляду. Покажемо як останні властивості та формули **(1)-(6)** використовувати для перетворень та знаходження границь.

<u>Приклад 9.</u> $\left(1 + x + o\left(x^2\right)\right)\left(x + x^3 + o\left(x^3\right)\right) =$

$$= x + x^2 + o(x^3) + x^3 + x^4 + o(x^5) + o(x^3) + o(x^4) + o(x^5) = x + x^2 + x^3 + o(x^3).$$

Приклад 10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-Cos^{\alpha} x}{x^2} = \frac{1-Cos^{\alpha} x}{x^2} = \frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{\alpha}}{x^2} = \frac{1-\left(1-\frac{\alpha x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{\frac{\alpha x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} \to \frac{\alpha}{2}.$$

Приклад 11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}$, тепер знайдемо таку границю при $x \to 0$:

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x\ln a+1+x\ln b+1+x\ln c+o(x)}{3}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{x\ln(abc)}{3}+o(x)\right)}{x} = \frac{\frac{x\ln(abc)}{3}+o(x)}{x} = = \frac{\ln(abc)}{3}+o(1) \to$$

$$\ln(abc)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)} \to e^{\ln(abc)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{abc}.$$

Перелічимо всі типи невизначеностей, для всіх інших випадків достатньо підставити граничні значення з $\overline{R}$ і одержати відповідь:

1. $\frac{0}{0}$; ***2.*** $\frac{\infty_1}{\infty_2} = \frac{\frac{1}{\infty_2}}{\frac{1}{\infty_1}} \to \frac{0}{0}$; ***3.*** $0\cdot\infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$;

4. $\infty_1 - \infty_2 = \infty_1\left(1-\frac{\infty_2}{\infty_1}\right) = \begin{cases} \infty_1\cdot 0, \text{якщо} \left(1-\frac{\infty_2}{\infty_1}\right) \to 0 \\ \textit{нема невизначеності}, \ \textit{якщо} \left(1-\frac{\infty_2}{\infty_1}\right) \not\to 0 \end{cases}$;

5. $1^{\infty} = e^{\infty\ln 1} \to e^{\infty\cdot 0}$; ***6.*** $\infty^0 = e^{0\ln\infty} \to e^{0\cdot\infty}$; ***7.*** $0_1^{\,0_2} = e^{0_1\ln 0_2} \to e^{0_1\infty}$.

Приклад 12. $A = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$, де ***1)*** $x_0 = 0$; ***2)*** $x_0 = 1$; ***3)*** $x_0 = +\infty$.

1) $\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \to 1$; $\frac{1+x}{2+x} \to \frac{1}{2} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$;

2) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\left|\begin{matrix}t=x-1\\x=t+1\end{matrix}\right|=\dfrac{1-(1+t)^{\frac{1}{2}}}{-t}=\dfrac{-\frac{1}{2}t+o(t)}{-t}\to\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1+x}{2+x}\to\dfrac{2}{3}\ \Rightarrow A=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\,;$

3) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}-1}\to 0;\ \dfrac{1+x}{2+x}\to 1;\ A=1^0=1.$

Лекція 9.

Неперервність функції

Функція $f:R\to R$ називається ***неперервною в точці*** $x_0\in D_f$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$ кожен раз, як тільки послідовність (x_n) точок множини D_f збігається до x_0 (***означення неперервності за Гейне***).

В ізольованій точці $x_0\in D_f$, згідно цього означення, функція f завжди неперервна.

Функція $f:R\to R$ називається ***неперервною в точці*** $x_0\in D_f$, якщо $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $\forall x\in D_f: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (***означення неперервності за Коші***).

$\lim\limits_{x\longrightarrow} f(x\ )=f(x_0)$

<u>**Теорема 1.**</u> *(Зв'язок означення неперервності за Коші та Гейне)*

Означення неперервності функції $f:R\to R$ в точці $x_0\in D_f$ за Коші та Гейне еквівалентні.

Доведення очевидно випливає з еквівалентності поняття границі за Коші та Гейне.

Функція $f:R\to R$, яка не є неперервною в точці $x_0\in D_f$ називається <u>*розривною*</u> в ній.

<u>Приклад 1.</u> Дослідити на неперервність *функцію Діріхле*: $D(x)=\begin{cases}0, & x\in R\setminus Q\\ 1, & x\in Q\end{cases}$.

Легко довести, що вона розривна в кожній точці R. Якщо $x_0\in Q$, то вибираємо довільну послідовність $(r_n)\subset R\setminus Q$, що збігається до x_0, але тоді $f(r_n)=1\not\to 0=f(x_0)$. Аналогічно доводиться для довільної ірраціональної точки.

<u>Теорема 2.</u> *(Арифметичні дії з неперервними функціями)*

Нехай функції $f, g : R \to R$ неперервні в точці $x_0 \in D_f = D_g$, тоді неперервні в цій точці також і функції $f + g,\ f - g,\ f \cdot g$ та $\frac{f}{g}$ (якщо $g(x_0) \neq 0$).

Доведення безпосередньо слідує з аналогічної теореми про границі функції.

<u>Теорема 3</u>. *(Неперервність композиції функцій)*

Нехай f неперервна в точці $x_0 \in D_f$, а φ неперервна в точці $\xi_0 \in D_\varphi$. Якщо $\varphi(\xi_0) = x_0$, то композиція $f \circ \varphi$ неперервна в точці ξ_0.

Доведення. Нехай $(\xi_n) \to \xi_0$ при $n \to \infty$ і $(\xi_n) \subset D_{f \circ \varphi}$ довільна послідовність значень аргумента складної функції. Тоді $x_n = \varphi(\xi_n) \to \varphi(\xi_0) = x_0$ і $\forall n \in N \quad x_n \in D_f \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$ при $n \to \infty$. Тобто

$$(f \circ \varphi)(\xi_n) = f(x_n) \to f(x_0) = (f \circ \varphi)(\xi_0)$$

Теорема доведена.

<u>Наслідок</u>. *(Границя неперервної композиції)*

Нехай ξ_0 – гранична точка множини $D_{f \circ \varphi}$. Якщо $\lim\limits_{\xi \to \xi_0} \varphi(\xi) = x_0$ і $f : R \to R$ неперервна в точці x_0, то $\lim\limits_{\xi \to \xi_0} f(\varphi(\xi)) = f(x_0)$.

Доведення. Якщо замість функції φ розглянути функцію $\varphi^* = \begin{cases} \varphi, \xi \in D_\varphi \setminus \{\xi_0\}, \\ x_0,\ \xi = \xi_0 \end{cases}$, то φ^* неперервна в точці $\xi_0 \Rightarrow \lim\limits_{\xi \to \xi_0} (f \circ \varphi)(\xi) = \lim\limits_{\xi \to \xi_0} (f \circ \varphi^*)(\xi) = f \circ \varphi^*(\xi_0) = f(x_0)$.

Наслідок доведено.

Функція $f : R \to R$ називається *<u>неперервною зліва</u>* (*<u>справа</u>*) *<u>в точці</u>* $x_0 \in D_f$, граничній для множини D_f, якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ $(f(x_0 + 0) = f(x_0))$.

Точки розриву функції та їх класифікація.

Точки, в яких функція не володіє властивістю неперервності, називаються ***точками розриву функції.***

Нехай $f: R \to R$, $x_0 \in D'_f$. Якщо $x_0 \notin D_f$, то точка x_0 називається ***<u>особливою</u>*** для функції f.

Точки розриву та особливі точки функції $f: R \to R$, які є граничними одночасно для обох множин $D_f \cap (x_0, +\infty)$ та $D_f \cap (-\infty, x_0)$, ми будемо поділяти на такі типи (це може не співпадати з класифікацією в деяких підручниках):

1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in R$ і $f(x_0)$ або не існує (особлива точка), або $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$; тоді точка x_0 називається ***<u>точкою усувного розриву</u>;***

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad , x_0 \in D_f, \ \lim \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0, \ f(x) = |\operatorname{sgn} x|;$$

2) $\exists f(x_0 - 0) \in R$, $\exists f(x_0 + 0) \in R$ і $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$ називається ***<u>точкою розриву першого роду</u>***; число $\eta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ називається ***стрибком функції*** f у точці x_0;

3) Всі інші точки називають ***<u>точками розриву другого роду</u>***.

3.1) Інколи випадок точки розриву другого роду x_0, для якого $\exists f(x_0 + 0), f(x_0 - 0) \in \overline{R}$ називають ***<u>точкою розриву другого роду типу полюсу</u>***.

<u>Приклад 2.</u> Дослідити на неперервність та визначити тип точок розриву функції, що визначені на R: $f(x) = \operatorname{sgn} x$; $g(x) = \sin\frac{1}{x}$; $h(x) = |\operatorname{sgn} x|$; $l(x) = \frac{1}{x}$.

Всі вони в неперервні в усіх точках, крім особливої точки $x_0 = 0$. В цій точці функції мають такі розриви: *f – 1-го роду, g – 2-го роду(не існують односторонні границі в 0), h – усувний, l – 2-го роду (типа полюс).*

Функція $f:R\to R$ називається <u>***неперервною на множині***</u> $X\subset D_f$ (на <u>***сегменті***</u> $[a,b]\subset D_f$), якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини (цього сегменту). Клас усіх функцій, неперервних на X $([a,\,b])$ позначають символом $C(X)$ $(C[a,\,b])$.

Функція $[a,\,b]\xrightarrow{f}R$ називається <u>***кусково-неперервною***</u>, якщо вона неперервна в усіх внутрішніх точках сегмента $[a,\,b]$, за винятком скінченої множини точок, в кожній з яких має скінчені лівосторонню та правосторонню границю, і крім того має скінчені значення $f(a+0)$ та $f(b-0)$.

<u>**Приклад 4.**</u> Функції $[x],\{x\}$ є кусково-неперервними на довільному $[a,\,b]\subset R$.

Функція $f:R\to R$ називається <u>***неспадною***</u> (<u>***зростаючою***</u>), якщо $\forall(x_1\in D_f,x_2\in D_f)$ $x_1<x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1)\le f(x_2)\;\;(f(x_1)<f(x_2))$. Функція f називається <u>***незростаючою***</u> (<u>***спадною***</u>), якщо $\forall(x_1\in D_f,x_2\in D_f)$ $x_1<x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1)\ge f(x_2)\;\;(f(x_1)>f(x_2))$. Усі розглянуті функції називаються <u>***монотонними***</u>. Зростаючі та спадні функції називаються <u>***строго монотонними***</u>.

<u>**Теорема 4.**</u> *(Односторонні границі монотонної функції)*

Кожна монотонна функція має односторонню границю в будь-якій граничній точці множини D_f.

Доведення. Нехай f – неспадна, x_0 – гранична точка D_f, припустимо, що x_0 є граничною для множини $D_f\cap\{x\in R|x<x_0\}=X_0$. Позначимо $\alpha=\sup\limits_{x<x_0}f(x)$. Так як $X_0\ne\varnothing$, то $\exists\alpha\in\overline{R}$. Якщо $\alpha\in R$, то $\forall x\in X_0$ $f(x)\le\alpha$ і $\forall\varepsilon>0$ $\exists x^*\in X_0$: $f(x^*)>\alpha-\varepsilon$. Тоді $\forall(x_n)\subset X_0$ $x_n\to x_0\;\Rightarrow\;\exists n_\varepsilon$: $\forall n\ge n_\varepsilon$ $x^*<x_n<x_0\;\Rightarrow\;\alpha-\varepsilon<f(x^*)\le f(x_n)\le\alpha\;\Rightarrow$ $|f(x_n)-\alpha|<\varepsilon\;\Rightarrow\;\exists\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0-0)=\alpha$. Аналогічно для $\alpha=+\infty$, розглядаємо $f(x_n^*)>\varepsilon$. Так само все робиться, якщо x_0 є граничною точки множини $D_f\cap\{x\in R|x>x_0\}$, і якщо f – незростаюча.

Теорема доведена.

<u>Наслідок 1</u>*(Типи розривів монотонної функції)*

Монотонна функція $f: R \to R$ може мати на D_f лише розриви 1-го роду.

<u>Наслідок 2.</u> *(Кількість розривів монотонної функції).*

Монотонна функція $(a,b) \xrightarrow{f} R$ неперервна скрізь, за винятком не більш ніж зліченої множини точок.

Доведення. Нехай f – неспадна, $x_0 \in (a,b)$ – точка розриву f. Тоді за теоремою $\exists f(x_0 - 0)$ і $f(x_0 + 0)$ – скінчені (інакше нема монотонності). Так само $f(x_0 - 0) \le f(x_0 + 0)$. Якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то значення $f(x_0)$ не можна задати без порушень монотонності. Тому $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$.

Першій наслідок доведено.

Виберемо довільну точку $r_0 \in \left(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0) \right)$. Далі зрозуміло, що різним точкам розриву відповідають різні раціональні точки, і якщо $x_0 < x_0' \Rightarrow r_0 < r_0'$. Тобто множина точок розриву має потужність не більшу за потужність Q, тобто вона злічена.

Наслідки доведено.

Неперервність основних елементарних функцій.

Функція $R(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j}$ називається ***<u>раціональною</u>***.

<u>Властивості.</u> *(Неперервних функцій)*

1) Алгебраїчний многочлен $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ є неперервною функцією $\forall x \in R$.

2) Функція $R(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j}$ називається ***<u>раціональною</u>***

Кожна раціональна функція $R(x)$ є неперервною $\forall x: \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \neq 0$;

3) Функції $|x|$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $sh\,x$, $ch\,x$, $th\,x$ неперервні $\forall x \in R$;

4) Функції $tg\,x$, $ctg\,x$, $cth\,x$ неперервні на своїх множинах визначення.

5) Функція $f(x) = \log_a x$ неперервна на області визначення.

Доведення. Розглянемо, наприклад, функцію $\sin x$: тоді $\forall \varepsilon > 0$

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \sin \tfrac{x-x_0}{2} \cos \tfrac{x+x_0}{2}\right| \leq |x - x_0| < \varepsilon = \delta > 0 \text{ –}$$

знайшли потрібне δ . Аналогічно для решти функцій.

Множина $X \subset R$ називається ***<u>компактною в собі</u>*** або ***<u>компактом</u>***, якщо з будь-якої послідовності точок (x_n) з X можна виділити підпослідовність (x_{n_k}) збіжну до деякої точки $x_0 \in X$.

<u>Теорема 5.</u> *(Критерій компактності в собі)*

Множина $X \subset R$ є компактом тоді і тільки тоді, коли вона одночасно замкнена і обмежена.

Доведення. Необхідність. X – компакт. Спочатку покажемо від супротивного обмеженість компакту. Якщо X не обмежена, то $\exists (x_n) \subset X: \forall n \in N \ |x_n| > n \Rightarrow$ з неї не можна виділити підпослідовність, збіжну до деякої точки $x_0 \in X \subset R \Rightarrow X$ – обмежена множина. Припустимо, що X не замкнена $\Rightarrow \exists x_0 \notin X \ \exists (x_n) \subset X: x_n \to x_0$. Але тоді будь-яка підпослідовність $(x_{n_k}) \to x_0 \notin X$. Суперечність з означенням компакту.

Необхідність доведена.

Достатність. Нехай X – замкнена і обмежена. Розглянемо довільну послідовність $(x_n) \subset X$. Вона обмежена $\Rightarrow \exists (x_{n_k}) \to x_0$ (за *теоремою Больцано-Вейєрштрасса*), внаслідок замкненості x_0 - гранична точка $\Rightarrow x_0 \in X$.

Достатність доведена.

Приклад 5. На R можна навести такі приклади:

$[0,1], \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in N\right\} \cup \{0\}, [-1,1] \cup [2,4]$ - компакти;

$[0,1), [-1,1] \setminus \{0\}, \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in N\right\},\ N,\ Q$ – не компакти.

Наслідок. *(Екстремальні властивості компакту)*

Нехай $X \subset R$ – компакт, тоді в X є найбільший та найменший елементи.

Доведення. X – замкнена і обмежена, а далі все маємо за наслідком з відповідної теореми про повний простір.

Наслідок доведено.

Теорема 6. *(Неперервний образ компакта)*

Нехай $f: R \to R$ неперервна на D_f функція, де D_f – компакт. Тоді і множина E_f – компакт.

Доведення. Розглянемо довільну послідовність $(y_n) \subset E_f$, тоді $\exists (x_n) \subset D_f:\ y_n = f(x_n)$. Тоді $\exists (x_{n_k})$ - підпослідовність: $x_{n_k} \to x_0 \in D_f$. З неперервності f: $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x_0) = y_0 \in E_f \ \Rightarrow\ E_f$ - компакт.

Теорема доведена.

Наслідок. *(Теорема Вейєрштрасса)*

Нехай $f: R \to R$ неперервна на компакті D_f функція. Тоді вона приймає найменше та найбільше значення.

Доведення безпосередньо випливає з останнього наслідку та теореми 6.

Теорема 7. *(Неперервність оберненої функції)*

Якщо $f: R \to R,\ D_f$ – компакт, якщо f – неперервна та оборотна на D_f, то f^{-1} також неперервна функція на E_f.

Доведення. Нехай $(y_n)\subset E_f$ – довільна послідовність, що збігається до $y_0\in E_f$. Розглянемо послідовність $\left(f^{-1}(y_n)\right)$, і нехай α її часткова границя $\Rightarrow$ $\alpha\in D_f$. З неперервності f слідує, що $f(\alpha)$ є частковою границею (y_n) $\Rightarrow$ $f(\alpha)=y_0\wedge$ $\alpha=f^{-1}(y_0)$. Тобто всі часткові границі $\left(f^{-1}(y_n)\right)$ дорівнюють $\alpha=f^{-1}(y_0)$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(y_n)=f^{-1}(y_0)$ $\Rightarrow$ f^{-1} також неперервна в точці y_0. Оскільки y_0 – довільна точка з E_f $\Rightarrow$ f^{-1} - неперервна.

Теорема доведена.

<u>Наслідок.</u> *(Існування оберненої функції)*

Якщо функція $f:R\to R$ строго монотонна і неперервна на компакті D_f, то обернена їй функція існує, неперервна і монотонна на компакті E_f.

Доведення. Достатньо показати існування та монотонність оберненої функції. Нехай f – зростаюча на D_f. Тоді $\forall y\in E_f\ \exists!\, x\in D_f:\ f(x)=y$. Покладемо $f^{-1}(y)\overset{def}{=}x$. То, що вона дійсно обернена до f, очевидно. Покажемо від супротивного, що вона зростаюча. Якщо $\exists y_1,y_2\in E_f:\ \ y_1<y_2$ і $f^{-1}(y_1)\ge f^{-1}(y_2)$, тоді, якщо позначити $x_1=f^{-1}(y_1)\ge x_2=f^{-1}(y_2)\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$, але $f(x_1)=y_1\ge f(x_2)=y_2$ – суперечність.

Наслідок доведено.

Нехай $f:R\to R$, $X\subset D_f$, $M=\sup\limits_{x\in X} f(x)$, $m=\inf\limits_{x\in X} f(x)$. ***<u>Коливанням функції</u>*** f ***<u>на множині</u>*** X називається різниця $\omega(f,X)=M-m$. Якщо $\omega(f,X)=+\infty$, кажуть, що f має ***<u>нескінчене коливання</u>*** на X.

<u>Теорема 9.</u> *(Існування скінченого коливання)*

Якщо $\exists C \in R$: $\forall \{x_1, x_2\} \subset X \subset D_f$ виконується нерівність: $|f(x_1) - f(x_2)| \le C$, то коливання $\omega(f, X) < +\infty$ і його можна обчислити за формулою: $\omega(f, X) = \sup_{x_1 \in X, x_2 \in X} \{|f(x_1) - f(x_2)|\}$.

Теорема 10. *(Критерій Бера неперервності функції в точці)*

Функція $f: R \to R$ неперервна в точці $x_0 \in D_f$, граничній для D_f тоді і тільки тоді, коли $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ на множині $X_\delta = D_f \bigcap O_\delta(x_0)$ $\omega(f, X_\delta) < \varepsilon$.,

Нехай $f: R \to R$, x_0 – гранична точка множини D_f, $x_0 \in D_f$, $X_\delta = D_f \bigcap O_\varepsilon(x_0)$. ***Коливанням функції*** f ***у точці*** x_0 називається границя: $\omega(f, x_0) = \lim_{\delta \to 0} \omega(f, X_\delta)$.

Наслідок. *(Критерій неперервності через коливання в точці)*

Для того, щоб $f: R \to R$ була неперервною в точці $x_0 \in D_f$, граничній для D_f, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\omega(f, x_0) = 0$.

Нехай M – довільна множина. ***Покриттям множини*** $E \subset M$ називається така сукупність (B_α), $\alpha \in A$ підмножин M, що $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

Теорема 12. *(Коші)*

Якщо $f \in C[a, b]$, і $f(a) \cdot f(b) < 0$, то $\exists \xi \in (a, b)$: $f(\xi) = 0$.

Наслідок. *(теорема Коші про проміжні значення)*

Якщо $f \in C[a, b]$, то функція f набуває усіх проміжних значень між $f(a)$ та $f(b)$.

Доведення. Достатньо застосувати попередню теорему для функцій $\varphi : x \to \alpha - f(x)$, де α – довільне число між $f(a)$ та $f(b)$.

Лекція 10.

Рівномірна неперервність функції

Функція $f: R \to R$ називається ***<u>рівномірно неперервною на множині</u>*** $X \subset D_f$, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (x_1 \in X, x_2 \in X)$: $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ (***<u>Коші</u>***).

<u>Теорема 1.</u> *(Кантора)*

Нехай функція $f: R \to R$ неперервна на множині $X \subset D_f$. Якщо X – компакт, то f рівномірно неперервна на X.

Доведення. Від супротивного. Функція неперервна, але не є рівномірно неперервною. Якщо це так, то

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0\ \exists \left(z_\delta^{(1)} \in X, z_\delta^{(2)} \in X\right): \left|z_\delta^{(1)} - z_\delta^{(2)}\right| < \delta \wedge \left|f\left(z_\delta^{(1)}\right) - f\left(z_\delta^{(2)}\right)\right| \geq \varepsilon_0 .$$

Виберемо послідовність додатних чисел $(\delta_n) = o(1)$. Тоді $\forall (\delta_n), n \in N$ можна знайти таку пару, $\exists z_n^{(1)}, z_n^{(2)}$: $\left|z_n^{(1)} - z_n^{(2)}\right| < \delta_n \wedge \left|f\left(z_n^{(1)}\right) - f\left(z_n^{(2)}\right)\right| \geq \varepsilon_0$. Виберемо підпослідовність (за теоремою Больцано-Коші, оскільки послідовність обмежена, бо задана на компакті) $\left(z_{n_k}^{(1)}\right) \to z_0$, тоді за означенням компакту $z_0 \in X$ і $\Rightarrow$ $z_{n_k}^{(2)} = z_{n_k}^{(1)} + o(1) \to z_0 \Rightarrow$ з одного боку $\lim\limits_{n\to\infty} \left|f\left(z_n^{(1)}\right) - f\left(z_n^{(2)}\right)\right| \geq \varepsilon_0$, а з іншого – з неперервності функції

$$\lim_{n\to\infty} \left|f\left(z_{n_k}^{(1)}\right) - f\left(z_{n_k}^{(2)}\right)\right| = \left|\lim_{n\to\infty} f\left(z_{n_k}^{(1)}\right) - \lim_{n\to\infty} f\left(z_{n_k}^{(2)}\right)\right| = f(z_0) - f(z_0) = 0,$$

одержана суперечність завершує доведення.

Теорему доведено.

Функція $f: R \to R$ називається ***<u>рівномірно неперервною на множині</u>*** $X \subset D_f$, якщо $\forall (x_n), (y_n) \subset X$ з умови $x_n - y_n \to 0$ випливає, що $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ (***<u>Гейне</u>***).

Теорема 2. *(Еквівалентність означень Коші та Гейне рівномірної неперервності)*

Означення за Коші та за Гейне еквівалентні.

Властивість 1. *(Рівномірна неперервність звуження)*

Якщо $f: R \to R$ рівномірно неперервна на $X \subset D_f$, то $\forall Y \subset X$ її звуження f також є рівномірно неперервною на Y.

Доведення. З умови $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (x_1 \in X, x_2 \in X)$: $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, але тоді достатньо вибрати теж саме $\delta > 0$ і ми одержимо для множини Y, що $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 \ \forall (x_1 \in Y, x_2 \in Y) \Rightarrow (x_1 \in X, x_2 \in X)$: $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Властивість доведена.

Властивість 2. *(Неперервність рівномірно неперервної функції)*

Якщо f – рівномірно неперервна на $X \subset D_f$, то $f \in C(X)$.

Доведення. Виберемо довільну точку $x_0 \in X$ та покладемо в означенні рівномірної неперервності в якості $x_0 = x_2$. Одержали неперервність функції в точці x_0

Властивість доведена.

Властивість 3. *(Рівномірна неперервність на об'єднанні)*

Якщо функція f є рівномірно неперервною на множинах $[a, b]$ та $[b, c]$, то вона є рівномірно неперервною на $[a, c]$, $a, c \in \overline{R}$.

Доведення. Запишемо умови: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \forall (x_1, x_2 \in [a,b])$: $|x_1 - x_2| < \delta_1 \Rightarrow$ $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$, і також $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \forall (x_1, x_2 \in [b,c])$: $|x_1 - x_2| < \delta_2 \Rightarrow$ $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$, але тоді $\forall \varepsilon > 0$ виберемо $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_2\}$, і будемо мати, що $\forall x_1, x_2 \in [a,c]$: $|x_1 - x_2| < \delta$ одержимо $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, тому що: якщо $(x_1, x_2 \in [a,b])$

це слідує з першої умови; якщо $(x_1, x_2 \in [b,c])$ – все слідує з другої умови; якщо ж $x_1 \in [a,b], x_2 \in [b,c]$ ми одержимо:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - f(b)| + |f(b) - f(x_2)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Властивість доведена.

<u>Властивість 4.</u> *(Рівномірна неперервність на нескінченності)*

Якщо $f \in C[a, +\infty)$ $(f \in C(-\infty, a])$ і має скінчену границю $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \in R$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b \in R\right)$, то f є рівномірно неперервною на $[a, +\infty)$ $((-\infty, a])$.

Доведення. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists\Delta : \forall x \ge \Delta \ |f(x) - b| < \varepsilon$. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і знайдемо відповідне Δ. Розглянемо два проміжки: $[a, \Delta]$ та $[\Delta, +\infty)$. На першому з них за теоремою Кантора

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, \Delta] \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon ,$$

на другому

$$\forall x_1, x_2 > \Delta : |f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - b| + |f(x_2) - b| < 2\varepsilon .$$

Тепер $\forall\{x_1, x_2\} \subset [a, +\infty) \Rightarrow$

1) якщо $\{x_1 x_2\} \subset [a, \Delta]$, то $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$;

2) якщо $\{x_1, x_2\} \subset [\Delta, +\infty)$, то $|f(x_1) - f(x_2)| < 2\varepsilon$;

3) якщо $x_1 \le \Delta, x_2 \ge \Delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - f(\Delta)| + |f(\Delta) - f(x_2)| \le \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$.

Властивість доведена.

<u>Властивість 5.</u> *(Лінійність рівномірної неперервності)*

Якщо f, g – рівномірно неперервні на X функції, то $\forall\{\alpha, \beta\} \subset R$ функція $(\alpha f + \beta g)$ рівномірно неперервна на X.

Ця *властивість* очевидно *доводиться* з визначення рівномірної неперервності.

<u>Властивість 6.</u> *(Критерій рівномірної неперервності на інтервалі)*

Нехай $f \in C(a,b)$. Якщо $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A \in R$, $\exists \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = B \in R$, то f – рівномірно неперервна на (a,b), інакше – f не є рівномірно неперервною на (a,b).

Доведення. Спочатку доведемо рівномірну неперервність функції на (a,b) у випадку існування скінчених границь на краях. Розглянемо функцію: $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a,b) \\ A, & x = a \\ B, & x = b \end{cases}$. За побудовою $F \in C[a,b]$ $\Rightarrow$ з *теореми Кантора* F є рівномірно неперервною на $[a,b]$ $\Rightarrow$ з властивості ***1)*** про рівномірну неперервність на звуженні F є рівномірно неперервною на (a,b) і перша частина властивості доведена.

Нехай тепер принаймні одна з двох границь $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$ – або не існує, або дорівнює нескінченності. Без обмежень загальності, припустимо, що це відбувається з $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$. Розглянемо по черзі і тут обидва випадки.

Якщо $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ дорівнює нескінченності, то $\forall (x_n) \subset (a,b)$: $x_n \to a+0 \Rightarrow f(x_n) \to \infty$. Але тоді легко побудувати її підпослідовність, яку позначимо (y_n), для якої виконується умова: $\left| f(y_{n+1}) - f(y_n) \right| \geq 1$. Інакше це буде суперечити умові $f(y_n) \to \infty$. Але тоді ми можемо побудувати такі дві послідовності: $z_n^{(1)} = y_n$, $z_n^{(2)} = y_{n+1}$. Для цих послідовностей виконуються умови:

$$z_n^{(1)} - z_n^{(2)} = y_n - y_{n+1} \to a - a = 0 \text{ та } \left| f\left(z_n^{(1)}\right) - f\left(z_n^{(2)}\right) \right| = \left| f(y_{n+1}) - f(y_n) \right| \geq 1 \not\to 0,$$

звідки з означення за Гейне випливає відсутність рівномірної неперервності на проміжку (a,b).

Якщо $\nexists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) \in R$, то звідси безпосередньо випливає, що $\exists (x_n), (y_n) \subset (a,b)$: $x_n \to a+0,\ y_n \to a+0$ та $\exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A \in \overline{R}$, $\exists \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = B \in \overline{R}$ та $A \neq B$. Але тоді ми маємо, що для цих двох послідовностей виконуються умови: $x_n - y_n \to a - a = 0$, $f(x_n) - f(y_n) \to A - B \neq 0$, а тому випливає, що f не є рівномірно неперервною на (a,b).

Властивість доведена.

<u>Властивість 7.</u> *(Достатня умова рівномірної неперервності)*

Якщо на проміжку $X \subset D_f$ функція має обмежену похідну. то вона рівномірно неперервна на X .

Доведення. Нехай для деякого $M > 0\ \ \forall x \in X\ \ | f'(x) | < M$, тоді покладемо $\forall \varepsilon > 0\ \ \delta = \frac{\varepsilon}{M}$ $\Rightarrow$ з теореми Лагранжа маємо, що $\forall x_1, x_2 \in X$:

$| f(x_1) - f(x_2) | = | f'(c) || x_1 - x_2 | < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$,

що й треба було двести.

Властивість доведена.

<u>Приклад 1.</u> Дослідити на рівномірну неперервність функції на вказаних проміжках:

1) $Cos\frac{1}{x}$***,*** $x \in \left[\frac{1}{10}, 10\right]$***; 2)*** $\frac{1}{x}$***,*** $x \in (0,1)$***;3)*** $\frac{\sin x}{x}$***,*** $x \in (0,1)$***;***

4) $Cos\frac{1}{x}$***,*** $x \in (0,1)$***;5)*** $arctg\, x$***,*** $x \in R$***; 6)*** x^2***,*** $x > 0$***.***

1) Рівномірно неперервна за теоремою Кантора.

2) Функція не є рівномірно неперервною за властивістю ***5)***, оскільки $\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty$.

3) Функція є рівномірно неперервною за властивістю ***5)***, оскільки $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1 \in R$, $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{\sin x}{x} = \sin 1 \in R$.

4) Функція не є рівномірно неперервною за властивістю ***5)***, оскільки $\nexists \lim\limits_{x \to +0} \cos\frac{1}{x}$, так як для послідовностей $x_n = \frac{1}{2n\pi}$; $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$; $n \in N$ $\ f(x_n) = \cos 2n\pi = 1$; $f(y_n) = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

5) $arctg\, x$ – рівномірно неперервна на R за властивістю ***3)***, оскільки $\lim\limits_{x \to +\infty} arctg\, x = \frac{\pi}{2} \in R$ та $\lim\limits_{x \to -\infty} arctg\, x = -\frac{\pi}{2} \in R$.

6) $x_n = \sqrt{n}$, $y_n = \sqrt{n+1}$; $y_n - x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$ при $n \to \infty$; $f(y_n) - f(x_n) = n + 1 - n = 1 \not\to 0$.

Похідна

1. ***Визначення похідної, правила диференціювання***

<u>Означення1</u>.(Похідна за Ферма) Нехай функція $f : R \to R$, $x_0 \in D_f$. Функція f називається ***<u>диференційованою в точці</u>*** x_0, якщо існує така неперервна в точці x_0 функція $D_f \xrightarrow{\varphi} R$, що $\forall x \in D_f$ виконується рівність :

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\,\varphi(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Якщо x_0 - гранична точка множини D_f, то число $\varphi(x_0)$ називається ***<u>похідною функції</u>*** f ***<u>в точці</u>*** x_0 і позначається символом $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

<u>Приклад 1.</u> Розглянемо функції $f\,(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$, $x_0 \in D_f$, $\sqrt{x} - \sqrt{x_0} =$

$$= \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}(x - x_0) \qquad \varphi(x\ ) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

Якщо x_0 - гранична точка множини D_f, то число $\varphi(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = f'(x_0)$

<u>Означення 2.</u>Нехай $f : R \to R$, $x_0 \in D_f$ є граничною точкою цієї множини. Функція f диференційована в точці x_0, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad \textbf{(2)}$$

Це безпосередній наслідок формули **(1).** $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = f'(x_0)$

<u>Наслідок.</u> *(Необхідна умова диференційованості)*

Якщо функція f диференційована в точці $x_0 \in D_f$, граничній для множини D_f, то вона неперервна в точці x_0 і її похідна $f'(x_0)$ визначена однозначно.

Приклад 2. Знайти похідні в точці x_0 функцій: $f(x) = x^\alpha$, $f(x) = a^x$, $f(x) = \sin x$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} = \left|\begin{matrix} t = x - x_0 \\ x = t + x_0 \end{matrix}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{(x_0+t)^\alpha - x_0^\alpha}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{x_0^\alpha\left(1+\frac{t}{x_0}\right)^\alpha - x_0^\alpha}{t} =$$

$$x_0^\alpha \lim_{t\to 0}\frac{1+\frac{\alpha\, t}{x_0} - 1 + o(t)}{t} = \frac{\alpha x_0^\alpha}{x_0} = \alpha x_0^{\alpha-1};$$

$$\frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \frac{a^{t+x_0} - a^{x_0}}{t} = a^{x_0}\,\frac{a^t - 1}{t} = a^{x_0}\,\frac{1 + t\ln a + o(t) - 1}{t} \to a^{x_0}\ln a;$$

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{\sin(x_0+t) - \sin x_0}{t} = \frac{\sin x_0 \cos t + \cos x_0 \sin t - \sin x_0}{t} =$$

$$= \frac{\sin x_0 (1 + o(t)) + \cos x_0 (t + o(t)) - \sin x_0}{t} \to \cos x_0 .$$

Теорема 1. *(Про похідну композиції)*

Нехай функція $f : R \to R$ диференційована в точці x_0, а функція $g : R \to R$ диференційована в точці ξ_0. Якщо $x_0 = g(\xi_0)$ і ξ_0 – гранична точка множини $D_{f\circ g}$, тоді композиція $f \circ g$ диференційована в точці ξ_0 і справджується рівність:

$$(f \circ g)'(\xi_0) = f'(x_0) g'(\xi_0) \qquad \textbf{(3)}$$

Доведення. За означенням диференційованості f в точці x_0, існує неперервна в точці x_0 функція $\varphi : R \to R$, $D_\varphi = D_f$, така що $\forall x \in D_f$: $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$. Нехай $\xi_0 \in D_{f\circ g}$ $\Rightarrow$ $g(\xi) \in D_f$ $\Rightarrow$ $f(g(\xi)) - f(g(\xi_0)) = (g(\xi) - g(\xi_0))\varphi(g(\xi))$. З диференційованості g ми одержимо, що існує неперервна в точці ξ_0 функція $D_g \xrightarrow{\phi} R$: $\forall \xi \in D_g$ виконується рівність: $g(\xi) - g(\xi_0) = (\xi - \xi_0)\phi(\xi)$. Підставивши це в останню рівність, одержимо: $(f\circ g)(\xi)-(f\circ g)(\xi_0)=(\xi-\xi_0)\phi(x)(\varphi\circ g)(\xi)$, з чого випливає диференційованість композиції та рівність **(3).**

<u>Приклад 3.</u> $\left(2^{tg\left(x^2\right)}\right)'=2^{tg\left(x^2\right)}\ln 2\left(tg\left(x^2\right)\right)'=2^{tg\left(x^2\right)}\ln 2\,\dfrac{2x}{\cos^2\left(x^2\right)}$.

<u>Основні правила диференціювання.</u>

Нехай функції $f:R\to R$, $g:R\to R$ диференційовані в точці x_0 граничній для множини $D_f=D_g$. Тоді $\forall\{\lambda,\mu\}\subset R$ функція $\lambda f+\mu g$ диференційована в точці x_0 і виконується рівність:

$$(\lambda f+\mu g)'(x_0)=\lambda f'(x_0)+\mu g'(x_0).$$

Дійсно:

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\varphi(x),\ g(x)-g(x_0)=(x-x_0)\psi(x)\ \Rightarrow$$

$$(\lambda f+\mu g)(x)-(\lambda f+\mu g)(x_0)=(x-x_0)(\lambda\varphi(x)+\mu\psi(x)).$$

Диференціювання добутку функцій:

Якщо функції $f:R\to R$, $g:R\to R$ диференційовані в точці x_0 граничній для множини $D_f=D_g$, то функція $(f\cdot g)$ диференційована в точці x_0 і виконується рівність:

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0) \qquad \textbf{(4)}$$

Похідна частки:

Нехай $f:R\to R$, $g:R\to R$ диференційовані функції в точці x_0, граничній для множини $D_f = D_g$. Якщо $g(x_0)\neq 0$, то функція $\frac{f}{g}$ – диференційована в точці x_0 і виконується рівність:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \qquad \textbf{(5)}$$

Похідна оберненої функції:

Нехай функція $f:R\to R$ – оборотна, $x_0\in D_f$, і x_0 є граничною точкою множини D_f, $y_0=f(x_0)$. Якщо існує $f'(x_0)\neq 0$ і обернена функція f^{-1} неперервна в точці y_0, то вона диференційована в цій точці. Якщо, крім того, y_0 – гранична точка множини $E_f = D_{f^{-1}}$, то

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)} \qquad \textbf{(6)}$$

Доведення(6) : З означеності диференційованості функції f в точці x_0 існує неперервна в цій точці функція φ : $\forall x\in D_f$: $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\varphi(x)$, з взаємної однозначності f слідує, що $\varphi(x)\neq 0$ при $x\neq x_0$, і $\varphi(x_0)=f'(x_0)\neq 0$, якщо покласти $y=f(x)$, одержимо: $f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)=\frac{y-y_0}{\varphi\left(f^{-1}(y)\right)}$. Функція $\varphi\circ f^{-1}$ неперервна в точці y_0 $\Rightarrow$ f^{-1} диференційована в точці y_0. Якщо y_0 - гранична точка множини $E_f = D_{f^{-1}}$, то, згідно означення похідної, маємо:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{\varphi\left(f^{-1}(y_0)\right)}=\frac{1}{\varphi(x_0)}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Приклад 3. Знайти $(\arcsin x)'$.

$y = \arcsin x \;\Rightarrow\; \sin y = x \;\Rightarrow\; y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, бо $\cos \arcsin x = \sqrt{1-x^2}$.

Враховуючи правила диференціювання елементарних функцій, одержимо ***таблицю похідних***:

$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$	$\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$	$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(tg\, x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(ctg\, x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\left(sh\, x\right)' = ch\, x$
$\left(ch\, x\right)' = sh\, x$	$\left(th\, x\right)' = \frac{1}{ch^2 x}$	$\left(arcSin\, x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(arctg\, x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$

<u>Приклад 4.</u> Знайдемо похідну ***степенево-показникової функції***:

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)' = u(x)^{v(x)}\left(v(x)\ln u(x)\right)' = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right).$$

Якщо функція $f: R \to R$ диференційована в кожній точці деякої множини $X \subset D_f$, то вона називається ***<u>диференційованою на множині</u>*** X .

2. Односторонні похідні, диференціал

Нехай $f: R \to R$, якщо x_0 – гранична точка множини $D_f \cap (-\infty, x_0)$ $\left(D_f \cap (x_0, +\infty)\right)$, то $f'_{\Lambda}(x_0) \overset{def}{=} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\left(f'_{\Pi}(x_0) \overset{def}{=} \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$. Числа $f'_{\Lambda}(x_0)$ та $f'_{\Pi}(x_0)$, якщо вони існують, називаються відповідно ***<u>лівою</u>*** та ***<u>правою похідними функції</u>*** f ***<u>у точці</u>*** x_0 .

<u>Теорема 2.</u> *(Критерій диференційованості функції)*

Для того, щоб неперервна функція $f: R \to R$ була диференційованою в точці $x_0 \in D_f$, граничній для множин $D_f \cap (-\infty, x_0)$ та $\left(D_f \cap (x_0, +\infty)\right)$, необхідно й достатньо, щоб вона мала в цій точці скінчену ліву й праву похідні, і при цьому $f'_{\Lambda}(x_0) = f'_{\Pi}(x_0)$.

Доведення. Згідно теореми про існування границі функції в точці для функції $g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x\in D_f \setminus\{x_0\}$, можемо сказати, що g має скінченну границю в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $g(x_0-0)=g(x_0+0)$, але ж $g(x_0-0)=f'_{\Lambda}(x_0)$, $g(x_0+0)=f'_{\Pi}(x_0)$.

Теорему доведено.

<u>Приклад 5.</u> $f(x)=|x|$, $x\in R$, дослідити на диференційованість в точці $x_0=0$.

$f'_{\Lambda}(0)=-1$, $f'_{\Pi}(0)=1 \Rightarrow$ вона не диференційована в цій точці.

Для функції $f:R\to R$ виберемо дві довільні точки x_0 та x з D_f. Різницю $f(x)-f(x_0)$ називають ***приростом функції*** f ***в точці*** x_0, відповідним приросту незалежної змінної $\Delta x=x-x_0$, і позначають через $\Delta f(x_0,\Delta x)$. Якщо f – диференційована в точці x_0 функція, граничній для множини D_f, то формулу для її приросту можна надати у вигляді:

$$\Delta f(x_0,\Delta x)=\Delta x\,\varphi(x), \qquad \textbf{(7)}$$

де φ – неперервна в точці x_0 функція, і $\varphi(x_0)=f'(x_0)$. Оскільки $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$, то $\varphi(x)=\varphi(x_0)+o(1)$, тоді рівність **(7)** можна переписати у вигляді:

$$\Delta f(x_0,\Delta x)=\Delta x\, f'(x_0)+o(\Delta x) \qquad \textbf{(8)}$$

Відображення $R\xrightarrow{L}R$ називається ***<u>лінійним</u>***, якщо $\forall x,y,\lambda\in R$ виконуються умови:

1) $L(x+y)=L(x)+L(y)$, $\forall x,y\in R$ (***адитивність***);

2) $L(\lambda x)=\lambda L(x)$, $\forall x\in R$ (***однорідність***).

За означенням, $L(0)=0$,та для $\forall x\in R$: $L(x)=a\,x$, $L(1)=a, a=const.$

<u>Лема 1.</u> *(Загальний вигляд лінійного відображення)*

Загальний вигляд лінійного відображення з $R \xrightarrow{L} R$ має вигляд $L(x) = a\,x$, де $a = const$.

Доведення. Позначимо $a = L(1)$. Легко зрозуміти, що відображення $L(x) = a\,x$ є лінійним. Тепер треба показати, що будь-яке інше лінійне відображення має такий самий вигляд. Дійсно: $L(x) = L(1 \cdot x) = x \cdot L(1) = ax$.

Лема доведена.

Теорема 3. *(Приріст диференційованої функції)*

Нехай $f : R \to R$, $x_0 \in D_f$ – гранична точка множини D_f. Якщо існує таке лінійне відображення $R \xrightarrow{L} R$, $L(x) = a\,x$, що $\forall x \ \in D_f$ виконується рівність:

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = a\Delta x + o(\Delta x), \tag{9}$$

то функція f диференційована в точці x_0 і $f'(x_0) = a$.

Доведення. З рівності **(9)** маємо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = a = f'(x_0)$.

