ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Вступ

Передумови для виникнення теорії диференціальних рівнянь склалися в 2-й половині XVIIст..

Актуальні на той час так звані «обернені задачі на дотичні», тобто пошук кривих за відомими властивостями їх дотичних, були одними з перших, що зводилися до розв'язання диференціальних рівнянь.

Приклад 1 (Р.Декарт 1639р.)

Нехай на площині з прямокутною системою координат потрібно знайти криву, в кожній точці якої кутовий коефіцієнт дотичної пропорційний ординаті точки дотику, з заданим коефіцієнтом пропорційності k.

Якщо таку криву шукати у вигляді графіка деякої диференційованої функції $y = y(x), \quad x \in \Re$, то враховуючи геометричний зміст похідної, умову задачі можна подати у вигляді співвідношення

$$\frac{dy}{dx} = ky,$$

яке являє собою найпростіше але важливе диференціальне рівняння. Легко переконатися (підстановкою), що його задовольняє будь-яка функція вигляду

$$y = Ce^{kx},$$

де C - довільна дійсна константа.

З метою показати необхідність вивчення теорії диференціальних рівнянь, проілюструємо декілька прикладів з різних галузей, що призв зводять природнім шляхом до математичного запису постановки задачі у вигляді диференціальних рівнянь.

Приклад2. Модель економічної динаміки.

Введемо наступні позначення

$x(t)$ - обсяг основних фондів (капіталу), з розрахунку на одного працівника в момент часу t,

$\mu = const > 0$ та $\nu = const > 0$ - норми амортизації капіталу та темпи росту чисельності робочої сили, відповідно,

$c(t)$ - обсяг споживання з розрахунку одного працівника в момент часу t,

$f(x)$ - виробнича функція, яка є характеристикою продуктивності праці й має певні властивості (опуклість, монотонність…)

Тоді в наведених позначеннях математична модель економічної динаміки (в найпростішому вигляді) буде записана через наступне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) - (\mu + \nu)x(t) - c(t)$$

Приклад 3. Модель розвитку одновидової популяції.

Введемо до розгляду величину
$x(t)$ - величина (кількість, маса популяції) в момент часу t.
Ідеалізуючи процес будемо вважати, що $x(t)$ неперервно змінюється в часі.

Гіпотеза Т.Мальтуса (1798р.):

За малий проміжок часу $[t, t+\Delta t]$
кількість новонароджених особин становить $ax(t)\Delta t$,
а кількість померлих - $bx(t)\Delta t$.
Тут a та b – коефіцієнти народжуваності , та смертності відповідно.

Тоді загальна зміна величини популяції за вказаний проміжок часу виражається формулою

$$x(t+\Delta t) - x(t) = (a-b)x(t)\Delta t + o(\Delta t), \ \ \Delta t \to 0$$

Покладемо $k = a - b$, поділимо обидві частини цієї рівності на Δt й перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$.

Отримаємо вже знайоме диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Розв'язком якого є функція $x = Ce^{kt}$, де C - довільна дійсна константа.

Якщо відомо, що величина популяції в момент часу t_0 становить x_0, значення довільної сталої обчислимо з початкової умови $Ce^{kt_0} = x_0$ та отримаємо залежність

$$x = x_0 e^{k(t-t_0)},$$

яка є розв'язком **задачі Коші** з початковими даними (t_0, x_0).

Зауваження.
Коефіцієнт k можна знайти й у випадку якщо a та b невідомі, але визначивши значення $x_1 = x(t_1)$ в деякий момент t_1.

Тоді з умови $$x_1 = x_0 e^{k(t_1-t_0)}$$

матимемо

$$k = (t_1 - t_0)^{-1} \ln(x_1 / x_0).$$

Цікавий факт, що коли за такою методикою обчислили коефіцієнт k, користуючись даними про населення Землі в 1961р. та 1971р., то отримали залежність

$$x = 3.06 \cdot 10^9 \cdot e^{0.02(t-1961)},$$

яка непогано узгоджується з оцінками приросту населення земної кулі в період між 1700 та 1960рр. У цей час воно реально подвоювалося кожні **35** років.
Отримана нами формула дає подвоєння за **34.6** року**!**

Наведемо декілька основних визначень теорії диференціальних рівнянь, що будуть використовуватися надалі.

Визначення. Рівняння, що містять похідні від шуканої функції та можуть містити шукану функцію та незалежну змінну, називаються **диференціальними рівняннями**.

Визначення. Якщо в диференціальному рівнянні невідомі функції є функціями однієї змінної

$$F(x, y, y', y'', \; \ldots \; , y^{(n)}) = 0,$$

то диференціальне рівняння називається **звичайним**.

Визначення. **Порядком** диференціального рівняння називається максимальний порядок похідної від невідомої функції, що входить в диференціальне рівняння.

