Екзаменаційна робота
з алгебри та геометрії
студента 1 курсу
групи ПІ-11
факультету комп'ютерних
наук та кібернетики
Ольховатого Ігоря Васильовича
Білет №17

1

Характеристичний многочлен лінійного оператора

Нехай $A=(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – деяка квадратна матриця. Візьмемо незалежну змінну t і складемо матрицю:

$$A-tE=\begin{pmatrix} \alpha_{11}-t & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-t & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-t \end{pmatrix}$$

Матриця $A-tE$ називається характеристичною матрицею матриці A, а її визначник утворює многочлен степеня n від змінної t. Цей многочлен називається характеристичним многочленом матриці A. Він позначається як $\chi_A(t)=|A-tE|$.

Корені характеристичного многочлена $\chi_A(t)$ називаються характеристичними числами матриці A.

(Теорема) Характеристичні многочлени подібних матриць співпадають.

Доведення: нехай матриці A, B – подібні, тобто $\exists$ невироджена матриця T : $B=T^{-1}AT$. Тоді $\chi_B(t)=$
$=|B-tE|=|T^{-1}AT-tE|=|T^{-1}AT-T^{-1}(tE)T|=|T^{-1}(A-tE)T|=$
$=|T^{-1}|\cdot|A-tE|\cdot|T|=|A-tE|=\chi_A(t)$ □.

Нехай $\mathcal{A}$ – лінійний оператор в скінченновимірному векторному просторі V, якому в деякому фіксованому базисі $a_1, a_2 \dots a_n$ відповідає матриця A. Оскільки матриці лінійного оператора в різних базисах подібні, то характеристичний многочлен матриці лінійного оператора A не залежить від вибору базису, а тому його можна називати просто характеристичним многочленом лінійного оператора A. Таким чином, характеристичний многочлен даного лінійного оператора — це характеристичний многочлен його матриці в деякому базисі.

Поняття власних векторів та власних чисел.

Нехай A - лінійний оператор на векторному просторі V над полем F.

Ненульовий вектор $a \in V$, $a \neq \theta$ називається власним вектором оператора A, якщо $\exists \lambda \in F$: $A(a) = \lambda a$. При цьому λ — це власне число (власне значення) оператора A. У цьому випадку також кажуть, що a є λ-власним вектором A, або власним вектором, який відповідає власному числу λ.

Теореми про власні вектори

I. Нехай A - лінійний оператор в скінченновимірному векторному просторі V над полем F, $\lambda_0 \in F$ λ_0 - власне число оператора A. Тоді розмірність власного підпростору L_{λ_0} не перевищує кратності λ_0, як кореня характеристичного многогочлена оператора A.

II. Власні вектори лінійного оператора, що відповідають різним власним числам, лінійно незалежні.

III. Нехай A - лінійний оператор на скінченновимірному векторному просторі V над полем F, $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_s \in F$ - власні числа оператора A, $a_1, a_2 \dots a_k \in L_{\lambda_1}$, $b_1, b_2 \dots b_\ell \in L_{\lambda_2}$, … $c_1, c_2 \dots c_m \in L_{\lambda_s}$ — лінійно незалежні системи векторів у відповідних власних підпросторах. Тоді система векторів $\{a_1, a_2 \dots a_k, b_1, b_2 \dots b_\ell \dots c_1, c_2 \dots c_m\}$ лінійно незалежна.

2. Квадратичні функції та форми

Нехай $g(x,y)$ - симетрична білінійна функція на векторному просторі V над полем $\mathbb{R}$. Квадратичною функцією $f(x)$ називається функція одного аргумента, яка утворюється ототожненням аргументів симетричної білінійної функції $g(x,y)$ тобто $\forall x \in V: f(x) = g(x,x)$.