Якщо функція $f : R \to R$ диференційована в точці $x_0 \in D_f$, граничній для множини D_f, то лінійна функція $R \xrightarrow{L} R$, яка задовольняє умову **(9),** називається ***диференціалом функції*** f ***у точці*** x_0 і позначається символом $df(x_0)$. Для будь-якого $h \in R$ вона набуває значення

$$L(h) = df(x_0)(h) = f'(x_0)h. \tag{10}$$

Таким чином, приріст функції $f : R \to R$, диференційованої в точці $x_0 \in D_f$, граничній для D_f, складається з суми двох доданків, перший з них значення диференціала $df(x_0)$ при $h = \Delta x$, а другий є функцією вигляду: $\alpha(x) = \Delta x \cdot o(1)$, де $o(1)$ – неперервна в точці x_0 функція, що в точці x_0 дорівнює нулеві.

Розглянемо функцію $g(x)=x$, $x\in R$. Тоді $\forall h\in R$:

$$dg(x)(h)=dx(h)=x'h=h. \qquad \textbf{(11)}$$

Тобто диференціали функції $x\mapsto x$ в будь-якій точці рівні між собою, і їх позначають через dx. Цей диференціал, що не залежить від x, називають диференціалом незалежної змінної. З цього можна одержати:

$$df(x_0)(h)=f'(x_0)h=f'(x_0)dx(h)=(f'(x_0)dx)(h) \Rightarrow$$

$$df(x_0)=f'(x_0)dx. \qquad \textbf{(12)}$$

<u>Приклад 6.</u> $f(x)=2^x$, $x\in R$.

$$df(x_0)=f'(x_0)dx=2^{x_0}\ln 2dx,\ df(x_0)(h)=2^{x_0}\ln 2\cdot h.$$

Нехай визначені функції $f:R\to R$, $\varphi: R\to R$, такі, що $\varphi(t_0)=x_0$, і $t_0\in D_{f\circ\varphi}$, є граничною для цієї множини, і композиція $f\circ\varphi$ диференційована в точці t_0. Тоді її похідна записується у вигляді: $(f\circ\varphi)'(t_0)=f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0)$, а диференціал набуває вигляду:

$$d(f\circ\varphi)(t_0)(h)=f'(x_0)\varphi'(t_0)dt(h)=f'(x_0)dx(h),$$

де $dt(h)\in R$, $dx(h)=\varphi'(t_0)dt(h)$. З останнього співвідношення, а саме $d(f\circ\varphi)(t_0)(h)=$ $df(x_0)h$ – форма диференціала така сама, як і для випадку незалежної змінної x, ця властивість називається ***<u>інваріантність першого диференціалу</u>***.

<u>Приклад 7.</u> $f(x)=\sin x$, $x\in R$, $x(t)=t^2$, $t\in R$.

$$df(x)=(\sin x)'dx=\cos dx.\ df(x)=d(\sin x)=(\sin x)'dx=\cos x\,dx.$$

$$df(x(t))=d(\sin(x(t)))=\cos(x(t)dx(t))=\cos(x(t))\cdot d(t^2)=\cos(t^2)\cdot(t^2)'dt==\cos(t^2)\cdot 2t\,dt.$$

<u>Приклад 8.</u> $d\left(e^{u^2+v^3}\right)=e^{u^2+v^3}d\left(u^2+v^3\right)=e^{u^2+v^3}\left(2u\,du+3v^2dv\right).$

Беручи до уваги, що з формули **(12)** похідну функції $f: R \to R$ можна розглядати як частку диференціалів функції та незалежної змінної: $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, а саму похідну позначити як $f' = \frac{df}{dx}$.

Для наближеного обчислення значень диференційованої функції з деякого δ- околу точки $x_0 \in D_f$ при малих $\delta > 0$ користуються наближеною формулою:

$$\Delta f(x_0, \Delta x) \approx df(x_0)(\Delta x), \qquad \textbf{(13)}$$

тобто ми відкидаємо нескінченно малу, а залишаємо лінійну частину доданку. З формули **(7)** одержуємо формулу для наближених обчислень ($\Delta x = x - x_0$):

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad \textbf{(14)}$$

<u>Приклад 9.</u> Знайти наближено $tg 44^\circ$.

$$tg 44^\circ \approx tg 45^\circ + tg'(45^\circ)\left(\frac{44\pi}{180} - \frac{45\pi}{180}\right) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = 1 - \frac{\pi}{90}.$$

Нехай функція $f: R \to R$ задана параметрично, тобто $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (a,b)$. Припустимо, що $\forall t \in (a,b)$ $\exists \varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\varphi'(t) \neq 0$ і виконані всі умови теореми про диференціювання функції φ як оберненої. Тоді, якщо $t = \varphi^{-1}$, $t'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}$, і для $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ одержимо правило диференціювання параметрично заданої функції:

$$f'(x) = \left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)'(x) = \left(\psi\left(\varphi^{-1}\right)\right)(x)' = \psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right) \cdot \left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad \textbf{(15)}$$

<u>Приклад 10.</u> $x(t) = \sin^2 t$, $y(t) = \cos^2 t$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos t \cdot \sin t}{2\sin t \cdot \cos t} = -1$.

<u>Приклад 11.</u> Неявно задана функція $y : x \mapsto y(x)$, визначається рівнянням: $y^3 + y + 1 = x^2$, якщо припустити, що $\exists y'$, то $3y^2 y' + y' = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{1+3y^2} \ \forall x \in D_y$.

ЛЕКЦІЯ №12

3. Похідні та диференціали вищих порядків

Нехай область визначення функції $f: R \to R$ не має ізольованих точок. Назвемо її ***1-диференційованою***, якщо $\forall x \in D_f$ вона має першу похідну $f'(x)$. Функція $x \mapsto f'(x)$ називається ***першою похідною функції*** f і позначається $f^{(1)}$ (або як раніш f'), саму функцію тоді можна позначити як $f = f^{(0)}$.

Нехай $n \in N$. Якщо функція $f^{(n)}$ диференційована, то її похідна $\left(f^{(n)}\right)'$ називається $(n+1)$–***ю похідною функції*** f і позначається $f^{(n+1)}$. При цьому функція f називається ***(n+1)–диференційованою***.

Приклад 1. Знайти n –похідні функцій: $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\log_a x$, x^α.

1) $\sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$***; 2)*** $\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$***; 3)*** $\left(a^x\right)^{(n)} = a^x \ln^n a$***;***

4) $(\log_a x) = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{x^n} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$***; 5)*** $\left(x^\alpha\right)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1) x^{\alpha - n}$***.***

Якщо функція має n -ту похідну в кожній точці $X \subset D_f$, то кажуть, що вона ***n-диференційована на множині*** X. Якщо при цьому $f^{(n)} \in C(X)$, то пишуть, що $f \in C^{(n)}(X)$ (*n* разів неперервно-диференційована на множині X) і кажуть, що функція f класу $C^{(n)}$ (на множині X). Якщо $\forall n \in N$ функція має похідну $f^{(n)}$ в точці x_0, то вона називається ***нескінченно диференційованою***, якщо $\forall x \in X \subset D_f \quad \forall n \in N \quad \exists f^{(n)}(x)$, то функція називається ***нескінченно диференційованою на множині*** X і позначається $f \in C^\infty(X)$, і про неї кажуть, що вона класу C^∞.

Теорема 1. *(Лінійність n-ї похідної)*

Якщо функції f, g мають n -ту похідну в точці $x_0 \in D_f = D_g$, то і функція $(\alpha f + \beta g)$ також n - диференційована в точці x_0 і має місце рівність

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)}(x_0) = \alpha f^{(n)}(x_0) + \beta g^{(n)}(x_0).$$

Доведення. Очевидно доводиться за індукцією.

Теорема 2. *(Лейбніца)*

Якщо функції f, g мають n -ту похідну в точці $x_0 \in D_f = D_g$, то і функція $(f \cdot g)$ теж n -диференційована в цій точці і має місце ***формула Лейбніца***:

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

Доведення. Доведемо методом математичної індукції. Для $n = 1$ все очевидно. Нехай формула має місце для деякого $k \le n - 1$.

Доведемо її для $k = k + 1$:

$$(fg)^{(k+1)}(x_0) = \left((fg)^{(k)}(x_0)\right)' = \left(\sum_{i-0}^{k} C_k^i f^{(i)}(x_0) g^{(k-i)}(x_0)\right)' = \sum_{i=0}^{k} C_k^i f^{(i+1)}(x_0) g^{(k-i)}(x_0) +$$

$$+ \sum_{i-0}^{k} C_k^i f^{(i)}(x_0) g^{(k+1-i)}(x_0) = f^{(k+1)}(x_0) + \sum_{i=0}^{k}\left(C_k^i + C_k^{i+1}\right) f^{(i)}(x_0) + g^{(k+1)}(x_0) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i f^{(i)}(x_0) g^{(k+1-i)}(x_0).$$

Теорему доведено.

Приклад 2. Знайти $\left(x^2 \sin(2x+1)\right)^{(10)}$.

$$\left(x^2 \sin(2x+1)\right)^{(10)} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(x^2\right)^{(k)} \left(\sin(2x+1)\right)^{(10-k)} = x^2\left(\sin(2x+1)\right)^{(10)} + 10 \cdot 2x \sin(2x+1)^{(9)} +$$

$$2 \cdot \tfrac{10 \cdot 9}{2}\left(\sin(2x+1)\right)^{(8)} = x^2 \cdot 2^{10} \sin(2x+1+5\pi) + + 2x \cdot 2^9 \sin\left(2x+1+\tfrac{9\pi}{2}\right) +$$

$$90 \cdot 2^8 \sin(2x+1+4\pi).$$

Нехай функція $f:R\to R$, n -диференційована в точці $x_0\in D_f$, граничній для множини D_f. Тоді в цій точці існують та неперервні похідні f до $(n-1)-$го порядку. ***Другим диференціалом функції*** f ***в точці*** x_0, що відповідає значенню h, називається диференціал функції $x\mapsto f'(x)h$ і позначається $d^2 f(x_0)(h)$:

$$d^2 f(x_0)(h)=f''(x_0)h^2. \qquad \textbf{(1)}$$

Диференціалом n ***-го порядку*** (або n ***-диференціалом***) ***функції*** f ***в точці*** x_0, що відповідає значенню h, визначається індукцією, як диференціал функції $x\mapsto f^{n-1}(x)h^{n-1}$ в цій точці і позначається $d^n f(x_0)(h)$:

$$d^n f(x_0)(h)=f^{(n)}(x_0)h^n,\ h\in R, \qquad \textbf{(2)}$$

тут враховуємо, як і раніше, що $dx(h)=h$:

$$d^j f(x_0)=f^{(j)}(x_0)dx^j,\ j=\overline{1,n}. \qquad \textbf{(3)}$$

Тепер зрозуміло, чому для $j-$ї похідної вживають позначення: $f^{(j)}(x_0)=\frac{d^j f(x_0)}{dx^j}$.

Властивості. *(Диференціалів вищих порядків)*

1) $d^m\left(d^n f\right)=d^{m+n} f$; ***2)*** $d^n(f+g)=d^n f+d^n g$; ***3)*** $d^n(\alpha f)=\alpha d^n f$, $\alpha=const$.

Нехай функції дійсного аргументу f та φ задовольняють умові: $\varphi(t_0)=x_0$, $t_0\in D_{f\circ\varphi}$ - гранична для цієї множини, і композиція $f\circ g$ є двічі диференційованою в цій точці. Тоді, при фіксованому $h\in R$: $df(x)(h)=f'(x)dx(h)$інваріантність першого диференціалу, але тепер $dx(h)$ є функцією від t, тому праву частину треба вважати добутком двох функцій, залежних від t : f' і $x'(t)dt(h)$, де $dt(h)$ не залежить від t .

$$d^2 f(x)(h)=f''(x)dx^2(h)+f'(x)d^2x(h),\ \text{де}\ d^2x(h)=x''(t)dt^2(h).$$

Тобто інваріантність першого диференціалу не зберігається. Лише для випадку, коли $x(t)=at+b$ (лінійна), інваріантність диференціалів вищих порядків зберігається, тому що $d^k(at+b)(h)=(at+b)^{(k)}dt^k(h)=0$, при $k>1$.

Приклад 3. Знайти усі диференціали функції $f(x)=x^4$, $x\in R$, вважаючи, що x – незалежний аргумент.

$$df(x)=4x^3dx;\ d^2f(x)=12x^2dx^2;\ d^3f(x)=24xdx^3;\ d^4f(x)=24dx^4;\ d^5f(x)=...=0.$$

Приклад 4. Знайти df, d^2f функції $f=\cos(u+v^2)$, вважаючи u,v – функціями.

$$df=-\sin(u+v^2)(du+2vdv);$$

$$d^2f=-\cos(u+v^2)(du+2vdv)^2-\sin(u+v^2)(d^2u+2dv^2+2vd^2v).$$

Приклад 5. Знайти три диференціали функції $f=2^x$, де x – функція.

$$df=2^xdx\ln 2;\ d^2f=2^x(\ln 2)^2dx^2+2^x\ln 2\cdot d^2x;$$

$$d^3f=2^x(\ln 2)^3\cdot dx^3+2^x(\ln 2)^2\cdot 2dx\cdot d^2x+2^x(\ln 2)^2d^2xdx+2^x\ln 2\cdot d^3x.$$

В припущенні існування відповідної похідної для параметрично заданої функції, легко одержати:

$$\begin{cases} y=\psi(t) \\ x=\varphi(t)\end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3},$$

повністю аналогічно знаходяться похідні вищих порядків.

Аналогічно, для оберненої функції:

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{\frac{df}{dx}};\ \frac{d^2f^{-1}(y)}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'_x}\right)=\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'_x}\right)}{f'_x}=\frac{-f''(x)}{(f'(x))^3}.$$

Приклад 6. Так само для неявної функції:

$$y^3 + y = x^4 + x^2 \Rightarrow 3y'y^2 + y' = 4x^3 + 2x \Rightarrow y' = \frac{4x^3+2x}{3y^2+1};$$

$$y'' = \frac{(12x^2+2)(3y^2+1) - 6yy'(4x^3+2x)}{(3y^2+1)^2} = \frac{(12x^2+2)(3y^2+1) - 6y\cdot\frac{(4x^3+2x)}{3y^2+1}(4x^3+2x)}{(3y^2+1)^2} = \frac{(12x^2+2)(3y^2+1)^2 - 6y(4x^3+2x)^2}{(3y^2+1)^3}.$$

<u>**Приклад 7.**</u> $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos t \end{cases}$. $\frac{dy}{dx} = -tg\, t$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{\cos t} = -\frac{1}{\cos^3 t}$.

<u>**Приклад 8.**</u> $x = y^3 + y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3y^2+1} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-6y}{(3y^2+1)^3}$.

4. Теореми про середнє

Функція $f: R \to R$ має в точці $x_0 \in D_f$ <u>***локальний максимум***</u> (<u>***мінімум***</u>), якщо $\exists S(x_0, \varepsilon)$: $\forall x \in D_f \cap S(x_0, \varepsilon)$ $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$. Якщо при цьому $\forall x \ne x_0$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, то ***максимум*** (***мінімум***) називається <u>***строгим***</u>, інакше – <u>***нестрогим***</u>. Локальні максимуми та мінімуми називаються <u>***екстремумами***</u>.

<u>**Теорема 1.**</u> *(Ферма)*

Нехай $f: R \to R$ і x_0 - внутрішня точка множини D_f. Якщо функція f набуває в точці x_0 найбільшого або найменшого значення і диференційована в ній, то $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Нехай $f(x)$ набуває найбільшого значення в точці x_0 і $\forall x \in D_f \cap S(x_0, \varepsilon)$ $f(x) \le f(x_0)$. З означення диференційованої функції в точці x_0 можемо записати рівність: $g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$. При $x > x_0$ $g(x) \le 0$, $f'_П(x_0) \le 0$, при $x < x_0$ $g(x) \ge 0$ і $f'_Л(x_0) \ge 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Теорему доведено.

Теорема 2. *(Ролля)*

Нехай $f \in C[a,b]$, диференційована в кожній точці (a,b). Якщо $f(a)=f(b)$, то $\exists \xi \in (a,b)$: $f'(\xi)=0$.

Доведення. Якщо $f = const$, то твердження очевидне. Якщо $f \neq const$, то, за теоремою Вейєрштрасса, вона набуває найбільшого та найменшого значень на $[a,b]$, які не співпадають. Одне з цих значень досягається в деякій середній точці $\xi \in (a,b)$, тоді, за теоремою Ферма, $f'(\xi)=0$.

Теорему доведено.

Наслідок. *(Узагальнення теореми Ролля)*

Нехай $f \in C(a,b)$, $\{a,b\} \subset \overline{R}$ – диференційована в кожній точці (a,b). Якщо $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) \in \overline{R}$, то $\exists \xi \in (a,b)$: $f'(\xi)=0$.

Приклад 1. Якщо f має похідну в кожній точці $[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$, то $\forall \alpha \in R$ рівняння $f'(x)+\alpha f(x)=0$ має принаймні один розв'язок на (a,b).

Розглянемо функцію $\varphi(x)=f(x)e^{\alpha x}$. Тоді $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ і вона задовольняє теорему Ролля $\Rightarrow \exists \xi : \varphi'(\xi)=0 \Rightarrow$

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)e^{\alpha\xi}+\alpha f(\xi)e^{\alpha\xi}=e^{\alpha\xi}\left(f'(\xi)+\alpha f(\xi)\right),$$

з того, що $e^{\alpha\xi} \neq 0 \Rightarrow \exists \xi$: $f'(\xi)+\alpha f(\xi)=0$.

Теорема 3. *(Дарбу)*

Якщо $f:R\to R$ диференційована в кожній точці $[a,b]$: $f'_{П}(a)f'_{\wedge}(b)<0$, то $\exists\xi\in(a,b)$: $f'(\xi)=0$.

Доведення. За теоремою Вейєрштрасса f на $[a,b]$ набуває найбільшого та найменшого значень. Якщо принаймні одне з них досягається в точці $\xi\in(a,b)$, то, за теоремою Ферма, $f'(\xi)=0$. Покажемо, що інше не можливо, тобто екстремуми не можуть досягатися на краях. Якщо припустити, що $f(a)=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(b)=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_{П}(a)\geq 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'_{\Lambda}(b)\geq 0$ і умова $f'_{П}(a)f'_{\Lambda}(b)<0$ не виконується.

Аналогічно, коли $f(a)=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(b)=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Теорема доведена.

<u>Наслідок 1.</u> *(Про проміжні значення похідної)*

Якщо $f:R\to R$ диференційована на $[a,b]$, то її похідна f' набуває усіх проміжних значень між $f'_{П}(a)$ і $f'_{\Lambda}(b)$.

Доведення. Нехай α довільне дійсне число між $f'_{П}(a)$ і $f'_{\Lambda}(b)$. Розглянемо функцію $\varphi:R\to R$: $\varphi(x)=f(x)-\alpha x$, тоді $\varphi'_{П}(a)\varphi'_{\Lambda}(b)<0$ $\Rightarrow$ $\exists\xi\in(a,b)$: $\varphi'(\xi)=0$ $\Rightarrow$ $\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\alpha=0 \Rightarrow f'(\xi)=\alpha$.

Наслідок доведено.

<u>Наслідок 2.</u> *(Про збереження знаку похідною)*

Якщо $f:R\to R$ диференційована на $[a,b]$ і $\forall x\in[a,b]$ $f'(x)\neq 0$, то f' зберігає цілком певний знак на $[a,b]$.

Доведення. Якщо $\exists\{x_1, x_2\}\subset[a,b]$: $f'(x_1)f'(x_2)<0 \Rightarrow \exists\xi\in(x_1,x_2)\subset[a,b]$: $f'(\xi)=0$ - суперечність.

Наслідок доведено.

Теорема 4. *(Лагранжа)*

Нехай функція $f:R\to R$ неперервна на $[a,b]$, диференційована в кожній точці (a,b). Тоді $\exists\xi\in(a,b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi) \qquad \textbf{(1)}$$

Доведення. Нехай $\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, тоді розглянемо функцію $\varphi(x)=f(x)-\lambda x$, $x\in[a,b]$.

$$\varphi(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{bf(a)-af(a)-af(b)+af(a)}{b-a}=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a};$$

$$\varphi(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{bf(b)-af(b)-bf(b)+bf(a)}{b-a}=\varphi(a),$$

звідси за теоремою Ролля $\exists\xi:\ \varphi'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)=\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Теорема доведена.

Запишемо цю формулу трохи інакше: зрозуміло, що $0<\frac{\xi-a}{b-a}<1$ $(\xi\in(a,b))$; тому можна покласти $\theta=\frac{\xi-a}{b-a} \Rightarrow f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\theta(b-a))$, $0<\theta<1$. Тоді, якщо $[x_0,x]\subset D_f$, і на цьому проміжку f задовольняє умову теореми Лагранжа $\Rightarrow$ останню формулу можна записати у вигляді:

$$f(x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)=(x-x_0)f'(x_0+\theta(x-x_0))=\Delta x f'(x_0+\theta\Delta x),\ 0<\theta<1, \qquad \textbf{(2)}$$

яка називається ***формулою скінчених приростів Лагранжа***.

Приклад 2. Довести нерівність $|arctg\,a-arctg\,b|\le|a-b|$.

$$|arctg\,a-arctg\,b|=|arctg'(\xi)|\cdot|b-a|=\frac{1}{1+\xi^2}|a-b|\le|a-b|.$$

Формулу **(1)** можна узагальнити таким чином:

$$\min_{x\in[a,b]} f'(x) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \max_{x\in[a,b]} f'(x).$$

<u>**Теорема 5.**</u> *(Коші)*

Нехай функції f, g неперервні на $[a,b]$, диференційовані на (a,b). Тоді $\exists \xi \in (a,b)$:

$$(f(b)-f(a))g'(\xi) = (g(b)-g(a))f'(\xi) \qquad \textbf{(3)}$$

Доведення. Розглянемо функцію $F:[a,b]\to R$, де

$$F(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x).$$

Тоді F – диференційована на (a,b) і $F(b)=F(a) \Rightarrow \exists \xi :\ F'(\xi)=0 \Rightarrow$ **(3)**.

Теорему доведено.

<u>**Наслідок.**</u> *(Переформулювання теореми Коші)*

Якщо в умовах теореми Коші виконується одна з умов:

1) $(g'(x))^2 + (f'(x))^2 \ne 0 \ \ \forall x \in (a,b) \wedge g(a) \ne g(b)$;

2) $g'(x) \ne 0 \ \ \forall x \in (a,b)$,

то формулу **(6)** можна записати у вигляді:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \qquad \textbf{(4)}$$

Лекція 13

Правила Лопіталя

(*Гільом Франсуа де Лопіталь-французький математик (1601-1704))*

Відношення двох функцій $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляє собою при $x \to a$ невизначеність

$\frac{0}{0}$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

<u>Теорема 1.</u> *(Перше правило Лопіталя)*

Нехай функції $f, g : (a,b) \to R$ задовольняють такі умови:

1) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$;

2) $\forall x \in (a,b)\ \ \exists f'(x)$ та $g'(x)$;

3) $\forall x \in (a,b)\ \ g'(x) \neq 0$;

4) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{R}$, то $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Доведення. Розглянемо розширення функцій на півінтервал $[a,b)$, доповнивши їх нулями в точці $x = a$. Виберемо довільну послідовність значень аргументу $(x_n) \subset (a,b)$: $x_n \to a$. Тоді , очевидно $f(x)$ і $g(x)$ будуть неперервні на всьому сегменті $[a, x_n]$ і диференційовані у всіх внутрішніх точках цього сегмента. Таким чином , для $f(x)$ і $g(x)$ на цьому сегменті будуть виконуватись всі умови теореми Коші для скінчених приростів і $\exists \xi_n \in (a, x_n)$. Нехай $n \to \infty$,тоді $\xi_n \to a$, $\forall n\ \xi_n \neq a$:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to L,$$

І за означенням Гейне одержимо, що $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Теорему доведено.

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+\arcsin x}{tg\,x+arc\,tg\,x}$.

Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$, виконуються усі вимоги теореми 1, а тому розглянемо відношення похідних: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{1+x^2}}=1 \Rightarrow$ наша границя теж дорівнює 1.

Зауважимо, що в зворотній бік теорема місця не має.

Приклад 2. $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$; $g(x)=x$, $x\in(0,1)$

Бачимо, що $\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}\underset{x\to+0}{\to}0$; $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, $g'(x)=1 \Rightarrow \nexists\lim\limits_{x\to+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Наслідок 1. *(Перше правило Лопіталя для n -х похідних)*

Якщо для функцій $f,g:(a,b)\to R$ виконуються такі умови:

1) $\forall x\in(a,b)\ \exists f^{(j)}(x), g^{(j)}(x)\ \ j=\overline{1,n}$;

2) $\forall j=\overline{1,n-1}\ \lim\limits_{x\to a+0}f^{(j)}(x)=\lim\limits_{x\to a+0}g^{(j)}(x)=0$;

3) $g^{(j)}(x)\neq 0\ \ \forall x\in(a,b)$, $j=\overline{1,n}$;

4) $\exists\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=L\in\overline{R} \Rightarrow \exists\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

Доведення. Доведення полягає в використанні правила Лопіталя n разів по черзі для пар функцій ($f^{(n-1)}, g^{(n-1)}$), ($f^{(n-2)}, g^{(n-2)}$),…,(f', g').

Наслідок 2. *(Перше правило Лопіталя на нескінченності)*

Якщо $f,g:[a,+\infty)\to R$, $a>0$, і для цих функцій виконуються умови:

1) $f,g\in C([a,+\infty))$;

2) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$;

3) $\forall x \in [a,+\infty)\ \exists f'(x),\ \wedge\ \exists g'(x) \neq 0$;

4) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{R}$, тоді $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Приклад 3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{arc\,tg\, x - x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - x}{arc\,tg\, x - x} = \frac{0}{0} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{\frac{1}{1+x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}} =$$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, зрозуміло, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 1$, а тому далі достатньо лише знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{t\to+0}\frac{1-\sqrt{1-t}}{t} = \lim\limits_{t\to+0}\frac{f_1(t)}{g_1(t)}$, знайдемо границю відношення похідних: $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = \lim\limits_{t=0}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1-t}}}{1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x - x}{arc\,tg\, x - x} = \dfrac{1}{2}$.

Теорема 2. *(Друге правило Лопіталя)*

Нехай $f, g \in C(a,b)$ задовольняють умовам:

1) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$;

2) $\forall x \in (a,b)\ \exists f'(x) \wedge g'(x)$;

3) $\forall x \in (a,b)\ g'(x) \neq 0$;

4) $\exists \lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Приклад 4. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{x^{-\varepsilon}}\ (\varepsilon > 0)$.

Маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$, застосуємо друге правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{-1}{\varepsilon x^{-\varepsilon}}=\lim_{x\to+0}\frac{-x^{\varepsilon}}{\varepsilon}=0\;\Rightarrow\;\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}}=0\,.$$

Наслідок 1. *(Друге правило Лопіталя для n -х похідних)*

Якщо функції $f, g\in C(a,b)$, і задовольняють умови:

1) $\forall x\in(a,b)\ \exists f^{(j)}(x)\wedge g^{(j)}(x)\ \ j=\overline{1,n}$;

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f^{(j)}(x)=\lim\limits_{x\to a+0} g^{(j)}(x)=\infty$, $\forall j=\overline{1,n-1}$;

3) $\forall x\in(a,b)\ \forall j=\overline{1,n}\ \ g^{(j)}(x)\neq 0$;

4) $\exists\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=L\in\overline{R}\ \Rightarrow\ \exists\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$.

Наслідок 2. *(Друге правило Лопіталя на нескінченності)*

Теорема залишається чинною, якщо $a\in\overline{R}$.

<u>Приклад 5.</u> Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$, $n\in N$.

Використаємо правило Лопіталя n разів, кожен раз маємо невизначеність ∞/∞:

$$\frac{nx^{n-1}}{e^x};\ \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x};\ \ldots,\ \frac{n!\,x}{e^x};\ \frac{n!}{e^x}\to 0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0\,.$$

Формула Тейлора

(Брук Тейлор - англійський математик (1685-1731)

Формула Тейлора є однією з основних формул математичного аналізу і має багато застосувань як в аналізі, так і в суміжних дисциплінах.

Теорема 1. *(Локальна формула Тейлора)*

Нехай $f : O_\delta(x_0) \to R$, $(n-1)$ раз неперервно-диференційована в цьому околі і має скінчену похідну n -го порядку в точці x_0. Нехай x -деяке значення аргумента із цього околу. Тоді має місце формула:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right) \qquad \textbf{(1)}$$

$f(x)$= $P_n(x) +$ $R_{n+1}(x)$, де $P_n(x)$= $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ -многочлен Тейлора степеня n, $R_{n+1}(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$-відповідна похибка, так званий залишковий член.

Доведення. Покажемо, що $R_{n+1}(x)$ є нескінченно малою порядка вище ніж n при

$x \to x_0$. Розглянемо $\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, $\psi(x) = (x-x_0)^n$, і знайдемо за правилом Лопіталя $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Використовуючи наслідок з правила Лопіталя, ми бачимо, що $\forall j = \overline{0, n-1}$ $\varphi^{(j)}(x_0) = \psi^{(j)}(x_0) = 0$. Розглянемо відношення:

$$\frac{\varphi^{n-1}(x)}{\psi^{n-1}(x)} = \frac{1}{n!}\left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right).$$

З існування $f^{(n)}(x_0)$ випливає, що $\frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{\psi^{(n-1)}(x)} \underset{x \to x_0}{\to} 0 \Rightarrow \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \underset{x \to x_0}{\to} 0$.

Теорему доведено.

Доданок $R_{n+1}(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ називається ***залишковим членом в формі Пеано***, а формула **(1)** називається ***формулою Тейлора із залишковим членом в формі Пеано***.

З локальності цієї формули її називають асимптотичним представленням функції f в околі точки x_0. Вона дуже ефективна при знаходженні границь. Якщо $x_0=0$, то формулу **(1)** називають ***формулою Маклорена***.

Для дослідження функції не в околі точки, а на цілому проміжку нам будуть потрібні сильніші обмеження на f.

Теорема 2. *(Формула Тейлора)*

Нехай $f\in C^n(a,b)$ і має $(n+1)$ похідну в кожній точці (a,b), можливо за виключенням точки $x_0\in(a,b)$. Тоді $\forall x\in(a,b)$ $\exists\xi$ між точками x_0 і x така, що

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_{n+1}(x), \qquad \textbf{(2)}$$

де

$$R_{n+1}(x)=\tfrac{1}{n!p}\left(\tfrac{x-x_0}{x-\xi}\right)^p(x-\xi)^{n+1}f^{(n+1)}(\xi),\ p\in\mathrm{R},\ p>0, \qquad \textbf{(3)}$$

доданок $R_{n+1}(x)$, що визначається формулою **(3)** називається ***залишковим членом в формі Шлемільха-Роша,*** а сама формула **(2)** називається ***формулою Тейлора із залишковим членом в формі Шлемільха-Роша***.

Вибираючи різні значення параметру p, одержимо деякі відомі важливі часткові випадки залишкових членів.

При $p=n+1$:

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad \textbf{(4)}$$

де $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0,1)$ – ***<u>залишковий член у формі Лагранжа.</u>***

При $p = 1$:

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}(x - x_0)(x - \xi)^n f^{(n+1)}(\xi) = \left|\theta = \frac{\xi - x_0}{x - x_0}\right| = \frac{1}{n!}(x - x_0)^{n+1}\left(\frac{x - \xi}{x - x_0}\right)^n f^{(n+1)}(\xi) =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^n, \qquad \textbf{(5)}$$

<u>залишковий член у формі Коші</u>.

Формули **(2)**,**(4)**,**(5**) при $x_0 = 0$ набувають вигляду (залишкові члени для формул Маклорена):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_{n+1}(x); \qquad \textbf{(6)}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \ \theta \in (0,1); \qquad \textbf{(7)}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1 - \theta)^n x^{n+1}, \ \theta \in (0,1). \qquad \textbf{(8)}$$

Якщо позначити $x - x_0 = h$, то формулу **(1)** можна записати за допомогою диференціала:

$$\Delta f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(x_0)(h) + o(h^n). \qquad \textbf{(9)}$$

Тепер випишемо так звані п’ять основних розкладів Маклорена, для кожного з яких візьмемо залишковий член у формі Лагранжа (в усіх випадках $\theta \in (0,1)$):

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \textbf{(10.1)}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \qquad \textbf{(10.2)}$$

$$\sin x=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \qquad \textbf{(10.3)}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+(-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}, \qquad \textbf{(10.4)}$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1}. \qquad \textbf{(10.5)}$$

З допомогою цих формул можна оцінити похибку наближення відповідних функцій многочленами. Набагато простіше виглядають залишкові члени в формі Пеано. В такому вигляді вони використовуються для знаходження границь. Але спочатку покажемо, як одержувати відповідні формули Маклорена для інших функцій, що не попадають в п’ять вищерозглянутих. Крім простого знаходження похідних є більш прості можливості.

<u>Приклад 1.</u> $\operatorname{tg} x$ розкласти за формулою Тейлора до $o(x^5)$:

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)}=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\cdot\left(1+\left(\frac{x^4}{24}-\frac{x^2}{2}+o(x^5)\right)\right)^{-1}=$$

$$=\left(x-\tfrac{x^3}{6}+\tfrac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\cdot\left(1-\left(\tfrac{x^4}{24}-\tfrac{x^2}{2}\right)+\left(\tfrac{x^4}{24}-\tfrac{x^2}{2}\right)^2+o(x^5)\right)=$$

$$=\left(x-\tfrac{x^3}{6}+\tfrac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\cdot\left(1+\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{5x^4}{24}+o(x^5)\right)=x+x^3\left(-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{2}\right)+x^5\left(\left(\tfrac{1}{120}-\tfrac{1}{12}+\tfrac{5}{24}\right)+o(x^5)\right)=$$

$$=x+\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{2x^5}{15}+o(x^5).$$

<u>Приклад 2.</u> Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

$$\frac{\sin\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)\right)-x\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{3}}}{x^5}=\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\left(\frac{x-\frac{x^3}{6}}{6}\right)^3+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)-x\left(1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{9}\right)}{x^5}=$$

$$=\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{12}+\frac{x^5}{120}-x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{9}+o\left(x^5\right)}{x^5}=\frac{x^5\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{12}+\frac{1}{120}+\frac{1}{9}\right)+o\left(x^5\right)}{x^5}\to\frac{76}{360}=\frac{19}{90}$$

Приклад 3. Оцінити похибку формули $tg\, x\approx x+\frac{x^3}{3}$ при $|x|\le\frac{1}{2}$.

$$f=tgx;\; f'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x=1+f^2\Rightarrow\; f''=2f\cdot f'=2f\left(1+f^2\right)=2f+2f^3;$$

$$f'''=2f'+6f^2f'=2\left(1+f^2+3f^2\left(1+f^2\right)\right)=2+8f^2+6f^4;$$

$$f^{(IV)}=16f\cdot f'+24f^3f'=16f\left(1+f^2\right)+24f^3\left(1+f^2\right)=$$

$$=16f+16f^3+24f^3+24f^5=16f+40f^3+24f^5;$$

$$f^{(V)}=16f'+120f^2f'+120f^4f'=16+16f^2+120f^2+120f^4+120f^4+120f^6=$$

$$=16+136f^2+240f^4+120f^6$$

Похідна є в запису $R_5(x)$, розглянемо його в формі Лагранжа та оцінимо зверху:

$$\left|R_5(x)\right|=\left|\tfrac{1}{5!}tg^{(V)}(\xi)\cdot x^5\right|\le\tfrac{1}{5!}\cdot\tfrac{1}{32}\cdot\left(16+136\cdot\tfrac{1}{4}+240\cdot\tfrac{1}{16}+120\cdot\tfrac{1}{64}\right)\le$$

$$\tfrac{1}{120\cdot 32}\cdot\left(16+34+50+2\right)==\tfrac{102}{120\cdot 32}$$

Лекція 14

Дослідження функцій за допомогою похідних

Функція $f: J \to R$ ***<u>зростає</u>*** (***<u>спадає</u>***) ***<u>в точці</u>*** $x_0 \in (a,b) = J$, якщо $\exists S(x_0, \delta) \subset J$: $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ $\wedge$ $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$.

<u>Теорема 1.</u> *(Достатня умова зростання функції в точці)*

Для того, щоб функція $f: J \to R$, яка диференційована в точці $x_0 \in J$ зростала (спадала) в цій точці, достатньо, щоб $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$.

Доведення. Якщо $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, то $\exists \delta > 0$: $\forall x \in S(x_0, \delta)$ $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f(x) < f(x_0)$ і $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f(x) > f(x_0)$.

Теорема доведена.

Зауважимо, що ця умова не є необхідною.

<u>Приклад 1.</u> $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$ f – зростає в точці x_0, але $f'(x_0) = 0$.

<u>Наслідок</u>. *(Умова зростання функції в точці)*

Якщо функція $f: J \to R$ має в точці $x_0 \in J$ відмінну від нуля неперервну похідну, то вона строго монотонна в деякому околі цієї точки.

Приклад 2. $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, \qquad x=0\end{cases}, \Rightarrow\ f'(x_0)=\dfrac{1}{2}>0$ – зростає в цій точці.

$f'(x)=\frac{1}{2}+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ – приймає в будь-якому околі нуля як додатні, так і від'ємні значення.

Теорема 2. *(Доведення нерівностей)*

Якщо функції $\varphi,\psi:(a,b)\to R$ задовольняють такі умови $(x_0\in(a,b))$:

1) $\forall x>x_0\ \exists\varphi^{(n)}(x),\ \psi^{(n)}(x)$;

2) $\exists\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0),\ k=\overline{0,n-1}$;

3) $\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)\ \forall x>x_0$,

то $\forall x>x_0\ \varphi(x)>\psi(x)$.

Доведення теореми. Доведемо індукцією по n. Для $n=1$ розглянемо функцію: $f(x)=\varphi(x)-\psi(x),\ x\in(a,b)\ \Rightarrow\ \forall x>x_0\ \ f'(x)=\varphi'(x)-\psi'(x)>0\ \Rightarrow\ f$ – зростає при $x>x_0$, але $f(x_0)=\varphi(x_0)-\psi(x_0)=0\ \Rightarrow\ \forall x>x_0\ \ f(x)>f(x_0)=0\ \Rightarrow\ \varphi(x)>\psi(x)$.

Аналогічно $\forall n$.

Теорема доведена.

Наслідок 1. *(Доведення нерівностей для правої точки)*

Якщо для функцій $\varphi,\psi:(a,b)\to\mathbf{R}$ виконуються умови $(x_0\in(a,b))$:

1) $\forall x<x_0\ \exists\varphi^{(n)}(x),\ \psi^{(n)}(x)$;

2) $\exists\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0),\ k=\overline{0,n-1}$;

3) $\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)\ \forall x<x_0$,

то $\forall x<x_0$ при парному $n\ \ \varphi(x)>\psi(x)$, при непарному $n\ \ \varphi(x)<\psi(x)$.

Доведення. Розглянемо випадок $n=1$. Для функції $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, $x\in(a,b)$ ми маємо $f(x_0)=\varphi(x_0)-\psi(x_0)=0$ і $\forall x<x_0$ $f'(x)=\varphi'(x)-\psi'(x)>0$ $\Rightarrow$ f зростає при $x<x_0$ $\Rightarrow$ $\forall x<x_0$ $f(x)<f(x_0)=0$ $\Rightarrow$ $\varphi(x)<\psi(x)$.

Аналогічно $\forall n$.

Наслідок доведено.

<u>Наслідок 2.</u> *(Доведення нерівностей на розширеній дійсній осі)*

Теорема та наслідок залишаються чинними, якщо $x_0\in\overline{R}$. Для $x_0=+\infty$ має місце наслідок 1 (тому що $\forall x\in R$ має місце $x<x_0$), а для $x_0=-\infty$ має місце теорема (бо $x>x_0$).

<u>Приклад 3.</u> Довести нерівність: $e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$ $\forall x>0$.

$\varphi(x)=e^x$; $\psi(x)=1+x+\frac{x^2}{2}$; $\varphi(0)=\psi(0)=1$ – умови виконуються;

$\varphi'(x)=e^x$; $\psi'(x)=1+x$; $\varphi'(0)=\psi'(0)=1$ – знову виконуються;

$\varphi''(x)=e^x$; $\psi''(x)=1$; $\varphi''(0)=\psi''(0)=1$ – ще раз виконуються;

$\varphi'''(x)=e^x>\psi'''(x)=0$ $\forall x>0$ $\Rightarrow$ $\forall x>0$ $\varphi(x)>\psi(x)$.

<u>Приклад 4.</u> Довести нерівність: $\frac{2}{2x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $x>0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2x+1}=0;\ \lim_{x\to+\infty}\psi(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0;$$

$$\varphi'(x)=-\frac{1}{(2x+1)^2}\cdot 4=-\frac{4}{(2x+1)^2}=-\frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}},\ \psi'(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2+x};$$

$$\varphi'(x)=-\frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}}>-\frac{1}{x^2+x}=\psi'(x)\ \Rightarrow\ \varphi(x)<\psi(x).$$

Для функції $f:J\to\mathrm{R}$ точки, в яких $f'(x)=0$ називаються ***<u>стаціонарними</u>***.

Функція $f: J \to \mathrm{R}$ ***<u>змінює знак</u>*** при переході через точку $x_0 \in J$, якщо $\exists S(x_0, \delta) \subset J$: на проміжках $(x_0 - \delta, x_0)$ та $(x_0, x_0 + \delta)$ функція має значення різних знаків.

<u>Теорема 3.</u> *(Перша достатня умова екстремуму)*

Нехай $J \xrightarrow{f} R$ диференційована на $\overset{\circ}{S}(x_0, \delta) \subset J$, можливо за виключенням самої точки x_0. Якщо при переході через x_0 f' змінює знак, то в цій точці f має локальний екстремум. Якщо знак змінюється з "**+**" на "**–**", то x_0 – точка максимуму, інакше – точка мінімуму.

Доведення теореми. З формули Лагранжа можемо записати:

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta(x - x_0))\Delta x.$$

Якщо функція f' змінює знак з ″плюса″ на ″мінус″, то права частина останньої формули від'ємна $\forall x \in S(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$, тобто $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in S(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ $\Rightarrow x_0$ – локальний максимум, аналогічно для мінімуму.

Теорема доведена.

<u>Приклад 5.</u> $y = 1 - x^2$; $y' = -2x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$. y' змінює знак з "**+**" на "**–**" $\Rightarrow$ x_0 – точка максимуму.

<u>Приклад 6.</u> $y = |x|$; $y' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ (в точці $x_0 = 0$ функція не диференційована).

При переході через x_0 y' змінює знак з «–» на «+», тому x_0 – точка мінімуму.

<u>Теорема 4.</u> *(Друга достатня умова екстремуму)*

Якщо функція $J \xrightarrow{f} R$ задовольняє в точці $x_0 \in J$ умовам: $\exists f''(x_0) \neq 0 \wedge f'(x_0) = 0$, то f має локальний екстремум в точці x_0. При $f''(x_0) < 0$ - x_0 - точка максимуму, інакше – точка мінімуму.

Доведення теореми. Якщо, наприклад, $f''(x_0)>0$, то f' існує на деякому околі $S(x_0,\delta)$ і зростає в цій точці $\Rightarrow$ $\exists S(x_0,\delta_1)\subset S(x_0,\delta)$: $\forall x\in(x_0-\delta_1,x_0)$ $f'(x)<f'(x_0)$ та $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ $f'(x)>f'(x_0)$ $\Rightarrow$ f' змінює знак в точці x_0 з «–» на «+», тобто за теоремою 2 це – мінімум, аналогічно, якщо $f''(x_0)<0$ – це є максимум.

Доведення завершене.

<u>Приклад 7.</u> $y=x^3-3x+5$. $y'=3x^2-3=0$ $\Rightarrow$ $x_1=1$, $x_2=-1$; $y''=6x$; $y''(x_1)=6>0$ – мінімум; $y''(x_2)=-6<0$ - максимум.

<u>Теорема 5.</u> *(Третя достатня умова екстремуму)*

Нехай функція $J\xrightarrow{f}R$ задовольняє умові:

1) $\exists f^{(k)}(x_0)=0$ $k=\overline{1,n-1}$, $x_0\in J$;

2) $\exists f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

Тоді при парному n в точці x_0 є екстремум (максимум при $f^{(n)}(x_0)<0$; мінімум при $f^{(n)}(x_0)>0$), а при непарному n екстремуму не має.