Наприклад,

$$y(x) = xy'(x) + y'^3(x) \qquad \text{- д.р. 1-го порядку,}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y(t) - \cos y(t) = 0 \qquad \text{- д.р. 2-го порядку,}$$

$$y^{IV}(x) - 4y'''(x) + 2y'(x) - y(x) = xe^x \qquad \text{- д.р. 4-го порядку,}$$

Визначення. Якщо невідома функція, що входить в диференціальне рівняння, є функцією двох або більшої кількості незалежних змінних

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}, \ \dots\ , \frac{\partial^k z(x,y)}{\partial x^l, \partial y^{k-l}}, \ \dots\ , \frac{\partial^n z(x,y)}{\partial y^n}\right) = 0,$$

то диференціальне рівняння називається **рівнянням в частинних похідних**.

Наприклад,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2} = f(x,y,z)$$

Визначення. **Розв'язком** диференціального рівняння називається функція, що має необхідну ступінь гладкості, і яка при підстановці в диференціальне рівняння обертає його в тотожність.

Наприклад,

функція $y(x) = \cos 2x$ є розв'язком д.р. другого порядку $y''(x) + 4y(x) = 0$.

Розв'язками цього рівняння також будуть $y = \sin 2x$, $y = 3\cos 2x - \sin 2x$,
І взагалі всі функції вигляду

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, \quad \text{де} \quad C_1, C_2 \text{ - довільні сталі.}$$

З геометричної точки зору розв'язку диференціального рівняння в декартовій системі координат відповідає деяка крива, яку називають **інтегральною кривою**.

Сукупність інтегральних кривих, що залежить від довільних сталих, називають **сім'єю інтегральних кривих**.

Наприклад,

Розв'язки рівняння $y''(x) = 2$ утворюють двопараметричну сім'ю парабол $y(x) = x^2 + C_1 x + C_2$, кожна з яких э інтегральною кривою.

Визначення. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається **інтегруванням** диференціального рівняння.

Якщо при цьому всі розв'язки вдається виразити через елементарні функції, то кажуть, що рівняння зінтегроване в **скінченному вигляді**, якщо ж розв'язки виражаються через інтеграли від елементарних функцій, то кажуть про розв'язок у **квадратурах**.

1. Диференціальні рівняння першого порядку.

Рівняння першого порядку, що ***розв'язане відносно похідної***, має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Диференціальне рівняння становить зв'язок між координатами точки (x, y) та кутовим коефіцієнтом дотичної $\frac{dy}{dx}$ до графіку розв'язку в цій же точці.

Якщо знати x та y, то можна обчислити $f(x, y)$ тобто $\frac{dy}{dx}$.

Таким чином, диференціальне рівняння визначає **поле напрямків**, і задача інтегрування рівнянь зводиться до знаходження кривих, що звуться **інтегральними кривими**, напрям дотичних до яких в кожній точці співпадає з напрямом поля.

1.1. Існування та єдиність розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку. Неперервна залежність та диференційованість

Теорема (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші).

Нехай у диференціальному рівнянні $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ визначена в прямокутнику

$$D = \{(x, y) : |x_0 - a \le x \le x_0 + a, \ \ y_0 - b \le y \le y_0 + b\}.$$

і задовольняє умовам:

1) $f(x, y)$ неперервна по x та y в D ;
2) $f(x, y)$ задовольняє умові Ліпшиця по змінній y, тобто

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N|y_1 - y_2|, \quad N = const.$$

Тоді існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння, який визначений при $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, і задовольняє умові

$$y(x_0) = y_0,$$

де $h < \min\{a, b / M, 1 / N\}, \ M = \max\limits_{x, y \in D} |f(x, y)|.$

Зауваження. Умову Ліпшиця $\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le N\left|y_1-y_2\right|$ можна замінити іншою, більш грубою, але легше перевіряємою умовою існування обмеженої по модулю частинної похідної $f_y'(x,y)$ в області D.

Дійсно,

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|=\left|f_y'(x,\xi)\right|\left|y_1-y_2\right|\le N\left|y_1-y_2\right|,$$

де $\xi\in[y_1,y_2]$, $N=\max\limits_{(x,y)\in D}\left|f_y'(x,y)\right|$.

Використовуючи доведену теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші розглянемо ряд теорем, що описують якісну поведінку розв'язків.

Теорема (*про неперервну залежність розв'язків від параметру*).

Якщо права частина диференціального рівняння $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y,\mu)$ неперервна по μ при $\mu\in[\mu_1,\mu_2]$ і при кожному фіксованому μ задовольняє умовам теореми існування й єдиності, причому стала Ліпшиця N не залежить від μ,
то розв'язок $y=y(x,\mu)$, що задовольняє початковій умові $y(x_0)=y_0$, неперервно залежить від μ.

Теорема (*про неперервну залежність від початкових умов*).

Нехай виконані умови теореми про існування та єдиність розв'язків рівняння $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ з початковими умовами $y(x_0) = y_0$.

Тоді, розв'язки $y = y(x_0, y_0; x)$, що записані у формі Коші, неперервно залежать від початкових умов.

Теорема (*про диференційованість розв'язків*).