Припустимо, V - скінченновимірний векторний простір, $a_1, a_2 \dots a_n$ - деякий його фіксований базис, $x \in V$ - довільний вектор, який в цьому базисі має координати $x = (x_1, x_2 \dots x_n)$. тоді:

$$f(x) = g(x,x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g(a_i, a_j) x_i x_j.$$

Позначимо $\alpha_{ij} = g(a_i, a_j)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, тоді

$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$. Сума такого вигляду називається квадратичною формою від змінних $x_1, x_2 \dots x_n$. Таким чином, квадратична функція на скінченновимірному векторному просторі в ∀ базисі задається деякою квадратичною формою. В цьому розумінні часто ототожнюють поняття квадратичної функції та квадратичної форми.

Оскільки в різних базисах квадратична функція задається різними квадратичними формами, то кажуть про вигляд квадратичної форми в тому чи іншому базисі.

Матрицею квадратичної функції $f(x)$ в деякому базисі $a_1, a_2 \dots a_n$ називається матриця в цьому базисі симетричної білінійної функції $g(x,y)$, яка породжує квадратичну функцію $f(x)$.

Поняття полярної білінійної функції

Симетрична білінійна функція $g(x,y)$, яка породжує квадратичну функцію $f(x)$, називається полярною білінійною функцією квадратичної функції $f(x)$.

(Теорема) Для будь-якої квадратичної функції

$\exists!$ парна білінійна функція.

Доведення: нехай $f(x)$ – квадратична функція на просторі V, $g(x,y)$ – її парна симетрична білінійна функція. Тоді для деяких фіксованих $x, y \in V$, оскільки функція g – симетрична, маємо:

$g(x+y, x+y) = g(x,x) + g(x,y) + g(y,x) + g(y,y) = g(x,x) + 2g(x,y) + g(y,y) \Rightarrow g(x,y) = \frac{1}{2} \cdot (g(x+y, x+y) - g(x,x) - g(y,y)) = \frac{1}{2} \cdot (f(x+y) - f(x) - f(y))$.

Якщо $h(x,y)$ – інша парна білінійна функція, то також виконується $h(x,y) = \frac{1}{2} \cdot (f(x+y) - f(x) - f(y))$, тобто $g(x,y) = h(x,y)$ $\forall x, y \in V$. $\square$

Згідно з цією теоремою, дослідження симетричних білінійних функцій зводиться до дослідження квадратичних функцій.

3. $a_1 = (1;-1;1;-1;1)$, $a_2 = (1;1;0;0;3)$, $a_3 = (3;1;1;-1;7)$, $a_4 = (0;2;-1;1;2)$ $L = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$. $L = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}_5\}$.

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 + x_5 = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_5 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + 7\alpha = 0 \\ 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - 2x_5$

$x_2 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - x_5$

x_3, x_4, x_5 – вільні

ФСР:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	1	0	0	-1
1	-1	0	2	0
-1	1	2	0	0

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

4. $x = (1; -1; 1; -1)$ $a_1 = (1; -1; 0; 2)$, $a_2 = (1; 0; 1; 1)$.

$x = y + z$, $y \in L$, $z \in L^{\perp}$

$$\begin{cases} \alpha_1 (a_1, a_1) + \alpha_2 (a_1, a_2) = (x, a_1) \\ \alpha_1 (a_2, a_1) + \alpha_2 (a_2, a_2) = (x, a_2) \end{cases}$$

$(a_1, a_1) = 1+1+0+4 = 6$

$(a_1 a_2) = 1+0+0+2 = 3$

$(a_2, a_2) = 1+0+1+1 = 3$

$(x, a_1) = 1+1+0-2 = 0$

$(x, a_2) = 1+0+1-1 = 1$

$$\begin{cases} 6\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1 \end{cases} -$$

$$\begin{cases} 3\alpha_1 = -1 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$\alpha_1 = -\frac{1}{3}$

$\alpha_2 = \frac{2}{3}$.

$y = -\frac{1}{3} a_1 + \frac{2}{3} a_2 = \left(\frac{-1}{3}; \frac{1}{3}; 0; \frac{-2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}; 0; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$

$z = x - y = (1; -1; 1; -1) + \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 0\right) = \left(\frac{2}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{1}{3}; -1\right)$.

$\|z\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{1}{9} + \frac{9}{9}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$.

Відстань $= \frac{\sqrt{30}}{3}$.