Доведення теореми. Розглянемо локальну формулу Тейлора в околі точки x_0: $f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$. Тобто знак $\Delta f(x_0)$ співпадає із знаком першого доданку. Далі все стає очевидним.

Теорема доведена.

<u>Приклад 8.</u> $f(x)=x^n$, $n\in N$.

Тоді $f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$, $f^{(n)}(0)=n!$ $\Rightarrow$ при парному n це точка мінімуму, а при непарному – екстремуму нема.

Зауважимо, всі ці умови є лише достатніми.

Функція $[a, b]\xrightarrow{f} R$ має в точці a – ***<u>крайовий максимум</u>*** (***<u>мінімум</u>***), якщо $\exists\delta:\forall x\in(a,a+\delta)\subset[a, b]:\ f(x)<f(a)\ \ (f(x)>f(a))$. Аналогічно крайові екстремуми визначається в точці b .

<u>Теорема 6.</u> *(Достатня умова крайового екстремуму)*

Якщо функція $[a, b]\xrightarrow{f} R$ має похідну $f'_{\Pi}(a)$, то при умові $f'_{\Pi}(a)>0\ \ (f'_{+}(a)<0)$, то f досягає в точці a крайового мінімуму (максимуму). Якщо існує похідна $f'_{\Lambda}(b)>0\ \ (f'_{\Lambda}(b)<0)$, то f досягає в точці b максимуму (мінімуму).

Доведення. Нехай $f'_{\Pi}(a)>0\ \Rightarrow\ \exists\delta>0.\ \forall x\in(a,a+\delta)$: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$. Так як $x-a>0\ \Rightarrow$ $f(x)>f(a)$. Аналогічно розглядаємо решту випадків.

Теорема доведена.

<u>Абсолютним</u>, або ***<u>глобальним максимумом</u>*** (***<u>мінімумом</u>***) функції $f:R\to R$ називається найбільше (найменше) значення $f(x)$ при $x\in D_f$, якщо воно існує.

Зауважимо, що за теоремою Вейєрштрасса для $f\in C[a. b]$ існують абсолютний максимум та мінімум. Це можуть бути або точки локальних максимумів, або значення на краях. Дослідження проводиться за такою схемою: знаходимо множину всіх стаціонарних точок $(f'=0)$ і критичних точок (f' – не існує), додаємо до цих множин точки a і b , а тоді серед цих значень і шукаємо глобальні екстремуми.

<u>Приклад 10.</u> Знайти глобальні екстремуми функції: $f(x)=\begin{cases} |x^2-1|, x\in\left[-2, \frac{3}{2}\right] \\ 3|x+3|\ ,\ x\in[-4, 2]\end{cases}$.

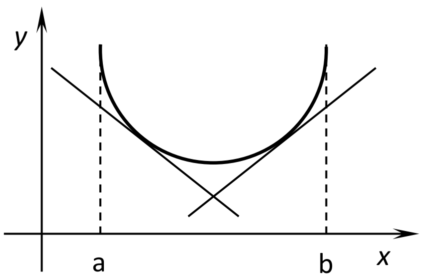
$f'(x)=\begin{cases}2x\cdot \operatorname{sgn}(x^2-1), x\in\left(-2,\ \frac{3}{2}\right)\\ 3\cdot\operatorname{sgn}(x+3),\ x\in(-4,\ -2)\end{cases}$, а тепер залишається порівняти значення в усіх цікавих точках, в яких може досягатися глобальний екстремум:

$$\begin{Bmatrix}0 & -3 & -1 & 1 & -2 & -4 & \frac{3}{2}\\ \downarrow; & \downarrow; & \downarrow; & \downarrow; & \downarrow; & \downarrow; & \downarrow\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & \frac{5}{4}\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}максимум = 3\\ мінімум = 0\end{matrix}.$$

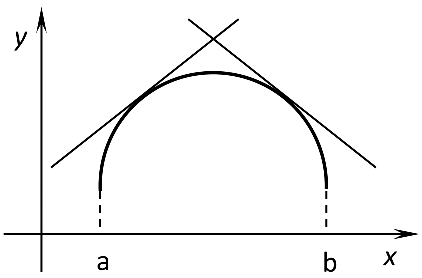
Опуклі функції, класичні нерівності

<u>Дослідження опуклості функції</u>

Графік функції $y=f(x)$ має на (a,b) опуклість, направлену вниз (вгору), якщо він розташований не нижче (не вище) будь-якої дотичної до графіка $y=f(x)$ на (a,b).



опуклість вниз



опуклість вгору

Розглянемо множину R^2 і будь-які точки $M_1(x_1,y_1)$ та $M_2(x_2,y_2)$

Означення.

Відрізком $\overline{M_1M_2}$ називається множина $\left\{(x,y)\in R^2 \middle| \begin{matrix}x=tx_1+(1-t)x_2\\ y=ty_1+(1-t)y_2\end{matrix}\right\}$

$t\in[0,1]$.

Множина $X\subset R^2$ називається опуклою, якщо $\forall$ точок $M_1, M_2\in X$ відрізок $\overline{M_1M_2}\in X$

Функція $f(x)$ визначена і неперервна на (a,b) називається *опуклою* (опуклою вниз), якщо $\forall \ x_1, x_2 \in (a,b)((x_1 > x_2) \text{ або } (x_1 < x_2))$ виконується нерівність $f(q_1x_1 + q_2x_2) \le q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$, $\forall \ q_1, q_2 \ge 0$, $q_1 + q_2 = 1$.

Функція $f(x)$ визначена і неперервна на (a,b) називається *угнутою* (опуклою вгору), якщо $f(q_1x_1 + q_2x_2) \ge q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$. Вираз $x = q_1x_1 + q_2x_2$, ($x_1 < x_2$), $q_1 + q_2 = 1$ міститься між x_1 і x_2.

Поняття опуклої (угнутої) функції введено Ієнсеном.

Якщо $q_1 = q_2 = \dfrac{1}{2}$, то $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

Умова опуклості функції

Теорема*(Критерій опуклості функції).*

Для того, щоб функція $f(x)$, двічі диференційована на (a,b) була опуклою вниз (вгору) на цьому інтервалі $\Leftrightarrow$, щоб друга похідна $f''(x)$ була невід”ємною (недодатньою) на (a,b), тобто: $f''(x) \ge 0$, $x \in (a,b)$;

$$f''(x) \le 0, \quad x \in (a,b).$$

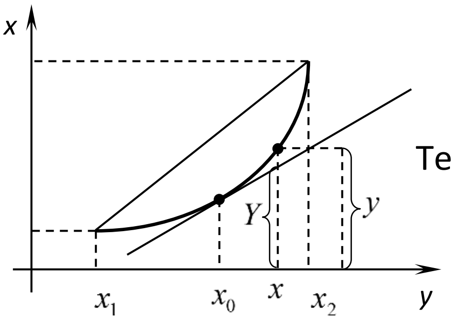
Відомо, що умова $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) є достатньою умовою строгої опуклості $f(x)$ і не є необхідною, наприклад,

$y = x^4$ строго опукла на R, але $f''(x) = 12x^2$ – рівна 0 при $x = 0$.

Доведення:

Покажемо, що графік функції $f(x)$ лежить не нижче дотичної, що проходить через точку $(x_0, f(x_0))$.

Нехай $f''(x) \ge 0$, $x \in (a,b)$ $x_0 \in (a,b)$. Рівняння дотичної до $y = f(x)$ в точці x_0 має вигляд $Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.



Розвинемо $f(x)$ в околі точки x_0 за формулою Тейлора для $n=1$.

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)(x-x_0)^2}{2!}, \ \xi \in (x_0, x)$$

$$y - Y = \frac{f''(\xi)(x-x_0)^2}{2!} \geq 0, \quad y \geq Y.$$

Дослідження точок перегину функції

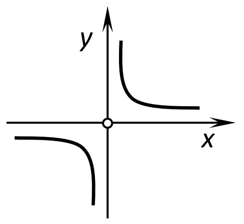
Означення.

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0 за виключенням можливо самої точки x_0. Якщо існують інтервали $(x_0-\delta, x_0)$ і $(x_0, x_0+\delta)$, $\delta>0$ на одному з яких вона строго опукла вниз, а на другому строго опукла вгору, то кажуть, що при переході через точку x_0 функція змінює напрям опуклості .

Означення.

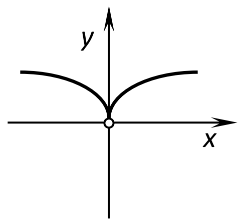
Нехай $f(x) \in O_\delta(x_0)$, неперервна в точці x_0, існує похідна $f'(x_0)$ скінченна або нескінченна. Тоді якщо $f(x)$ при переході через точку x_0 змінює напрям опуклості, то точка x_0 називається *точкою перегину функції* $f(x)$. Точка $(x_0, f(x_0))$ – точка перегину графіка функції $y=f(x)$. Графік функції $f(x)$ переходить з одної сторони дотичної, проведеної в цій точці, на другу її сторону.

Наприклад:

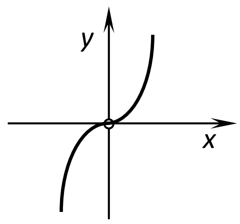


$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

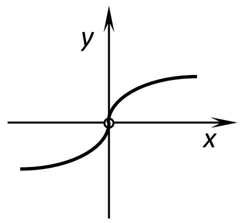
$f'(0) = \infty$, точка $x_0 = 0$ не є точкою перегину, бо функція не є неперервною в точці $x_0 = 0$, хоча напрямок опуклості змінюється в цій точці;



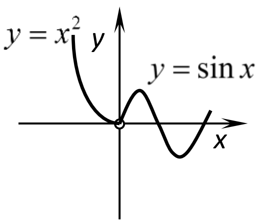
$y=\sqrt[3]{|x|}$, точка $x_0=0$ не є точкою перегину бо функція не змінює напрямок опуклості;



$y=x^3$, точка $x_0=0$ – точка перегину графіка функції;



$y=\sqrt[3]{x}$, $f'(0)=\infty$, точка $x_0=0$ – точка перегину графіка функції;



$y=\begin{cases}\sin x, x\geq 0\\ x^2, x<0\end{cases}$, $x_0=0$ не є точкою перегину, оскільки в точці $x_0=0$ не існує похідної $f'(0)$ ні скінченної, ні нескінченної, $\nexists\ f'(0)$

Теорема. *Необхідна умова існування точки перегину*.

Для того, щоб $f:(a,b)\to R$ функція диференційована на (a,b) мала перегин в точці $M\,(x_0,\,f(x_0))$ необхідно щоб $f''(x_0)=0$ (якщо існує $f''(x_0)$). Точки перегину потрібно шукати серед критичних точок першої похідної.

Доведення:

Нехай точка M_0 – точка перегину. В околі точки M_0 відбувається зміна напрямку опуклості. Похідна $f'(x_0)$ як функція змінює знак: $\left(f'(x_0)\right)'>0$ в $O_\delta^+(x_0)$, $\left(f'(x_0)\right)'<0$ в $O_\delta^-(x_0)$, або навпаки. Отже функція змінює монотонність, а це означає, що в точці x_0 існує екстремум функції і $f''(x_0)=0$.

Достатні умови існування точки перегину

Перша умова. Нехай $f:(a,b)\to R$, $f\in C^2\left(O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}\right)$ має в околі $O_\delta(x_0)$ різні знаки другої похідної, тоді графік функції $y=f(x)$ має в точці $M\,(x_0,\,f(x_0))$ перегин.

Дійсно, якщо $f''(x)$ змінює знак ліворуч і праворуч т x_0, то це означає зміну знаку опуклості функції і за означенням маємо точку перегину.

Друга умова. Нехай $f(x)$ має в точці x_0 похідні порядка $n\geq 2$ і $f''(x_0)=f^{(3)}(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

Якщо $n=2k+1$, то точка M_0 графіка функції є точкою перегину, якщо $n=2k$, то точка M_0 – не є точкою перегину.

Доведення:

Має місце формула Тейлора для функції $f''(x)$:

$$f''(x)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+0\left((x-x_0)^{n-2}\right)=\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2},\quad \text{де } \alpha\to 0 \text{ при } x\to x_0.$$

При переході через точку x_0 знак $f''(x)$ співпадає з $f^{(n)}(x_0)$ і при $n=2k$ екстремуму не існує, а при $n=2k+1$ знак $f''(x)$ змінюється при переході через точку x_0 і , отже точка M_0 є точкою перегину.

Розглянемо частинний випадок: $f''(x_0)=0$, $f^{(3)}(x_0)\neq 0$, покажемо, що точка M_0 – точка перегину $\Gamma(f)$.

Нехай $f^{(3)}(x_0)>0$. Це означає, що $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}>0$

Із властивості границь випливає, що $\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}>0$, $\forall\ x\in O_\delta^-(x_0)$ виконується $f''(x)<f''(x_0)=0$, а $\forall\ x\in O_\delta^+(x_0)$ виконується $f''(x)>f''(x_0)=0$, отже відбувається зміна напямку опуклості і M_0 точка є точкою перегину $\Gamma(f)$. Аналогічно можна довести при $f^{(3)}(x_0)<0$.

НерівністьІєнсена

Теорема.

Якщо функція $f:[a,b]\to R$, $f\in C_{[a,b]}$, існує друга похідна $f''(x)$ $\forall$ $x\in(a,b)$ $f''(x)>0$, то для довільної точки $x_k\in$ $[a,b]$, ($k=\overline{1,n}$) і будь-яких $g_k>0$, $\sum\limits_{k=1}^{n}g_k=1$ виконується $f\left(\sum\limits_{k=1}^{n}g_k x_k\right)\le\sum\limits_{k=1}^{n}g_k f(x_k)$ (знак “ = ”, коли $x_1=x_2=...=x_n$)

Наслідки:

1. Теорема діє коли $f''(x)\ge 0$
2. Якщо $f''(x)<0$ (або $f''(x)\le 0$), то знак нерівності змінюється на “≥”.

Приклад:

Довести нерівність

$$e^{\frac{x+y}{2}}\le\frac{e^x+e^y}{2},\qquad x,y\in R$$

Розглянемо $f(x)=e^x$. Оскільки $f''(x)=e^x>0$, то функція опукла вниз на R і $\forall x_1,x_2\in R$ і $\alpha_1\ge 0$, $\alpha_2\ge 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$ справедливо $f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\le\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)$. $e^{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2}\le\alpha_1e^{x_1}+\alpha_2e^{x_2}$, покладемо $x_1=x$, $x_2=y$, $\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{1}{2}$ і маємо $e^{\frac{x+y}{2}}\le\dfrac{e^x+e^y}{2}$.

Асимптоти графіка функції

Нехай $f: R \to R$ задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $D_f = D_f = T$, T – скінченний або нескінченний відрізок числової прямої

$$\Gamma(f) = \left\{(x, y) \in R^2 \middle| x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in T\right\}.$$

Пряма $Ax + By + C = 0$ на O_{xy} називається асимптотою графіка $\Gamma(f)$ при $t \to t_0$ ($t_0 \in \overline{R}$), якщо віддаль $d(t) = \dfrac{|A\varphi(t) + B\psi(t) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ від точки ($\varphi(t), \psi(t)$) графіка функції до прямої $\to$ 0 і $\varphi^2(t) + \psi^2(t) \to \infty$ при $t \to t_0$.

Можливі три випадки:

1. $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = a \in R$, $\lim\limits_{t \to t_0} \psi(t) = \infty$ і $\lim\limits_{t \to t_0} d(t) = 0$, $x = a$ – вертикальна асимтота;
2. $\lim\limits_{t \to t_0} \psi(t) = b \in R$, $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = \infty$, $y = b$ – горизонтальна асимтота;
3. $\lim\limits_{t \to t_0} \psi(t) = \infty$, $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = \infty$, $y = kx + b$ – похила асимтота

$$k = \lim_{t \to t_0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}; \qquad b = \lim_{t \to t_0} \left(\psi(t) - k\varphi(t)\right).$$

Якщо функція задана явно, $t = x$, $y = f(x)$.

Приклад:

Знайти асимптоти графіка функції, заданої параметрично.

$$x(t) = \frac{t^2}{t - 1}, \qquad y(t) = \frac{t}{t^2 - 1}.$$

1. $\lim\limits_{t \to 1} x(t) = \infty, \lim\limits_{t \to 1} y(t) = \infty$;

   $$k = \lim_{t \to 1} \frac{t(t-1)}{(t+1)(t-1)t^2} = \frac{1}{2},$$

   $$b = \lim_{t \to 1} \left(\frac{t}{t^2 - 1} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{t - 1}\right) = \frac{1}{2}\lim_{t \to 1} \frac{t(2 - t^2 - t)}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}\lim_{t \to 1} \frac{-t(t-1)}{(t-1)(t+1)} = -\frac{3}{4},\ y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4};$$

2. $\lim\limits_{t \to -1} x(t) = -\dfrac{1}{2}$, $\quad \lim\limits_{t \to -1} y(t) = \infty$, $\quad x = \dfrac{1}{2}$ – вертикальна асимптота;
3. $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = \infty$, $\quad \lim\limits_{t \to \infty} y(t) = 0$ $\quad y = 0$ – горизонтальна асимптота.

Дослідження функції і побудову графіка доцільно проводити за схемою:

1. Визначити, точки перетину графіка з координатними осями, парність непарність, періодичність,дослідити на неперервність;
2. Дослідити існування асимптот;
3. Знайти інтервали монотонності і дослідити на екстремум;
4. знайти інтервали зберігання опуклості графіка і дослідити точки перегину.

Про опуклість додатково.

Нехай $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ – дві точки на декартовій площині, ***<u>відрізком</u>*** P_1P_2 називається множина точок

$$\{P(x, y) \mid x = tx_1 + (1-t)x_2 \wedge y = ty_1 + (1-t)y_2, t \in [0, 1]\}.$$

Множина $M \subset R^2$ називається ***<u>опуклою</u>***, якщо $\forall P_1, P_2 \in M \Rightarrow P_1P_2 \subset M$.

Нехай $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$ – графік функції $f: R \to R$, ***<u>надграфіком</u>*** (***<u>підграфіком</u>***) цієї функції називається множина

$$\{(x, y) \mid x \in D_f \wedge y \geq f(x)\} \ (\{(x, y) \mid x \in D_f \wedge y \leq f(x)\}).$$

При цьому будемо казати, що точка (x, y) ***<u>лежить вище</u>*** (***<u>нижче</u>***) графіка, якщо вона належить надграфіку (підграфіку) цієї функції.

Функція $f: R \to R$ називається ***<u>опуклою</u>*** (***<u>угнутою</u>***), якщо її надграфік (підграфік) є опуклою множиною.

Легко з означення опуклої множини зрозуміти, що мова про опуклу (угнуту) функцію має сенс, якщо вона визначена на зв'язній множині, тобто в якості області визначення в цьому розділі опуклих функцій ми будемо розглядати лише сегменти, інтервали та півінтервали, промені, або усю дійсну вісь.

Нагадаємо, що число $k(M_1, M_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ визначає ***кутовий коефіцієнтом прямої***, що проходить через точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$.

<u>Теорема 1.</u> *(Існування односторонніх похідних опуклої функції)*

Нехай функція $(a, b) \xrightarrow{f} R$ – опукла. Тоді в кожній точці $x \in (a, b)$ існують односторонні похідні $f'_{\wedge}(x)$ та $f'_{\Pi}(x)$.

Наслідок. *(Неперервність опуклої функції)*

Кожна опукла функція $(a,b)\xrightarrow{f}R$ неперервна.

Доведення. З того, що існує ліва похідна в кожній точці слідує, що функція неперервна зліва, аналогічно – вона неперервна справа. А це і означає неперервність функції в кожній точці.

Наслідок доведено.

Наслідок 3. *(Критерій опуклості двічі диференційованої функції)*

Якщо функція $(a,b)\xrightarrow{f}R$ має другу похідну $\forall x\in(a,b)$, то для опуклості f необхідно і достатньо, щоб $\forall x\in(a,b)\ \ f''(x)\geq 0$.

Теорема 3. *(Ієнсена)*

Нехай функція $(a,b)\xrightarrow{f}R$ опукла. Тоді $\forall n\geq 1$, $x_k\in(a,b)$, $\mu_k>0$, $k=\overline{1,n}$ виконується нерівність Ієнсена:

$$f\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k}\right)\leq\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k f(x_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k}. \qquad \textbf{(1)}$$

Доведення теореми. Для $n=2$ маємо: покладемо $\lambda=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\ \Rightarrow\ 1-\lambda=\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$. Розглянемо точки $M_1(x_1,\,f(x_1))$, $M_2(x_2,\,f(x_2))$. Тоді точка $M(x,y)$, де

$$x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2=\frac{\mu_1x_1+\mu_2x_2}{\mu_1+\mu_2},\ y=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)=\frac{\mu_1f(x_1)+\mu_2f(x_2)}{\mu_1+\mu_2}$$

належить відрізку $[M_1,M_2]$, тому з означення опуклої функції $y\geq f(x)$, тобто $\frac{\mu_1f(x_1)+\mu_2f(x_2)}{\mu_1+\mu_2}\geq f\left(\frac{\mu_1x_1+\mu_2x_2}{\mu_1+\mu_2}\right)$ – доведено для $n=2$.

Нехай **(1)** має місце для $n-1$, доведемо з цього його істинність для n.

Позначимо $x=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mu_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mu_k}$. Очевидно, що $x\in(a,b)$. Використаємо нерівність **(1)** для $n=2$ (вона вже доведена).

$$f\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}\right)=f\left(\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mu_k\right)x+\mu_n x_n}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mu_k+\mu_n}\right)\le\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mu_k\right)f(x)+\mu_n f(x_n)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k}=\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mu_k\right)f\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mu_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mu_k}\right)+\mu_n f(x_n)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k}\le$$

$$\le\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mu_k\right)\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mu_k f(x_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mu_k}+\mu_n f(x_n)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k f(x_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k}.$$

Теорему доведено.

<u>Наслідок.</u> *(Нерівність між середніми)*

Якщо $x_k>0$, $k=\overline{1,n}$, то $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\ge\left(\prod\limits_{k=1}^{n}x_k\right)^{\frac{1}{n}}$.

Доведення. Розглянемо на $(0,+\infty)$ функцію $y=-\ln x$. $y'=-\frac{1}{x}$, $y''=\frac{1}{x^2}>0$ – опукла, тому, поклавши в нерівності **(1)** $\mu_k=\frac{1}{n}$, матимемо:

$$-\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\le-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(x_k),\text{ або }\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\ge\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(x_k)\right)^{\frac{1}{n}}\Rightarrow\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\ge\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Наслідок доведено.

<u>Теорема 4.</u> *(Еквівалентний критерій опуклості функції)*

Функція $(a,b)\xrightarrow{f}R$ опукла тоді і тільки тоді, коли $\forall\lambda\in[0;1]$ $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ виконується нерівність:

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2). \qquad \textbf{(2)}$$

Необхідність випливає з нерівності Ієнсена при $n=2$, $\mu_1=\lambda$, $\mu_2=1-\lambda$.

Достатність. Нехай $a<x_1<x_2<x_3<b$. Тоді

$$\forall\lambda\in[0,1]\ \ f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_3)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3).$$

Покладемо $\lambda=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$, тоді $1-\lambda=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$, $x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3\Rightarrow$

$$f(x_2)\le \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\, f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\, f(x_3) \;\Rightarrow\; \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \;\Rightarrow\; f \text{ – опукла.}$$

Теорему доведено.

З останньої теореми можна дати еквівалентне означення опуклій функції.

Функція $(a,b)\xrightarrow{f} R$ називається ***опуклою*** (***строго опуклою***), якщо $\forall(x_1,x_2\in(a;\,b))$, $\forall\lambda\in[0;\,1]$ виконується нерівність

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\underset{(<)}{\le}\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

Функція $(a,b)\xrightarrow{f} R$ називається ***угнутою*** (***строго угнутою***), якщо функція $(-\,f\,)$ опукла (строго опукла).

Теорема 5. *(Лінійність опуклості)*

Нехай функції $(a,b)\xrightarrow{f_i} R$, $i=\overline{1,n}$ опуклі (угнуті), а C_i – довільні додатні числа. Тоді функція $f=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\,f_i$ опукла (угнута).

Доведення очевидно проводиться методом математичної індукції.

Теорема 7. *(Нерівність Гельдера)*

Нехай $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тоді $\forall n\in N$, $\{a_k,b_k \mid k=\overline{1,n}\}$ виконується нерівність:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\le\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad \textbf{(4)}$$

Доведення теореми. Розглянемо нерівність Ієнсена **(1)** для опуклої функції $x\mapsto x^p$ $\left(\left(x^p\right)''=p(p-1)x^{p-2}>0\right)$, покладаючи $\mu_k=|b_k|^q$, $x_k=\dfrac{|a_k|}{|b_k|^{\frac{q}{p}}}$, $k=\overline{1,n}$ маємо:

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k}\right|^p = \left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k b_k|}{\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^q}\right|^p \le \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k x_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p}{\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^q} \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k|\right) \le \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p}{\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^q}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \sum_{k=1}^{n}|b_k|^q = \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорему доведено.

<u>Наслідок.</u> *(Нерівність Мінковського)*

Нехай $p>1$, $n\in N$, тоді $\forall\left\{\, a_k, b_k \;\middle|\; k=\overline{1,n}\,\right\}$ виконується нерівність:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad \textbf{(5)}$$

Доведення. Застосуємо нерівність Гельдера до кожної частини одержаної нерівності:

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p = \sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{p-1}|a_k+b_k| \le \sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{p-1}|a_k| + \sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{p-1}|b_k| \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow q=\frac{p}{p-1}\right) = \left(\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \Rightarrow \textbf{(5)}$$

Наслідок доведено.

Якщо функція $(a,b)\xrightarrow{f}R$ диференційована в точці $x_0\in(a,b)$ і при переході через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ змінює характер опуклості, то M_0 називається ***<u>точкою перегину графіка функції</u>***.

<u>Теорема 8.</u> *(Необхідна умова перегину)*

Нехай функція $(a,b)\xrightarrow{f}R$ диференційована на (a,b), і в точці $x_0\in(a,b)$ існує $f''(x_0)$. Якщо $M_0(x_0, f(x_0))$ – точка перегину графіка $\Gamma(f)$, то $f''(x_0)=0$.

Доведення теореми. З критерію опуклості диференційованої функції $\exists\delta>0$: на $(x_0-\delta,x_0)$ та $(x_0,x_0+\delta)$ f' – монотонна з різним характером монотонності $\Rightarrow$ f' має в цій точці екстремум, а тому $f''(x_0)=0$.

Теорема доведена.

Теорема 9. *(Достатня умова перегину)*

Нехай функція $(a,b)\xrightarrow{f}R$ має n похідних в точці $x_0\in(a,b)$ і $f^{(k)}(x_0)=0$, $k=\overline{2,n-1}$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Якщо n – непарне, то $M_0(x_0,f(x_0))$ – точка перегину $\Gamma(f)$, якщо n – парне, то M_0 не є точкою перегину.

Доведення теореми. $f''(x)=\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}$, $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$ $\Rightarrow$ знак виразу співпадає зі знаком $f^{(n)}(x_0)$, а далі зрозуміло, він змінюється, чи ні.

Теорему доведено.

І взагалі, дослідження f на точки перегину рівносильне дослідженню f' на екстремуми, тому до можливих точок перегину слід віднести і критичні точки f.

Приклад 1. $f(x)=x^3-x$; $f'(x)=3x^2-1$; $f''(x)=6x\Rightarrow f''(0)=0$, $f'''(0)=6>0$ - перегин.

Приклад 2. $f(x)=\sqrt[3]{x}$; $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ в точці $x=0$ не існує, але там перегин, оскільки

$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}=\begin{cases}<0, & при\ x>0\\ >0, & при\ x<0\end{cases}.$$

Побудова графіків функцій

Нехай функція $f:R\to R$ задана параметрично за допомогою рівнянь $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in D_\varphi=D_\psi=T$, де T – проміжок (скінчений чи нескінчений) числової прямої. Якщо деяка пряма l задається рівнянням $Ax+By+C=0$ на декартовій площині, тоді як відомо з аналітичної геометрії – відстань від точки $(\varphi(t),\psi(t))\in\Gamma(f)$ $(t\in T)$ до прямої l обчислюється за формулою:

$$d(t)=\frac{|A\varphi(t)+B\psi(t)+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad \textbf{(1)}$$

Пряма l, що задається рівнянням $Ax+By+C=0$, називається ***<u>асимптотою графіка</u>*** $\Gamma(f)$ при $t\to t_0$ (або $t\to t_0+0$, $t\to t_0-0$, $t_0\in\overline{R}$), якщо виконується дві умови: ***1)*** $d(t)\to 0$; ***2)*** $\varphi^2(t)+\psi^2(t)\to+\infty$ при $t\to t_0$.

Розглянемо можливі випадки.

1) $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=a\in R \ \wedge \lim\limits_{t\to t_0}\psi(t)=\infty \Rightarrow d(t)\to 0 \Leftrightarrow A\varphi(t)+B\psi(t)+C\to 0 \Leftrightarrow B=0$, $a=-\frac{C}{A}$ і рівняння асимптоти має вигляд $x=a$ – така пряма називається ***<u>вертикальною асимптотою графіка функції</u>***.

2) $\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t)=b\in R \ \wedge \lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=\infty \Rightarrow d(t)\to 0 \Leftrightarrow A\varphi(t)+B\psi(t)+C\to 0 \Leftrightarrow A=0$, $b=-\frac{C}{B}$ і рівняння асимптоти має вигляд $y=a$ – така пряма називається ***<u>горизонтальною асимптотою графіка функції</u>***.

3) $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t)=\infty \Rightarrow d(t)\to 0 \Leftrightarrow A\varphi(t)+B\psi(t)+C\to 0 \Leftrightarrow \varphi(t)\left(\frac{A}{B}+\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right)\to-\frac{C}{B} \Leftrightarrow \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\to-\frac{A}{B}=k\wedge\psi(t)-k\varphi(t)\to-\frac{C}{B}=b$ і рівняння асимптоти набуває вигляду $y=kx+b$ – така пряма називається ***<u>похилою асимптотою графіка функції</u>***.

У випадку явного надання функції ці три випадки переписуються таким чином:

Нехай функція $I\xrightarrow{f}R$, де I – проміжок числової функції.

1) $x=x_0$ – вертикальна асимптота, якщо $f(x_0-0)=\infty$ (або $f(x_0+0)=\infty$);

2) $y=b$ – горизонтальна асимптота, якщо $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$);

3) $y = kx + b$ – похила асимптота, якщо при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) $\frac{f(x)}{x} \to k \in R \setminus \{ 0 \}$ $\wedge\ f(x) - kx \to b \in R$.

Схема побудови графіка функції:

1) перевірка на парність, періодичність, D_f, E_f, можливі точки розриву;
2) асимптоти графіка;
3) проміжки монотонності, екстремуми;
4) проміжки зберігання опуклості, точки перегину.

<u>Приклад 1.</u> $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t}{t^2 - 1}$.

Спочатку побудуємо $x(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$.

<u>Вертикальна асимптота</u>: $t = 1$.

<u>Горизонтальних асимптот</u> немає.

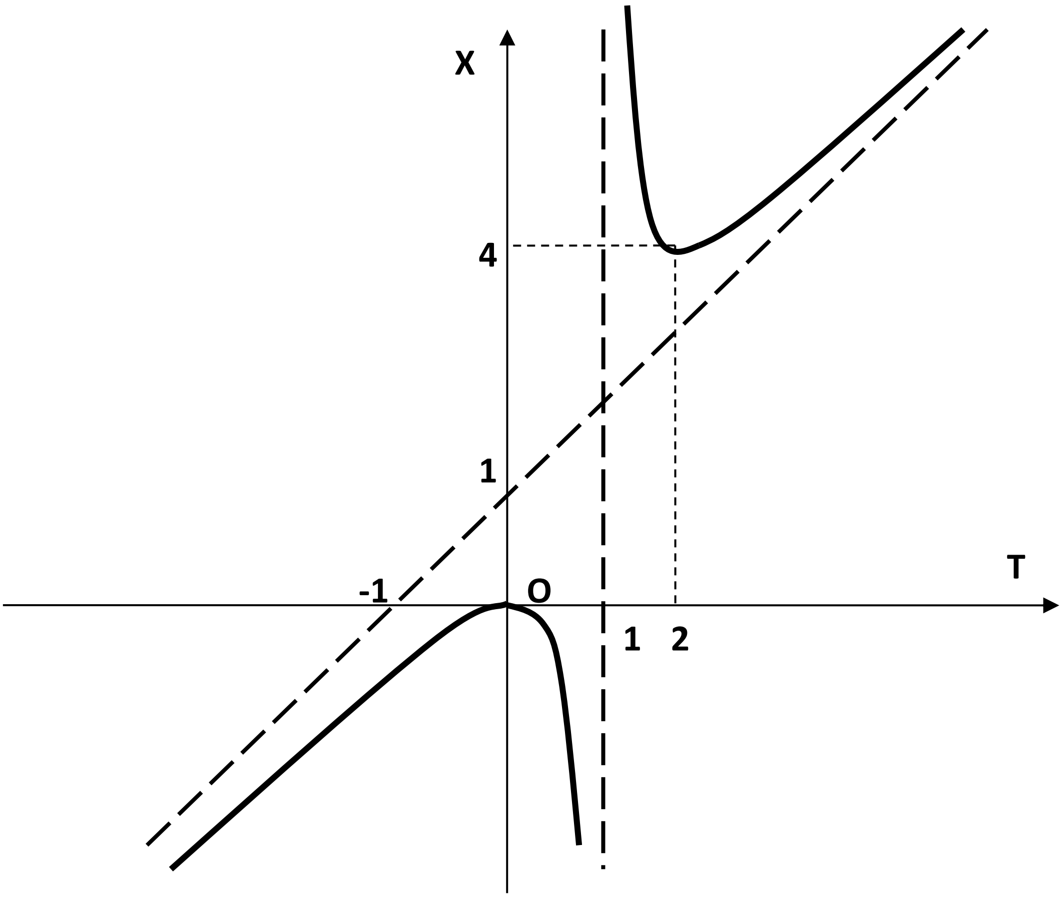
$$k = \lim_{t \to \infty} \frac{t^2}{(t-1)t} = 1,\ b = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{t^2}{t-1} - t \right) = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{t-1} = 1 \Rightarrow$$ *<u>похила асимптота</u>* $x = t + 1$.

$$x'(t) = \frac{2t(t-1) - t^2}{(t-1)^2} = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2} \Rightarrow$$

$x_{\max} = x(0) = 0$; $x_{\min} = x(2) = 4$.

<u>Зміна знаків похідної</u>:

Графік функції зображено на рисунку.



Далі будуємо $y(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1}$.

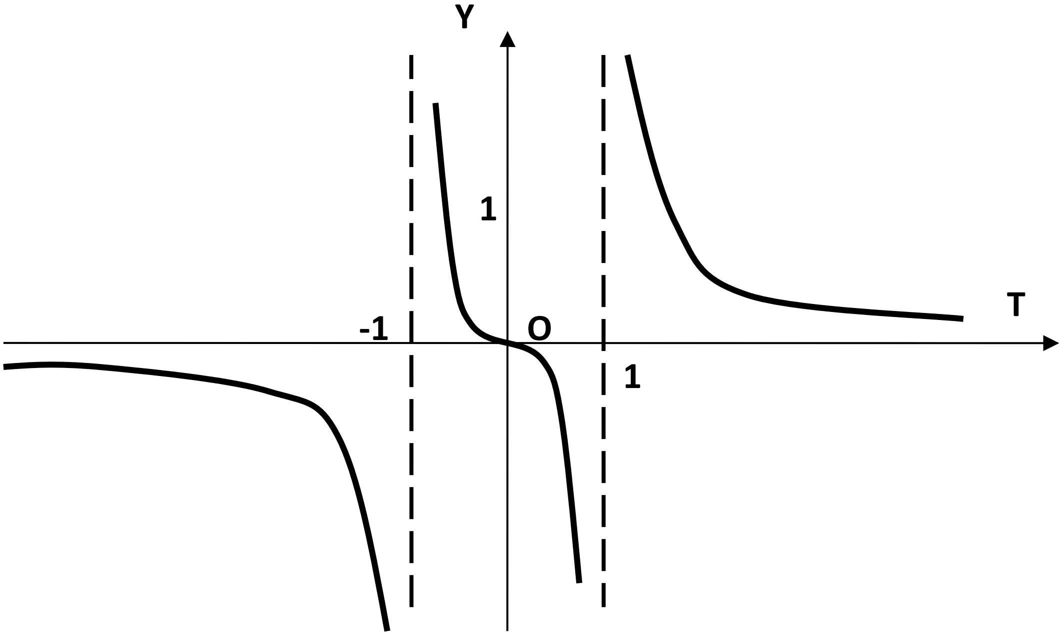
<u>*Вертикальні асимптоти*</u>: $t = \pm 1$.

<u>*Горизонтальна асимптота*</u> $y = 0$.

<u>*Похилих асимптот*</u> немає.

$y'(t) = \dfrac{t^2 - 1 - 2t^2}{(t^2 - 1)^2} = -\dfrac{1 + t^2}{(t^2 - 1)^2} < 0 \Rightarrow$ функція спадає на всій осі.

Графік функції зображено на рисунку.



Тепер переходимо до побудови загального параметричного графіку.

Починаємо з досліджень на асимптоти, вибираємо усі можливі значення, де принаймні одна з двох змінних x чи y прямує до нескінченності:	t	∞	-1	1
	x	∞	$-\frac{1}{2}$	∞
	y	0	∞	∞

Висновок: ___горизонтальна асимптота___: $y = 0$; ___вертикальна асимптота___: $x = -\frac{1}{2}$; при $t = 1$ можлива похила асимптота, з'ясуємо, чи є вона там насправді.

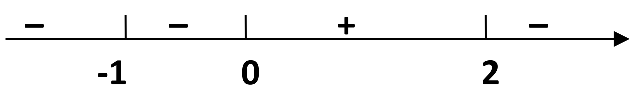
$$k = \lim_{t\to 1}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 1}\frac{t}{t^2-1}\cdot\frac{t-1}{t^2} = \lim_{t\to 1}\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{t\to 1}\big(y(t) - kx(t)\big) = \lim_{t\to 1}\left(\frac{t}{t^2-1} - \frac{t^2}{2(t-1)}\right) = \lim_{t\to 1}\frac{2t-t^3-t^2}{2(t^2-1)} = \frac{0}{0} \text{ (по Лопіталю) } \Rightarrow$$

$\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{2-3t^2-2t}{4t} = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow$ ___похила асимптота___: $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$.

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1+t^2}{(t^2-1)^2}}{\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}} = -\frac{1+t^2}{t(t+1)^2(t-2)}$$

___Зміна знаків похідної___:



Екстремумів немає.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\left(\frac{1+t^2}{t^4-3t^2-2t}\right)'}{\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}}=\frac{2t(t^4-3t^2-2t)-(4t^3-6t-2)(1+t^2)}{t^2(t+1)^4(t-2)^2}\cdot\frac{(t-1)^2}{t(t-2)}=$$

$$=\frac{2(t-1)^2(t^5+2t^3+t^2-3t-1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^4}=\frac{2(t-1)^2(t^3+3t+1)(t^2-1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^4}=\frac{2(t-1)^3(t^3+3t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^3},$$

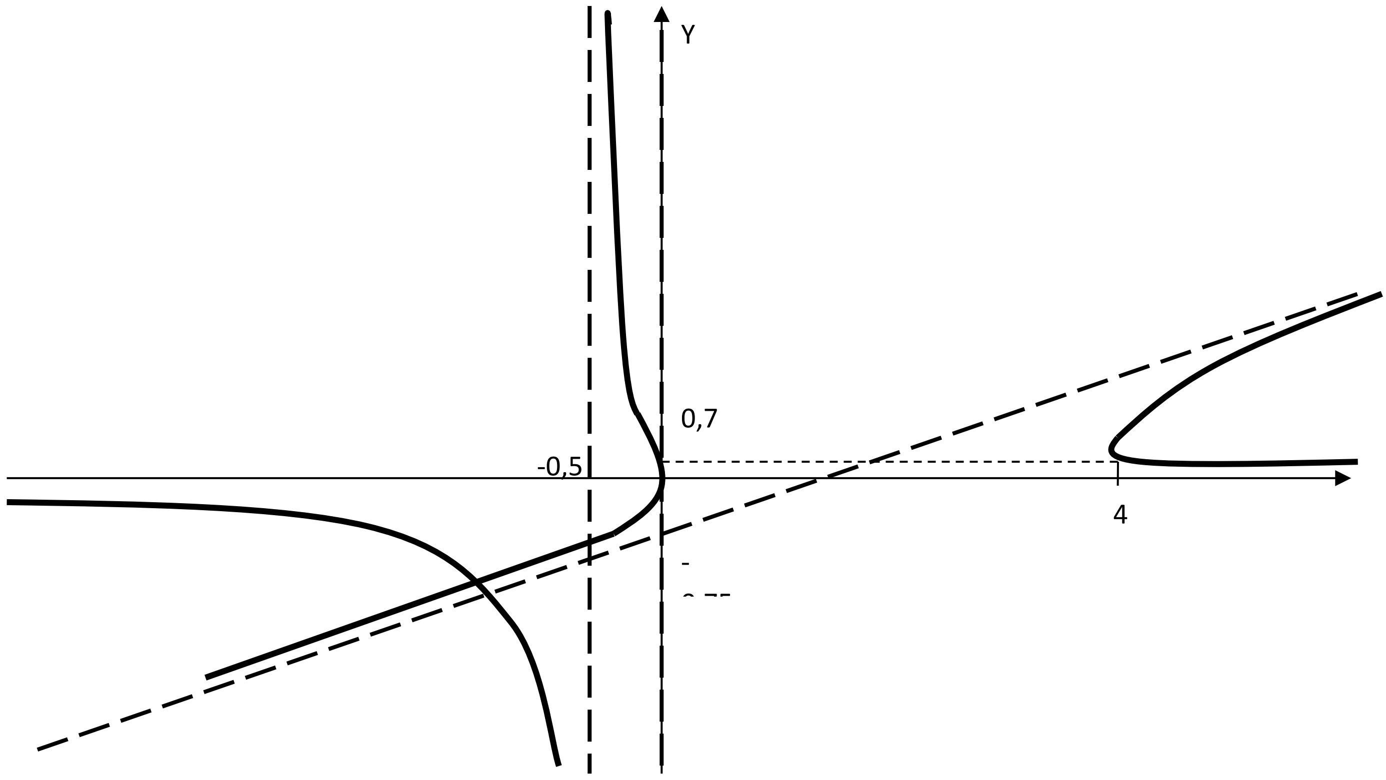
для подальшого з'ясуємо, які корені має множник $f(t)=t^3+3t+1$. Її похідна $f'(t)=3t^2+3>0$. Тобто функція $f(t)$ - зростає, а тому має рівно один дійсний корінь. З того, що $f(-1)=-3$, а $f(0)=1$ ми маємо, що корінь лежить на проміжку $(-1{,}0)$, позначимо його t^* та будемо наближено вважати рівним $t^*\approx-0{,}35$. Таким чином для другої похідної остаточно маємо такий вигляд: $y''_{xx}=\frac{2(t-1)^3(t-t^*)g(t)}{t^3(t-2)^3(t+1)^3}$, де функція $g(t)$ - додатна.

<u>*Зміна знаків другої похідної*</u>:

−		+		−		+		−		+
	-1		t^*		0		1		2	

Після усього цього ми можемо скласти остаточну табличку для побудови загального графіка.

t	$-\infty$		-1		t^*		0		1		2		$+\infty$
x	$-\infty$		$-0{,}5$		$\approx-0{,}1$		0		∞		4		$+\infty$
y	-0		∞		$\approx 0{,}4$		0		∞		$\approx 0{,}67$		$+0$
y'		↘		↘		↘		↗		↗		↘	
y''		∩		∪		∩		∪		∩		∪	


Y
0,7
-0,5
4
-

Інтегральне числення

Означення 1.

Нехай $f : R \to R$. Функція $F : R \to R$ називається первісною функції f(x), якщо $D_f = D_F$ і $\forall x \in D_f$ виконується $F'(x) = f(x)$. Оскільки в позначеннях Лейбніца $\frac{dF}{dx} = f(x), dF = f(x)dx$, і $F(x) = \int f(x)dx$ називається невизначеним інтегралом.

Теорема 1. (Про структуру первісної)

$F : R \to R$ - первісна для функції $f : R \to R$, ($\forall x \in D_f = D_F, F'(x) = f(x)$).

Для того, щоб довільна функція Φ(x) була первісною для $f(x) \Leftrightarrow \Phi(x) - F(x) = C, C \in R$.

Доведення

Необхідність. Нехай Φ(x) – первісна для $f(x) : \Phi'(x) = f(x), (\Phi - F)' = \Phi' - F' = f(x) - f(x) = 0$, за наслідком теореми Лагранжа $\Rightarrow \Phi(x) - F(x) = C$.

Достатність. Нехай $\Phi(x) - F(x) = C$, доведемо, що $\Phi'(x) = f(x), (\Phi - F)' = \Phi' - F' = \Phi'(x) - f(x) = 0 \Rightarrow \Phi'(x) = f(x) \Rightarrow$ що Φ(x) первісна.

Означення 2.

Сукупність всіх первісних функцій для f(x) називається невизначеним інтегралом і $\int f(x)dx = \{F(x) + C | x \in D_f, C \in R\}$, де $F'(x) = f(x)$. Як правило, позначення множини опускають і пишуть $F(x) + C$.

Інтеграл Ньютона-Лейбніца

Означення 3.

Функція $f : R \to R$ називається інтегровною в сенсі Ньютона-Лейбніца на множині $X \in D_f$, якщо $\forall a \in D_f$ вона має первісну на цій множині, тобто $F(x) = \int_a^x f(t)dt \overset{def}{\Leftrightarrow} \{F(a) = 0 \wedge \forall x \in D_f : F'(x) = f(x)\}$.

Функція F(x) називається інтегралом Ньютона-Лейбніца з фіксованою нижньою межею a і змінною верхньою x. Її значення F(b) в точці $b \in D_f$ називається визначеним інтегралом Ньютона-Лейбніца і позначається $\int_a^b f(t)dt, t$ - змінна інтегрування, від вибору якої величина інтегралу не залежить.

Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема 2.

Якщо $f: R \to R$ інтегровна у розумінні Ньютона-Лейбніца на D_f і Φ – її первісна, то $\forall a \in D_f$ і $\forall b \in D_f$ $\int_a^b f(x)dx$ $\exists$, однозначно визначений і має місце рівність: $\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) \overset{def}{=} \Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$, яка називається формулою Ньютона-Лейбніца.

Властивості інтеграла Ньютона-Лейбніца

1. Якщо $f: R \to R$ інтегровна в сенсі Ньютона-Лейбніца, то $\forall a,b \in D_f$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Дійсно,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$$

2. Якщо $f: R \to R$ інтегровна в сенсі Ньютона-Лейбніца, то $\forall a,b,c \in D_f$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(c) = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ Це властивість адитивності.

3. Якщо $f: R \to R$ інтегровна в сенсі Ньютона-Лейбніца, то $\forall a,x \in D_f$, $(\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$

$$(\int_x^a f(t)dt)' = -f(x)$$

$$(\int_a^x f(t)dt)' = (F(x) - F(a))' = (F'(x) - F'(a)), F'(a) = 0 \Rightarrow (\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$$

4. Якщо $f: R \to R$ і $g: R \to R$, $D_f = D_g$ інтегровані в сенсі Ньютона-Лейбніца, тоді $\forall \lambda, \mu \in R$, функція $(\lambda f + \mu g)(x)$ також інтегровна в сенсі Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Таблиця первісних

Функція	**Первісна**	**Функція**	**Первісна**
0	**C**	$\frac{1}{x^2-1}, \frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\|, \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	tgx

$\frac{1}{x}, \frac{1}{x+a}$	$\ln\|x\|, \ln\|x+a\|$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$ctgx$
e^x	e^x	chx	shx
$a^x, a>0$	$\frac{a^x}{\ln a}$	shx	chx
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctgx$	$\frac{1}{sh^2 x}$	$-cthx$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}$	$\frac{1}{ch^2 x}$	thx

Методи обчислення інтеграла Ньютона-Лейбніца

1. Метод заміни змінної

Нехай $f: R \to R, \varphi: R \to R, \exists \varphi'(x), \forall x \in X, X = D_{f\circ\varphi}$. Якщо $f(\tau), \partial e \tau = \varphi(x)$, інтегрована за Ньютоном-Лейбніцем функція на множині X, то функція $(f\circ\varphi)\varphi'$ – також інтегрована та для $, \forall a, b \in X$ має місце формула заміна змінної в інтегралі

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\tau)d\tau, \tau = \varphi(x).$$

Приклади:

1. $$\int_{x_0}^{x} \frac{arctgt}{1+t^2}dt = \left| \begin{matrix} arctgt = \tau \\ d\tau = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int_{arctgx_0}^{arctgx} \tau d\tau = \frac{\tau^2}{2}\Bigg|_{arctgx_0}^{arctgx} = \frac{(arctgx)^2}{2}\ \forall (x_0 \in D_f, x \in D_f)$$

2. $$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \left| \begin{matrix} a>0 \\ x = a\sin t \\ dx = a\cos t dt \\ t: 0, \dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt = a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}(t+\frac{\sin 2t}{2})\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2}\pi/2$$

Зауваження:

Якщо в інтегралі чисельник є похідною від знаменника, то $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{f'(t)dt}{f(t)} = \ln|f(t)| \Big|_{x_0}^{x}$

3. $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{tdt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| - \frac{1}{2}\ln|1+x_0{}^2| = \frac{1}{2}\ln|1+x^2|$

2. Метод інтегрування частинами
Теорема 3.

$u: R \to R$ і $v: R \to R$, $D_u = D_v$, $\exists u'(x), v'(x)$ для $\forall x \in D_u = D_v$, і нехай існує первісна для $u'v$, тоді існує первісна для uv' і має місце інтегрування частинами:

$$d(u \cdot v) = udv + vdu, udv = d(u \cdot v) - vdu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b udv = \int\limits_a^b d(uv) - \int\limits_a^b vdu \Rightarrow \int\limits_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu, \forall (a,b) \in D_u$$

Приклади:

1. $\int\limits_{x_0}^{x} arctgtdt = \begin{vmatrix} u = arctgt, & dv = dt \\ du = \frac{1}{1+t^2}dt, & v = t \end{vmatrix} = arctgt \cdot t \Big|_{x_0}^{x} - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{t}{1+t^2}dt = xarctgx - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$

2. I= $\int\limits_{x_0}^{x} e^{at}\sin btdt = \begin{vmatrix} u = \sin bt & v = \frac{1}{a}e^{at} \\ du = b\cos btdt & dv = e^{at}dt \end{vmatrix} = \frac{\sin bte^{at}}{a}\Big|_{x_0}^{x} - \frac{b}{a}\int\limits_{x_0}^{x} e^{at}\cos btdt = \begin{vmatrix} \cos bt = u \\ e^{at}dt = dv \\ du = -\frac{1}{b}\sin btdt \end{vmatrix} =$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int\limits_{x_0}^{x} e^{at}\sin btdt.$$

$$(1+\frac{b^2}{a^2})I = \frac{\sin bxe^{ax}}{a} - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx$$

$$I = \frac{1}{a^2+b^2}(ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx)$$

3. $I_1 = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} - \frac{1}{a}arctg\frac{x_0}{a}$. $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{(a^2+t^2)^n} = I_n$.

$$I_n = \left| \begin{matrix} u = \dfrac{1}{(a^2+t^2)^n}, & dv = dt \\ du = \dfrac{-2nt}{(a^2+t^2)^{n+1}}dt, & v = t \end{matrix} \right| = \frac{t}{(a^2+t^2)^n}\Bigg|_{x_0}^{x} + 2n\int_{x_0}^{x}\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n\int_{x_0}^{x}\frac{a^2+t^2-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}dt = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{(t^2+a^2)^n} - 2na^2\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

$$2na^2 I_{n+1} = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + (2n-1)I_n + C$$

$$I_1 = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}((2n-1)I_n + \frac{x}{(a^2+x^2)^n}) + C$$

Деякі інтеграли, що не обчислюються за допомогою елементарних функцій

1. $\int_{x_0}^{x} e^{-t^2}dt$ - Пуассона

2. $\int_{x_0}^{x} \sin t^2 dt$ – Френеля

3. $\int_{x_0}^{x} \cos t^2 dt$ - Френеля

4. $\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\ln t}$

5. $\int_{x_0}^{x} \frac{\sin t}{t}dt$

Інтегрування дробово-раціональних функцій

Інтегрування простих дробів

Клас раціональних функцій-клас функцій, для яких інтегрування може бути виконане в скінченному вигляді. Дробово-раціональна функція – це відношення двох многочленів.

Будь-яка дробово-раціональна функція інтегрується в скінченному вигляді. Тому задачу про інтегрування деякої функції в скінченному вигляді можна вважати розв'язаною, якщо вдається звести її до інтегрування дробово-раціональної функції.

$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x).}$. Якщо $n \geq m -$ то дріб неправильний. Кожний неправильний дріб може бути представлений у вигляді многочлена (ціла частина) та правильного дробу. Виконав ділення, будемо мати $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=W(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}, W(x) -$ деякий многочлен, $\dfrac{R}{Q}$ - правильний дріб. Виділимо із класу правильних дробів 4 типи основних елементарних дробів:

I. $\dfrac{A}{x-a}$,

II. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+2px+q}$,

IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^k}$,

$a, p, q, M, N \in R, k>1-$ цілі,

$x^2+2px+q$ - не має дійсних коренів, коли $D<0, p^2-q<0, q-p^2>0$

Інтегрування простих дробів

I. $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{Adt}{t-a}=A\ln|t-a|\Bigg|_{x_0}^{x}=A\ln|x-a|+C; \forall(x_0 \in D_f, x \in D_f)$,

II. $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{Adt}{(t-a)^n}=A\int_{x_0}^{x}\frac{d(t-a)}{(t-a)^n}=A\int_{x_0}^{x}\frac{dz}{z^n}=|z=t-a|=A\int_{x_0}^{x}z^{-n}dz=A\frac{z^{1-n}}{1-n}=A\frac{(t-a)^{1-n}}{1-n}\Bigg|_{x_0}^{x}=A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n}+C$

III. $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{(Mt+N)dt}{t^2+2pt+q}=\int_{x_0}^{x}\frac{(Mt+N)dt}{(t+p)^2+q-p^2}=\begin{vmatrix}\tau=t+p, & t=\tau-p \\ d\tau=dt, & q-p^2\overset{\Delta}{=}a^2\end{vmatrix}=\int_{x_0+p}^{x+p}\frac{(M\tau-Mp+N)d\tau}{\tau^2+a^2}=$

$$=M\int_{x_0+p}^{x+p}\frac{\tau d\tau}{\tau^2+a^2}+\int_{x_0+p}^{x+p}\frac{(N-Mp)d\tau}{\tau^2+a^2}=\frac{M}{2}\int_{x_0+p}^{x+p}\frac{d\tau^2}{\tau^2+a^2}+(N-Mp)\int_{x_0+p}^{x+p}\frac{d\tau}{\tau^2+a^2}=\frac{M}{2}\ln(\tau^2+a^2)\Bigg|_{x_0}^{x}+$$

$$+(N-Mp)\frac{1}{a}arctgn\frac{\tau}{a}\Bigg|_{x_0+p}^{x+p}=\frac{M}{2}\ln\left|(x+p)^2+q-p^2\right|+\frac{(N-Mp)}{a}arctgn\frac{x+p}{q}+C$$

IV. $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{(Mt+N)dt}{((t+p)^2+a^2)^n}=\begin{vmatrix}\tau=t+p, & t=\tau-p \\ d\tau=dt, & q-p^2\overset{\Delta}{=}a^2\end{vmatrix}=\int_{x_0+p}^{x+p}\frac{(M\tau-Mp+N)d\tau}{(\tau^2+a^2)^n}=$

$$= \frac{M}{2}\int_{x_0+p}^{x+p}\frac{2\tau d\tau}{(\tau^2+a^2)^n} + (N-Mp)\int_{x_0+p}^{x+p}\frac{d\tau}{(\tau^2+a^2)^n}$$ Далі використовуємо обчислення In, пр. 3.

Розвинення правильних дробів на прості

З вищої алгебри відомо, що кожен многочлен n-го степеня з дійсними коефіцієнтами і з старшим коефіцієнтом = 1, можна однозначно представити у вигляді співмножників виду $(x-a)$ і (x^2+px+q). Якщо є співмножники, що співпадають, то маємо:

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{n1}(x-a_2)^{n2}....(x-a_k)^{nk}(x^2+p_1x+q_1)^{m1}(x^2+p_2x+q_2)^{m2}....(x^2+p_rx+q_r)^{mr}$$

$a_{1,}a_{2,}a_3,....a_k -$ дійсні корені мн-на $Q_n(x)$;

$n_i, i=1..k$ - кратність коренів: $p_{i,}q_i -$дійсні коефіцієнти тричленів,

$m_{j,}\ j=1..r$ - цілі числа – кратності квадратичних тричленів.

$$\sum_{i=1}^{k} n_i + 2\sum_{j=1}^{r} m_j = n.$$

Будь-який правильний раціональній дріб єдиним способом розкладається на скінченне число елементарних дробів:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)^{n1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{n1-1}} + ... + \frac{A_{n1}}{x-a_1} + \frac{B_1}{(x-a_2)^{n2}} + \frac{B_2}{(x-a_2)^{n2-1}} + ... +$$

$$+ \frac{B_{n2}}{x-a_2} + ... + \frac{C_1}{(x-a_k)^{nk}} + \frac{C_2}{(x-a_k)^{nk-1}} + ... + \frac{C_{nk}}{x-a_k} + ... +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_rx+q_r)^{mr}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_rx+q_r)^{mr-1}} + ... + \frac{M_rx+N_r}{x^2+p_rx+q_r}$$

Для того, щоб визначити невідомі коефіцієнти, множимо обидві частини на $Q(x)$. Рівність многочленів в лівій і правій частинах для всіх x викликає рівність коефіцієнтів при однакових степенях x. Прирівнюємо їх і отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод знаходження коефіцієнтів розвинення правильного раціонального дробу на суму простих дробів називається методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{(2t-1)dt}{t^3(t-1)^2(t^2+1)};\frac{2t-1}{t^3(t-1)^2(t^2+1)} = \frac{A_1}{t^3} + \frac{A_2}{t^2} + \frac{A_3}{t} + \frac{B_1}{(t-1)^2} + \frac{B_2}{(t-1)} + \frac{Mt+N}{t^2+1}$$

$$2t-1 = A_1(t-1)^2(t^2+1) + A_2t(t-1)^2(t^2+1) + A_3t^2(t-1)^2(t^2+1) + B_1t^3(t^2+1) +$$

$$+ B_2t^3(t-1)(t^2+1) + (Mt+N)t^3(t-1)^2$$

t^6 $\quad A_3 + B_2 + M = 0$

t^5 $\quad A_2 + B_1 - 2A_3 + N - 2M - B_2 = 0$

t^4 $\quad A_1 - 2A_2 + 2A_3 + B_2 + M - 2N = 0$

t^3 $\quad -2A_1 - 2A_2 - 2A_3 + B_1 - B_2 + N = 0$

t^2 $\quad 2A_1 - 2A_2 + A_3 = 0$

t^1 $\quad -2A_1 + A_2 = 2$

t^0 $\quad -1 = A_1$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(2t-1)dt}{t^3(t-1)^2(t+1)} = -\frac{1}{2} A_1 \frac{1}{x^2} - \frac{A_2}{x} + A_3 \ln|x| - B_1 \frac{1}{x-1} + B_2 \ln|x-1| + \frac{M}{2} \ln|x^2+1| + Narctgx$$

Коефіцієнт $A_{i,} i = 1{,}3; B_j, j = 1{,}2, M, N$ знаходяться із розв'язку системи лінійних рівнянь.

Інтегрування деяких класів ірраціональних функцій

Ірраціональна функція-це елементарна функція, побудована із степеневих функцій

з раціональними показниками, що не зводиться до раціональної або дробово-раціональної.

I. Нехай *k, e, m, n* –цілі числа.

$\int_{x_0}^{x} R(t; t^{\frac{k}{e}}, ..., t^{\frac{m}{n}})dt$ зводиться до інтегрування від раціонального дробу підстановкою

$t = \tau^r, dt = r\tau^{r-1}d\tau,$ де r - спільний знаменник дробів $\frac{k}{e}, ..., \frac{m}{n}$.

Приклад 1:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}}{\sqrt[4]{t}} dt = \left| \begin{matrix} t = \tau^{12} \\ dt = 12\tau^{11} d\tau \end{matrix} \right| = \int_{\sqrt[12]{x_0}}^{\sqrt[12]{x}} \frac{(\tau^6 + \tau^4) 12\tau^{11} d\tau}{\tau^3} = 12 \int_{\sqrt[12]{x_0}}^{\sqrt[12]{x}} (\tau^{14} + \tau^{12}) d\tau = 12\left(\frac{\tau^{15}}{15} + \frac{\tau^{13}}{13}\right)\Bigg|_{\sqrt[12]{x_0}}^{\sqrt[12]{x}} =$$

$$= 12\left(\frac{x^{\frac{15}{12}}}{15} + \frac{x^{\frac{13}{12}}}{13}\right).$$

II. $\int_{x_0}^{x} R\left(t; \sqrt[e]{\left(\frac{at+b}{ct+g}\right)^k};....;\sqrt[n]{\left(\frac{at+b}{ct+g}\right)^m}\right)dt.$

Підстановка $\tau^r = \frac{at+b}{ct+g}, dt = d\left(\frac{g\tau^r - b}{a - c\tau^r}\right)$ де r - спільне кратне чисел $e,...,n$ зводиться до інтеграла від раціонального дробу.

Приклад 2:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}dt = \left| \begin{matrix} \frac{t-1}{t+1} = \tau^2 \\ t = \frac{\tau^2+1}{1-\tau^2} \\ dt = \frac{4\tau}{(1-\tau^2)^2}d\tau \end{matrix} \right| = 4\int_{\frac{x_0-1}{x_0+1}}^{\frac{x-1}{x+1}} \left(\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\right)\frac{\tau^2 d\tau}{(1-\tau^2)^2} = 4\int_{\frac{x_0-1}{x_0+1}}^{\frac{x-1}{x+1}} \frac{\tau^2 d\tau}{(1-\tau^2)(1+\tau^2)}$$

$\frac{\tau^2}{(\tau^2+1)(1-\tau)(1+\tau)} = \frac{A}{(1+\tau)} + \frac{B}{(1-\tau)} + \frac{Cz+D}{\tau^2+1}$ і т. д. (A=-1/4, B=1/4, C=0, D=1/2.

III. $\int_{x_0}^{x} R(t; \sqrt{at^2+bt+c})dt$ зводиться до інтеграла від раціонального дробу застосуванням однієї з підстановок Ейлера.

Перша підстановка Ейлера застосовується у випадку, якщо $a > 0.$ $\sqrt{at^2+bt+c} = y - \sqrt{a}t$

$$\sqrt{at^2+bt+c} = y - \sqrt{a}\left(\frac{y^2-c}{2\sqrt{a}y+b}\right) = \frac{\sqrt{a}y^2+by+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}y+b}.$$

Після інтегрування дробу повертаємось до змінної t підстановкою

$$y = \sqrt{a}t + \sqrt{at^2+bt+c}$$

Друга підстановка Ейлера застосовується у випадку, якщо $c > 0.$

$\sqrt{at^2+bt+c} = ty + \sqrt{c},$ тоді $t = \frac{2\sqrt{c}y - b}{a - y^2}, \sqrt{at^2+bt+c} = \frac{\sqrt{c}y^2 - by + \sqrt{c}a}{a - y^2}.$

Третя підстановка Ейлера застосовується у випадку, якщо квадратичний тричлен at^2+bt+c має різні дійсні корені $t_1, t_2,$ $a > 0.$

$\sqrt{at^2+bt+c}=\sqrt{a(t-t_1)(t-t_2)}=\sqrt{a}|t-t_1|\sqrt{\frac{t-t_2}{t-t_1}}$ і маємо $R_1=\left(t,\sqrt{\frac{a(t-t_2)}{t-t_1}}\right)$.

Далі заміна $\sqrt{\frac{a(t-t_2)}{t-t_1}}=y$.

Приклад 3:

Обчислити: $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Застосуємо першу підстановку: $\sqrt{x^2+x+1}=t+x$, тоді після піднесення до квадрату та скорочення одержимо: $x=\frac{t^2-1}{1-2t}$, $dx=\frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}dt$, $x+\sqrt{x^2+x+1}=\frac{t-2}{1-2t}$. Таким чином наш інтеграл набуває такого вигляду: $\int\frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)(t-2)}dt$, який є дуже простим.

Відзначимо, що підстановки призводять до громіздких обчислень.

На додаток відзначимо інші способи інтегрування:

Виділимо повний квадрат $at^2+bt+c=a\left(\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$.

Заміною $y=t+\frac{b}{2a}$ в залежності від знака величин a і $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ інтеграл зводиться до інтеграла одного з видів:

1) $\int R(t;\sqrt{q^2-t^2})dt$, заміна $t=q\sin u$ зводить до $\int R(\sin u,\cos u)du$.
2) $\int R(t;\sqrt{q^2+t^2})dt$, заміна $t=qshu$ зводить до $\int R(shu,chu)du$.
Або заміна $t=qtgu$ зводить до $\int R(\sin u,\cos u)du$.

3) $\int R(t;\sqrt{t^2-q^2})dt$, заміна $t=qchu$ зводить до $\int R(shu,chu)du$.
Або заміна $t=q/\cos u$ зводить до $\int R(\sin u,\cos u)du$.

Інтегрування біноміальних диференціалів

Вираз $x^m(a+bx^n)^p$, де m, n, p - раціональні числа, називається біноміальним диференціалом.

Теорема (Чебишева) $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ виражається в скінченному вигляді тільки в наступних трьох випадках:

I. p - ціле;

II. $\frac{m+1}{n}$ - ціле;

III. $\frac{m+1}{n}+p$ - ціле.

I. $m=\frac{k}{e}$, $n=\frac{r}{s}, k, e, r, s-$ цілі. $\lambda-$ найменше спільне кратне: $\lambda=V_1 e, \lambda=V_2 S, x=t^{\lambda}$

$dx=\lambda t^{\lambda-1}dt,\ \ x^m(a+bx^n)^p\,dx=t^{V_1 k}(a+bt^{V_2 r})^p\,\lambda t^{\lambda-1}dt;$

II. $a+bx^n=t^s$, де $s-$ знаменник дробу p;

III. $ax^{-n}+b=t^s, s-$ знаменник дробу p.

Приклад 4:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}=\int(x^2+1)^{-3/2}dx, m=0, n=2, p=-3/2,$$

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1.$$

$$x^{-2}+1=t^2, x^{-2}=t^2-1, x=(t^2-1)^{-1/2}$$

$$dx=-\frac{1}{2}(t^2-1)^{-3/2}2tdt=-t(t^2-1)^{-3/2}dt$$

$$-\int t^{-3}(t^2-1)^{3/2}t(t^2-1)^{-3/2}dt=-\int t^{-2}dt=\frac{1}{t}=(1+\frac{1}{x^2})^{-1/2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.$$

Навчимося інтегрувати такі вирази:

1) $\frac{P_n(x)}{y}$; ***2)*** $\frac{1}{(x-\alpha)^n y}$; ***3)*** $\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n y}$, $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, Розглянемо по черзі методи їх інтегрування:

1) Для інтегрування виразу $\frac{P_n(x)}{y}$ застосовуємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \equiv Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,, \qquad \textbf{(3)}$$

де коефіцієнти многочлену Q_{n-1} і λ – невідомі, які знаходяться шляхом диференціювання рівності **(3)**:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{Q'_{n-1}(x)\left(ax^2+bx+c\right)+\left(ax+\frac{b}{2}\right)Q_{n-1}(x)+\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,.$$

__Приклад 5.__ Обчислити: $\int\frac{(x^3+2x^2+3x-4)dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$\int\frac{(x^3+2x^2+3x-4)dx}{\sqrt{x^2+1}}=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Диференціюємо одержану рівність і маємо, що

$$\frac{(x^3+2x^2+3x-4)}{\sqrt{x^2+1}}=(2ax+b)\sqrt{x^2+1}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(ax^2+bx+c)+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow$$

$$x^3+2x^2+3x-4\equiv(2ax+b)(x^2+1)+x(ax^2+bx+c)+\lambda \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^3: 1=3a \\ x^2: 2=2b \\ x^1: 3=2a+c \\ x^0: -4=b+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=1 \\ c=\frac{7}{3} \\ \lambda=-5 \end{cases}.$$

Подальше інтегрування очевидне.

2) $$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}=\left|\begin{matrix}\frac{1}{x-\alpha}=t \\ x=\frac{1}{t}+\alpha,\ dx=-\frac{dt}{t^2}\end{matrix}\right|=-\int\frac{t^{n-2}dt}{\sqrt{a\frac{1}{t^2}+\frac{2\alpha}{t}+\alpha^2+\frac{b}{t}+b\alpha+c}}=$$

$$=-\int\frac{t^{n-2}dt}{\frac{1}{|t|}\sqrt{\left(c+b\alpha+\alpha^2\right)t^2+\left(2\alpha+b\right)t+a}}$$ – зводиться к типу ***1)***.

<u>Приклад 6.</u> Обчислити: $I=\int\frac{dx}{(x-1)^4\sqrt{4-x-x^2}}$.

Для спрощення, спочатку зробимо таку заміну: $\left|\begin{matrix}t=x-1\\ x=t+1\end{matrix}\right|\Rightarrow$

$$I=\int\frac{dt}{t^4\sqrt{2-3t-t^2}}=\operatorname{sgn}t\int\frac{dt}{t^5\sqrt{\frac{2}{t^2}-\frac{3}{t}-1}}=\left|\begin{matrix}u=\frac{1}{t}\\ du=-\frac{dt}{t^2}\end{matrix}\right|=-\operatorname{sgn}(x-1)\int\frac{u^3du}{\sqrt{2u^2-3u-1}},$$

таким чином інтеграл зведено до випадку ***1)***.

3) $I=\int\frac{\left(Mx+N\right)dx}{\left(x^2+px+q\right)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$

а) $ax^2+bx+c=a\left(x^2+px+q\right)\Rightarrow\ I=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{\left(Mx+N\right)dx}{\left(x^2+px+q\right)^{\frac{2n+1}{2}}}=\left|x+\frac{p}{2}=t\right|=$

$$=\int\frac{At+B}{\left(t^2+\gamma\right)^{\frac{2n+1}{2}}}dt=A\int\frac{tdt}{\left(t^2+\gamma\right)^{\frac{2n+1}{2}}}+B\int\frac{dt}{\left(t^2+\gamma\right)^{\frac{2n+1}{2}}}=\frac{A}{2}\int\left(u+\gamma\right)^{-\frac{2n+1}{2}}du+BI_2,$$

для обчислення інтегралу I_2 використовуємо підстановку Абеля:

$$I_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+\gamma\right)^{\frac{2n+1}{2}}}=\left|\begin{matrix}z=\frac{t}{\sqrt{t^2+\gamma}}, & t^2=z^2\left(t^2+\gamma\right)\Rightarrow t^2=\frac{z^2\gamma}{1-z^2}\\ tdt=\frac{\gamma zdz}{(1-z^2)^2}, & t^2+\gamma=\frac{z^2\gamma}{1-z^2}+\gamma=\frac{\gamma}{1-z^2}\end{matrix}\right|$$

$$=\int\frac{t}{t^2\sqrt{t^2+\gamma}\left(t^2+\gamma\right)^n}tdt=\int\frac{z}{\frac{z^2\gamma}{1-z^2}\cdot\left(\frac{\gamma}{1-z^2}\right)^n}\cdot\frac{\gamma zdz}{\left(1-z^2\right)^2}=\frac{1}{\gamma^n}\int\left(1-z^2\right)^{n-1}dz,$$

подальше інтегрування многочленну складнощів не викликає.

б) $I=\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+q\right)^n\sqrt{ax^2+c}}dx=I_1+I_2$.

$$I_1=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(x^2\right)}{\left(x^2+q\right)^n\sqrt{ax^2+c}}=\left|t=x^2\right|=\frac{m}{2}\int\frac{dt}{(t+q)^n\sqrt{at+c}}\Rightarrow$$

заміна $\sqrt{at+c}=u$ зводить до інтегрування раціональної функції.

$I_2=N\int\frac{dx}{\left(x^2+q\right)^n\sqrt{ax^2+c}}=$ (так само робиться підстановка Абеля)

$$\left|\begin{array}{c}\frac{x}{\sqrt{ax^2+c}}=t,\quad \frac{x^2}{ax^2+c}=t^2,\quad xdx=\frac{ctdt}{(1-at^2)^2}\\ x^2=\frac{ct^2}{1-at^2},\quad x^2+q=\frac{ct^2+q-aqt^2}{1-at^2}\end{array}\right|=\frac{N}{c}\int\frac{c\,dx}{\left(ax^2+c\right)\sqrt{ax^2+c}}\cdot\frac{ax^2+c}{\left(x^2+q\right)^n}=$$

$$=\frac{N}{c}\int\frac{c}{1-at^2\,\frac{(ct^2-aqt^2+q)^n}{(1-at^2)^n}}dt=,N\int\frac{\left(1-at^2\right)^{n-1}}{\left((c-aq)\,t^2+q\right)^n}dt$$

– раціональна функція.

в) Нехай $ax^2+bx+c=a\left(x^2+px+c_1\right)\Rightarrow$ заміна $\left(x+\frac{p}{2}\right)=t$ зводить до випадку ***б)***.

г) Загальний випадок заміною $x=\frac{\mu\,t+\nu}{1+t}$ та відповідним підбором μ і ν зводить інтеграл до випадку ***в)***. Про це більш детально на практичних заняттях.

Інтегрування тригонометричних виразів

Розглянемо раціональний вираз, аргументами якого виступають тригонометричні функції синус та косинус: $R(\sin x,\cos x)$. Усі методи інтегрування повинні зводити відповідні вирази до інтегрування раціональних функцій.

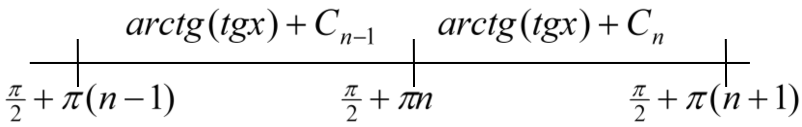
Зауважимо, що виконання відповідної заміни змінної може викликати звуження області визначення первісної по відношенню до підінтегральної функції, що суперечить визначенню інтеграла, а тому треба виконувати процедуру «зшивання відповіді», тобто відновлення узгодженості областей визначення вказаних функцій.

Приклад 1. Обчислити $I_1=\int\frac{dx}{\sin^2x+\cos^2x}\ \left(I_2=\int\frac{dx}{\sin^2x+2\cos^2x}\right)$.

Легко зрозуміти, що перший з цих інтегралів є просто $(x+C)$, але для нього доречно застосувати підстановку $t = tgx$, для другого інтегралу взагалі кращої підстановки немає. А тому складнощі будуть при дослідженні однакові.

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \left| \begin{matrix} t = tgx \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{tg^2 x + 1} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C =$$
$$= arctg(tgx) + C,\ x \neq \tfrac{\pi}{2} + \pi n,$$

але відповідь повинна бути визначеною при усіх $x \in R$. Це означає, що функцію треба «зшити» в точках розриву, це досягається завдяки різним сталим на кожному проміжку неперервності. Ця ситуація зображена на рисунку. Зшиваємо відповідь в точці $\frac{\pi}{2} + \pi n$:



$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + \pi n - 0} \left(arctg(tgx) + C_{n-1} \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + \pi n + 0} \left(arctg(tgx) + C_n \right) \Rightarrow \tfrac{\pi}{2} + C_{n-1} = -\tfrac{\pi}{2} + C_n \Rightarrow$$
$$C_n = C_{n-1} + \pi \Rightarrow C_n = C_0 + \pi n,$$

таким чином відповідь можна записати таким чином:

$$F(x) = \begin{cases} arctg(tgx) + \pi n + C_0,\ \frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi(n+1) \\ -\frac{\pi}{2} + \pi n + C_0, \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases},$$

при бажанні дещо звільнитися від залежності від номера проміжку n можна зробити такі перетворення:

$\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi(n+1) \Rightarrow n < \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\pi} < n+1 \Rightarrow \left[\frac{x}{\pi} - \frac{1}{2} \right] = n$, а тому відповідь має вигляд: $F(x) = \begin{cases} arctg(tgx) + \pi\left[\frac{x}{\pi} - \frac{1}{2}\right] + C_0,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \\ -\frac{\pi}{2} + \pi n + C_0, \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}$, зазначимо, що це інший запис такої простої функції, як $(x + C_0)$.

Зауважимо, що одержана функція F неперервна за побудовою на R, але з відповідної теореми про ліву та праву похідні неперервної функції вона також і неперервно-диференційована на R.

<u>Метод 1</u>. Універсальна тригонометрична підстановка

$t = tg\frac{x}{2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ $\Rightarrow$ раціоналізується будь-яка функція вигляду $R(\sin x, \cos x)$.

Приклад 2. Обчислити: $I = \int \frac{dx}{2\sin x + \cos x - 2}$.

Зробимо універсальну заміну: $I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 4t + 3}$, далі просто треба про інтегрувати цей вираз, але не забути про зшивання одержаної відповіді.

Приклад 3.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{5+\cos t} = \left| y = tg\frac{t}{2} \right| = 2\int_{tg\frac{x_0}{2}}^{tg\frac{x}{2}} \frac{dy}{(1+y^2)(5+\frac{1-y^2}{1+y^2})} = 2\int_{tg\frac{x_0}{2}}^{tg\frac{x}{2}} \frac{dy}{4y^2+6} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}} arctg \frac{\sqrt{2} tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right);$$

$-\pi < x < \pi$

Метод 2. Заміна $\sin x$***,*** $\cos x$ ***або*** $tg\, x$

а) Якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то підстановка $t = \sin x$ раціоналізує функцію, бо тоді R містить в кожному доданку або чисельника, або знаменника $\cos x$ в непарній степені. Тоді, забравши один $\cos x$ і заміна $dt = \cos x\, dx$ залишить $\cos x$ в парних степенях $\Rightarrow$ раціонально виражається через $t = \sin x$.

б) Якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, аналогічно попередньому $t = \cos x$.

в) Якщо $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$, раціоналізує її підстановка $t = tg\, x$.

Приклад 4. Обчислити: $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

Зауважимо, що тут можна використати будь-яку з трьох підстановок.

а) $t=\sin x$, маємо: $I=\int\frac{\cos xdx}{\sin^3 x\cos^6 x}=\int\frac{dt}{t^3(1-t^2)^3}$.

б) $t=\cos x$, маємо: $I=\int\frac{\sin xdx}{\sin^4 x\cos^5 x}=-\int\frac{dt}{t^5(1-t^2)^2}$.

в) $t=tg\,x$, маємо: $I=\int\frac{1}{tg^3 x\cos^6 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{(1+tg^2 x)^3 d(tgx)}{tg^3 x}=\int\frac{(1+t^2)^3}{t^3}dt$, з трьох раціональних функцій, що ми одержали остання є найпростішою.

$\int\sin^n x\cos^m xdx$ у випадку раціональних m і n зводиться до інтегрування біноміального диференціалу підстановкою $t=\sin^2 x, dt=2\sin x\cos xdx$:

$$\int\sin^n x\cos^m xdx=\frac{1}{2}\int\sin^{n-1}x(1-\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}}2\sin x\cos xdx=\frac{1}{2}\int(1-t)^{\frac{m-1}{2}}t^{\frac{n-1}{2}}dt.$$

Якщо m,n парні, додатні числа, то використовуємо формули зниження степеня

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

<u>Приклад 5.</u>

$$R(-\sin x;\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\sin^3 tdt}{1+\cos^2 t}=\left|\begin{matrix}y=\cos t\\ dy=-\sin tdt\end{matrix}\right|=-\int_{\cos x_0}^{\cos x}\frac{1-y^2}{1+y^2}dy=\int_{\cos x_0}^{\cos x}\left(1-\frac{2}{y^2+1}\right)dy=\cos x-2arctg\cos x+C$$

<u>Приклад 6.</u>

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\sin^2 t+3\cos^2 t}=\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\cos^2 t(tg^2 t+3)}=\left|\begin{matrix}tgt=y\\ dy=\dfrac{dt}{\cos^2 t}\end{matrix}\right|=\int_{tgx_0}^{tgx}\frac{dy}{3+y^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{3}}+C.$$

Первісна в широкому розумінні

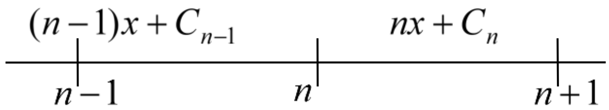
Внаслідок зв’язку між похідною та первісною (інтегралом Ньютона-Лейбніца) можна стверджувати, що первісна неперервної функції на проміжку повинна бути неперервною і навіть диференційованою. Якщо $[a,b]\xrightarrow{F}R$ є первісною функції $[a,b]\xrightarrow{f}R$,то $\forall x\in[a,b]$ $F'(x)=f(x)$. Але за теоремою Дарбу, $F'(x)$ приймає всі проміжні значення між $F'(a)=f(a)$ та $F'(b)=f(b)$ (хоча може бути розривною). Тому, навіть найпростіші кусково-неперервні функції $(\operatorname{sgn} x, [x])$ можуть не мати первісної, бо не приймають усіх проміжних значень.

Узагальнимо це поняття.

Нехай $[a,b]$ – деякий проміжок, функція $[a,b]\xrightarrow{F} R$ називається <u>***первісною в широкому розумінні***</u> (<u>***ПШР***</u>) функції $[a,b]\xrightarrow{f} R$, якщо F – неперервна і має похідну F', яка дорівнює f в усіх точках множини $[a,b]$, за виключенням , можливо, не більш як зліченої множини $X \subset [a,b]$.

<u>**Приклад 1.**</u> Знайти ПШР функції $f(x) = [x]$.

Метод знаходження ПШР дещо схожий до побудови первісної у випадку зшивання функції, але якщо там вимагалося неперервної диференційованості первісної в точках зшиву, то тут з означення ПШР достатньо її неперервності.



Оскільки при $x \in [n, n+1)$ $f(x) = n \Rightarrow F(x) = nx + C_n \Rightarrow$ Зшиваємо в т. x=n :

$$(n-1)\ n + C_{n-1} = n^2 + C_n \Rightarrow C_n = C_{n-1} - n = C_{n-2} - ((n-1)+n) = C_{n-3} - ((n-2)+(n-1)+n) = \ldots =$$

$$= C_0 - (1+2+\ldots+n) = C_0 - \tfrac{1}{2}n(n+1) \Rightarrow F(x) = [x]x - \tfrac{1}{2}[x]([x]+1),$$

– вона неперервна, і $\forall x \in R \setminus N$ $F'(x) = f(x) = [x]$, а тому за означенням є ПШР.

<u>**Теорема 1.**</u> *(Зв'язок між первісними в широкому розумінні)*

Нехай F_1, F_2 – первісні в широкому розумінні функції $[a,b]\xrightarrow{F} R$, тоді $\exists C \in R : \forall x \in [a,b]$ $F_2(x) = F_1(x) + C$.

Доведення теореми. F_1 та F_2 – неперервні та диференційовані в усіх точках множини $X_1 \cup X_2$. Тоді для функції $\Phi = F_1 - F_2$ ми маємо $\forall x \in [a,b] \setminus (X_1 \cup X_2)$ $\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$ з наслідку з теореми Лагранжа $\Phi(x) = Const$.

Теорему доведено.

Метод Остроградського

У загальному випадку первісна раціональної функції є сумою раціональних функцій, логарифмів та арктангенсів. М.В.Остроградський запропонував метод відшукання суми раціональних доданків, яка називається раціональною частиною первісної.

Маємо правильний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

$Q(x)$ розкладається на прості множники

$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ - раціональна частина правильного дробу

Многочлен

$Q_1 = (x-a)^{k-1}....(x^2+px+q)^{m-1}$ – степеня e_1

$Q_2 = (x-a)....(x^2+px+q)$ – степеня e_2

$Q_1(x)Q_2(x) = Q(x),$

$P_1(x)$ – степеня $e_1 - 1,$

$P_2(x)$ – степеня $e_2 - 1$ - многочлени з невизначеними коефіцієнтами.

Далі диференціюємо $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ і знаходимо невідомі коефіцієнти.

Приклад. Виділити раціональну частину

$$\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1} + \frac{dx^2+ex+f}{x^3+x^2+x+1} =$$

$Q_1 = (x+1)(x^2+1)$

$Q_2 = (x+1)(x^2+1)$

x^5 $\quad d = 0$

x^4 $\quad 2a = 3a + e = 4, -a + e = 4$

x^3 $\quad -2b + e + f = 4$

x^2 $\quad a - b - 3c + e + f = 16$

x^1 $\quad 2a - 2c + e + f = 12$

x^0 $\quad b - c + f = 0$

$b = 1, c = -4, a = -1, e = 3, f = 3$

$$= -\frac{x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + \frac{3x + 3}{x^3 + x^2 + x + 1} + C$$

Інтеграл Рімана

1. Зв'язок між інтегралом Рімана та визначеним інтегралом Ньютона-Лейбніца

Множина точок $P = P_{[a,b]} = \{x_k \mid k = \overline{0,n}\}$, де $a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n$ називається ***<u>розбиттям сегмента</u>*** $[a,b]$. Множина точок $\xi_p = \{\xi_k \mid k = \overline{1,n}\} : \forall k = \overline{1,n} \ \ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ називається ***<u>сукупністю проміжних точок</u>***, д що відповідає розбиттю P. Величина $\|P\| = \max\limits_{k=\overline{0,n-1}} (x_{k+1} - x_k)$ називається ***<u>діаметром (нормою) розбиття</u>***.

Нехай $[a,b] \xrightarrow{f} R$. Сума $S_p(f, \xi_p) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$ називається ***<u>інтегральною сумою Рімана</u>***, де P - розбиття, а ξ_p - сукупність проміжних точок.

Число $I \in R$ називається ***<u>інтегралом Рімана</u>*** функції $[a,b] \xrightarrow{f} R$ на сегменті $[a,b]$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall P = P_{[a,b]} \forall \xi_p : \|P\| < \delta \Rightarrow |I - S_p(f, \xi_p)| < \varepsilon$.

<u>Теорема 1.</u> *(Інтегральні суми для інтеграла Ньютона-Лейбніца).*

Нехай $[a,b] \xrightarrow{f} R$ інтегровна в розумінні Ньютона-Лейбніца на $[a,b]$. Тоді $\forall P = P_{[a,b]}$ існує ξ_p і в силу адитивності інтеграла Ньютона-Лейбніца відносно меж інтегрування виконується рівність:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = S_p(f, \xi_p) \qquad \textbf{(1)}$$

Доведення теореми. Нехай F - первісна f на $[a,b]$, тоді $\forall k = \overline{0, n-1}$ $F(x_{k+1}) - F(x_k) = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = F'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$, (за теоремою Лагранжа) $\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = S_p(f, \xi_p)$.

Теорему доведено.

Теорема 2. *(Рівність інтегралів Рімана та Ньютона-Лейбніца).*

Якщо інтеграли Рімана та Ньютона-Лейбніца функції $[a,b] \xrightarrow{f} R$ існують одночасно, то вони рівні один одному.

Доведення. Нехай I - інтеграл Рімана $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\left| I - \int\limits_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon \Rightarrow I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Теорема доведена.

Теорема 3. *(Інтегрованість за Ріманом неперервної функції).*

Якщо $f \in C[a,b]$, то вона інтегровна за Ріманом на $[a,b]$.

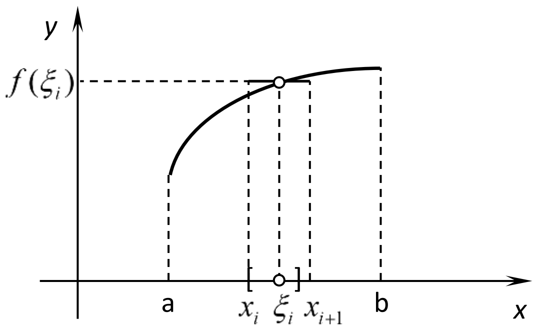
Доведення. Нехай I - інтеграл Ньютона-Лейбніца функції f на $[a,b]$. За теоремою1 $\forall P = P_{[a,b]}$ $\exists \xi_p : I = S_p(f, \xi_p)$. Тоді $\forall \xi_p^*$ $\Rightarrow$ $\left| I - S_p(f, \xi_p^*) \right| =$
$\left| S_p(f, \xi_p) - S_p(f, \xi_p^*) \right| = \left| \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(f(\xi_k) - f(\xi_k^*) \right)(x_{k+1} - x_k) \right|$. **(2)**

За теоремою Кантора f - рівномірно неперервна на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall (x \in [a,b], x' \in [a,b]) : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Нехай $\|P\| < \delta$, тоді з **(2)** буде слідувати $\left| I - S_p(f, \xi_p^*) \right| < \sum\limits_{k=0}^{n-1} \varepsilon (x_{k+1} - x_k) = \varepsilon (b - a) \Rightarrow$ f - інтегрована за Ріманом.

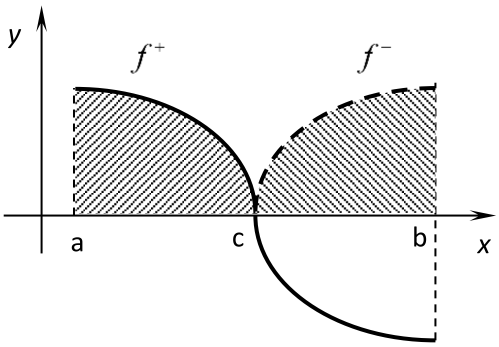
Теорему доведено.

Геометричний зміст інтегральної суми Рімана



Сума Рімана – $S_p(f,\xi_p)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$, $f\in C_{[a,b]},\ f\geq 0$ є площею фігури, складеної з прямокутників і виражає площу східчастої фігури: криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x)$ і двома ординатами в точці a і точці b, і віссю абсцис.

Якщо $f(\xi_i)=\min\limits_{[x_i,\,x_{i+1}]} f(x)$, то відповідна фігура, складена з прямокутників, цілком розміщених в підграфіку функції f. Якщо $f(\xi_i)=\max\limits_{[x_i,\,x_{i+1}]} f(x),$ то маємо інтегральну суму, яка є площею фігури, складеної з прямокутників, в якій міститься підграфік функції f.



$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f^+(x)dx-\int\limits_c^b f^-(x)dx.$$

2. Теорія інтеграла Рімана

Нехай $[a,b]\xrightarrow{f}R$ - обмежена функція, $P=P_{[a,b]}$ - деяке розбиття сегмента, позначимо значення $M_k=\sup\limits_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x),\ m_k=\inf\limits_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x),\ k=\overline{0,n-1}.$

<u>Верхньою та нижньою інтегральними сумами Дарбу</u>, відповідними розбиттю P для функції $[a,b]\xrightarrow{f}R$, називаються відповідно суми:

$\overline{S_p}(f)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$, $\underline{S_p}(f)=\sum_{k=1}^{n-1} m_k \Delta x_k$, де $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $k=\overline{0, n-1}$.

Розбиття P^* сегмента $[a,b]$ називається ***<u>продовженням розбиття P</u>*** цього ж сегмента, якщо $P \subset P^*$; розбиття P є ***<u>спільним</u>*** для розбиттів P_1 і P_2, якщо $P = P_1 \bigcup P_2$.

<u>Лема 1.</u> *(Властивості сум Дарбу на продовженні розбиття).*

Якщо P^* - продовження розбиття P, то

$$\underline{S_p}(f) \le \underline{S_{p^*}}(f) \text{ і } \overline{S_p}(f) \ge \overline{S_{p^*}}(f) \qquad \textbf{(1)}$$

Доведення.

Припустимо, що розбиття P^* має на *n* точок більше, ніж розбиття P

$$\underline{S_p}(f)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \left(x_{k+1} - x_n^* + x_n^* - x_{n-1}^* + \ldots + x_1^* - x_k\right) \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}\left(m_n^*\left(x_{k+1} - x_n^*\right) + m_{n-1}^*\left(x_n^* - x_{n-1}^*\right) + \ldots m_0^*\left(x_1^* - x_k\right)\right) = \underline{S_{p^*}}(f).$$

Аналогічно для $\overline{S}$.

Лему доведено.

<u>Лема 2.</u> *(Зв'язок між верхньою та нижньою інтегральними сумами).*

Для будь-яких розбиттів P_1, P_2 сегмента $[a,b]$ виконується нерівність

$$\underline{S_{p_1}}(f) \le \overline{S_{p_2}}(f). \qquad \textbf{(2)}$$

Доведення. Нехай P - спільне розбиття, тоді: $\underline{S_{p_1}}(f) \le \underline{S_p}(f) \le \overline{S_p}(f) \le \overline{S_{p_2}}(f)$.

Лему доведено.

Нагадаємо, що ми розглядаємо лише обмежені f на $[a,b]$. Тому множина усіх нижніх сум Дарбу має верхню межу, а множина усіх верхніх сум Дарбу має нижню межу.

Числа $\underline{\int} fdx = \sup\limits_{p} \underline{S_p}(f)$, $\overline{\int} fdx = \inf\limits_{p} \overline{S_p}(f)$ називаються відповідно ***<u>верхнім</u>*** та ***<u>нижнім інтегралом Дарбу функції</u>*** $\underline{f}$ ***<u>на сегменті</u>*** $\underline{[a,b]}$.

<u>Лема 3.</u> *(Зв'язок між верхнім та нижнім інтегралами Дарбу).*

Для будь-якої обмеженої функції $[a,b] \xrightarrow{f} R$ виконується нерівність:

$$\underline{\int} fdx \le \overline{\int} fdx \tag{3}$$

Доведення. Нехай P_1 і P_2 -довільні розбиття сегмента $[a,b]$. Згідно Леми 2, маємо $\underline{S_{p_1}}(f) \le \overline{S_{p_2}}(f) \Rightarrow (\forall P_1)\ \sup\limits_{p_1} \underline{S_{p_1}}(f) = \underline{\int} fdx \le \overline{S_{p_2}}(f) \Rightarrow (\forall P_2)\ \underline{\int} fdx \le \inf\limits_{p_2} \overline{S_{p_2}}(f) = \overline{\int} fdx$.

Лему доведено.

Функція $[a,b] \xrightarrow{f} R$ називається ***<u>інтегровною за Дарбу</u>*** на $[a,b]$, якщо $\underline{\int} fdx = \overline{\int} fdx$, а спільне значення цих інтегралів називається ***<u>інтегралом Дарбу</u>*** і позначається $\int\limits_a^b f(x)dx$. Множину всіх інтегрованих за Дарбу функцій на $[a,b]$ позначимо через $R[a,b]$.

<u>Теорема 1.</u> *(Критерій інтегровності функції).*

Для того, щоб обмежена функція $[a,b] \xrightarrow{f} R$ була інтегровною на $[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists P = P_{[a,b]} :\ 0 \le \overline{S_p}(f) - \underline{S_p}(f) < \varepsilon \tag{4}$$

Доведення. Необхідність. Нехай $f \in R[a,b] \Rightarrow$ виберемо довільне $\varepsilon > 0$, тоді $\underline{\int} fdx = \overline{\int} fdx = \int\limits_a^b f(x)dx \Rightarrow \exists\, P_1, P_2 :\ \overline{S_{p_1}}(f) - \int\limits_a^b f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \int\limits_a^b f(x)dx - \underline{S_{p_2}}(f) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$$P = P_1 \cup P_2 \quad \Rightarrow \quad \overline{S_p}(f) \le \overline{S_{p_1}}(f) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} < S_{p_2}(f) + \varepsilon \le \underline{S_p}(f) + \varepsilon \quad \Rightarrow$$

$0 \le \overline{S_p}(f) - \underline{S_p}(f) < \varepsilon$.

Достатність. $\forall \varepsilon > 0 \exists P$: $0 \le \overline{S_p}(f) - \underline{S_p}(f) < \varepsilon \;\Rightarrow\; \underline{S_p}(f) \le \underline{\int} f dx \le \overline{\int} f dx \le \overline{S_p}(f)$

$\Rightarrow\; 0 \le \overline{\int} f dx - \underline{\int} f dx < \varepsilon \;\Rightarrow\; f \in R[a,b]$.

Теорему доведено.

<u>Теорема 2.</u> *(Еквівалентність інтегралів Рімана та Дарбу).*

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \exists \lim_{\|P\| \to 0} S_p(f, \xi_p) = I, \text{ при цьому } I = \int_a^b f(x)dx.$$

<u>Приклад 1.</u> Обчислити $\int_{-1}^{2} x^2 dx$, використовуючи інтегральні суми.

Складемо інтегральну суму: $x_0 = -1$, $x_i = -1 + i \cdot h$, $i = \overline{0,3n}$, $x_{3n} = 2$, $\Delta x = h = 1/n \quad \Rightarrow \quad S_{3n} = \sum_{i=1}^{3n} (-1 + ih)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{3n} \left(1 - \frac{2i}{n} + \frac{i^2}{n^2}\right) =$
$\frac{3n}{n} - \frac{2 \cdot 3n(3n+1)}{2n^2} + \frac{3n(3n+1)(6n+1)}{6n^3} \to 3 - 9 + 9 = 3$; легко переконатися, що $\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^{2} = 3$.

<u>Мірою</u> сегмента $[a,b]$ (інтервалу (a,b), півінтервалів $[a,b),(a,b]$) називають його довжину: $\mu([a,b]) = b - a$.

Множина $X \subset R$ має ***лебегову*** (***жорданову***) ***міру нуль***, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує зчисленне покриття $\left(I_j\right)_{j \in N}$ (скінченне покриття $\left(I_j\right)_{j=\overline{1,n}}$) інтервалами, сумарна довжина яких не перевищує ε, тобто $\forall n \in N$ $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) < \varepsilon$ $\left(\sum_{j=1}^{n} \mu(I_j) < \varepsilon\right)$.

Властивості. *(Множин лебегової та жорданової міри нуль).*

1. Якщо X має лебегову (жорданову) міру нуль, і $X_1 \subset X$, то і X_1 має лебегову (жорданову) міру нуль.

2. Якщо $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ $\left(X = \bigcup_{j=1}^{n} X_j\right)$ і кожна множина X_j має лебегову (жорданову) міру нуль, то множина X також має лебегову (жорданову) міру нуль.

3. Будь-яка множина жорданової міри нуль є множиною лебегової міри нуль.

4. Будь-яка зчисленна (скінченна) множина точок має лебегову (жорданову) міру нуль.

5. Існує більш ніж зчисленна (більш ніж скінченна) множина, що має лебегову (жорданову) міру нуль.

Доведення очевидне.

Теорема 3. *(Компакт лебегової міри нуль).*

Компакт $K \subset R$ лебегової міри нуль є множиною жорданової міри нуль.

Доведення. Оскільки компакт має лебегова міру нуль, то $\forall \varepsilon > 0$ існує його зчисленне покриття $\left(I_j\right)_{j \in N}$ інтервалами, сумарна довжина яких менше за ε, а тому з леми Гейне-Бореля існує скінченне підпокриття, а тому його сумарна довжина також менша за ε, що й означає, що він має жорданову міру нуль.

Теорема доведена.

Теорема 4. *(Лебега)- Критерій інтегрованості за Ріманом.*

Нехай $[a,b]\xrightarrow{f}R$ - обмежена функція і E - множина її точок розриву. $f\in R[a,b] \Leftrightarrow \mu(E)=0$.

Теорема Лебега-центральна в теорії інтеграла Рімана. З цієї теореми випливає, що класу $R[a,b]$ належать усі обмежені функції, множина точок розриву яких не більше ніж зчисленна або має жорданову міру 0.

Наслідок. *(класи інтегровних за Ріманом функцій).*

Обмежена функція $[a,b]\xrightarrow{f}R$ є інтегровною за Ріманом, якщо:

1. $f\in C[a,b]$, множина точок розриву такої функції порожня, яка вважається множиною міри нуль.

2. f - монотонна на $[a,b]$, бо множина її точок розриву може бути не більше ніж зчисленною.

3. Властивості інтегрованих за Ріманом функцій

Теорема 1. *(Лінійність інтеграла Рімана)*

Якщо $f\in R[a,b]$, $g\in R[a,b]$, то $\forall\alpha,\beta$ $(\alpha f+\beta g)\in R[a,b]$ і

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx \qquad \textbf{(1)}$$

Доведення теореми. $\forall P[a,b]$ $\forall\xi_p$ $S_p(\alpha f+\beta g,\xi_p)=\alpha S_p(f,\xi_p)+\beta S_p(g,\xi_p)$ і при $\|P\|\to 0$ права частина має границю, що дорівнює правій частині **(1)**, тому теж саме має місце і для лівої частини.

Теорему доведено.

Позначимо далі як $M(f,[a,b])$ множину точок розриву функції f на $[a,b]$.

Теорема 2. *(Інтегровність модуля)*

Якщо $f \in R[a,b]$, то $|f| \in R[a,b]$.

Якщо f задовольняє умови теореми Лебега, то цю саму властивість має й функція $|f|$, бо вона не може мати більше точок розриву, ніж функція f.

Теорема 3. *(Інтегровність добутку)*

Якщо $\{f,g\} \subset R[a,b]$, то $f \cdot g \in R[a,b]$.

Якщо функції мають точки розриву, то множини цих точок мають лебегову міру нуль кожна, а множина точок розриву функції $f \cdot g$ лежить в об»єднанні згаданих множин і, отже, має лебегову міру нуль і тому інтегрована. $M(fg,[a,b]) \subset M(f,[a,b]) \cup M(g,[a,b]) \Rightarrow$ міра Лебега нуль

Теорема 4. *(Інтегровність звуження)*

Якщо $f \in R[a,b]$, то $\forall [a',b'] \subset [a,b]$ $f \in R[a',b']$.

На звуженні функція задовольняє умови теореми Лебега.

Теорема 5. *(адитивність по області інтегрування)*

Нехай $[a,b] \xrightarrow{f} R$ і $c \in (a,b)$, якщо $f \in R[a,c] \cap R[c,b]$, то $f \in R[a,b]$ і

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad \textbf{(2)}$$

Властивості інтегровних за Ріманом функцій, виражені нерівностями.

Теорема 6. *(Інтеграл Рімана з нерівними функціями)*

Якщо $\{f,g\} \subset R[a,b]$ і $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \le g(x) \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx. \qquad \textbf{(3)}$$

Доведення теореми. $\forall P_{[a,b]}$ $\forall \xi_p$ $S_p(f,\xi_p) \le S_p(g,\xi_p)$ і в цій нерівності переходячи до границі при $\|P\| \to 0$, одержимо **(3)**.

Теорему доведено.

Наслідок 1. *(Інтеграл від невід'ємної функції)*

Якщо $f \in R[a,b]$, і $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \ge 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$.

Наслідок 2. *(Інтеграл Рімана від додатної функції)*

Якщо $f \in R[a,b]$, і $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \ge 0$, і $\exists x_0 \in (a,b)$ f неперервна в точці x_0 і $f(x_0) > 0$, то $\exists c > 0 : \int\limits_a^b f(x)dx \ge c$.

Наслідок 3. *(Двобічна оцінка інтеграла)*

Якщо $f \in R[a,b]$ та $\forall x \in [a,b]$ виконується нерівність $m \le f(x) \le M$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, це випливає з очевидних рівностей

$\int\limits_a^b Mdx = M(b-a)$ та $m(b-a) = \int\limits_a^b m(x)dx$

Наслідок 4. *(Модуль інтеграла)*

Якщо $f \in R[a,b]$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Доведення. З теореми 2 $|f| \in R[a,b]$, а також $\forall x \in [a,b]$ $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ і з теореми 6 дістанемо нерівності

$-\int\limits_a^b |f(x)|dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$, які можна записати як одну рівність $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

5. Теореми про середнє, інтеграл Рімана як функція меж інтегрування

<u>Теорема 1.</u> *(Перша теорема про середнє).*

Якщо $\{f, g\} \subset R[a,b]$ і $\forall x \in [a,b]$ $g(x) \geq 0 \,(g(x) \leq 0)$, то має місце рівність:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx, \qquad \textbf{(1)}$$

де $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) \leq \mu \leq M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

Доведення. За теоремою з попередньої теми: $fg \in R[a,b]$. Нехай $g(x) \geq 0$, $m \leq f(x) \leq M$,помножимо обидві частини нерівності на $g(x) \geq 0 \Rightarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \Rightarrow m\int_a^b g(x) \leq \int_a^b f(x)g(x) \leq M\int_a^b g(x)dx$ (*), де $\int_a^b g(x)dx \geq 0$. Якщо $\int_a^b g(x)dx = 0$, то усе очевидно, а μможе бути будь_яким числом з $[m, M]$. Нехай тепер $\int_a^b g(x)dx > 0$ і поділимо на нього нерівність (*) , позначимо $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ і дістанемо формулу (1),, для якої $m \leq \mu \leq M$. Аналогічно доводиться для $g \leq 0$.

Теорема доведена.

<u>Наслідок 1.</u> *(Для неперервної функції).*

Якщо в умовах теореми про середнє $f \in C[a,b]$, то формула **(1)** набуває вигляду:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx, \qquad \textbf{(2)}$$

де $\xi \in [a,b]$.

Це очевидний наслідок теореми Коші про проміжні значення (неперервна функція набуває всіх проміжних значень між числами. $f(a)$ та $f(b)$.

Наслідок 2. *(Оцінка інтегралу від неперервної функції).*

Якщо $f \in C[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]: \int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

В формулі (2) поклали $g(x) = 1$.

Приклад 1. Оцінити інтеграл: $I = \int\limits_0^1 \frac{x^{10}dx}{1+x^2}$.

1) $\xi^{10} \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \xi^{10} arctg 1 = \frac{\pi}{4} \cdot \xi^{10} \Rightarrow (\xi \in [0,1])\ 0 \le I \le \frac{\pi}{4}$.

2) $\frac{1}{1+\xi^2} \int\limits_0^1 x^{10}dx = \frac{1}{11(1+\xi^2)} \Rightarrow (\xi \in [0,1])\ \frac{1}{22} \le I \le \frac{1}{11}$.

Інтеграл Рімана як функція верхньої межі інтегрування. (***ІФВМ***).

Нехай $f \in R[a,b]$. Назвемо функцію $[a,b] \xrightarrow{\Phi} R$, де $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, ***інтегралом як функцією верхньої межі*** (***ІФВМ***). Зрозуміло, що вона існує, бо $\forall x \in [a,b]\ [a,x] \subset [a,b]$ $\Rightarrow f \in R[a,x]$.

Теорема 2. *(Неперервність ІФВМ).*

Якщо $f \in R[a,b]$, то $\Phi \in C[a,b]$

Доведення. Візьмемо будь-яку точку $x_0 \in (a,b)$ і доведемо неперервність в цій точці. Оскільки $f \in R[a,b]$, то вона обмежена, тому $\exists M : |f(x)| \le M$. Тоді $\forall x_0 \in [a,b]$ маємо: $(\forall x \in [a,b])$

$$|\Phi(x)-\Phi(x_0)| = \left|\int\limits_a^x f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt\right| = \left|\int\limits_{x_0}^x f(t)dt\right| \le \operatorname{sgn}(x-x_0)\cdot \int\limits_{x_0}^x |f(t)dt| \le$$

$\le M(x-x_0)\operatorname{sgn}(x-x_0) = M|x-x_0| \Rightarrow \Phi$ неперервна $\forall x_0$.

Аналогічно доводиться неперервність в точці a праворуч і в точці $в$ ліворуч.

Теорема доведена.

Теорема 3. *(Похідна ІФВМ).*

Якщо $f\in R[a,b]$, то Φ диференційована в кожній точці $x\in[a,b]$, в якій f неперервна і при цьому в цих точках $\Phi'(x) = f(x)$.

Доведення. Нехай f неперервна в точці $x_0\in[a,b] \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall x\in S(x_0,\delta)\bigcap[a,b] \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ Оцінимо при виконанні умов $|x-x_0|<\delta$

$$\left|\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \quad = \left|\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^x f(t)dt - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))dt\right| \le$$

$\dfrac{\operatorname{sgn}(x-x_0)}{|x-x_0|}\displaystyle\int\limits_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|dt < \ < \dfrac{\varepsilon(x-x_0)\operatorname{sgn}(x-x_0)}{|x-x_0|} = \varepsilon$, з чого й слідує твердження теореми, що $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Теорема доведена.

Наслідок 1. *(Похідна ІФВМ для неперервної функції)*

Якщо $f\in C[a,b]$, то f має первісну $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ і $\forall x\in[a,b]\ \Phi'(x) = f(x)$

.

Наслідок 2. *(ІФВМ як первісна в широкому розумінні)*

Якщо $f\in R[a,b]$ і множина її точок розриву не більш ніж зчисленна, то Φ є первісною в широкому розумінні функції f на $[a,b]$.

Доведення наслідку. З теореми 2 $\Rightarrow$ $\Phi \in C[a,b]$, а за теоремою 3 вона має похідну $\forall x \in [a,b]$, в якій f неперервна , і в кожній такій точці $\Phi'(x) = f(x)$. За означенням Φ - первісна в широкому розумінні.

Наслідок доведено.

Теорема 4. *(Основна формула інтегрального числення)*

Якщо $f \in R[a,b]$ і множина точок розриву не більш ніж зчисленна, а F - будь-яка первісна в широкому розумінні функції f на $[a,b]$, тоді виконується рівність :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a), \tag{3}$$

яка називається ***формулою Ньютона-Лейбніца.***

Доведення. Нехай $[a,b] \xrightarrow{F} R$ - довільна первісна (в широкому розумінні) функції f на $[a,b]$, тоді функція $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ - ІФВМ є також первісною в широкому розумінні (за теоремою 3 та наслідку з неї), тобто $\Phi \in C[a,b]$ і, $\Phi'(x) = f(x)$ в кожній точці сегмента $[a,b]$, за винятком деякої не більш ніж зчисленної множини його точок. За зв'язком між первісними в широкому розумінні $\exists C$: $\forall x \in [a,b]$ $F(x) - \Phi(x) = C$. Оскільки $\Phi(a) = 0, C = F(a)$. Покладемо $x = b$ $\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt$ $\Rightarrow$ $F(b) = \Phi(b) + C$ $\Phi(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

Теорему доведено.

Теорема 5. *(друга теорема про середнє)*

1) Нехай $[a,b] \xrightarrow{f} R$ - монотонна функція, $g \in R[a,b]$. Тоді $\exists \xi \in [a,b]$, для якого виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx + f(b)\int_{\xi}^b g(x)dx \tag{4}$$

2) Якщо при цьому f не зростає на $[a,b]$ і $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx \tag{5}$$

3) Якщо f - не спадає на $[a,b]$ і $\forall x \in [a,b] \ f(x) \geq 0$, то $\exists \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_{\xi}^b g(x)dx \tag{6}$$

Приклад 2. Оцінити $I = \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}dx$,

$$f = e^{-x} \rangle 0, \qquad I = e^0 \int_0^{\xi} \frac{dx}{x+100} = \ln\left(\frac{\xi+100}{100}\right) = \ln\left(1+\frac{\xi}{100}\right); \qquad 0 \leq I \leq \ln 2;$$

$$f = \frac{1}{x+100} \geq 0 \ \ I = \frac{1}{100}\int_0^{\xi} e^{-x}dx = \frac{1}{100}\left(1-e^{-\xi}\right), \ 0 \leq I \leq \frac{1}{100}\left(1-e^{-100}\right).$$

Інтеграл Рімана як складна функція верхньої та нижньої меж інтегрування.

Нехай $f \in C[a,b]$, $[\alpha,\beta] \xrightarrow{\varphi} R$, $E_{\varphi} \subset D_f$, $a_0 = \varphi(x_0)$, і φ диференційована в кожній точці $[\alpha,\beta]$. Розглянемо функцію $[a,b] \xrightarrow{F} R$, де $F(t) = \int_{a_0}^{t} f(y)dy$, вона має похідну $F'(t) = f(t) \ \forall t \in [a,b]$. Оскільки $E_{\varphi} \subset D_f$, то визначимо композицію $(F \circ \varphi) \ [\alpha,\beta] \xrightarrow{F \circ \varphi} R$, де $(F \circ \varphi)(x) = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(y)dy$. Тоді, за правилом диференціювання складної функції, ми маємо: $\forall x \in [\alpha,\beta]$:

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x). \tag{7}$$

Аналогічно, для $[\alpha,\beta]\xrightarrow{\psi}R$, $E_\psi\subset D_f$, $b_1=\psi(x_1)$, то для функції $[\alpha,\beta]\xrightarrow{\Phi\circ\varphi}R$, де $\Phi(t)=\int\limits_t^{b_1}f(y)dy$, $(\Phi\circ\psi)(x)=\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x_1)}f(y)dy\ \Rightarrow$

$$(\Phi\circ\psi)'(x)=-\Phi'(\psi(x))\psi'(x)=-f(\psi(x))\varphi'(x). \qquad \textbf{(8)}$$

Знак мінус виник внаслідок зміни меж інтегрування в $\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x_1)}f(y)dy$.

З чого остаточно ми маємо правило диференціювання складної функції меж інтегрування.

Теорема 6. *(Диференціювання складної функції меж інтегрування)*

Якщо $[a,b]\xrightarrow{f}R$, $f\in C[a,b]$, $[\alpha,\beta]\xrightarrow{\psi,\varphi}R$, $E_\varphi\subset[a,b]$, $E_\psi\subset[a,b]$, φ,ψ диференційовані $\forall x\in[\alpha,\beta]$, тоді має місце формула:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(y)dy=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x). \qquad \textbf{(8)}$$

Приклад 3. $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_{-x}^{x^2}Sin(t^2)dt\right)=Sin(x^4)2x+Sin\,x^2$

Якщо послабити вимоги на неперервність φ і ψ, і вимагати диференційовними їх на $[\alpha,\beta]$ за виключенням не більш як зчисленної множини точок, то і формула **(8)** справджується скрізь крім цієї зчисленної множини точок.

Теорема 7. *(заміна змінної в інтегралі Рімана)*

Нехай : ***1)*** $f\in C[a,b]$, ***2)*** $[\alpha,\beta]\xrightarrow{\varphi}R$, φ - диференційована на $[\alpha,\beta]$ і $\varphi'\in R[\alpha,\beta]$, $E_\varphi\subset D_f$, $x=\varphi(t)$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, тоді має місце рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi'(t)dt, \tag{9}$$

яка називається ***формулою заміни змінної в інтегралі Рімана***.

Доведення. Нехай F - первісна функції f на $[a,b]$, тоді $\Phi = F\circ\varphi$ - первісна функції $t \mapsto ((f\circ\varphi)\varphi')(t)$ на $[\alpha,\beta]$, оскільки $\forall t\in[\alpha,\beta]$

$$\frac{d}{dt}(F\circ\varphi)(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow \int_\alpha^\beta ((f\circ\varphi)\varphi')(t)dt = \Phi(\beta)-\Phi(\alpha) =$$

$$=(F\circ\varphi)(\beta)-(F\circ\varphi)(\alpha) = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Теорема доведена.

Приклад 4.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left|\begin{matrix} x = Sin\,t \\ dx = Cos\,t\,dt\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} f(x)=\sqrt{1-x^2} \\ x=\varphi(t)=Sin\,t;\, t\in\left[0,\frac{5}{2}\pi\right] \\ \varphi(0)=0;\varphi\left(\frac{5}{2}\pi\right)=1\end{matrix}\right| =$$

$$= \int_0^{\frac{5}{2}\pi}\sqrt{1-Sin^2 t}Cos\,t\,dt = \int_0^{\frac{5}{2}\pi}|Cos\,t|Cos\,t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^2 t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} Cos^2 t\,dt$$

$$+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} Cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+Cos\,2t}{2}dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1+Cos\,2t}{2}dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\frac{1+Cos\,2t}{2}dt =$$

$$=\frac{1}{2}t\left(\Big|_0^{\pi/2} + \Big|_{3\pi/2}^{\pi/2} + \Big|_{3\pi/2}^{5\pi/2}\right) + + \frac{Sin\,2t}{4}\left(\Big|_0^{\pi/2} + \Big|_{3\pi/2}^{\pi/2} + \Big|_{3\pi/2}^{5\pi/2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0+\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}+\frac{5\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Теорема 8. *(Інтегрування частинами)*

Нехай $[a,b]\xrightarrow{f,g} R$ - диференційовні функції і $f'g \in R[a,b]$, тоді $fg' \in R[a,b]$ і виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g(x)f'(x)dx, \tag{10}$$

яку називають ***формулою інтегрування частинами***.

Доведення. Оскільки f і g диференційовні на $[a,b] \Rightarrow \{f,g\} \subset C[a,b] \subset R[a,b]$ $\Rightarrow$ $fg \in R[a,b]$ і $\exists (fg)' = f'g + fg'$ $\Rightarrow$ $fg' = (fg)' - gf' \in R[a,b]$ $\Rightarrow$ $\int_a^b (fg)'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ $\Rightarrow$ **(10)**.

Теорему доведено.

6. Застосування інтеграла Рімана

Інтеграл у розумінні Ньютона –Лейбніца або Рімана від неперервної невід’ємної функції , а саме $S = \int_a^b f(x)dx$,було названо площею підграфіка функції f. Надалі графік такої функції називатимемо криволінійною трапецією.

Якщо $\forall[\alpha,\beta] \subset [a,b] \subset R$ ставиться у відповідність значення деякої геометричної або фізичної величини F, то кажуть, що на сегменті $[a,b]$ задано ***<u>функцію проміжку</u>*** (***<u>ФП</u>***) $[\alpha,\beta] \mapsto F([\alpha,\beta])$. Наприклад, якщо $f \in C[a,b]\, \forall x \in [a,b]$ $f(x) \geq 0$, то з кожним сегментом $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ пов’язуємо величину $S([\alpha,\beta])$ площі підграфіка звуження $f\big|_{[\alpha,\beta]}$,або об’єм тіла, утвореного обертанням цього підгріфіка навколо сегмента $[\alpha,\beta]$, довжину дуги, або $F[\alpha,\beta] = \beta - \alpha$ чи $F[\alpha,\beta] = \max_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$.

Функція проміжку $[\alpha,\beta] \mapsto F([\alpha,\beta])$ $([\alpha,\beta] \subset [a,b])$ називається ***<u>адитивною функцією проміжку</u>*** (***<u>АФП</u>***), якщо $\forall \gamma \in (\alpha,\beta)$ виконується рівність:

$$F([\alpha,\beta]) = F([\alpha,\gamma]) + F([\gamma,\beta]) \qquad \textbf{(1)}$$

Серед наведених ФП АФП є перші три, а остання – ні.

Теорема 1. *(Зв'язок АФП та інтеграла Рімана)*

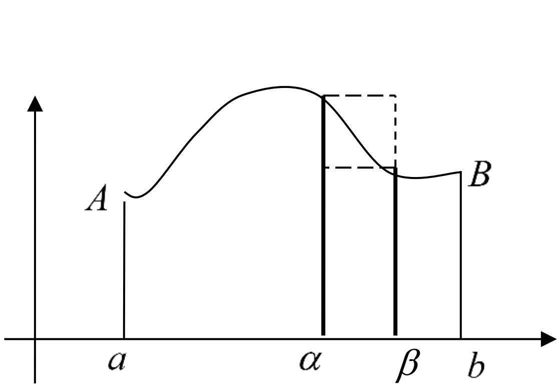
Якщо для АФП $[\alpha,\beta] \mapsto F([\alpha,\beta])$ $([\alpha,\beta] \subset [a,b])$ існує функція така інтегрована за Ріманом функція $f \in R[a,b]$ така, що $\forall \{\alpha,\beta\} \subset [a,b]$і $\{\alpha\langle\beta\}$ виконується співвідношення:

$$\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha) \le F([\alpha,\beta]) \le \sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha), \text{ то} \qquad \textbf{(2)}$$

$$F([a,b]) = \int_a^b f(x)dx \qquad \textbf{(3)}$$

Доведення. Нехай P - довільне розбиття $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $m_k = \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$, $M_k = \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$, $k = \overline{0,n-1}$ за умовами теореми маємо$\Rightarrow$ $m_k \Delta x_k \le F([x_k, x_{k+1}]) \le M_k \Delta x_k$.Підсумовуючи за всіма k нерівності (2) $\Rightarrow$ $\underline{S}_P(f) \le F([a,b]) \le \overline{S}_P(f)$. Оскільки $f \in R[a,b]$, то при $d(P) \to 0$ ліва то права частини прямують до $\int_a^b f(x)dx$, з чого й слідує **(3)**.

Теорему доведено.



Нехай $f \in C[a,b]$; $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \ge 0$.Розглянемо криволінійну трапецію $aABb$ і нехай $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$. Позначимо $S([\alpha,\beta])$ площу відповідної проміжку $[\alpha,\beta]$ криволінійної трапеції (рис. 1). Тоді згідно з нашими уявленнями про площу, крім (1) повинні виконуватись також і співвідношення:

$$\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha) \le S([\alpha,\beta]) \le \sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha)$$

Геометричний зміст яких полягає в тому, що площа плоскої фігури завжди міститься між площами вписаної та описаної навколо неї плоских фігур. Згідно з теоремою 1 маємо

$$S \overset{def}{=} S([a,b]) = \int_a^b f(x)dx \qquad \textbf{(4)}$$

Рис. 1

<u>Теорема 2.</u> *(Обчислення площі криволінійної трапеції)*

Якщо $f \in C[a,b]$, $f \geq 0$, то площа підграфіка f, що знаходиться вище осі абсцис обчислюється за формулою **(4)**.

<u>Наслідок 1.</u> Якщо плоска фігура обмежена зверху та знизу графіками функцій $f_1, f_2 \in C[a,b]$ відповідно, а з боків – відрізками прямих $x = a, x = b$ (рис. 2), то її площа може бути обчисленою за формулою:

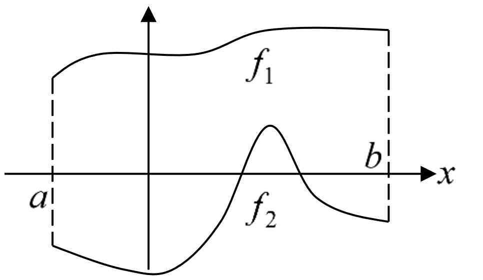


Рис. 2

$$S = \int_a^b (f_1 - f_2)(x)dx \qquad \textbf{(5)}$$

<u>Криволінійним сектором</u> називається плоска фігура, що обмежена променями, які виходять з полюса O і утворюють з полярною віссю кути φ_1 та φ_2 і неперервною кривою $E_f = \{(\rho,\varphi) \in R^2 | \rho = f(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$.

Тоді, згідно уявлень про площу, вона адитивна і маємо: $\forall [\alpha,\beta] \subset [\varphi_1,\varphi_2]$ і $\gamma \in [\alpha,\beta]$ (рис. 3):

$$S([\alpha,\beta]) = S([\alpha,\gamma]) + S([\gamma,\beta]) \Rightarrow$$

$$\frac{r^2}{2}(\beta - \alpha) \leq S([\alpha,\beta]) \leq \frac{R^2}{2}(\beta - \alpha) \Rightarrow$$

$$(r = \inf f(x), R = \sup f(x)).$$

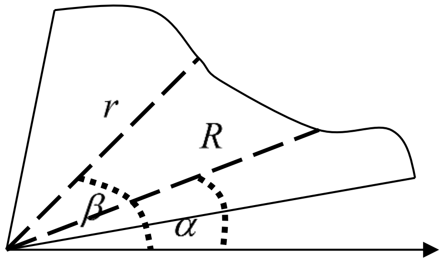


Рис. 3

$$S \overset{def}{=} S([\varphi_1, \varphi_2]) = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi \qquad \textbf{(6)}$$

Таким чином, нами доведена

<u>Теорема 3.</u> *(Обчислення площі криволінійного сектора)*

Площа криволінійного сектора обчислюється за формулою **(6)**.

Розглянемо випадок параметричної функції, наприклад, функцію $y = f(x),\ x \in [a,b]$ ми параметрично задамо умовою: $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$. При цьому функції $x(t), y(t)$ неперервно-диференційовані та $x^2(t) + y^2(t) \neq 0,\ \forall t \in [\alpha, \beta]$ і $x(\alpha) = x(\beta),\ y(\alpha) = y(\beta)$ - замкнена крива.

При цьому криву обходимо в ***додатному напрямі***, тобто область залишається завжди зліва. Зрозуміло, що площа $S(\Phi) = S(P_1) - S(P_2)$ (верхня трапеція відняти нижню) $S(P_1) = \int_a^b y_b dx = -\int_\alpha^\gamma y(t)x'(t)dt$;

$S(P_2) = \int_\gamma^\beta y(t)x'(t)dt \Rightarrow$

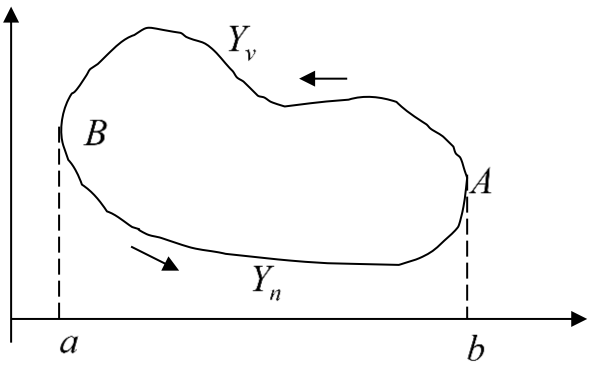


Рис. 4

$$S(\Phi) = -\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt, \qquad \textbf{(7)}$$

інтегруванням частинами можна також одержати, що:

$$S(\Phi) = \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt, \qquad \textbf{(8)}$$

або взагалі, якщо взяти середнє арифметичне одержимо третю формулу для обчислення площі області, межа якої задана параметрично:

$$S(\Phi) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt. \qquad \textbf{(9)}$$

Нехай $f \in C[a,b]$, $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \geq 0$. Знайти об'єм тіла обертання такої трапеції навколо осі OX. Позначивши $V([\alpha, \beta])$ об'єм, утворений обертанням шматочка трапеції при $x \in [\alpha, \beta] \Rightarrow \pi\left(\inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\right)^2 (\beta - \alpha) \leq V([\alpha, \beta]) \leq \pi\left(\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\right)^2 (\beta - \alpha) \Rightarrow$

$$V \overset{def}{=} V([a,b]) = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx. \qquad \textbf{(10)}$$

Аналогічно, якщо тіло T знаходиться між площинами $x = a$ та $x = b$, і відомі її площі перерізів $S(x_0)$ площинами $x = x_0$, то

$$V(T) = \int\limits_a^b S(x)dx. \qquad \textbf{(11)}$$

Назвемо множину E_φ ***гладким шляхом***, якщо $\varphi : [a,b] \to R^2$, тобто $t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ і $\forall t \in [a,b]$ $\exists \varphi_1'(t), \varphi_2'(t)$. Нехай $A(\varphi_1(a), \varphi_2(a))$, $B(\varphi_1(b), \varphi_2(b))$, то кажуть, що шлях сполучає точки A і B, а функція φ - ***параметричне зображення шляху***.

Нехай $(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t)) = \vec{v}$ - вектор швидкості матеріальної точки, що пробігає шлях $E_\varphi \Rightarrow$ його модуль в момент $t \in [a,b]$ $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2}$. З уявлень про довжину шляху: $\inf\limits_{t\in[\alpha,\beta]} |v(t)|(\beta - \alpha) \leq l([\alpha, \beta]) \leq \sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]} |v(t)|(\beta - \alpha) \Rightarrow$

$$l \overset{def}{=} l([a,b]) = \int\limits_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\psi_1'(t))^2}\,dt, \qquad \textbf{(12)}$$

або $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,dt,$ **(13)**

якщо $\varphi(t) = (t, f(t))$.

Повністю аналогічно до формули **(12)** можна одержати формулу для обчислення довжини шляху (дуги) матеріальної точки , що рухається в тривимірному просторі за законом $\varphi : [a,b] \to R^3$ $(t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)))$:

$$l \overset{def}{=} l([a,b]) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2 + (\varphi_3'(t))^2}\, dt \,. \qquad \textbf{(14)}$$

І нарешті, якщо $\varphi(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$, а $|\varphi'(\theta)| = \sqrt{r^2(\theta) + (r'(\theta))^2}$ $\Rightarrow$

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + (r'(\theta))^2}\, d\theta \,.$$

Функції векторного аргументу

Нехай К- поле, К=R або К=С. Векторним (лінійним) простором над полем К називається впорядкована трійка (Е,+,•), яка складається з множини Е,елементи якої називаються векторами, операції додавання, та операції множення на елементи (числа) поля К.

Вказані операції повинні мати властивості, які називаються аксіомами векторного простору: $\forall\left(x\in E, y\in E, z\in E, \lambda\in K, \mu\in K\right)$:

1)x+y=y+x;

2)(x+y)+z=x+(y+z)

3) $\exists o\in E: x+o=x$ - $\exists$ 0-вектора;

4) $\exists(-x)\in E: x+(-x)=0$ - $\exists$ протилежного вектора;

5) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y, (\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x, \quad \lambda,\mu,1-\textit{числа поля } K;$

6) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x);$

7) $1\cdot x=x.$

Для спрощення записів замість трійки (Е,+,•) користуються векторним простором Е, вважаючи його дійсним, коли К = R , і комплексним, коли К=С. У довільному векторному просторі Е виконуються такі властивості:

$\forall(x\in E, \lambda\in R)$

1) $0\cdot x=0$;

2) $\lambda\cdot 0=0$;

3) (-1)x= -x.

Дійсно, із аксіоми 5)$\Rightarrow$при $\mu=0, (\lambda+0)x=\lambda x+0\cdot x\Rightarrow\lambda x=\lambda x+0\cdot x\Rightarrow 0\cdot x=0$

При $\mu=-\lambda\Rightarrow-\lambda x=(-\lambda)x, \textit{при}\lambda=1,$ (-1)x=-x;
$\left(\lambda+\left(-\lambda\right)\right)x=\lambda x+\left(-\lambda x\right)\Rightarrow 0x=\lambda x+\left(-\lambda x\right)=0\Rightarrow-\lambda x=\left(-\lambda\right)x$, при $\lambda=1\Rightarrow\left(-1\right)x=-x$

Е=R – векторний простір над R, очевидно, що поле R є векторний простір над цим полем.

$E = R^m$ - , м-мірний координатний простір ,кожна точка якого - упорядкований набір з m дійсних чисел $x_1, x_2, ..., x_m$.

Покладемо $\forall(x \in R^m, y \in R^m, \lambda \in K)$

$$x + y = (x_1, ... x_m) + (y_1, ... y_m) \overset{def}{=} (x_1 + y_1, ..., x_m + y_m);$$

$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2, ..., x_m) \overset{def}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_m).$$

Для цих операцій виконуються аксіоми 1-7.

Вектори $x \in R^m$ називаються точками простору R^m і позначають т. $M(x_1, x_2, ..., x_m), R^m = \underbrace{R \times R \times ... \times R}_{m-раз}$

($R^3 = \{(x, y, z):\ x, y, z \in R\}$ - троьхвимірний простір).

<u>Нормований векторний простір</u>

Означення.1 Нехай (E,+,•) векторний простір над полем K. Відображення $\|\cdot\| : E \to R$ називається нормою (довжиною) у просторі , якщо $\forall(x \in E, y \in E, \lambda \in K)$ виконуються такі аксіоми :

1) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = o$;2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (нерівність трикутника);

Означення.2 Упорядкований набір $(E, +, \bullet, \|\cdot\|)$ називається нормованим простором. З аксіом 2) і 3) $\Rightarrow \|0\| = 0, \|x\| \ge 0, \forall x \in E$.

Означення.3 Вектор x називається границею послідовності векторів $(x_n),$ якщо $\|x_n - x\| = o(1), \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

Якщо послідовність (x_n) векторів нормованого простору E збігається до вектора x, то $\|x_n\| \to \|x\|$, це властивість неперервності норми .

Приклади норм:

$\|\cdot\| : R^m \to R$, $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2}$ (Евклідова норма)о

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$$ (октаедрична норма)

$$\|x\| = \max|x_i|$$ (кубічна норма) $1 \le i \le m$

Всі запроваджені в R^m норми – еквівалентні.

Метричні простори

Одною із фундаментальних характеристик взаємного розміщення точок множини є відстань між ними.

Означення.4 Нехай E – довільна множина. Відображення $E^2 \xrightarrow{\rho} R$ називається метрикою, якщо $\forall x, y, z \in E$ виконуються аксіоми:

1) $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симетрія);

3) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (нерівність трикутника).

Упорядкована пара (E, ρ) називається метричним простором.

Наприклад: $\rho(x, y) = |x - y|$, аксіома 3): $|x - y| \le |x - z| + |z - y|$.

Всякий нормований векторний простір є метричним, якщо метрика $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Означення.5 Нехай (E, ρ) – метричний простір, $x \in E, x_n \in E, \forall n \in N$. Точка x називається границею послідовності (x_n), якщо $\rho(x_n, x) = o(1)$ і записується $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Послідовність точок метричного простору, яка має границю, називається збіжною.

Види множин простору R^m

У теорії метричних просторів використовується мова класичної геометрії. Нехай (X, ρ) - метричний простір, $x_0 \in X, \delta > 0, X \subset R^m$.

Означення.6 Множина $O_\delta(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x_0, x) < \delta\}$ називається відкритою кулею радіуса δ з центром у т. $x_0 \in X$, а також δ – околом точки x_0.

Означення.7 Множина $\overline{O_\delta}(x_0)=\{x\in X \mid \rho(x_0,x)\le\delta\}$ називається замкненою кулею радіуса δ з центром у т. $x_0\in X$.

Означення.8 Множина $S(x_0,\delta)=\{x\in X \big| \rho(x_0,x)=\delta\}$ називається сферою радіуса δ з центром у точці $x_0\in X$.

Означення.9 (X,ρ) - метричний простір, А та В дві непорожні множини. Додатне число $\rho(A,B)=\inf\limits_{x\in A,y\in B}\rho(x,y)$ називається відстанню від А до В.

Означення.10 Діаметром множини А називається число $d(A)=\sup\limits_{x\in A,y\in A}\rho(x,y).$

Означення.11 (X,ρ) - метричний простір, $A\subset X$ – не порожня множина. Якщо діаметр множини А – скінченний, то вона називається обмеженою.

Означення.12 Відкритою множиною в метричному просторі (X,ρ) називається підмножина $G\subset X$, яка має властивість: $\forall x\in G \;\; \exists\delta>0: O_\delta(x)\subset G.$

Означення.13 Множина $F\subset X$ називається замкненою, якщо її доповнення є відкритою множиною (всі граничні точки множини належать самій множині).

Означення.14 Точка $x_0\in X$ називається граничною точкою множини $A\subset X$, якщо з неї можна виділити послідовність різних точок, збіжних до x_0 за метрикою простору (X,ρ)

Означення.15 Множина $K\subset X$ називається компактною в просторі (X,ρ) якщо будь-яка послідовність (x_n) елементів з К містить збіжну підпослідовність. Якщо їх границі належать множині К, то вона називається компактом (будь-яка обмежена в просторі R^m множина – компактна).

<u>Відображення множин</u>

Нехай Х та У- довільні метричні простори , $E\subset X, mo\partial i E\xrightarrow{f}Y$ означає , що кожному елементу $x\in E$ ставиться у відповідність $y\in Y$, який називається образом цього елемента і множина $f^{-1}(y)=\{x\in E \big| f(x)=y\}$ називається повним прообразом простору.

Якщо $X=R^n, Y=R^1, E\xrightarrow{f}Y$, $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$, $E\subset R^n$.

Якщо $X=R^2, E\xrightarrow{f}R,\; U=f(x,y)$-функція двох змінних.

Якщо $X=R^3, mo\;\; E\xrightarrow{f}R, E\subset R^3, U=f(x,y,z)$ - функція 3-х змінних , фізичний зміст якої є густина або кількість речовини.

Означення.1 Лінією рівня називається геометричне місце точок $f(x,y)=C$, в яких функція приймає одне стале значення.

$z=x^2+y^2, \quad x^2+y^2=c$ - сімейство концентричних кіл.

Означення.2 Поверхнею рівня називається Г.М.Т. $f(x,y,z)=C$,в яких функція приймає одне стале значення.

$U=x^2+y^2-z^2, \quad U=c.$

$c=0: \;\; x^2+y^2-z^2=0$ - конус;

$c<0: \;\; x^2+y^2-z^2=-1$ - двопорожневий гіперболоїд;

$c>0$ - однопорожневий гіперболоїд.

Границя функції

Означення(за Коші) .Число $A\in R$ - границя функції $f(x)$ при $x\to a$ ($A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$, a – гранична точка $E\subset X$), якщо $\forall\varepsilon>0\;\exists\;\delta(\varepsilon,a)>0:\begin{cases}0<|x_1-a_1|<\delta,\\0<|x_n-a_n|<\delta\end{cases}\Rightarrow\left|f(x_1,x_2,...,x_n)-A\right|<\varepsilon$, або цей факт записують так: $\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\ \dots \\ x_n\to a_n}} f(x_1,x_2,...,x_n)=A$, і називають A n – кратною границею.

Якщо $X=R^2,\;\exists\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A,\; A-$ подвійна границя.

Приклади:

1) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$, $\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}>\dfrac{x+y}{(x\;\;+y)^2}=\dfrac{1}{x+y}$

$$\lim_{\substack{x\to 0_+\\ y\to 0_+}} f(x,y)>\lim_{\substack{x\to 0_+\\ y\to 0_+}}\frac{x+y}{(x+y)^2}=\lim_{\substack{x\to 0_+\\ y\to 0_+}}\frac{1}{x+y}=+\infty.$$

2) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2},\; x^2+y^2\neq 0\\ 0,\quad x=y=0.\end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=|y=kx|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k^2}{1+k^2}.$ Результат залежить від k, отже подвійної границі в точці не існує.

Крім одночасного прямування аргументів до границі, маємо границі, що отримуємо при послідовних граничних переходах по кожному аргументу окремо, в тому, чи іншому порядку.

Означення. Нехай $\exists \lim\limits_{x_1 \to a_1} f(x_1, ..., x_n) = \varphi(x_2, x_3, ..., x_n)$

$$\lim\limits_{x_2 \to a2} \varphi(x_2, ..., x_n) = \psi(x_3, x_4, ..., x_n)$$

. . . . . .

$\lim\limits_{x_n \to a_n} \lim\limits_{x_{n-1} \to a_{n-1}} \dots \lim\limits_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2, ..., x_n)$ - називається повторною границею, якщо існує границя при $x_n \to a_n$ при всіх фіксованих попередніх границях.

Приклади:

1) $f(x, y) = (x + y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}.$

Обидві повторні границі $\lim\limits_{x \to 0}(\lim\limits_{y \to 0}(f(x, y)))$ і $\lim\limits_{y \to 0}(\lim\limits_{x \to 0}(f(x, y)))$ не існують, але подвійна границя існує і $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$, це випливає із нерівності

$$0 \le \left|(x + y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \le |x + y| < |x| + |y| \to 0.$$

2) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $\lim\limits_{x \to 0}\lim\limits_{y \to 0}\frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{y \to 0}\lim\limits_{x \to 0}\frac{xy}{x^2 + y^2} = 0,$ а подвійна не існує.

Зв'язок між подвійною і повторною границями.

Теорема. $E \xrightarrow{f} R^1$, $E \subset R^2$. Нехай вико

нуються умови:

1) $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A$ - подвійна границя;

2) при фіксованому y $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x, y) = \varphi(y)$, тоді $\exists \lim\limits_{y \to b}\lim\limits_{x \to a} f(x, y) = A = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$.

Дійсно, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - a| < \delta,\ 0 < |y - b| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon.$ Зафіксуємо $y,\ 0 < |y - b| < \delta$ перейдемо до границі при $x \to a$: $|\varphi(y) - f(x, y)| < \varepsilon \Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{y \to b}\varphi(y) = A \vee \lim\limits_{y \to b}\lim\limits_{x \to a} f(x, y) = A.$

Неперервне відображення.

X, У – метричні простори, $E \subset X$, точка x_0 - гранична точка E, $x_0 \in E$.

Означення. $E \xrightarrow{f} Y$, f – неперервна в точці $x_0 \in E$, якщо $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Означення (за Коші). $E \xrightarrow{f} Y$, $E \subset X$, f – неперервна в точці $x_0 \in E$, якщо
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$

Означення (за Гейне). $E \xrightarrow{f} Y$, f – неперервна в точці $x_0 \in E$, якщо для $\forall \;\; x_n \in E, x_n \to x_0$ відповідає послідовність $f(x_n) \to f(x_0)$.

Мають місце теореми про арифметичні дії над дійсними неперервними функціями, аналогічні теоремам для функції однієї змінної.

Неперервність в R^n.

$X = R^n$, $Y = R^1$, точка $x_0 \in E$, $E \subset X$, точка x_0 - гранична точка Е.

Означення 1. f – неперервна в точці $x_0 = (x_1^0, x_2^0, .., x_n^0) \in E$ $(E \xrightarrow{f} R^1)$, якщо
$\exists \lim\limits_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \cdots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, .., x_n) = f(x_1^0, x_2^0, .., x_n^0)$.

Означення 2. $E \xrightarrow{f} R$, $E \subset R^n$, точка $x_0 = (x_1^0, x_2^0, .., x_n^0) \in E$, $\;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 :$
$\left|x_1 - x_1^0\right| < \delta, ..., \left|x_n - x_n^0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x_1, x_2, .., x_n) - f(x_0)\right| < \varepsilon$

Означення приросту

Виходячи із значень $\{x_0\} = \{x_i^0\}$, $i = \overline{1, n}$ надамо належним змінним x_i деякі прирости Δx_i. Назвемо повним приростом функції $f(x_1, x_2, .., x_n)$ в точці $(x_1^0, x_2^0, .., x_n^0)$ вираз $\Delta f(x_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, ..., x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, ..., x_n^0)$. Відображення $E \xrightarrow{f} R^1$ неперервне в точці x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції (при $\Delta x_1 \to 0, ..., \Delta x_n \to 0 \Rightarrow \Delta f(x_0) \to 0$).

Приклад. $Z = f(x, y) = \begin{cases} 0, \; x = y = 0 \\ \frac{xy}{x^2 + y^2}, \; x \neq y \neq 0 \end{cases}$

$f(x, y)$ неперервна в точці (0,0), якщо має місце $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = f(0,0)$.

$f(x,0)$ неперервна в точці (0,0) по змінній x і неперервна $f(0, y)$ по змінній y, але не є неперервною по (x, y).

Властивості неперервного відображення на компакті

Перша теорема Вейєрштрасса. Якщо f – неперервне відображення компактного простору К в R^1, $K \to R^1$, $K \subset X$, то f – обмежена на К.

Доведення. Припустимо супротивне: існує точка $x_n \in K, що\ f(x_n) \geq n.$

Оскільки К-компактний простір, то $\exists\ x_{nk} \to x_0 \in K.$ Оскільки f – неперервна на К, то $f(x_{nk}) \geq n_k$, а з іншого боку $f(x_{nk}) \to f(x_0)$ – скінченне, що суперечить умові необмеженості функції. Якщо $K = [a,b] \subset R^1,$ то маємо відому теорему Вейєрштрасса для $y = f(x).$

Друга теорема Вейєрштрасса. Нехай $K \xrightarrow{f} R^1,\ K \subset X,\ M^* = \sup\limits_{x \in K} f(x),\quad m^* = \inf\limits_{x \in K} f(x)$.

Тоді існують точки x_0, $x_1 \in K,$ в яких функція досягає свого найбільшого і найменшого значення: $M^* = f(x_0),\ m^* = f(x_1).$

Мають місце аналоги теорем Больцано-Коші. Аналогом скінченному проміжку в R^1 є обмежена зв'язна область.

Означення. Множина $E \subset R^2$ називається зв'язною, якщо будь-які дві точки множини з'єднати ламаною зі скінченною кількістю ланок, що цілком належать множині Е.

Теорема 1.(Перша теорема Больцано-Коші) $E \xrightarrow{f} R^1,\ E \subset R^2,$ (f – неперервне відображення зв'язної множини з R^2 в R^1). Якщо в двох точках $M_1 \in E$ і $M_2 \in E$: $f(M_1) * f(M_2) < 0,$ то існує точка $M_0 \in E$: $f(M_0) = 0$.

Означення. $E \xrightarrow{f} Y,\ E \subset X,\ X\ та\ Y$ довільні метричні простори. Відображення f рівномірно неперервне на Е, якщо $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x_1, x_2 \in E$ як тільки $\rho_x(x_1, x_2) < \delta$, то $\rho_x(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$

Теорема Кантора (про рівномірну неперервність на компакті). Якщо $K \xrightarrow{f} Y$ - неперервне відображення компакту К в довільний простір $Y,\ K \subset X,\ то\ f$ – рівномірно неперервне на К.

Диференційне числення функцій багатьох змінних.

Частинні похідні, частинний диференціал.

Маємо $E \xrightarrow{f} R^1,\ E \subset R^3,\ U = f(x,y,z).$ Візьмемо точку $P_0(x_0, y_0, z_0) \in E;\ \Delta x, \Delta y, \Delta z$ – довільні прирости.

$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)=\Delta f(P_0)$ – приріст функції.

$f(x_0+\Delta x, y_0, z_0)-f(x_0,y_0,z_0)=\Delta_x f(P_0)$ – частинний приріст по змінній x.

$f(x_0, y_0+\Delta y, z_0)-f(x_0,y_0,z_0)=\Delta_y f(P_0)$ – частинний приріст по змінній y.

$f(x_0, y_0, z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)=\Delta_z f(P_0)$ – частинний приріст по змінній z.

Означення. Якщо існує скінченна границя відношення частинного приросту функції до відповідного приросту аргументу $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(P_0)}{\Delta x}=\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}$, то вона називається частинною похідною по відповідній змінній. Можливі інші позначення: $U_x'(P_0),\ f_x'(P_0)$.

Приклад. Знайти частинні похідні функцій:

$$U(x,y)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+y^2}},\ x^2+y^2\neq 0 \\ 0,\quad x^2+y^2=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial U(x_0,y_0)}{\partial y}=-e^{\frac{1}{x^2+y^2}}\left(\frac{1}{(x^2+y^2)^2}2y\right)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}};\ \frac{\partial U(x_0,y_0)}{\partial x}=-e^{\frac{1}{x^2+y^2}}\left(\frac{1}{(x^2+y^2)^2}2x;\right.$$

в точці $P_0(0{,}0)$ знайдемо похідні за означенням:

$$\frac{\partial U(0{,}0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0{,}0+\Delta y)-f(0{,}0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{e^{\frac{1}{\Delta y^2}}}{\Delta y}=\infty.$$ Аналогічна похідна по x.

Добуток частинної похідної на довільний приріст називається частинним диференціалом:

$$f_x'(P_0)\Delta x=d_x f(P_0);\quad f_y'(P_0)\Delta y=d_y f(P_0);\quad f_z'(P_0)\Delta z=d_z f(P_0).$$

Нагадаємо, що для $f: I\xrightarrow{f} R,\ \ I\in R^1, f$ – диференційовна в точці $x_0\in I$, якщо $\Delta f(x_0)=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x;$ де $\alpha\to 0,\ \Delta x\to 0$ і диференційовність ототожнювалась з існуванням похідної. Аналогічна формула має місце для функції трьох змінних.

Означення диференційовності. $E\xrightarrow{f} R^1$, $E\subset R^3$ називається диференційовною в точці $P_0\in E$, якщо повний приріст функції в цій точці можна подати у вигляді $\Delta f(P_0)=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+o(\rho),$ де $A,B,C-const,$ що не залежать від $\Delta x,\Delta y,\Delta z$, а ρ залежить від метрики простору: $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$ - віддаль між точками $P_0(x_0,y_0,z_0)$ та $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$.

Якщо функція диференційовна, то лінійна частина повного приросту функції називається повним диференціалом.

$$df(P_0) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z.$$

Теорема(про існування частинних похідних). Якщо функція $E \xrightarrow{f} R^1$, $E \subset R^3$, диференційовна в точці $P_0 \in E$, то існують частинні похідні: $f'_x(P_0) = A, \quad f'_y(P_0) = B,$ $f'_z(P_0) = C.$

Доведення. Дійсно, якщо функція диференційовна в точці P_0, то
$\Delta f(P_0) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z, \ \alpha, \beta, \gamma \to 0 \quad \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\} \to 0.$

Нехай $\Delta y = \Delta z = 0, \ \Delta x \neq 0,$ тоді $\Delta f(P_0) = A\Delta x + \alpha\Delta x, \ \dfrac{\Delta f(P_0)}{\Delta x} = A + \alpha, \ \Delta x \to 0$ і існує

$\lim\limits_{\Delta \to 0} \dfrac{\Delta_x f(P_0)}{\Delta x} = A \Rightarrow f'(P_0) = A.$ Аналогічно для $f'_y(P_0), \ f'_z(P_0).$

Отже $f -$диференційовна в точці P_0, якщо

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} \frac{f(P) - f(P_0) - f'_x(P_0)\Delta x - f'_y(P_0)\Delta y - f'_z(P_0)\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = 0.$$

Приклад. $f(x, y) = \sqrt{|xy|}, \ D_f = R^2.$ Дослідити на диференційовність в точці (0,0).

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{0x}}{x} = 0, \ f'_y(0,0) = 0$$

$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = |\Delta y = k\Delta x| = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{|k|}|\Delta x|}{\sqrt{1 + k^2}|\Delta x|} = \sqrt{\dfrac{|k|}{1 + k^2}}$ – не існує. Отже, функція недиференційовна в точці (0,0).

Відмітимо, що обернене до теореми твердження невірне, існування частинних похідних не забезпечує диференційовності функції.

Достатні умови диференційовності функції.

Теорема. Для того, щоб функція була диференційовною в точці $P_0 \in D_f$ достатньо існування неперервних частинних похідних по всім змінним у цій точці.

Головна лінійна частина повного приросту функції називається повним диференціалом і записується : $df(P_0) = \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y} dy + \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial z} dz.$ Повний диференціал є сумою частинних диференціалів.

Геометрична інтерпретація частинних похідних функції 2-х змінних.

Розглянемо деяку поверхню S і точку M_0 на ній, $M \in S$ - довільна точка. $M_0K -$ дотична площина в точці M_0, якщо віддаль $\overline{MP}$ змінної точки $M \in S$ до цієї площини при прямуванні віддалі $\overline{MM_0}$ до 0 є нескінченно малою вищого порядку малості ніж $\overline{MM_0}$, тобто $\dfrac{\overline{MP}}{\overline{M_0M}} \to 0,$ або $\rho(MP) = o(\rho(M_0M)).$

Для того, щоб поверхня $z = f(x,y)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, де $z_0 = f(x_0, y_0)$ мала дотичну площину необхідно і достатньо, щоб при $x = x_0$ і $y = y_0$ функція $f(x,y)$ була диференційовною.

При перетині поверхні $z = f(x,y)$ площинами $Y = y_0$ та $X = x_0$ отримаємо криві, кутові коефіцієнти яких дорівнюють відповідно $f'_x(x_0, y_0)$ та $f'_y(x_0, y_0)$.

Наближена формула обчислення. $f(P) - f(P_0) = f'_x(P_0)\Delta x + f'_y(P_0)\Delta y + o(\rho)$

$f(P) \approx f(P_0) + f'_x(P_0)\Delta x + f'_y(P_0)\Delta y$

Приклад. Обчислити $\sin 29^\circ tg 46^\circ.$

$$f(x,y) = \sin x tg y, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}, \quad y_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$\Delta x = -\frac{\pi}{180}; \quad f'_x = \cos x tg y; \qquad \Delta y = \frac{\pi}{180}; \quad f'_y = \sin x \frac{1}{\cos^2 y};$$

$$f(x,y) = \sin 29^\circ tg 46^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{2*180} + \frac{1}{2} 2 \frac{\pi}{180}.$$

Інваріантність форми диференціала.

$f: E \to R^1,\ E \subset R^2, f -$ диференційовна в довільній точці $(x,y) \in E$ і $df(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy.$

Тут $dx, dy -$ достатньо малі довільні константи, x та y – незалежні змінні. Нехай x та y є функціями нових змінних t і $v: x = \varphi(t,v), \quad y = \psi(t,v)$ і мають неперервні частинні похідні x'_t, x'_v, y'_t, y'_v. Тоді існують похідні від складної функції f по t і v.

$$df(t,v) = f'_t\,dt + f'_v\,dv, \quad f'_t = f'_x x'_t + f'_y y'_t; \quad f'_v = f'_x x'_v + f'_y y'_v;$$

$$df = (f'_x x'_t + f'_y y'_t)dt + (f'_x x'_v + f'_y y'_v)dv;$$

Перегрупуємо доданки: $df = f'_x(x'_t\,dt + x'_v\,dv) + f'_y(y'_t\,dt + y'_v\,dv) = f'_x\,dx + f'_y\,dy$.

Отже, для функцій багатьох змінних має місце інваріантність форми першого диференціала.

Справедливі правила диференціювання:

1) $dc = 0$
2) $d(U \pm V) = dU \pm dV$
3) $d(UV) = VdU + UdV$
4) $d(\frac{U}{V}) = \frac{VdU - UdV}{V^2}$

Приклад. $d(\sin\sqrt{U^2+V^2}) = \cos\sqrt{U^2+V^2}\, d(\sqrt{U^2+V^2}) = \cos\sqrt{U^2+V^2}\,\frac{1}{2\sqrt{U^2+V^2}}\, d(U^2+V^2) =$

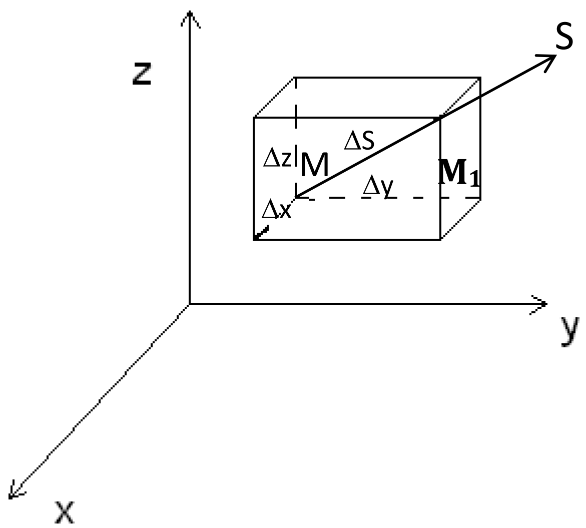
$= \cos\sqrt{U^2+V^2}\,\frac{1}{2\sqrt{U^2+V^2}}\,(2UdU + 2VdV).$

<u>Похідна за напрямком, градієнт.</u>

З'ясуємо поняття "швидкості зміни" або похідної за довільним заданим напрямком.

Нехай $E \xrightarrow{f} R^1$, $M(x,y,z) \subset E, E \subset R^3$.

Проведемо із точки M вектор S з напрямними косинусами ($\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$). На векторі S на віддалі ΔS від його початку, розглянемо точку M_1 ($x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$), $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, $u = f(x,y,z)$ – неперервна і має неперервні частинні похідні



$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta s}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha\,, \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta\,, \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \frac{\partial u}{\partial s}$$

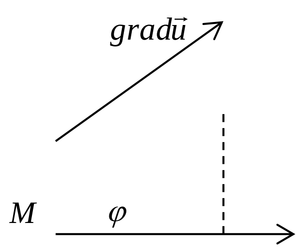
Отже, похідна від *u* в точці M(x,y,z) в напрямку вектора s це $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s}$.

Зокрема, при α=0, $\beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{\pi}{2}$ отримаємо $\frac{\partial u}{\partial x}$. Частинні похідні по x,y,z виражають "швидкість" зміни функції в напрямку координатних вісей.

Виникає питання: за яким напрямком функція в заданій точці буде швидше зростати?

В кожній точці E, де задана $u = u(x, y, z)$ визначимо вектор, проекції якого на вісі координат є значення частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$. Позначимо цей вектор $grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$.

Таким чином, в E визначено векторне поле градієнтів. Можна довести, що похідна за напрямком S дорівнює проекції вектора $grad\ u$ на S : $|\,grad\ u\,|\cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial S}$.



$$\frac{\partial u}{\partial S} \qquad S$$

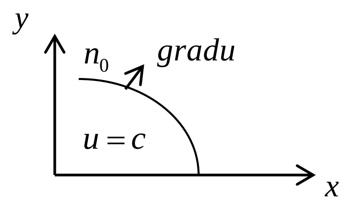
Властивості градієнта

1. Похідна за напрямком вектора S в точці M має найбільше значення, якщо напрямок S співпадає з напрямком $grad\ u$, це найбільше значення рівне $|grad\ u|$

$$\frac{\partial u}{\partial S} = |grad\ u|, \varphi = 0.$$

2. Похідна за напрямком вектора, перпендикулярного до градієнта $grad\ u$ дорівнює нулю: $\frac{\partial u}{\partial S} = 0, S \perp grad\ u.$

3. Якщо $u = u(x, y)$, $gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$ належить XOY, $gradu \perp$ лінії рівня $u(x, y) = C$, що лежить в площині XOY.



4. $grad\ u(x, y, z)$ направлений по нормалі до поверхні рівня, що проходить через задану точку.

Похідні вищих порядків

Нехай $f: E \to R', E \subset R^3, f$ - диференційовна в точці $P(x, y, z) \in E$, а, отже, $\exists$ частинні похідні $f_x'(P), f_y'(P), f_z'(P)$, які є функціями змінних x, y, z і від них можна брати похідні.

Позначають другу похідну, наприклад, по x: $f_{xx}''(P), \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2}$. Частинні похідні по різним змінним називають мішаними похідними: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)$, $f_{xy}''(P)$ і т. д.

$\dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_x'(x, y_0, z_0) - f_x'(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0}$ - похідна за означенням.

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$, маємо 2 частинні похідні I порядку $\dfrac{\partial z}{\partial x} i \dfrac{\partial z}{\partial y}$ і чотири частинні похідні другого порядку $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Частинних похідних третього порядку буде вже вісім.

Приклад: $f(x, y, z) = 2^{xy^2 z^3}$. Знайдемо мішану похідну:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = (2^{xy^2 z^3} \ln 2 \cdot 2yxz^3)_z' = 2^{xy^2 z^3} \ln^2 2 \cdot 3z^2 xy^2 2yxz^3 + 2^{xy^2 z^3} \ln 2 \cdot 2yx3z^2.$$

Природно ставити питання чи залежить результат диференціювання функцій багатьох змінних від послідовності диференціювання по різним змінним, тобто чи тотожні, наприклад, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} i \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Справедлива **теорема** (про мішані похідні, Шварца)

$f : E \to R', E \subset R^2, \exists$ в деякому околі точки P_0 $f_x', f_y', f_{xy}'', f_{yx}''$ і неперервні в точці P_0, тоді в цій точці похідна не залежить від порядку її обчислення і $f_{xy}''(P_0) = f_{yx}''(P_0)$.

Якщо мішані похідні не будуть неперервні в точці P_0, то теорема може не виконуватись.

Означення. $f : E \to R', E \subset R^m$ називається *n* раз диференційовною в точці P_0 $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, якщо $\forall P \in O_\delta(P_0) \exists$ частинні похідні по всім змінним до (*n*-1) порядку, і кожна з них як функція диференційовна в точці P_0.

Теорема. Якщо $f : E \to R', E \subset R^m$ двічі диференційовна в точці P_0 є E, то справедлива рівність: $\dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_j \partial x_i}$.

Має місце загальна теорема про мішані похідні.

Якщо $f : E \to R', E \subset R^m$, *n*-раз диференційовна в точці P_0, то похідна *n*-того порядку не залежить від послідовності її обчислення.

<u>Диференціали вищих порядків</u>

$f: E \to R^1, E \subset R^2$, $x_0 = x_0(x_1, x_2) \in \mathrm{E}$.

Нехай існує такий окіл $\mathrm{O}_\delta(x_0)$, що f диференційована $\forall x \in \mathrm{O}_\delta(x_0)$:

$$df(x_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}dx_2,$$

$$\mathrm{O}_\delta(x_0) \xrightarrow{df(x_0)} R^1.$$

Якщо $df(x_0)$ визначений в околі x_0 і диференційовний в точці x_0, то його диференціал називається другим диференціалом в точці x_0:

$$d(df(x_0)) = d^2 f(x_0)$$

$$d(d^{n-1} f(x_0)) = d^n f(x_0)$$

Визначимо диференціали для функції двох змінних:

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$d(df(x,y)) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 =$$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x,y)$. Останній вираз є символічним записом.

$$d^3 f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3),\ldots,$$

$$d^n f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y)$$

$$d^n u(x,y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_{x^k}^{(k)} u_{y^{n-k}}^{(n-k)} dx^k dy^{n-k}$$

Диференціал *n*-го порядку для $f(x_1, \ldots, x_m)$:

$$du = \frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m$$

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n u(x_1, \ldots, x_m)$$

Неінваріантність форми диференціалів вищих порядків

$u = f(x,y), x = x(t,v), y = y(t,v)$

$$d^2u = d(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy) = d(\frac{\partial u}{\partial x}dx) + d(\frac{\partial u}{\partial y}dy) = d(\frac{\partial u}{\partial x})dx + \frac{\partial u}{\partial x}d^2x + d(\frac{\partial u}{\partial y})dy + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial u}{\partial x}d^2x + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2 u + \frac{\partial u}{\partial x}d^2x + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y .$$

Формула Тейлора

Якщо $R^1 \xrightarrow{\varphi} R^1, \varphi \in C^{n+1}(O_\delta(t_0)) \forall t \in O_\delta(t_0)$, то

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \ldots + \frac{\varphi^n(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(t_0 + \Theta\Delta t)}{(n+1)!}(t - t_0)^{(n+1)}, \quad 0 < \Theta < 1,$$

або

$$\Delta\varphi(t_0) = d\varphi(t_0) + \frac{1}{2}d^2\varphi(t_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n(\varphi(t_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}\varphi(t_0 + \Theta\Delta t),$$

де $(t - t_0) = \Delta t = dt$, $\varphi(t) - \varphi(t_0) = \Delta\varphi(t_0)$.

В цій формі формула Тейлора розповсюджується на випадок функції багатьох змінних.

Теорема Тейлора. Нехай $E \xrightarrow{f} R^1, E \subset R^2$ має неперервні частинні похідні до n+1 порядку в околі точки P_0. Тоді для $\forall$ точки P із околу точки P_0 справедливо

$$\Delta\varphi(P_0) = d\varphi(P_0) + \frac{1}{2!}d^2\varphi(P_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n(\varphi(P_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}\varphi(x_0 + \Theta_1\Delta x, y_0 + \Theta_2\Delta y),$$

$0 < \Theta_i < 1$, $i = 1,2$.

Екстремуми функції багатьох змінних

Точка $x_0 \in D_f$ називається точкою ***локального максимуму*** (***мінімуму***) функції $f: R^m \to R$, якщо існує $S(x_0, \delta) \subset D_f$ така, що $\forall x \in S(x_0, \delta)$ виконується нерівність: $f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$. Максимуми та мінімуми функції називаються її ***екстремумами***. Якщо $\forall x \ne x_0$ виконується строга нерівність, то відповідний ***екстремум*** називається ***строгим***.

Таким чином для локального екстремуму функції в деякому околі екстремальної точки приріст функції $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ є знакосталим, недодатним для максимуму, невід'ємним – для мінімуму.

Теорема 1. *(Необхідна умова екстремуму)*

Якщо в точці x_0 функція $f: R^m \to R$ диференційована і має в цій точці локальний екстремум, то $df(x_0) = 0$, або, що теж саме $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0$, $j = \overline{1, m}$.

Для *доведення* достатньо зафіксувати усі координати точки крім однієї. Далі просто достатньо скористатися необхідною умовою екстремуму функції однієї змінної.

Точки області визначення функції $f: R^m \to R$, в яких $\forall j = \overline{1, m}$ $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0$ називаються ***стаціонарними***. Легко зрозуміти, що не кожна стаціонарна точка – екстремум, і навпаки, не кожний екстремум є стаціонарною точкою.

Приклад 1 Дослідити на екстремум функцію $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Зрозуміло, що $\Delta f(0,0)=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\ge 0$, а тому точка $(0,0)$ - точка мінімуму, але сама функція в цій точці не диференційована, а тому ця точка не є стаціонарною.

Квадратична форма (КФ) відносно змінних $h_1, h_2, ..., h_m$

$$K(h_1,h_2,...,h_m)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}h_i h_k \qquad \textbf{(1)}$$

називається ***додатно*** (***від'ємно***) ***визначеною***, якщо $\forall h_1,h_2,...,h_m$, які одночасно не дорівнюють нулеві, ця КФ приймає строго додатні (від'ємні) значення. В таких випадках ця КФ називається ***знакосталою*** (***знаковизначенною***). КФ називається ***знакозмінною***, якщо вона приймає як додатні так і від'ємні значення. КФ називається ***квазізнаковизначенною***, якщо вона приймає лише невід'ємні (недодатні) значення, але приймає також нульові значення на ненульовому наборі $(h_1,h_2,...,h_m)$.

Кутовими мінорами квадратної матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}\end{pmatrix}$ називаються такі m визначників цієї матриці: $A_1=|a_{11}|$, $A_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$,..., $A_m=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}\end{vmatrix}$.

Теорема 2. *(Критерій Сільвестра)*

Для того, щоб КФ з симетричною матрицею $A=\left(a_{ij}\right)$ була додатно (від'ємно) визначеною, необхідно й достатньо, щоб для її кутових мінорів виконувались умови: $\forall i=\overline{1,m}\ \operatorname{sgn} A_i=1\ \left(\operatorname{sgn} A_i=(-1)^i\right)$.

Без доведення.

Теорема 3. *(Достатня умова локального екстремуму)*

Для того, щоб двічі диференційована в точці x_0 функція, в якій $df(x_0)=0$, мала в цій точці екстремум, достатньо, щоб її другий диференціал був знаковизначеною КФ в точці x_0. Якщо $d^2 f(x_0)$ буде додатно (від'ємно) визначеною КФ, то в точці x_0 має локальний мінімум (максимум). Якщо $d^2 f(x_0)$ є незнаковизначеною КФ, то в точці x_0 локального екстремуму немає.

Доведення. З локальної формули Тейлора можна записати приріст функції в такому вигляді: $\Delta f(x_0)=df(x_0)h+\dfrac{d^2 f(x_0)}{2}(h)+o\left(\|h\|^2\right)$, а тому з урахуванням необхідної умови екстремуму, маємо: $\Delta f(x_0)=\dfrac{d^2 f(x_0)}{2}(h)+o\left(\|h\|^2\right)$. Розпишемо другий диференціал: $d^2 f(x_0)(h)=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)h_i h_j=\|h\|^2\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)b_i b_j=\|h\|^2 K(b)$, де $b_i=\dfrac{h_i}{\|h\|}$, $i=\overline{1,m}$, $b=(b_1,b_2,...,b_m)$, а $K(b)$ - квадратична форма на векторі b, що відповідає другому диференціалу. За побудовою $\|b\|=1$. Оскільки $K(b)$ - неперервна функція на сфері $\|b\|=1$, то за теоремою Вейєрштрасса вона набуває своїх мінімуму та максимуму на цій сфері. Тому, якщо КФ додатно визначена, то $\min\limits_{\|b\|=1}K(b)=c>0 \;\Rightarrow\; \forall b$:

$$\|b\|=1 \qquad K(b)\ge c \qquad \Rightarrow \qquad \Delta f(x_0)=\frac{d^2 f(x_0)}{2}(h)+o\left(\|h\|^2\right)=\frac{\|h\|^2 K(b)}{2}+o\left(\|h\|^2\right)=$$

$=\|h\|^2\left(\dfrac{K(b)}{2}+o(1)\right)\ge\dfrac{\|h\|^2}{2}\left(c+o(1)\right)\Rightarrow$ при достатньо малих $\delta>0$ маємо, що $\Delta f(x_0)>0$, а тому x_0 - точка локального мінімуму. Повністю аналогічно при від'ємній визначеності КФ доводиться, що x_0 – точка локального максимуму.

Якщо ж $d^2 f(x_0)$ не знаковизначена КФ, то екстремуму немає, оскільки в будь-якому околі точки приріст буде приймати як додатні, так і від'ємні значення.

Теорема доведена.

Якщо $d^2 f(x_0)$ квазізнаковизначена КФ, то для дослідження на екстремум треба продовжувати вивчення безпосередньо приросту функції, або інші міркування.

Умовний екстремум

Розглянемо задачі про знаходження екстремуму функції багатьох змінних, коли аргументи функції зв'язані додатковими умовами. Такі екстремуми називаються умовними екстремумами. Наприклад, знайти екстремум функції $u = x^2 + y^2$, якщо $x + y - 2 = 0$. Виразимо y з умови зв'язку і підставимо в функцію: $u = 2x^2 - 4x + 4$, будемо мати задачу на безумовний екстремум. В т. $x = 1$, функція має екстремум, а функція $u = x^2 + y^2$ має умовний екстремум $u_{\min} = 2$ в т. (1,1), який не співпадає з безумовним екстремумом: мінімум параболоїд обертання має в т (0,0) і $u_{\min} = 0$.

Постановка задачі про умовний екстремум

Потрібно знайти екстремум функції $n + m$ змінних

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_{2,} ..., y_m) \tag{1}$$

при умовах зв'язку

$$F_1(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_{2,} ..., y_m) = 0$$

$$F_2(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_{2,} ..., y_m) = 0 \tag{2}$$

....

$$F_m(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_{2,} ..., y_m) = 0, \; m < n$$

Функція u визначена в деякій області $E \subset R^{n+m}$, (2) називають рівняннями зв'язку.

О. Функція $u = f(P)$ має в т. $P_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0)$ умовний максимум (мінімум), якщо $\exists$ окіл точки P_0 - $O(P_0)$: $\forall P \in \mathrm{O}(\mathrm{P}_0)$ виконуються умови: $\Delta f(P_0) \le 0$ ($\Delta f(P_0) \ge 0$), при умові, що точки P і P_0 задовольняють рівнянням зв'язку (2).

Знаходження умовного екстремуму можна звести, при умові розв'язку системи (2), до розв'язку задачі безумовного екстремуму. Для цього припустимо, що $F_i(P)$ диференційовні в деякому околі т. P_0, а в самій точці P_0 частинні похідні цих функцій по $y_1, y_{2,} ..., y_m$ неперервні, а якобіан

$$\left.\frac{D(F_1, ..., F_m)}{D(y_1, ..., y_m)}\right|_{P_0} \ne 0$$

Тоді (2) підлягає теоремі про існування і диференційованість неявних функцій, заданих системою рівнянь, а отже (2) задає однозначні неявні функції

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (3)$$

....

$$y_m = \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Підставивши (3) в (1), зведемо питання про існування умовного екстремуму в т. P_0 функції (1) при умові (2) до питання існування безумовного екстремуму функції Φ в т. M_0: $f(P) = f(x_1, x_2, ..., x_n, \varphi_1(x_1, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_1, ..., x_n) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Не розв'язуючи систему (2), встановимо необхідні умови існування умовного екстремуму в т. P_0.

Нехай $u = f(P)$ диференційовна в т. P_0 і має в цій точці умовний екстремум, або, що те саме, функція $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ має в т. M_0 безумовний екстремум. Необхідною умовою безумовного екстремуму функції $u = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ в т. M_0 є рівність нулю в цій точці диференціала цієї функції:

$du = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} dx_n = 0$, тотожна відносно dx_1, ..., dx_n:

$$\frac{\partial \Phi(M_0)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1, n}. \qquad (4)$$

В силу інваріантності форми першого диференціалу і рівності (4) диференціал du запишемо так:

$$du = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y_1} dy_1 + ... + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y_m} dy_m = 0, \qquad (5)$$

Тут $dy_1, ..., dy_m$ - це диференціали функцій (3) і $\frac{\partial f(P_0)}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial f(P_0)}{\partial y_m}$ не дорівнюють нулю.

Продиференціюємо рівняння зв'язку (2):

$$dF_1(P_0) = \frac{\partial F_1(P_0)}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial F_1(P_0)}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_1(P_0)}{\partial y_1} dy_1 + ... + \frac{\partial F_1(P_0)}{\partial y_m} dy_m = 0, \qquad (6)$$

....

$$dF_m(P_0) = \frac{\partial F_m(P_0)}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial F_m(P_0)}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_m(P_0)}{\partial y_1} dy_1 + ... + \frac{\partial F_m(P_0)}{\partial y_m} dy_m = 0.$$

Оскільки якобіан відмінний від нуля в т. P_0, то розв'яжемо систему (6) і знайдемо $dy_1,...,dy_m$ як лінійні функції $dx_1,...,dx_n$. Якщо знайти ці вирази і підставити в du(5), то будемо мати:

$$A_1 dx_1 + ... + A_n dx_n = 0, \qquad (7)$$

де $A_1,...,A_n$ раціональні функції частинних похідних $f, F_1,...,F_m$ в т. M_0. В рівності (7) містяться диференціали незалежних змінних $dx_1,...,dx_n$, то робимо висновок, що всі $A_i = 0, i = \overline{1,n}$. Додамо до цих умов m умов зв'язку (2): $A_i = 0, i = \overline{1,n}, F_j = 0, j = \overline{1,m}$.

Ці рівності – система $m+n$ рівнянь для визначення $(m+n)$ координат точки можливого екстремуму.

Метод невизначених множників Лагранжа

Помножимо рівності (6) на довільні, поки що невизначені постійні множники $\lambda_1,...,\lambda_m$ і додамо почленно до рівності (5). Отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_j} + \lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_j} + ... + \lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_j}\right)dx_j + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i} + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_i} + \lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y_i} + ... + \lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_i}\right)dy_i = 0, (8)$$

Введемо функцію $L = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + ... + \lambda_m F_m,$ рівність (8) матиме вигляд:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial L}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial L}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial L}{\partial y_m}dy_m = 0, (9)$$

Функцію L будемо називати функцією Лагранжа. Виберемо множники $\lambda_1,...,\lambda_m$ так, щоб виконувались рівності $\frac{\partial L}{\partial y_1} = 0,..., \frac{\partial L}{\partial y_m} = 0, (10)$

Це можна зробити і отримати лінійну систему

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + ... + \lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_1} = 0,$$

………………

$\frac{\partial f}{\partial y_m} + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_m} + ... + \lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_m} = 0$, якобіан якої відмінний від нуля. Рівність (9) набуде вигляду $\frac{\partial L}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial L}{\partial x_n}dx_n = 0.$

Оскільки $dx_1,...,dx_n$ - диференціали незалежних змінних, то $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0,..., \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0, (11)$

Приєднаємо до рівнянь (10) і (11) рівняння зв'язку і отримаємо систему $n + 2m$ рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1,n}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_j} = 0,\ j = \overline{1,m}$$

$$F_j = 0,\ j = \overline{1,m}$$

для визначення $n+m$ координат точок можливого екстремуму та m множників Лагранжа $\lambda_1,...,\lambda_m$. При практичній реалізації цього метода складають функцію Лагранжа і для цієї функції знаходять точки можливого безумовного екстремуму. Для виключення множників $\lambda_1,...,\lambda_m$ долучають умови зв'язку.

Достатні умови

Припустимо існування і неперервність других похідних для функції f і F_i, $i = \overline{1,m}$ в т. M_0.

Обчислимо другий диференціал функції L:

$$d^2L = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial}{\partial y_m}dy_m\right)^2 L$$

Нам потрібно визначити знак d^2L в т. M_0.

Приклад 110 к.

$$u = xy + yz, x^2 + y^2 = 2, y + z = 2 \ \left(x, y > 0, z > 0\right)$$

$$\Phi = xy + yz + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \mu(y + z - 2)$$

$$\begin{cases} \Phi_x' = y + 2\lambda x = 0, \\ \Phi_y' = x + z + 2\lambda y + \mu = 0, \\ \Phi_z' = y + \mu = 0, \\ x^2 + y^2 = 2, \\ y + x - 2 = 0. \end{cases}$$

$$x = y = z = 1, \lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -1.$$

M(1,1,1)

$$d^2\Phi = 2\lambda(dx^2 + dy^2) + 2dxdy + 2dydz,$$

$$\lambda = -\frac{1}{2},$$

$$d^2\Phi = -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz,$$

$$dy = -dz = -dx,$$

$$d^2\Phi\,|_M = -dx^2 - 3dy^2 - 2dz^2 < 0,$$

$$\Phi_{\max} = 2.$$

Числові ряди.

I. Поняття числового ряду.

Розглянемо нескінченну числову послідовність $x_1, x_2, ..., x_n, ...$. Складений з її елементів вираз

$$x_1 + x + ... + x_n + ... \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \qquad (1)$$

називається числовим рядом, де x_n - загальний член ряду, виражений як функція номера n ($x_n = \frac{1}{n}, x_n = aq^{n-1}$). Складемо з елементів ряду такі суми, які називаються частковими: $S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, ..., S_n = x_1 + ... + x_n$.

Означення. *Числовий ряд називається збіжним*, якщо $\exists$ скінченна границя послідовності його часткових сум – ця границя називається сумою ряду ($\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$), в протилежному випадку ряд називається розбіжним ($\overline{\exists} \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ або $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$).

Приклад 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$. $S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1.$

Розглянемо 4 випадки:

1) $|q| < 1, q^n \to 0, \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} \Rightarrow$ ряд збіжний;

2) $|q| > 1, q^n \to \infty, \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow$ ряд розбіжний;

3) $q = 1, S_n = a + a + ... + ..., S_n = na,$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, $\Rightarrow$ ряд розбіжний;

4) $q = -1, S_n = a - a + a - a + ... + (-1)^{n-1}a + ..., \overline{\exists}$ границі, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \begin{cases} 0, n - \text{парне} \\ a, n - \text{непарне} \end{cases} \Rightarrow$ ряд розбіжний.

Тобто, нескінченна геометрична прогресія збігається тоді і тільки тоді, коли $|q| < 1$.

Приклад 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty$$. $\Rightarrow$ ряд розбіжний.

Властивості числових рядів

Т1*. **Збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ не порушується, якщо всі члени ряду помножити на одне й те саме число $k \neq 0$, причому $\sum_{n=1}^{\infty} kx_n = k\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Твердження очевидне, якщо розглянути $\sum_{n=1}^{N} kx_n = k\sum_{n=1}^{N} x_n$ і перейти до $N \to \infty$.***

Т2. Сума (різниця) двох збіжних рядів є ряд збіжний, причому

$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ ***(2). Дійсно, так як, для $\forall$ скінченного N:***

$\sum_{n=1}^{N} (x_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{N} x_n \pm \sum_{n=1}^{N} y_n$ ***, то при $N \to \infty \Rightarrow (2)$.***

Якщо ряд (1) збіжний, то $R_n = S - S_n$ називається n-тим залишком ряду, $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$,

$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = 0.$

Якщо в ряді $x_1 + x_2 + \ldots + x_p + x_{p+1} + x_{p+2} + \ldots$ відкинути скінченне число перших р членів, то отримаємо ряд $x_{p+1} + x_{p+2} + \ldots$, який збігається або розбігається одночасно з початковим рядом. Наслідок: при дослідженні ряду на збіжність можна ігнорувати скінченне число його членів.

Необхідна ознака збіжності ряду.

Т.3 Якщо ряд (1) збіжний, то його n-тий член x_n при необмеженому зростанні n прямує до нуля $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Розглянемо часткові суми $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, S_{n-1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}.$

Звідси маємо $x_n = S_n - S_{n-1}.$

Оскільки ряд збіжний, то $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ і $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, отже, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

<u>Наслідок</u>. Якщо n-тий член ряду при $n \to \infty,$ ***не прямує до 0, то ряд розбіжний.***

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \ldots + \frac{n}{2n+1} + \ldots$; $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$, ряд розбіжний;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ розбіжний, бо не $\exists \lim_{n\to\infty} (-1)^n$.

Розглянемо гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, він – розбіжний, хоча $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Доведемо цей факт.

Візьмемо суму 2^m членів ряду і згрупуємо наступним чином:

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}) + \ldots + (\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^m})$$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$, кількість дужок (m-1) і кожна $> \frac{1}{2}$, кожна дужка містить відповідно2, 2^2, 2^3, 2^{m-1} членів, отже $S_{2^m} > 1 + \frac{m}{2}$, при $m \to \infty \Rightarrow S_{2^m} \to \infty \Rightarrow$ ряд розбіжний.

<u>Критерій Коші збіжності числового ряду</u>

Питання про збіжність ряду, за означенням, еквівалентне питанню про збіжність послідовності часткових сум, тобто $\exists \lim S_n$, тому сформулюємо критерій збіжності Коші.

Т.4. Для того, щоб ряд (1) збігався $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N і \forall p \in \mathrm{N}$ $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon, \text{або} \; | \mathrm{x}_{n+1} + \mathrm{x}_{n+2} + \ldots + \mathrm{x}_{n+p} | < \varepsilon$

Доведення аналогічне доведенню критерія Коші для послідовностей.

Для гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ маємо:

$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| > \left.\frac{p}{n+p}\right|_{n=p} = \frac{1}{2} > \varepsilon$, для $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ і, отже, ряд розбіжний.

<u>II.Додатні числові ряди.</u>

Розглянемо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, всі члени яких невід’ємні

$a_n \geq 0$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, S_{n+1} \geq S_n$.

Критерій збіжності додатного числового ряду.

Для того, щоб ряд з додатними членами був збіжним необхідно і достатньо, щоб S_n була обмежена зверху.

Ознаки збіжності додатних рядів.

1.***Ознака порівняння рядів.***

Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) додатні (невід'ємні) і не перевищують відповідних членів збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (2)$, тобто $a_n \leq b_n, \forall n > N$, то ряд (1) збіжний, розбіжність (1) викликає розбіжність (2).

Доведення. Нехай $S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} a_k, S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} b_k$

Оскільки ряд (2) збіжний, то $\lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = S^2, 0 \leq a_1 \leq b_1, 0 \leq a_2 \leq b_2, \ldots, 0 \leq a_n \leq b_n \Rightarrow S_n^{(1)} \leq S_n^{(2)} \leq S^2$, оскільки $a_n \geq 0$, то S_n зростає при збільшенні n, але не більше S^2, а $\forall$ зростаюча обмежена послідовність має границю.

Необмеженість $S_n^{(1)}$ викликає необмеженість $S_n^{(2)}$ і ряд (2) – розбіжний.

Приклад: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^n + n^2}}; \frac{1}{\sqrt{4^n + n^2}} \leq \frac{1}{2^n}$ - збіжний;

2) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$ - розбіжний $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}$ розбіжний.

2. Ознака збіжності Даламбера (1717-1783).

Нехай всі члени ряду $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ додатні і $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$ тоді при умові

1) $l < 1$ - ряд збіжний

2) $l > 1$ - розбіжний

3) $l = 1$ - ознака відповіді не дає.

Доведення: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<\varepsilon$ при достатньо великому $n\geq N$, $l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\varepsilon$ при $n\geq N$.

Розглянемо 3 випадки: 1) $l<1$ і візьмемо ε, що $l+\varepsilon<1$.

Покладемо $l+\varepsilon=q$, тоді $0<q<1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q, a_{n+1}<qa_n, \forall n\geq N.$ При $n=N, N+1, N+2,...$ будемо мати низку нерівностей $a_{N+1}<a_N q, a_{N+2}<a_N q^2, a_{N+3}<a_N q^3...$ і члени ряду будуть менше членів геометричної прогресії $a_{N+1}+a_{N+2}+...<a_N q+a_N q^2...$

При $|q|<1$ ряд збігається, а за ознакою порівняння збігається ряд $a_{N+1}+a_{N+2}+...$, отже, і вихідний ряд.

2) $l>1, \varepsilon>0$ таке, що $l-\varepsilon>1$ і $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1; a_{n+1}>a_n$ при $n=N, N+1, N+2,...; a_N<a_{N+1}<a_{N+2}<...$ члени зростають і не прямують до 0, а прямують до ∞.

3)при $l=1$ на прикладах показується, що ряд як збігається, так і розбігається.

Приклади: Дослідити на збіжність ряди

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$.

$a>0, \frac{a^{n+1}n!}{(n+1)!a^n}=\frac{a}{n+1}\to 0<1$ (при $n\to\infty$), ряд - збіжний.

2) $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty}\frac{1}{n^S}$. $\frac{n^S}{(n+1)^S}\to 1,$ відповіді немає. Це узагальнений гармонічний ряд, збігається при $S>1$і розбігається при $S\leq 1$, при $S=1$ маємо гармонічний ряд.

3) $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Застосуємо ознаку д’Аламбера

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}\to\frac{1}{4}<1$, а тому ряд збіжний.

3. Ознака Коші.

Якщо ряд строго додатній: $a_n > 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$, то при $q<1$ряд збіжний, $q>1$ ряд розбіжний, при $q=1$ - невідомо.

Приклад 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}, \sqrt[n]{a_n} = \frac{a}{\sqrt[n]{n}} \to a, a\geq 1$- розбіжний, $a<1$ - збіжний.

(Узагальнена радикальна ознака Коші)

Для ряду $\sum a_n$ позначимо $q = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$, тоді: якщо $q<1$, то ряд $\sum a_n$ - збіжний; якщо $q>1$, то ряд $\sum a_n$ - розбіжний.

Застосуємо одержану ознаку. Знайдемо вказану верхню границю.

Приклад 2. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3\left(\sqrt{2}+1\right)^n}{3^n}} = \frac{\sqrt{2}+1}{3}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1$

а тому ряд збіжний.

Приклад 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}; \overline{\lim}\sqrt[2n-1]{\frac{1}{2^{2n-1}}} = \frac{1}{2} < 1$ збіжний.

4. Ознака порівняння із степенем.

Якщо при $n\to\infty$ $a_n = O(\frac{1}{n^p})$, то при $p>1$ ряд (1) збігається, при $p\leq 1$ - розбігається.

Приклад. $a_n = \ln\cos\frac{e}{n} = \ln(1-\frac{1e^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})) = -\frac{e^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2})$ - ряд збігається, $p=2>1.$

5. Ознака Раабе.

Якщо ряд (1) додатній строго і $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=p$, то при $p>1$ ряд - збіжний, при $p<1$ - розбіжний, $p=1$ - ? $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ - послідовність Раабе.

<u>III. Ряди з довільними членами.</u>

Розглянемо ряди, частина членів яких додатна, частина – від’ємна, частина дорівнює нулю. Частинний випадок такого ряду – ряд Лейбніца – це ряд вигляду: $a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+...+(-1)^{n-1}a_n+...$, або $a_1+(-a_2)+a_3+(-a_4)+a_5+(-a_6)+...,a_n\geq 0, при$ $n=1,2,...$ (1)

(тут два поруч члени мають протилежні знаки)

<u>Теорема Лейбніца.</u> Якщо модулі членів ряду (1) монотонно спадають: $a_1\geq a_2\geq a_3\geq a_4\geq ...$ ***при зростанні n, і n-тий член ряду прямує до 0,*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$***, то ряд збігається і*** $0<S\leq a_1$***.***

Доведення: Візьмемо суму S_{2m} членів.

$S_{2m}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+...+(a_{2m-1}-a_{2m})$, то $S_{2m}\geq 0$

Якщо 2m зростає, то S_{2m} не спадає (додаються невід’ємні доданки)

Представимо S_{2m} в іншому вигляді: $S_{2m}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)+...-(a_{2m-2}-a_{2m-1})-a_{2m}$

Звідси $S_{2m}\leq a_1$ і є монотонно зростаючою і обмеженою послідовністю і $\exists\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}=S, S_{2m+1}=S_{2m}+a_{2m+1}$, а $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1}=0$ і $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1}=S$, тобто при парному n=2m та непарному n=2m+1 існує одна границя і ряд збіжний.

Приклад. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...$ збіжний, виконується т. Лейбніца.

Наслідок. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=S_n+(-1)^n(a_{n+1}-a_{n+2}+...), R_n=(-1)^n(a_{n+1}-a_{n+2}+...), |R_n|\leq a_{n+1}.$

Якщо знакозмінний ряд підмінити його частковою сумою, то похибка від його абсолютної величини не перевищує першого з відкинутих членів.

Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}, S_{10}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...-\frac{1}{10}, |R_n|\leq\frac{1}{11}$

Оскільки для збіжності знакозмінного ряду перевірка загальної умови збіжності ряду є непростою ($a_n \to 0, S_{n+m} \to 0$), то почнемо з випадків, коли збіжність ряду зводиться до збіжності додатного ряду.

IV. Абсолютно і умовно збіжні ряди.

О.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n |$.

При дослідженні рядів на абсолютну збіжність використовуємо ознаки збіжності для рядів з невід'ємними членами.

Т.1. Із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n |$ випливає збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доведення. Використаємо критерій Коші. Треба довести, що $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N i \forall p \in \mathrm{N}$ $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$ Фіксуємо $\forall \varepsilon > 0$. Із збіжності $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n |$ випливає $\sum_{k=n+1}^{n+p} | a_k | < \varepsilon.$ Із критерія Коші та нерівності $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} | a_k |$ випливає збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Покажемо, що твердження, зворотне до теореми 1 не має місця.

Для цього достатньо розглянути такий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Ряд збігається за ознакою Лейбніца:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots;$$

З теорії послідовностей ми знаходили границю такої послідовності:

$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \ln 2$ а це означає збіжність вказаного ряду.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \ln 2.$$

Як слідує з збіжності степеневого ряду ряд, що складається з модулів $\sum \frac{1}{n}$ є розбіжним.

О.2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ називається ***умовно збіжним***, якщо цей ряд збіжний, а ряд із модулів $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ - розбіжний.

Приклад. 1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \ldots,$ де $\alpha > 1$. Ряд збігається абсолютно, бо при $\alpha > 1$ збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Ознаки Абеля і Діріхле

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots, \qquad (1)$$

$a_n, b_n -$ дві послідовності дійсних чисел.

Ознака Абеля.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ збігається, а числа a_n утворюють монотонну і обмежену послідовність $|a_n| \le k, n = 1,2\ldots$, то ряд збіжний.

Ознака Діріхле-Абеля.

Якщо часткові суми ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ обмежені $|S_n| = |\sum_{k=1}^{n} b_k| \le M$, $|S_n| \le M, S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, а числа a_n утворюють монотонну послідовність, що прямує до 0: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд збіжний.

Ознака Лейбніца є частковий випадок цієї ознаки при $b_n = (-1)^{n+1}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 - 1 + 1 - 1\ldots.$ має обмежену послідовність часткових сум.

Приклад 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} (0 < \alpha < 2\pi), b_n = \sin n\alpha, a_n = \frac{1}{n}.$

Обчислимо часткові суми ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha, |S_n| = \dfrac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$

$$S_n = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\{[\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2}] + [\cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2}] + [\cos(n-\frac{1}{2})\alpha - \cos(n+\frac{1}{2})\alpha]\}$$

$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}[\cos\frac{\alpha}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})\alpha]$, тобто S_n обмежена, а послідовність $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ не зростаюча і нескінченно мала, тобто за ознакою Діріхле-Абеля – ряд збіжний.

Приклад 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$. Оскільки $\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin(n-\frac{1}{2})x = 2\sin\frac{x}{2}\cos nx,$ просумуємо співвідношення по $n = 1, k$, матимемо: $2\sin\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{k}\cos nx = \sin(k+\frac{1}{2})x - \sin\frac{1}{2}x = 2\sin\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{k}\cos nx =$

$$= 2S_n \sin\frac{x}{2}.S_n = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

$\forall x$ не кратного 2π :$|S_n| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$. Ряд збігається для $\forall x$ не кратного 2π, якщо х кратне 2π, то ряд перетворюється в гармонічний і розбігається.

1.Функціональні послідовності та ряди

Раніше при розгляді послідовності:

$\left(1+\frac{x}{1}\right),\left(1+\frac{x}{2}\right)^2,...\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ..., яка має границю e^x, або ряду $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+...$ який має суму $\ln(1+x)$, х було постійне число.

Функціональна природа елементів послідовності і її границі або членів ряду і його суми нами не враховувалась. Розглянемо послідовність

$$f_1(x), f_2(x),...f_n(x),... , \qquad (1)$$

елементами якої є функції від змінної х і $\forall x \in X$, $X \subset R$ послідовність має границю $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, яку будемо називати **граничною функцією**.

Відображення $N \xrightarrow{\Phi} F$, де F - множина всіх функцій називається ***функціональною послідовністю* (ФП)**. Значення відображення $\Phi(n)=f_n$ називається $n-$***м членом***, та будемо її позначати (f_n).

1. Збіжність послідовності функцій

Означення 1. Функціональна послідовність (1) називається **збіжною** в т. $x_0 \in X$, якщо в цій точці збіжна відповідна числова послідовність $\{f_n(x_0)\}$

Критерій Коші збіжності функціональної послідовності.

Для того, щоб функціональна послідовність (1) збігалася $\forall$ т.
$x_0 \in X \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \exists N(\varepsilon,x_0)\in N : \forall n>N \forall p=1,2,... \left|(f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)\right|<\varepsilon$

Означення 2.Функціональна послідовність (f_n) називається ***поточково збіжною*** до функції f, якщо $\forall x \in X \quad f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Будемо це позначати як $f_n \to f$. У випадках, коли важливий сам факт поточкової збіжності ФП, а не гранична функція, будемо це позначати як $f_n \to$.

Розглянемо також ряд, члени якого є функції.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots + \qquad (2)$$

Функціональна послідовність (S_n) називається ***функціональним рядом*** ***(ФР)***, якщо існує така функціональна послідовність (f_n), для якої виконується умова: $\forall n \in N$ $\forall x \in X$ $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Такий функціональний ряд будемо позначати $\sum f_n$. Значення S_n називається ***частковою сумою*** ФР $\sum f_n$, а функція f_n її ***загальним членом*** ($n-$м членом) функціонального ряду.

2. Збіжність функціональних рядів

Розглянемо функціональний ряд (2). Припускаючи збіжність введемо його суму $S(x)$, часткову суму $S_n(x)$ і його залишок після *n*-того члена

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = S(x) - S_n(x)$$

$\forall x \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$

Означення 3 Функціональний ряд (2) – збіжний в т. $x_0 \in X$, якщо збіжний в цій точці відповідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$,або $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$ і абсолютно збіжний в т. x_0, якщо при $x = x_0$ збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

Поточковою сумою ФР $\sum f_n$ на множині X називається поточкова границя його часткових сум, якщо вона існує. ФР називається ***поточково збіжним*** на X, якщо його поточкова сума існує та скінчена в кожній точці множини X.

Якщо ФР збігається до деякої функції S, то будемо це позначати $\sum f_n \to S$, якщо важливий сам факт збіжності ряду, то позначатимемо це так: $\sum f_n \to$. Поточкову суму ряду, якщо вона існує будемо позначати $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

ФП (S_n) завжди можна розглядати як ФР $\sum(S_n - S_{n-1})$, $S_0 \equiv 0$.

Множина точок $x \in X$, в кожній з яких функціональний ряд (2) збіжний, становить **область збіжності** функціонального ряду.

Приклад. Знайти область збіжності і абсолютної збіжності ряду:

1) $U_n(x) = \frac{\ln^n(x)}{n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}$ абсолютно збігається, якщо $|q| < 1$ і розбігається, якщо $|q| > 1$; при $q = -1$ ряд збігається не абсолютно; $q = 1$ - розбіжний. І тому $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x)}{n}$ абсолютно збіжні, якщо $|\ln x| < 1$, $e^{-1} < x < e$ і не абсолютно збіжний якщо $\ln x = -1$, $x = e^{-1}$. При інших x ряд розбіжний. Отже $[e^{-1}; e)$ - область збіжності, $(e^{-1}; e)$ - область абсолютної збіжності.

Для функції $f: X \to R$ число $\sup_{x \in D_f} |f(x)| \in \overline{R}$ називається ***рівномірною нормою*** функції та позначається $\|f\|$.

Теорема 1. *(Про рівномірну норму функції)*

Для сукупності функцій, що мають області визначення множину X, рівномірна норма функцій є нормою.

Доведення. Перевіримо аксіоми норми. Її невід’ємність очевидна.

1) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in X} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.

2) $\|\lambda f(x)\| = |\lambda| \cdot \| f(x)\|$ - очевидно.

3) $\forall x \in X \quad | f(x) + g(x)| \le | f(x)| + |g(x)| \le \| f\| + \|g\|$, далі переходимо до супремуму і одержуємо нерівність трикутника.

Теорема доведена.

Теорема 2. *(Про обмежену функцію)*

Функція $f : R \to R$ обмежена тоді і тільки тоді, коли $\| f\| < +\infty$.

Доведення безпосередньо слідує з означення супремуму. $\| f\| = \sup\limits_{x\in D_f} | f(x)| < +\infty \Leftrightarrow$ $\exists M \in R: \forall x \in D_f \quad | f(x)| \le M$.

Теорема 3. *(Рівномірна норма добутку)*

Нехай $f : R \to R$, $g : R \to R$, якщо $D_f \cap D_g \ne \varnothing$, то $\| fg\| \le \| f\| \cdot \|g\|$.

Доведення. $\forall x \in D_f \cap D_g \quad | f(x)g(x)| \le | f(x)| \cdot |g(x)| \le \| f\| \cdot \|g\|$, а далі знову переходимо до супремуму.

Теорема доведена.

Теорема 4. *(Про рівномірну норму композиції)*

Якщо $D_{f\circ g} \ne \varnothing$, то виконується рівність: $\| f \circ g\| = \left\| f\Big|_Z \right\|$, де $f\Big|_Z$ - звуження функції на множину $X = E_g \cap D_f$.

Доведення. Нехай $x \in D_g$ та $g(x) \in D_f$. Тоді $| f(g(x))| = | f(w)|$, де $w = g(x) \in X \Rightarrow$ $\sup\limits_{x\in D_{f\circ g}} |(f \circ g)(x)| = \sup\limits_{w\in X} | f(W)|$ звідки й слідує твердження теореми.

Нас будуть цікавити функціональні властивості граничної функції. Наприклад, всі елементи (1) – неперервні функції на $X = [a,b]$, чи буде неперервною гранична функція?

Приклад 1) $f_n(x) = x^n$, $X = [0,1]$, $f(x) = 0$ при $x < 1$ і $f(1) = 1$ (розрив при x=1);

2) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $X = [0,1]$, $f(0) = 1, f(x) = 0$ при $x > 0$;

3) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $f(x) = 0$ при всіх x (скрізь неперервна).

Нас цікавитимуть функціональні властивості суми ряду, які залежать від характеру наближення $S_n(x)$ до $S(x)$.

i.

3. Рівномірна збіжність функціональної послідовності

Функціональна послідовність (f_n) називається ***рівномірно збіжною*** до функції f на множині X, якщо $\|f_n - f\| \to 0$ при $n \to \infty$. При цьому функція f називається ***рівномірною границею*** ФП (f_n) саму збіжність будемо позначати як $f_n \Rightarrow f$, або $f_n \Rightarrow$, якщо важливий сам факт рівномірної збіжності, а не рівномірна границя.

Теорема 1. *(Зв'язок рівномірної та поточкової збіжності ФП)*

Якщо на множині X $f_n \Rightarrow f$, то на X також $f_n \to f$.

Доведення. З означення рівномірної збіжності можемо записати оцінку: $\forall x \in X$ $0 \le |f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\| \to 0$, з якої все слідує.

Теорема доведена.

Наслідок. *(Єдність рівномірної границі)*

Якщо на множині X $f_n \Rightarrow$, то її рівномірна границя єдина.

Все слідує з того, що поточкова границя також єдина.

Можна дати означення рівномірної збіжності ФП в іншому формулюванні.

<u>Означення4.</u> Послідовність функцій { $f_n(x)$}називається рівномірно збіжною до f(x) на множині X, якщо $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon$ і для всіх $x \in X$ одночасно виконується нерівність

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ або } \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Тут суттєво, що N_ε не залежить від x. Для позначення рівномірної збіжності використовується запис :

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \, x \in X \text{ , або } f_n \underset{x}{\rightrightarrows} f.$$

Приклади:

1) $$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}, \, x \in R, \qquad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0, \;\; f(x) = 0.$$

$$\left| \frac{x}{1 + n^2 x^2} - 0 \right| = \frac{|x|}{1 + n^2 x^2} \leq \frac{1}{2n} < \varepsilon, \quad N \geq [\frac{1}{2\varepsilon}], \;\; f_n(x) \rightrightarrows 0.$$

2)

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1)$$

$$f(x) = 0 \qquad |f_n(x) - f(x)| = x^n \Big|_{x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}} = \frac{1}{2} \text{ не менше } \varepsilon, \quad f_n(x) \text{ не} \rightrightarrows 0.$$

3)

$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2 + x^2}, \quad x = [-1,1]$$

$$f(x) = 1. \qquad |f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2}{n^2 + x^2} \leq \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \text{ оскільки } |x| \leq 1.$$

$$\frac{n^2}{n^2 + x^2} \rightrightarrows 1, \;\; x \in [-1,1].$$

ФП (f_n) називається ***<u>рівномірно фундаментальною</u>***, якщо $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon : \;\; \forall n \geq N_\varepsilon$ $\forall p \in N \;\Rightarrow\; \| f_{n+p} - f_n \| < \varepsilon$.

Теорема 2. *(Критерій Коші для ФП)*

ФП (f_n) рівномірно збіжна тоді і тільки тоді, коли вона рівномірно фундаментальна.

Доведення. Необхідність. $f_n \Rightarrow f \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \ \forall n \geq N_\varepsilon \quad \| f_n - f \| < \varepsilon \quad \Rightarrow$ $\forall p \in N \quad \| f_{n+p} - f \| < \varepsilon \ \Rightarrow \ \| f_{n+p} - f_n \| \leq \| f_{n+p} - f \| + \| f_n - f \| < 2\varepsilon$ необхідність доведена.

4. Рівномірна збіжність функціонального ряду.

Означення5. ФР (2) $\sum f_n$ називається ***рівномірно збіжним***, якщо послідовність його часткових сум (S_n) рівномірно збігається, тобто $S_n(x) \rightrightarrows S(x), x \in X$, а саме: $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in N : \forall n > N \left| S_n(x) - S(x) \right| < \varepsilon \forall x \in X$ одночасно, або $\sup\limits_{x \in X} \left| S_n(x) - S(x) \right| < \varepsilon$, або $r_n(x) = S(x) - S_n(x) \rightrightarrows 0 \quad \forall x \in X$.

ФР $\sum f_n$ ***задовольняє рівномірну умову Коші***, якщо послідовність його часткових сум рівномірно фундаментальна.

Теорема 3. *(Критерій Коші для ФР)*

ФР $\sum f_n$ рівномірно збіжний тоді і тільки тоді, коли він задовольняє рівномірну умову Коші.

Це є просте переформулювання теореми 2 для послідовностей.

Приклади.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((n-1)x+1)(nx+1)}$**,** $x = (0, +\infty)$

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{((k-1)x+1)(kx+1)}=\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)x+1}-\frac{1}{kx+1}=$$

$$=\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2x+1}+\ldots+\frac{1}{(n-1)x+1}-\frac{1}{nx+1}\right)=\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{nx+1}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{x}.\quad S(x)=\frac{1}{x}.$$

$\left|S_n(x)-S(x)\right|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x(nx+1)}-\frac{1}{x}\right|=\left.\frac{1}{x(nx+1)}\right|_{x_n=\frac{1}{n}}=\frac{n}{2}$ *не менше* ε*, ряд не є рівномірно збіжний.*

2)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x},\quad 0<x<\infty,\qquad \left|R_n(x)\right|\le a_{n+1}<\frac{1}{n+1+x}<\frac{1}{n+1}<\varepsilon,$ *ряд рівномірно збіжний.*

Розглянемо найпоширенішу і найпростішу ознаку Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціональних рядів.

<u>Ознака Вейєрштрасса.</u> Якщо для функціонального ряду (2) $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ можна вказати такий числовий збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, що $\forall n\ge n_0,\ \forall x\in X:\left|f_n(x)\right|\le a_n,$ то ряд (2) збігається абсолютно і рівномірно на X.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ називають <u>мажоруючим</u> для $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$.

Доведення:

За критерієм Коші маємо:

$$\left|f_{n+1}(x)+\ldots+f_{n+p}(x)\right| \le \left|f_{n+1}(x)\right|+\left|f_{n+2}(x)\right|+\ldots+\left|f_{n+p}(x)\right| \le a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}<\varepsilon,$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k\right|<\varepsilon \qquad \forall\, n>N,\ \forall\, p=1,2,\ldots$$

Приклад 1.

Ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ і $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ рівномірно збігаються в X, як тільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно, бо $|a_n \sin nx| \le |a_n|,\ |a_n \cos nx| \le |a_n|,$ тут мажоруючий ряд є $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приклад 2.

Довести абсолютну і рівномірну збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$ де $u_n(x)=\dfrac{arctg(n^2 x)\cos \pi nx}{n\sqrt{n}},\ X=R.$

$\forall\, x\in R\ \ i\ \ \forall\, n\in N$ виконується $\left|arctg\, n^2 x\right|<\dfrac{\pi}{2},\quad |\cos \pi nx| \le 1,$ то $\quad |u_n(x)|<\dfrac{\pi}{2n^{\frac{3}{2}}}.$

Із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ випливає абсолютна і рівномірна збіжність на X ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$

(Ознака Абеля рівномірної збіжності ФР)

Нехай $\forall x \in X$ послідовність $(f_n(x))$ монотонна. Якщо ФР $\sum \varphi_n \Rightarrow$ і $\|f_n\|=O(1)$, то ряд $\sum f_n \varphi_n \Rightarrow$ на X .

(Ознака Діріхле рівномірної збіжності ФР)

Нехай $\forall x \in X$ послідовність $(f_n(x))$ монотонна. Якщо ФР $\|f_n\|=o(1)$ і $\left\|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k\right\|=O(1)$, то ряд $\sum f_n \varphi_n \Rightarrow$ на X .

5. Властивості рядів, що рівномірно збігаються

Вивчимо функціональні властивості суми функціонального ряду.

Теорема 1. Нехай функції $f_n(x)$ визначені в $X=[a,b]$ і всі неперервні в деякій точці $x=x_0$ цього проміжку . Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$збігається рівномірно в X , то і сума ряду $S(x)$ в точці $x=x_0$ також буде неперервною.

Доведення: $S(x)=S_n(x)+r_n(x)$, $S(x_0)=S_n(x_0)+r_n(x_0), \forall n\in N$,
$|S(x)-S(x_0)|\le|S_n(x)-S_n(x_0)|+|r_n(x_0)|+|r_n(x)|$

Оскільки ряд збіжний, то $\forall\varepsilon>0\exists n:|r_n(x)|<\varepsilon\forall x$ і в т. x_0. При фіксованому n функція $S_n(x)$ є сумою скінченного числа функцій $f_n(x)$, неперервних в т. $x=x_0$, тому вона неперервна в цій точці і по заданому $\varepsilon>0\exists\delta>0$, що при $|x-x_0|<\delta$ буде $|S_n(x)-S_n(x_0)|<\varepsilon$, а отже $|S(x)-S(x_0)|<3\varepsilon$, що і доводить теорему. Очевидно, що якщо $f_n(x)$ неперервні на всьому проміжку $X=[a,b]$, то якщо ряд рівномірно збіжний , то $S(x)$ неперервна на проміжку.

<u>Теорема Діні.</u> Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. неперервні в усьому проміжку $X=[a,b]$ і невід"ємні $\left(f_n(x)\in C_{[a,b]}, f_n(x)\ge 0\right)$.

Якщо ряд має суму $S(x)$ неперервну в X, то він збігається рівномірно, тобто: якщо $S_n(x)\to S(x)$, то $S_n(x)\rightrightarrows S(x)$, $n\to\infty$. Це випадок, коли рівномірна збіжність є необхідною умовою.

6. Почленне інтегрування функціональних рядів

Теорема 2. Якщо $f_n(x)$, n =1,2,3..., неперервні в $X=[a,b]$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається рівномірно ($\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$), то інтеграл від $S(x)$ представляється так

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + ... + \int_a^b f_n(x)dx + ... \qquad (1)$$

Доведення: Із рівномірної збіжності ряду випливає, що $S(x) \in C_{[a,b]}$ і існування всіх інтегралів очевидне. Проінтегруємо тотожність $S(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + r_n(x)$ в $[a,b]$:

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + ... + \int_a^b f_n(x)dx + \int_a^b r_n(x)dx$$

Сума n членів ряду (1) відрізняється від інтеграла $\int_a^b S(x)dx$ членом $\int_a^b r_n(x)dx$. Потрібно довести, що $\lim_{n\to\infty}\int_a^b r_n(x)dx = 0$.

Із рівномірної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ для $\forall \varepsilon > 0 \exists N : n > N \quad |r_n(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in [a,b]$, тоді для всіх значень n буде виконуватись:

$\left|\int_a^b r_n(x)dx\right| \le \int_a^b |r_n(x)|dx < (b-a)\varepsilon$, що і доводить рівність.

Рівність (1)можна переписати у вигляді:

$$\int_a^b \left\{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right\}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_a^b f_n(x)dx\right\}.$$

Отже, якщо ряд рівномірно збіжний, то інтеграл від суми ряду дорівнює сумі ряду , складеного з інтегралів його членів, тобто можливе почленне інтегрування ряду.

7. Почленне диференціювання функціональних рядів

Теорема 3.. Нехай $f_n(x)$, n =1,2,... визначені на $X=[a,b]$ і мають в ньому неперервні похідні $f_n^{'}(x)$. Якщо в цьому проміжку збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, а ряд складений з похідних $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + ... + f_n'(x) + ...$, збігається рівномірно, то і сума $S(x)$ ряду має в X похідну, причому $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

Теореми 2 і 3 носять достатній характер.

Розглянемо, чи законне диференціювання $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{x}{n^2}, x \in R$. Розглянемо ряд із похідних: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{x^2}{n^4}} \cdot \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2}$,

$\frac{n^2}{n^4+x^2} \le \frac{1}{n^2}$ - ряд збіжний за ознакою Вейєрштрасса, абсолютно і рівномірно, отже почленне диференціювання ряду є законним.

Степеневі ряди

ФР вигляду $\sum a_n (x - x_0)^n$, де $n \in Z^+$ називається ***степеневим рядом*** (***СР***).

Заміною $x - x_0 = x'$, ($x_0 -$ деяке постійне число) СР ряд загального вигляду зводиться до СР виду $\sum a_n x^n$, який в подальшому ми й будемо досліджувати, усі результати, що одержані для останнього ряду легко переводяться у результати для СР загального вигляду. Отже,

степеневий ряд – це функціональний ряд, а саме нескінченний многочлен

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad . \qquad \textbf{(1)}$$

При різних значеннях *x* отримаємо різні числові ряди, які збіжні або розбіжні. Особливий інтерес має множина значень *x* , при яких ряд збігається. Ця множина називається ***областю збіжності степеневого ряду.***

Наведемо теорему, важливу для всієї теорії степеневих рядів.

Теорема 1.(Абеля).

Якщо степеневий ряд збіжний в точці $x = x_0 \neq 0,$ то він абсолютно збіжний для всіх x , для яких $|x| < |x_0|$; якщо ряд розбіжний при $x = x_1,$ то він розбіжний при $\forall x : |x| > |x_1|.$

Доведення:

Оскільки ряд $\sum a_n x_0^n -$ збіжний, то загальний член ряду прямує до нуля :

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$, а отже, обмежений : $\left|a_n x_0^n\right| \le M$, $n = 0,1,2....$

Візьмемо $\forall x : |x| < |x_0|$ і складемо ряд : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n (\frac{x}{x_0})^n.$

Складемо ряд із абсолютних величин:

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n\right|\left|(\frac{x}{x_0})^n\right| \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n = Mq^n \;,\; q<1, \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$ – це ряд, елементи якого складають геометричну прогресію, *q*<1, а отже, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - абсолютно збіжний за ознакою порівняння. Якщо ряд розбіжний в точці x_0, то він розбіжний при $\forall x : |x| > |x_0|$.

При x=0 збігаються всі степеневі ряди. Є ряди, які не збігаються при жодному значенні x.

Приклади:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$. Візьмемо ряд $\sum\left|a_n x^n\right|$. За ознакою Даламбера $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}|x|<1$ лише при *x*=0 , це єдина точка збіжності.

2) $\sum\frac{x^n}{n!}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$ – область збіжності вся числова вісь $x \in R$.

Нехай для (1) $\exists$ точки $x = x_0, \quad x_0 \ne 0,$ при яких (1) – збіжний. Розглянемо множину $D = \{|x_0|\}$, яку назвемо <u>областю збіжності</u> (1). Множина D може бути або обмеженою зверху, або ні.

Якщо D – необмежена зверху , то область збіжності нескінченна: $\forall x\ \exists x_0 : |x| < |x_0|$ і ряд абсолютно збіжний.

Якщо D – обмежена зверху , то $\exists\ \sup\{|x_0|\} = R$, якщо $|x| > R$, то (1) – розбіжний.

Візьмемо $\forall x : |x| < R$. За означенням точної верхньої межі $\exists$точка x_0, що $|x| < |x_0| \le R \Rightarrow$ абсолютна збіжність (1). Отже, в (-R, R) ряд (1) – абсолютно збіжний, для $x > R$ і $x < -R$– ряд розбіжний. В точці $x = \pm R$ - загального твердження немає.

Інтервал (-R, R) називається проміжком збіжності , а число R $(0 < R \le +\infty)$ - радіусом збіжності ряду.

При R=0 ряд всюди розбіжний , область його збіжності складається з однієї точки $x = 0$.

Як пов'язати знаходження радіуса з коефіцієнтами степеневого ряду?

Теорема 3. *(Коші-Адамара)*

Нехай $R \geq 0$ - радіус збіжності СР і $l = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Тоді $R = {}^{1}\!/_{l}$. При цьому, якщо $l = 0$, то $R = +\infty$, і при $l = +\infty$ $R = 0$.

Доведення. З умов теореми ми маємо, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = l|x| . \qquad \textbf{(2)}$$

Якщо $l = 0$, то з радикальної ознаки Коші $\forall x \in R$ числовий ряд $\sum |a_n x^n|$ збіжний, а тому $R = +\infty$.

Якщо $l = +\infty$, то $\forall x \neq 0$ $a_n x^n \neq O(1)$, а тому $R = 0$.

Нехай тепер $0 < l < +\infty$. З радикальної ознаки Коші та рівності **(1)** маємо:

$$R = \frac{1}{l} .$$

Теорема доведена.

Наслідок. *(Формула д'Аламбера для радіуса збіжності)*

Якщо для степеневого ряду $\sum a_n x^n$ існує $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \in \overline{R}$, то радіус збіжності степеневого ряду можна знайти за формулою: $R = {}^{1}\!/_{l}$.

Доведення. Це твердження є наслідком відомої теореми з теорії послідовностей. Якщо для послідовності (a_n) існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, то також існує границя $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ та вони співпадають. А далі залишається скористатися самою теоремою.

Наслідок доведено.

I формула Коші-Адамара :

Якщо для степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \ \exists \ L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$, то $R = \frac{1}{L}$.

Дійсно, візьмемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n x^n\right|$ і використаємо ознаку Даламбера

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = L|x| < 1$ ряд збіжний абсолютно при $|x| < \frac{1}{L}$ і $R = \frac{1}{L}$.

Якщо $L = 0$, то $R = \infty$ і ряд збігається на всій числовій вісі.

$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ – ***І ф-ла Коші-Адамара.***

ІІ формула Коші-Адамара.

Скористаємось ознакою Коші.

Розглянемо послідовність $\rho_1 = |a_1|, \ \rho_2 = \sqrt{|a_1|}, ..., \rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}, ...$.Найбільша границя

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \rho_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \quad , \qquad R = \frac{1}{\rho.}$$

Приклад:

1) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \ \ a_n = \frac{1}{n}, \ \ R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1,$ *ряд збіжний при* $x \in (-1,1),$ розбіжний при $|x| > 1.$

Кінці треба досліджувати:

$x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *- розбіжний*;

$x = (-1)$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - *збіжний*. $D = [-1,1)$ - *область збіжності.*

Функціональні властивості степеневих рядів

Теорема 2. (про рівномірну збіжність степеневого ряду)

Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається на (-R,R), то він рівномірно збіжний на $\forall$ замкненому проміжку $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$.

Теорема 3. (про неперервність суми степеневого ряду).

Сума степеневого ряду $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ як функція змінної x неперервна на (-R, R).

<u>Наведемо дві властивості степеневих рядів:</u>

1) Степеневий ряд можна диференціювати почленно на проміжку його збіжності. $\varphi(x) = S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + n a_n x^{n-1} + ... +$. і інтервал збіжності ряду той, що і для S(x), $|x| < R$.

2) Степеневий ряд можна інтегрувати почленно в інтервалі його збіжності, -R < x < R, тобто при $a \in (-R,\ R)$:

$$\int_a^x S(x)dx = \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n x^n dx.$$

Особливий інтерес має інтегрування степеневого ряду на проміжку [0, x], де $|x| < R.$***:***

$$\int_0^x S(x)dx = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + ... + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}.$$

<u>Розвинення функцій в степеневий ряд</u>

Будемо казати, що функція $(-R, R) \xrightarrow{f} R$ $\left(X \xrightarrow{f} R\right)$ ***<u>може бути розкладеною в степеневий ряд</u>*** на множині $(-R, R)$ (на множині X), якщо існує СР, що збігається до функції f на множині $(-R, R)$ (на множині X), тобто $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R, R)$ $\left(x \in X\right)$.

Теорема 4. (про єдність розвинення функції в степеневий ряд)

Якщо функція f(x) може бути розвинена в степеневий ряд на (-R, R) , то це розвинення єдине і a_n - коефіцієнти Тейлора, а ряд називається рядом Тейлора для функції f(x)

Дійсно, нехай f(x) може бути розвинена в степеневий ряд на (-R, R) ,тоді його суму f(x) можна диференціювати. Диференцюємо ряд n раз:

$f^{(n)}(x) = a_n n! + (n+1)! a_{n+1} x + \dots \quad , \; n - 0,1,2\dots$.

При x=0 маємо $f^{(1)}(0) = a_1, \quad f^{(2)}(0) = 2a_2 \;, \; \dots, \; f^{(n)}(0) = n! a_n \;\; \Rightarrow \;\; a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ – це коефіцієнти Тейлора, які визначені однозначно.

Справедливе твердження: для того , щоб функція могла бути розвинена в степеневий ряд на (-R, R) , необхідно, щоб ця функція мала неперервні похідні будь-якого порядку.

Критерій розвинення функції в степеневий ряд

Для того, щоб функція f(x) могла бути розвинена в ряд Тейлора на (-R, R) , $\Leftrightarrow$ щоб залишковий член в формулі Тейлора прямував до 0 на вказаному інтервалі:

Необхідність: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - збіжний ряд на (-R, R) ,

$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$ - залишок збіжного ряду в кожній точці $x \in$(-R, R) є збіжним,

$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0.$

Достатність: нехай $R_n(x) \to 0$ в точці $x \in$(-R, R) при $n \to \infty$.

$|R_n(x)| = f(x) - S_n(x).$

$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)] = \lim_{n\to\infty} f(x) - 0 = f(x).$

Зауважимо, що відрізками степеневих рядів є многочлени і тому степеневі ряди – зручний спосіб для наближених обчислень.

Теорема 5. (достатні умови розвинення в степеневий ряд)

Якщо функція $f(x) \in C^{\infty}(-R;R)$ і всі похідні обмежені одним і тим самим числом $\left|f^{(k)}(x)\right| \le M, k = 1,2,...n...$, то має місце розвинення $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Візьмемо залишковий член $r_n(x)$ у формі Лагранжа

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0 < \theta < 1$$

$\left|r_n(x)\right| = \frac{\left|f^{n+1}(\theta x)\right|}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1} \le \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!}$. При необмеженому зростанні *n* вираз $\frac{MR^{n+1}}{(n+1)!}$ прямує до 0, це також випливає із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!}$: $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{R^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!R^{n+1}} = \frac{R}{n+2} \to 0 < 1\right)$ і $\lim_{n\to\infty} \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ та $r_n(x) \to 0 \forall x \in (-R;R)$

<u>Степеневі ряди для елементарних функцій</u>

1) $f(x) = \sin x$; $f(x) = \cos x$;

Використаємо достатні умови для розвинення в ряд.

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}),\ f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}),\ \left|f^{(n)}(x)\right| \le 1$$

Коефіцієнти Тейлора для цих функцій:

$f(0) = 0;\ f^{(2m)}(0) = \sin \pi m = 0;\ f^{(2m-1)}(0) = \sin(m\pi - \frac{\pi}{2}) = (-1)^{m-1}\ (m = 1,2,3...)$ і $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$;

$f(0) = 1$; $f^{(2m)}(0) = (-1)^m$; $f^{(2m-1)}(0) = 0$; $m = 1,2,3...$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n^n}$$

2) $f(x) = e^x$. Покажемо, що $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Дійсно, $f^{(k)}(x)=e^x$ при $\forall k=1,2,3...$. $f(0)=1$, $f^{(k)}(0)=1$,

Використаємо критерій розвинення функції в степеневий ряд, покажемо, що залишок ряду $r_n(x)\to 0$ на $(-R;R)$, $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{1}{n!}$

Знайдемо радіус збіжності $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$. Оцінимо

$|r_n(x)|=\left|x^{n+1}\right|\dfrac{e^{\varsigma}}{(n+1)!}<|x|^{n+1}\dfrac{\exp|x|}{(n+1)!}$; бо $\varsigma=\Theta x<|x|,\Theta\in(0,1)$.

$|r_n(x)|\to 0$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-...+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+...$$

3) $f(z)=\ln(1+z), z>-1$

Розглянемо ряд $f'(z)=\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ - це нескінченно спадна геометрична прогресія, ряд збігається при $|z|<1$, його можна інтегрувати в $[0,x]$, де $|x|<R$.

$$\int_0^x\frac{dz}{1+z}=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n+1)}\frac{x^n}{n}$$

Інтервал збіжності такого ряду (-1,1); при x=1 маємо знакозмінний числовий ряд, що збігається за ознакою Лейбніца, при $x=-1$ маємо гармонічний ряд з оберненим знаком і ряд розбіжний. Тобто, розвинення справедливе для $(-1;1]$.

4) $f(x)=arctgx$. Застосуємо почленне інтегрування степеневого ряду, замінивши z на z^2 в прикладі 3)

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$\int_0^x\frac{dz}{1+z^2}=arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Ряд збігається на $[-1,1]$. При $x=1$ ряд дає розвинення $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-...(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+...$

Гармонічний аналіз

В різних галузях науки і техніки маємо справу з періодичними явищами, що повторюються через певний проміжок часу. Такі явища описуються періодичними функціями.

Означення 1.

Функція $f(x) \in X$ називається періодичною, якщо існує таке найменше число T, що для $\forall x$, $x+T \in X$ виконується $f(x+T)=f(x)$, $f(x+nT)=f(x)$, $n \in N$, nT – період.

Важливою є періодична функція $y = A\sin(\omega x+\varphi)$. Цю функцію називають *гармонікою* з амплітудою $|A|$, частотою ω і початковою фазою φ. Гармоніка має період $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. Дійсно при $\forall x$:

$A\sin(\omega x+\varphi)=A\sin(\omega\left(x+\dfrac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi)=A\sin((\omega x+\varphi)+2\pi)$. Представимо гармоніку у вигляді: $A\sin(\omega x+\varphi)=A(\cos\omega x\sin\varphi+\sin\omega x\cos\varphi)$. Покладемо $a=A\sin\varphi$, $b=A\cos\varphi$, будемо мати $A\sin(\omega x+\varphi)=a\cos\omega x+b\sin\omega x$ це представлення будь-якої гармоніки, $A=\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\varphi=\dfrac{a}{A}$, $\cos\varphi=\dfrac{b}{A}$.

Покладемо $T=2e$, $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2e$, $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{2e}=\dfrac{\pi}{e}$ і гармоніка з $T=2e$ має вигляд: $a\cos\dfrac{\pi x}{e}+b\sin\dfrac{\pi x}{e}$.

Розглянемо основну систему тригонометричних функцій $\left\{\cos\dfrac{n\pi x}{e},\sin\dfrac{n\pi x}{e}\right\}$ загального періоду $T=2e$ (e – на півперіод). В фізиці функції

$U_n=a_n\cos\dfrac{\text{n}\pi\text{x}}{\text{e}}$, ($n=0,1,2,\ldots$),

$V_n=b_n\sin\dfrac{\text{n}\pi\text{x}}{\text{e}}$, ($n=1,2,\ldots$) називають *основними гармоніками* (гармоніка V_0 не розглядається, оскільки $V_0\equiv 0$)

Означення 2.

Функції $f\in R[a,b]$ і $g\in R[a,b]$ називають *ортогональними*, якщо $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx=0$

Розглянемо систему функцій $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n ...\} \subset R[a,b]$ (1)

Систему (1) називають *ортогональною на* $[a,b]$, якщо $\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \|\varphi_i\|^2 > 0, & i = j \end{cases}$.

Якщо $\|\varphi_i\| = 1$, то $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ називають *ортонормованою*.

Будь-яку ортогональну систему можна нормувати: підібрати $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n ...$ так щоб $\mu_0\varphi_0, \mu_1\varphi_1, ..., \mu_n\varphi_n ...$, яка ортогональна, була ортонормована $\int_a^b \mu_n^2 \varphi_n^2(x)dx = \mu_n^2 \int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1$, $n = 0,1,2,...$, звідси $\mu_n = \dfrac{1}{\sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}} = \dfrac{1}{\|\varphi_n\|}$.

Розглянемо тригонометричну систему функцій $\left\{\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{e}, \sin\frac{\pi x}{e}, \cos\frac{2\pi x}{e}, \sin\frac{2\pi x}{e}, \ldots, \sin\frac{n\pi x}{e}, \cos\frac{n\pi x}{e}\right\}$ ортогональну на $[-e, e]$

Ці функції будуть попарно ортогональні на будь-якому проміжку, довжина якого рівна спільному періоду $T = 2e$.

Отримаємо умови ортогональності:

1. $\int_{-e}^{e} \frac{1}{2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{n\pi x}{e}\right)dx = \frac{e}{n2\pi} \begin{matrix}\sin\\ (-\cos)\end{matrix} \frac{n\pi x}{e}\Big|_{-e}^{e} = 0$;
2. $\int_{-e}^{e} \cos\frac{n\pi x}{e}\cos\frac{m\pi x}{e}dx = \frac{1}{2}\int_{-e}^{e}\left(\cos\frac{(n+m)\pi x}{e} + \cos\frac{(n-m)\pi x}{e}\right)dx = 0$, $m \neq n$;
3. $\int_{-e}^{e} \cos\frac{n\pi x}{e}\sin\frac{m\pi x}{e}dx = \frac{1}{2}\int_{-e}^{e}\left(\sin\frac{(n-m)\pi x}{e} + \sin\frac{(n+m)\pi x}{e}\right)dx = 0$, ($m$ і n будь-які цілі числа);
4. $\int_{-e}^{e} \sin\frac{n\pi x}{e}\sin\frac{m\pi x}{e}dx = \frac{1}{2}\int_{-e}^{e}\left(-\cos\frac{(n+m)\pi x}{e} + \cos\frac{(n-m)\pi x}{e}\right)dx = 0$, $m \neq n$.

Підрахуємо норми основних тригонометричних функцій.

$$\left\|\frac{1}{2}\right\|^2 \overset{def}{=} \int_{-e}^{e}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}2e = \frac{e}{2}; \quad \left\|\cos\frac{n\pi x}{e}\right\|^2 = \int_{-e}^{e}\cos^2\frac{n\pi x}{e}dx = \left\|\sin\frac{n\pi x}{e}\right\|^2 = e$$

$\left\{\dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}\right\}$ – ортонормована система функцій.

<u>Ряд Фур'є по ортогональній системі функцій</u>

Нехай $f(x)$ задана на $[a,b]$ і може бути представлена у вигляді ряду по ортогональній системі $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$: $f(x)=a_0\varphi_0+a_1\varphi_1+\cdots+a_n\varphi_n+\cdots$, $a_i-const$

Поставимо задачу обчислити постійні a_i.

Припускаємо, що ряди $f(x)\varphi_n(x)=a_0\varphi_0(x)\varphi_n(x)+a_1\varphi_1(x)\varphi_n(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)\varphi_n(x)+\cdots$ можна інтегрувати, $n=0,1,2,\ldots$, $\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx=a_n\|\varphi_n\|^2$, $a_n=\dfrac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$, $n=0,1,2,\ldots$

Має місце твердження: якщо функції системи $\{\varphi_n(x)\}$ неперервні і для $f(x)$ справедливе представлення $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$, причому ряд збігається рівномірно, то це є ряд Фур'є для $f(x)$, а a_n називається *коефіцієнтами Фур'є*.

Ряд Фур'є по тригонометричній системі функцій

Нехай $f(x)$ – кусково-неперервна періодична функція періоду $T=2e$. Нагадаємо, $f(x)$ називається кусково-неперервною на (a,b), якщо цей проміжок можна розбити на скінчене число проміжків (a_s,b_s), $s=1,2,\ldots,N$ на кожному з яких функція $f(x)$ обмежена і неперервна у внутрішніх точках, а на кінцях існують скінченні односторонні границі $f(a_s+0)=\lim\limits_{x\to a_s+0}f(x)$, $f(b_s-0)=\lim\limits_{x\to b_s-0}f(x)$.

Спробуємо представити цю функцію у вигляді суми скінченної або нескінченної кількості гармонік $a_n\cos\dfrac{n\pi x}{e}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{e}$, $n=0,1,2,\ldots$.

Отримаємо тригонометричний ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{e}+b_n\sin\frac{n\pi x}{e}\right) \tag{1}$$

Припускаємо, що ряд збігається на $(-e,e)$ і допускає по членне інтегрування:

$$\int_{-e}^{e} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-e}^{e} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-e}^{e}\cos\frac{n\pi x}{e}dx + b_n\int_{-e}^{e}\sin\frac{n\pi x}{e}dx\right].$$

Оскільки $\int_{-e}^{e}\cos\frac{n\pi x}{e}dx = \int_{-e}^{e}\sin\frac{n\pi x}{e}dx = 0$, то

$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2e}\int_{-e}^{e} f(x)dx$ – це є середнє значення періодичної функції.

$$a_0 = \frac{1}{e}\int_{-e}^{e} f(x)dx \qquad (2)$$

для обчислення інших коефіцієнтів домножимо (1) на $\cos\frac{m\pi x}{e}$ і $\int_{-e}^{e} f(x)\cos\frac{m\pi x}{e}dx =$

$$= \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-e}^{e}\cos\frac{m\pi x}{e}dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\underbrace{\int_{-e}^{e}\cos\frac{n\pi x}{e}\cos\frac{m\pi x}{e}dx}_{=0} + b_n\underbrace{\int_{-e}^{e}\sin\frac{n\pi x}{e}\cos\frac{m\pi x}{e}dx}_{=0}\right) = a_m e,$$

при $m = n \neq 0$ $\int_{-e}^{e}\cos^2\frac{n\pi x}{e} = e$.

$$a_m = \frac{1}{e}\int_{-e}^{e} f(x)\cos\frac{m\pi x}{e}dx \qquad (3)$$

Аналогічно, $\int_{-e}^{e} f(x)\sin\frac{m\pi x}{e}dx = b_m e$, $b_m = \frac{1}{e}\int_{-e}^{e} f(x)\sin\frac{m\pi x}{e}dx$. (4)

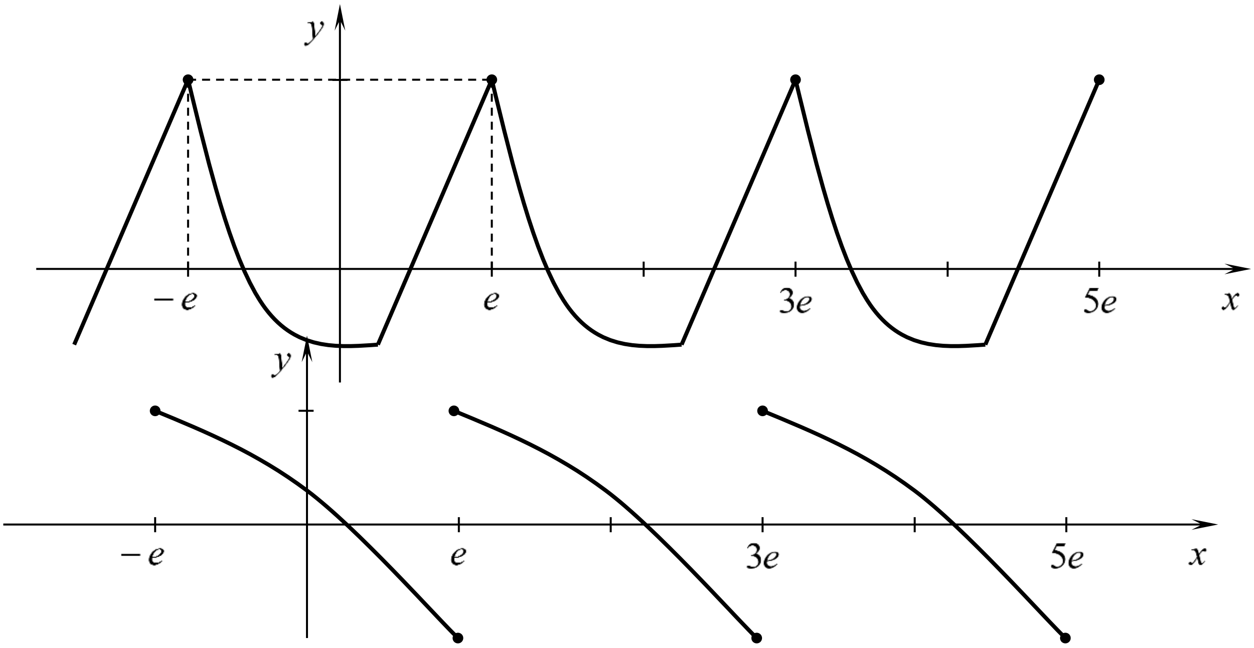
Отже, якщо $f(x)$ інтегровна і може бути розвинута в тригонометричний ряд, причому по- членне інтегрування цього ряду і рядів, отриманих множенням на $\cos\frac{m\pi x}{e}$ і $\sin\frac{m\pi x}{e}$ можливе, то коефіцієнти a_m і b_m обчислюються формулами (2)-(4).

Функція $f(x)$ відповідає ряду Фур’є, термін “відповідає” можна замінити на “рівний” тільки тоді, коли доведена збіжність ряду і рівність його суми функції $f(x)$. Має місце теорема.

Теорема. ***(Достатні умови представлення функції рядом Фур’є)***

Якщо для функції $f(x)$ на $[-e, e]$ має місце розвинення в деякий рівномірно збіжний на $[-e, e]$ тригонометричний ряд, то цей ряд є рядом Фур’є.

На практиці часто виникає задача розвинення в тригонометричний ряд функції $f(x)$ заданої лише на $[-e, e]$. Тобто, про періодичність мови немає, але це не заважає написати ряд Фур'є. Але, якщо періодично продовжити $f(x)$ з відрізку $[-e, e]$ на всю вісь OX, то отримаємо періодичну співпадаючу на $[-e, e]$ з $f(x)$ функцію, для якої ряд Фур'є буде тотожним з рядом Фур'є для $f(x)$ на $[-e, e]$. Тобто, одне і те саме, що ряд Фур'є на $[-e, e]$, що ряд Фур'є для функції, що є продовженням. Якщо $f(-e) = f(e)$, то періодичне продовження труднощів немає.

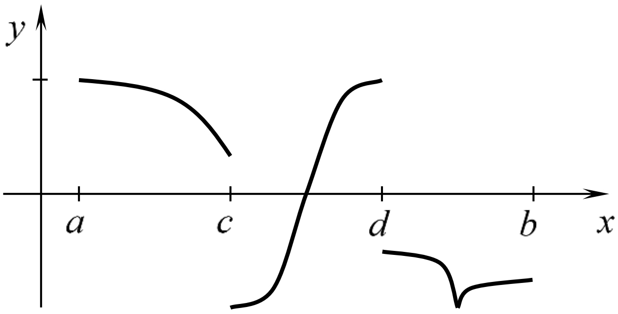


Якщо $f(-e) \neq f(e)$, то не змінюючи значень, не зможемо продовжити, бо по змісту періодичності $f(-e) = f(e)$, (можна зробити ці значення рівними, а можна виключити ці значення). Зміна значень функції в скінченному числі точок, або невизначеність її в цих точках, не впливає на величину інтеграла і ряд Фур'є залишається незмінним. При $f(-e) \neq f(e)$ і неперервності $f(x)$ на $[-e, e]$ періодичне продовження буде мати розриви в точках вигляду $x = (2k+1)e$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

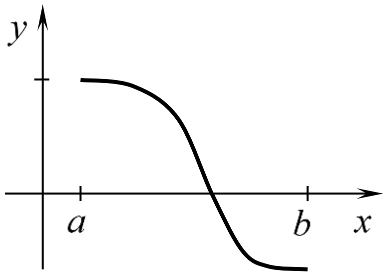
Постає питання : до якого значення збігається ряд Фур'є в точках розриву?Це точки розриву I-го роду, стрибок $\delta = f(-e) - f(e)$.

Гладкі та кусково-гладкі функції.

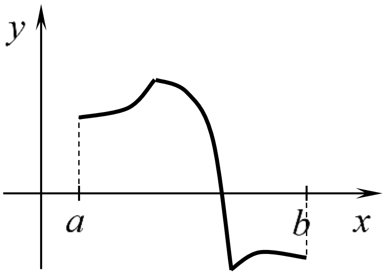
Функція $f(x)$ називається гладкою на $[a, b]$, якщо вона має неперервну похідну. Геометрично це означає, що при переміщенні вздовж кривої $y = f(x)$ напрямок дотичної змінюється неперервно, без стрибків. Функція, похідна якої допускає лише скінченне число точок розриву I-го роду називається *кусково-гладкою* на $[a, b]$.



а)



б)



в)

а) розривна кусково-гладка функція;

б) гладка функція,плавна крива без кутових точок;

в) неперервна кусково-гладка функція

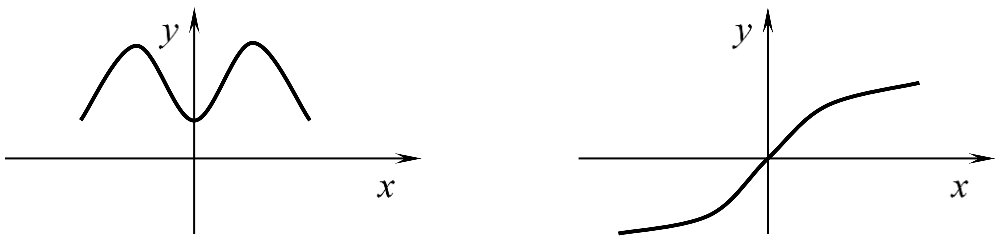
Графік кусково-гладкої функції є неперервна або розривна крива, що має скінченну кількість кутових точок (в них скачок похідної).

Будь-яка кусково-гладка функція $f(x)$ (неперервна чи розривна) обмежена і має обмежену похідну скрізь, за виключенням кутових і точок розриву (в цих точках не існує $f'(x)$).

Теорема. ***Ряд Фур'є кусково-гладкої функції*** $f(x)$ ***(неперервної чи розривної), визначеної на (*** $-\infty,+\infty$***) періоду*** $T = 2e$ ***збігається для*** $\forall \ x \in (-\infty,+\infty)$***, причому його сума*** $S(x) = f(x)$ ***в кожній точці неперервності і дорівнює півстрибку*** $S(x_0) = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ ***в кожній точці розриву*** x_0***.***

Якщо $f(x)$ всюди неперервна, то ряд збігається абсолютно і рівномірно.

<u>Ряди Фур'є для парних і непарних функцій</u>



Нагадаємо, що функція називається парною, якщо $f(-x) = f(x)$ і непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$.

Для парної функції $\int\limits_{-e}^{e} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{e} f(x)dx.$

$$\int\limits_{-e}^{e} f(x)dx = \int\limits_{-e}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{e} f(x)dx = \int\limits_{0}^{e} f(-x)dx + \int\limits_{0}^{e} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{e} f(x)dx,$$

$\int\limits_{-e}^{e} f(x)dx = 0$ для непарної функції.

Нагадаємо, що

а) добуток двох парних і двох непарних функцій є парна функція;

б) добуток парної і непарної – є непарна функція.

Ряди по $\cos$ ***і ряди по*** $\sin$

Будеморозкладати в ряд Фур'є парну функцію:

$f(x)$ – парна періодична функція періода $2e$.

$\cos\frac{n\pi x}{e}$ – парна і буде парною $f(x)\cos\frac{n\pi x}{e}$, $f(x)\sin\frac{n\pi x}{e}$ – непарна.

$$a_n = \frac{1}{e}\int\limits_{-e}^{e} f(x)\cos\frac{n\pi x}{e}dx = \frac{2}{e}\int\limits_{0}^{e} f(x)\cos\frac{n\pi x}{e}dx \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{e}\int\limits_{-e}^{e} f(x)\sin\frac{n\pi x}{e}dx = 0 \quad n = 1,2,\ldots$$

Для парної функції ряд Фур'є містить тільки косинуси:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_0 \cos\frac{n\pi x}{e}.$$

Нехай тепер $f(x)$ – непарна періодична функція періода $2e$, $f(x)\sin\frac{n\pi x}{e}$ – парна, $f(x)\cos\frac{n\pi x}{e}$ – непарна і

$$b_n = \frac{2}{e}\int_0^e f(x)\sin\frac{n\pi x}{e}dx,\ a_n = 0,\ n = 0,1,2,\ldots$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{e}.$$

Нехай треба розкласти в ряд функцію $f(x)$ задану і абсолютно інтегровану на $[0,e]$. Для ряда по косинусах продовжимо $f(x)$ парним чином на $[-e;0]$. Для „продовженої" функції коефіцієнт Фур"є обчислюється за формулами:

$$a_n = \frac{2}{e}\int_0^e f(x)\cos\frac{n\pi x}{e}dx,\ n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = 0.$$

Непарне продовження дає розвинення по $\sin$. $a_n = 0,\ n = 0,1,2,\ldots$ $b_n = \frac{2}{e}\int_0^e f(x)\sin\frac{n\pi x}{e}dx$

Якщо $f(x)\in R[-\pi,\pi]$, $e = \pi \ \Rightarrow\ f(x) - 2\pi$ – періодична функція,

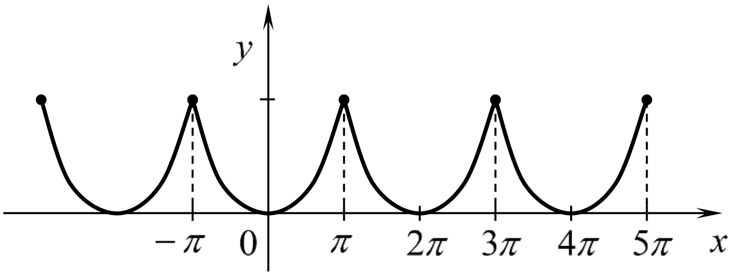
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx,\ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

<u>Приклади розвинення в ряд Фур'є</u>

1. $f(x)=x^2$, $-\pi \le x \le \pi$. $f(x)$ – парна. Періодичне продовження –неперервна і кусково-гладка функція, збіжність абсолютна і рівномірна.



$T=2\pi, e=\pi$;

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=\pi}=\frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=-\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{4}{\pi n^2}\left[x\cos nx\right]_{x=0}^{x=\pi}-\frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nxdx=$$

$$=\frac{4}{n^2}\cos\pi n=(-1)^n\frac{4}{n^2},\ b_n=0,\ n=0,1,2,\ldots;$$

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots+\cdots\right);$$

2. $f(x)=|x|$, $-\pi \le x \le \pi$. Продовжена функція є неперервною таі кусково-гладкою. Ряд Фур'є кусково-гладкої функції періоду 2π збігається для $\forall\ x$, його сума дорівнює $f(x)$ в кожній точці неперервності.

$$|x|=x;\ x\ge 0.\ a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\pi}=\pi;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{x=0}^{x=\pi}=\frac{2}{\pi n^2}\left[\cos\pi n-1\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right],\ n=2m,\ a_n=0,\ n=2m+1,\ a_n=-\frac{4}{\pi n^2};b_n=0.$$

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right).$$

<u>Квадратичне відхилення многочлена Фур'є від функції</u>

Представлення функції нескінченним рядом Фур'є має на практиці той сенс, що скінченна сума , яку отримуємо при обриванні ряду на n-ому члені, є наближеним виразом функції. Це наближення можна довести до будь-якої степені точності шляхом вибору достатньо великого значення n. Але характер наближення може бути різним.

Нехай f(x) – довільна , задана на [a,b] функція з інтегровним квадратом, $f(x) \in R[a,b], \quad f^2(x) \in R[a,b].$

Розглянемо многочлен n-ого порядку по довільній ортогональній системі функцій

$$\{\varphi_k\}_{k=0,n}, \; P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x). \qquad \textbf{(1)}$$

$P_n(x)$ - це многочлен Фур'є,

α_k , $k = 1, n$ - постійні, невідомі коефіцієнти.

Розглянемо $\delta_n{}^2 = \int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx = \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2.$

<u>**Ставиться задача:**</u> при даному n вибрати коефіцієнти $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ так , щоб квадратичне відхилення многочлена від функції було мінімальним.

$$\delta_n{}^2 = \int_a^b (f(x) - P_n(x))(f(x) - P_n(x))dx = \int_a^b f^2(x)dx - 2\int_a^b f(x)P_n(x)dx + \int_a^b P_n{}^2(x)dx \qquad \textbf{(2)}$$

$\int_a^b f(x)P_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx, \quad a \quad \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = a_k \|\varphi_k\|^2, \quad$ *де* $a_к$ – ***коефіцієнт Фур"є функції f(x) і*** $\int_a^b f(x)P_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a_k \|\varphi_k\|^2$ ***(3)***

$$\int_a^b P_n{}^2(x)dx = \int_a^b (\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x))^2 dx = \int_a^b (\sum_{k=0}^{n} \alpha_k{}^2 \varphi_k{}^2 + \sum_{p \neq q} \alpha_p \alpha_q \varphi_p(x)\varphi_q(x))dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k{}^2 \int_a^b \varphi_k{}^2(x)dx + \sum_{p \neq q} \alpha_p \alpha_q \int_a^b \varphi_p(x)\varphi_q(x)dx.$$

Другий доданок рівний нулю і $\int_a^b P_n{}^2(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k{}^2 \|\varphi_k\|^2$ ***(4)***

(3) і (4) підставимо в (2):

$$\delta_n{}^2 = \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=0}^{n} \alpha_k a_k \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k{}^2 \|\varphi_k\|^2 =$$

$$=\int_a^b f^2(x)dx+\sum_{k=0}^{n}(a_k-\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2-\sum_{k=0}^{n}a_k{}^2\|\varphi^k\|^2, \qquad \int_a^b f^2(x)dx-const,$$

$\sum_{k=0}^{n}a_k{}^2\|\varphi_k\|^2-const,$ вони не залежать від $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n$ і δ_n буде мінімальною , коли

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k-\alpha_k)^2\|\varphi_k\|^2=0\Rightarrow\ a_k=\alpha_k\ \ (k=0,1,2,...n).$$

Отже, квадратичне відхилення буде мінімальним , коли коефіцієнти многочлена $P_n(x)$ є коефіцієнтами Фур"є.

Позначимо мінімальне відхилення через Δ_n :

$$\Delta_n=\int_a^b(f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x))^2dx=\int_a^b f^2(x)dx-\sum_{k=0}^{n}a_k{}^2\|\varphi_k\|^2 \qquad \textbf{(5)}$$

Із зростанням n Δ_n залишається додатним і зменшується , тобто частинні суми ряду Фур"є дають більш точне наближення представлення f(x). Отже, серед усіх многочленів найменше відхилення від f(x) дає многочлен з коефіцієнтами Фур"є.

Оскільки $\Delta_n\geq 0$, то із **(5)** $\Rightarrow\int_a^b f^2(x)dx\geq\sum_{k=0}^{n}a_k{}^2\|\varphi_k\|^2.$

Оскільки n- довільне, то сума буде тільки зростати , але вона обмежена зверху і при $n\to\infty$ має скінченну границю, тобто ряд $\sum_{k=0}^{\infty}a_k{}^2\|\varphi_k\|^2$ збігається , $\lim_{k\to\infty}a_k\|\varphi_k\|=0$ і ми отримали **нерівність Бесселя:**

$$\int_a^b f^2(x)dx\geq\sum_{k=0}^{\infty}a_k{}^2\|\varphi_k\|^2.$$

Якщо система нормована ,то $\int_a^b f^2(x)dx\geq\sum_{k=0}^{\infty}a_k{}^2$ і ряд із коефіцієнтів Фур"є є збіжним , $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, тобто коефіцієнти Фур"є при $n\to\infty$ прямують до 0.

Повні системи.

Означення. Ортогональна система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}\subset R_{[a,b]}$ називається *повною* в класі $Q_{[a,b]}$ - кусково-неперервних функцій, якщо $\forall f(x)\in Q_{[a,b]}$ її ряд Фур'є збігається в середньому до $f(x)$:

$$\left\|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k\right\|^2\underset{n\to\infty}{\to}0$$

Критерій повноти системи функцій:

Для того щоб $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ була повною, необхідно і достатньо, щоб $\forall f(x)$ з інтегрованим квадратом виконувалась рівність Парсеваля-Стеклова:

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \|\varphi_k\|^2$$

Найважливіші властивості повних систем

<u>*Теорема 1*</u> Якщо система $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ повна, то не існує неперервної функції $f(x)$, яка не рівна нулю тотожньо, і ортогональної до всіх функцій системи.

Дійсно, ортогональність $f(x)$ до всіх функцій системи означає рівність нулю всіх коефіцієнтів Фур'є. Тоді з умови повноти випливає, що $\int_a^b f^2(x)dx = 0$, а в силу неперервності $f(x) \Rightarrow f(x) \equiv 0$.

<u>*Теорема 2*</u> Якщо система повна, то ряд Фур'є для кожної функції $f(x)$ з інтегрованим квадратом можна інтегрувати почленно, незалежно від того, збіжний він чи ні.

Має місце основна теорема Вейєрштраса.

<u>*Теорема 3*</u> Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[-\pi;\pi]$ і $f(-\pi) = f(\pi)$, то цю функцію можна рівномірно наблизити тригонометричними многочленами T(x): $\forall \varepsilon > 0 T(x) : |f(x) - T(x)| < \varepsilon$ де

$$T(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k \cos kx + c_k \sin kx .$$

Мають місце твердження:

I. Для тригонометричного многочлена $T(x)$ справедлива рівність Парсеваля:

$\frac{a_0^{\ 2}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, де $f(x)$ кусково-неперервна на $[-\pi;\pi]$ функція.

II. Тригонометричний ряд Фур'є $\forall$ кусково-неперервної на $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ збігається до цієї функції на $[-\pi;\pi]$ в середньому.

Поняття про невласні інтеграли

При визначенні $\int_a^b f(x)dx$ (такий інтеграл називається власним, але це слово зазвичай опускається) передбачалось, що

а) проміжок $[a,b]$ скінченний;

б) підінтегральна функція визначена , неперервна на $[a,b]$ і обмежена

Якщо порушуються пункти а) або б) то інтеграл називається **невласним**.

Означення 1.

Нехай $f(x)$ визначена на $a \le x < +\infty$ і інтегровна на $[a,R]$,R>0, так що $\int_a^R f(x)dx$ має сенс.

Границя цього інтегралу при $R \to \infty$ називається невласним інтегралом І роду:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$$

Якщо ця границя скінченна, то невласний інтеграл збігається, а $f(x)$ інтегровна на

$[a;+\infty)$; якщо границя нескінченна або не існує, то інтеграл розбіжний і йому не приписується числове значення.

Аналогічно вводиться невласний інтеграл на $(-\infty;b]$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{R\to-\infty}\int_R^b f(x)dx.$$

Невласні інтеграли з двома нескінченними границями можна обчислити як суму двох невласних інтегралів:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

Нехай $F(x)$ - первісна функція для $f(x)$ тоді $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx = \lim_{R\to+\infty}(F(R)-F(a))$.

Якщо існує первісна $F(x)$, неперервна на $[a,b]$ і така , що $F'(x)=f(x)$, узагальнена первісна, ввести умовне позначення $F(+\infty)$=$lim_{R\to\infty} F(R)$, то для збіжного невласного інтегралу з нескінченною верхньою межею інтегрування узагальнена формула Ньютона –Лейбніца має вигляд:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a)$,де $F'(x)=f(x)$

Приклади:

1) $\int_0^{\infty} \cos x dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} \cos x dx = \lim_{R\to\infty} \sin x \Big|_0^R = \lim_{R\to\infty} \sin R$ – не існує, інтеграл розбіжний.

2) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{-x} dx = \lim_{R\to\infty} (-e^{-R}+1) = 1$ - інтеграл збіжний.

3)

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to-\infty} arctgx\Big|_A^0 + \lim_{B\to+\infty} arctgx\Big|_B^0 = \pi$

Інтеграл від необмежених функцій

$f:[a,b) \to R \quad \exists \int_a^{b-\eta} f(x)dx, \lim_{x\to b-0} f(x) = \infty$, точка *b* –особлива, якщо функція необмежена на $[a,b)$, але обмежена на $[a,b-\eta) \subset [a,b)$.

Означення 2.

$\lim_{\eta\to\infty} \int_a^{b-\eta} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ *(1)*

називається невласним інтегралом ІІ-го роду. *Якщо границя скінченна, то невласний інтеграл називається збіжним ,якщо границя нескінченна або не існує, то інтеграл називається розбіжним.*

Якщо точка а – особлива, то $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0} \int_{a+\eta}^b f(x)dx$ (2)

Якщо $f(x)$ необмежена у внутрішній точці с$\in[a,b]$то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, (3)

де невласні інтеграли другого роду визначаються (1) та (2).

Якщо а і b особливі точки ,то $\int_a^b f(x)dx$ визначається (3), де $c\forall \in[a,b]$

Приклад 1

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, $x=1-$ особлива точка, $\lim\limits_{\eta\to 0}\int\limits_0^{1-\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\lim\limits_{\eta\to 0}\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\eta} = -2\lim\limits_{\eta\to 0}(\sqrt{1-1+\eta}-1) = 2.$

Приклад 2

$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x=\pm 1-$ особливі точки,

$$\lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-1+\eta}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\eta\to 0}\int\limits_0^{1-\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to 0}\arcsin x\Big|_{-1+\eta}^{0} + \lim_{\eta\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\eta} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Приклад 3

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha > 0$, x=0 – особлива точка.

При $\alpha = 1$ - інтеграл розбіжний:

При $\alpha \neq 1$:

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\eta\to 0}\int\limits_\eta^1\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\eta\to 0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\eta^1 = \frac{1}{1-\alpha}(1-\lim_{\eta\to 0}\eta^{1-\alpha}) = \begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}, 0<\alpha<1\\ \infty, \alpha>1\end{cases}$$

Приклад 4

$\int\limits_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}}dx$ x=0-особлива точка, первісна $F(x) = 3x^{\frac{1}{3}}$ неперервна в цій точці, то $\exists$

$$\int\limits_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}}dx = 3x^{1/3}\Big|_{-1}^{1} = 3[1-(-1)] = 6$$

Приклад 5

$\int\limits_{-2}^{2}\frac{2x}{x^2-1}dx$ - $\bar{\exists}$, оскільки первісна $\ln\left|x^2-1\right|$ обертається в ∞ в особливих точках x= $\pm$ 1.

Якщо існує $F(x)$, неперервна на $[a,b]$ і така, що $F'(x) = f(x)$ при $a \le x < b$ (узагальнена первісна), то справедлива узагальнена формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0+}\int\limits_a^{b-\eta} f(x)dx = \lim_{\eta\to 0+}[F(b-\eta)-F(a)] = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Деякі відомі невласні інтеграли:

$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ - Пуассона, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ - Діріхле

Між невласними інтегралами $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ та числовими рядами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує глибока аналогія. Якщо процес сумування замінити процесом інтегрування по x, то аналогами будуть:

a_n - загальний член ряду та f(x) – підінтегральна функція;

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ - часткова сума та власний інтеграл

$S(A) = \int_a^A f(x)dx$;

Сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ як границя часткової суми та невласний інтеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ як границя $\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx$;

Залишок ряду $\alpha_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ та інтеграл $\alpha(A) = \int_A^\infty f(x)dx$

Означення 3. Невласний інтеграл I-го роду збігається, якщо $\forall\varepsilon > 0 \exists\Delta(\varepsilon) > 0 : \forall A \in [a,\infty)$ І з того, що $A > \Delta$ $\Rightarrow \left| S(A) - \int_a^\infty f(x)dx \right| < \varepsilon$.

Деякі властивості невласних інтегралів I-го роду:

Якщо невласний інтеграл збіжний, то збіжний його залишок та навпаки, причому:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^A f(x)dx + \int_A^{+\infty} f(x)dx$$

Якщо збігається $\int_a^\infty f(x)dx$, то $\lim_{A\to\infty}\int_A^\infty f(x)dx = 0$

Якщо збігається $\int_a^\infty f(x)dx$, то збігається $\int_a^\infty cf(x)dx$, c – const, причому

$$\int_a^\infty cf(x)dx = c\int_a^\infty f(x)dx$$

Якщо збігаються інтеграли

$\int_a^\infty f(x)dx$ та $\int_a^\infty g(x)dx$, то збігається інтеграл

$\int_a^\infty [f(x) \pm g(x)]dx$ та інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів.

<u>Критерій Коші збіжності невласного інтеграла І-го роду</u>

Для того, щоб $\int_a^\infty f(x)dx$ - збігався $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta(\varepsilon) > 0 : \forall A', A'' \in [a, \infty), A' > \Delta, A'' > \Delta \Rightarrow$

$\left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon$.

<u>Означення 4</u>. Невласний інтеграл ІІ-го роду збігається, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \lambda \in [a, b)$

$0 < b - \lambda < \delta \Rightarrow \left| S(\lambda) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$, де $S(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)dx$.

<u>Критерій Коші збіжності невласного інтеграла ІІ-го роду</u>

Для того, щоб $\int_a^b f(x)dx$ - збігався $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \lambda', \lambda'' \in [a, b)$ $0 < b - \lambda' < \delta$,

$0 < b - \lambda'' < \delta \Rightarrow \left| \int_{\lambda'}^{\lambda''} f(x)dx \right| < \varepsilon$.

Наведені критерії мало придатні на практиці, існують достатні умови збіжності невласних інтегралів.

<u>Ознаки збіжності невласних інтегралів</u>

<u>Загальна ознака порівняння</u>

Нехай дано дві функції f і g –невід”ємні, обмежені на $[a, +\infty)$ і множини точок розриву мають Лебегову міру нуль і $\forall x \in [a, +\infty)$ виконується нерівність $0 \le f(x) \le g(x)$. Тоді із збіжності $\int_a^\infty g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^\infty f(x)dx$; із розбіжності інтеграла

$\int_a^\infty f(x)dx \Rightarrow$ розбіжність інтеграла $\int_a^\infty g(x)dx$.

<u>Приклад:</u>

Дослідити на збіжність :

1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ при x $\geq$ 1

$\frac{1}{x^2(1+e^x)}$ < $\frac{1}{x^2}$, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ = - $\left.\frac{1}{x}\right|_1^\infty$ = 1, отже інтеграл збіжний і його значення < 1.

2) $\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$; $\frac{x+1}{\sqrt{x^3}}$ > $\frac{x}{\sqrt{x^3}}$ = $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/2}}dx$, α = $\frac{1}{2} < 1$, інтеграл розбіжний, розбіжний і $\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$

<u>Частинна ознака порівняння</u>

Нехай невід'ємні функції f і g визначені на [a, ∞) і існує границя $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = c$, c$\in[0,\infty)$. Тоді: при c>0 інтеграли $\int_a^\infty f(x)dx$ і $\int_a^\infty g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно; при c=0 із збіжності інтеграла $\int_a^\infty g(x)dx$ випливає збіжність $\int_a^\infty f(x)dx$.

<u>Означення5.</u>

$\int_a^\infty f(x)dx$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається інтеграл $\int_a^\infty |f(x)|dx$, а функція f(x) називається абсолютно інтегровною на множині $[a,\infty)$.

<u>Теорема</u>

Якщо інтеграл абсолютно збіжний, то він збіжний. Обернене твердження місця не має.

<u>Означення6.</u>

$\int_a^\infty f(x)dx$ називається умовнозбіжним, якщо він збіжний, а інтеграл $\int_a^\infty |f(x)|dx$ -розбіжний.

<u>Приклад</u>

$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^3}dx$, $\frac{\sin x}{x^3}$ - знакозмінна функція, $0 \leq \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \frac{1}{|x|^3}$, $\int_1^\infty \frac{dx}{|x|^3} = \frac{1}{2}$ - збіжний $\Rightarrow$ збіжність $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^3}dx$.

Ознаки порівняння дозволяють встановити лише абсолютну збіжність невласних інтегралів. Наведемо ознаки, які використовуються і для умовної збіжності. Ознаки Абеля і Діріхле збіжності невласних інтегралів основані на застосуванні у випадку, коли абсолютна збіжність відсутня.

<u>Ознака Абеля</u>

Нехай f(x) та g(x) визначені на $[a,\infty)$ і f(x) інтегровна на $[a,\infty)$ і $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ - збіжний,

g(x) – монотонна і обмежена:

$|g(x)| \le \alpha$ (α =const, $a \le x < \infty$)

Тоді $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ збігається (4)

<u>Доведення</u>

За II-ою теоремою про середнє значення, при довільних $A''' > A' > a$ будемо мати

$$\int\limits_{A'}^{A'''} f(x)g(x)dx = g(A')\int\limits_{A'}^{\xi} f(x)dx + g(A''')\int\limits_{\xi}^{A'''} f(x)dx, \text{ де } A' \le \xi \le A''' \qquad (5)$$

Умова існування невласного інтеграла зводиться до питання існування скінченної границі для функції

$$\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x)dx \quad : \quad \lim_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx,$$

$$|\Phi(A') - \Phi(A)| = \left|\int\limits_a^{A'} f(x)dx - \int\limits_a^{A} f(x)dx\right| = \left|\int\limits_A^{A'} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Якщо збігається $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$, то збігається і $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

Отже, для $\forall\varepsilon > 0 \exists A_0 > a$, що при $A > A_0$ буде

$\left|\int\limits_A^{\xi} f(x)dx\right| < \dfrac{\varepsilon}{2\alpha}$, $\left|\int\limits_{\xi}^{A'} f(x)dx\right| < \dfrac{\varepsilon}{2\alpha}$, при $A' > A > A_0$, будемо мати

$\left|\int\limits_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| \le |g(a)|\left|\int\limits_A^{\xi} f(x)dx\right| + |g(\xi)|\left|\int\limits_{\xi}^{A'} f(x)dx\right| < \alpha\dfrac{\varepsilon}{2\alpha} + \alpha\dfrac{\varepsilon}{2\alpha} = \varepsilon$, а звідси збігається (4).

<u>Ознака Діріхле</u>

Нехай f(x) інтегровна в $\forall$ скінченному проміжку [a, A], (A>a) і інтеграл $\left|\int\limits_a^A f(x)dx\right| \le k, (k - const, a \le A < \infty)$ обмежений.

Функція g(x) монотонно прямує до 0 при $x \to \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Тоді інтеграл (4)- збіжний.

Доведення будується на рівності (5), але в цьому випадку g(A) і g(A$'$) можна зробити як завгодно малими, якщо A і A$'$ взяти достатньо великими, а інші множники обмежені числом 2k.

Легко бачити, що при λ >0 збіжні інтеграли

$\int_a^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\lambda}}dx$ і $\int_a^{\infty}\frac{\cos x}{x^{\lambda}}dx$ (a>0)

За ознакою Діріхле $\left|\int_a^A \sin xdx\right| = |\cos a - \cos A| \le 2$ і $\left|\int_a^A \cos xdx\right| \le 2$, а $\frac{1}{x^{\lambda}}$ монотонно спадає і при x$\to\infty$

прямує до 0. При $\lambda = 1$ збіжний $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$,оскільки при x$\to 0$,

$\frac{\sin x}{x}\to 1$,цей інтеграл збігається неабсолютно.

<u>Основні формули для невласних інтегралів</u>

Лінійність

Якщо $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ - збіжні, то $\forall\alpha$ і β збігається

$$\int_a^{+\infty}(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

Формула інтегрування частинами

Якщо u(x), x$\in[a,+\infty)$ і v(x), x$\in[a,+\infty)$ - неперервно диференційовні і $\lim\limits_{x\to\infty} uv - \exists$, то

$$\int_a^{+\infty} udv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} vdu, uv\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} uv - u(a)v(a)$$

Формула справедлива при збіжності одного з двох інтегралів, що входять до формули.

<u>Приклад:</u>

$$\int_1^{+\infty}\frac{arctgx}{x^2}dx$$

Покладемо u=arctgx, dv=$\frac{dx}{x^2}$, du=$\frac{1}{1+x^2}dx$, v=$-\frac{1}{x}$;

$$\int_1^{+\infty}\frac{arctgx}{x^2}dx = -\frac{arctgx}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)} = \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac{\pi}{4} + \left(\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Big|_1^{+\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$