Якщо в околі точки (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ має неперервні змішані похідні до k-го порядку, то розв'язок $y(x)$ рівняння $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ з початковими умовами $y(x_0) = y_0$ в деякому околі точки (x_0, y_0) буде $(k+1)$-раз неперервно-диференційований.

1.2. Рівняння зі змінними, що розділяються

1.2.1. Загальна теорія

Рівняння вигляду
$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y),$$

або більш загального вигляду
$$f_1(x)f_2(y)dx+g_1(x)g_2(y)dy=0$$

називаються ***рівняннями зі змінними, що розділяються***.

Розділимо його на $f_2(y)g_1(x)$ і одержимо
$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx+\frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy=0.$$

Взявши інтеграли, отримаємо
$$\int\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy=C,$$

або
$$\Phi(x,y)=C.$$

Визначення. Кінцеве рівняння $\Phi(x, y) = 0$, що визначає розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння як неявну функцію від x, називається ***першим інтегралом*** розглянутого рівняння.

Визначення. Рівняння $\Phi(x, y) = C$, що визначає всі без винятку розв'язки даного диференціального рівняння, називається ***загальним інтегралом***.

Бувають випадки (в основному), що невизначені інтеграли $\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)} dx$ або $\int \frac{g_2(y)}{f_2(y)} dy$ не можна записати в елементарних функціях. Незважаючи на це, задача інтегрування вважається виконаною. Кажуть, що диференціальне рівняння ***розв'язане в квадратурах***.

Можливо, що загальний інтеграл $\Phi(x, y) = C$ розв'язується відносно y: $y = y(x, C)$. Тоді, завдяки вибору C, можна одержати всі розв'язки.

Визначення. Залежність $y = y(x, C)$, що тотожно задовольняє вихідному диференціальному рівнянню, де C довільна стала, називається ***загальним розв'язком*** диференціального рівняння.

Геометрично загальний розв'язок являє собою сім'ю кривих, що не перетинаються, які заповнюють деяку область. Іноді треба виділити одну криву сім'ї, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$.

Визначення. Знаходження розв'язку $y = y(x)$, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$, називається ***розв'язком задачі Коші***.

Визначення. Розв'язок, який записаний у вигляді $y = y(x, x_0, y_0)$ і задовольняє умові $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$, називається розв'язком у формі Коші.

Вправи

Рівняння зі змінними, що розділяються можуть бути записані у вигляді

$$y' = f(x)g(y) \qquad \text{або} \qquad f_1(x)f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0.$$

Для розв'язків такого рівняння необхідно обидві частини помножити або розділити на такий вираз, щоб в одну частину входило тільки x, а в другу - тільки y. Тоді обидві частини рівняння можна проінтегрувати.

Якщо ділити на вираз, що містить x та y, може бути загублений розв'язок, що обертає цей вираз в нуль.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\quad x^2 y^2(x)y'(x) + y(x) = 1.$

Розв'язок. Підставивши $y' = \dfrac{dy}{dx}$ в задане рівняння, отримаємо $\quad x^2 y^2 \dfrac{dy}{dx} = -y + 1.$

Помножимо обидві частини рівняння на dx і розділимо на $x^2(y-1)$. Перевіримо, що $y = 1$ при цьому є розв'язком, а $x = 0$ цим розв'язком не є:

$$\frac{y^2}{y-1}dy = -\frac{dx}{x^2}.$$

Проінтегрируємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{y^2}{y-1}dy = -\int \frac{dx}{x^2}; \qquad \text{тобто} \qquad \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = \frac{1}{x} + C.$$

1.3. Рівняння, що зводяться до рівнянь зі змінними, що розділяються

Розглянемо рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c),$$

де a, b, c - сталі.

Зробимо заміну $ax + by + c = z$.

Тоді $adx + bdy = dz$ і $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right)$.

Підставивши в вихідне рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z) \quad \text{або} \quad \frac{dz}{dx} = a + bf(z).$$

Розділивши змінні, запишемо

$$\frac{dz}{a + bf(z)} - dx = 0 \quad \text{і} \quad \int \frac{dz}{a + bf(z)} - x = C.$$

Загальний інтеграл має вигляд $\Phi(ax + by + c, x) = C$.

1.4. Однорідні рівняння

1.4.1. Загальна теорія

Нехай рівняння має вигляд $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Визначення.
Якщо функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ однорідні одного ступеня, то рівняння називається однорідним.

Нехай функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ однорідні ступеня k,

тобто $$M(tx,ty) = t^k M(x,y), \qquad N(tx,ty) = t^k N(x,y).$$

Робимо заміну $$y = ux, \qquad dy = udx + xdu.$$

Після підстановки одержуємо

$$M(x,ux)dx + N(x,ux)(udx + xdu) = 0,$$

або $$x^k M(1,u)dx + x^k N(1,u)(udx + xdu) = 0.$$

Скоротивши на x^k і розкривши скобки, запишемо

$$M(1,u)dx + uN(1,u)dx + xN(1,u)du = 0.$$

Згрупувавши, одержимо рівняння зі змінними, що розділяються

$$[M(1,u) + uN(1,u)]dx + xN(1,u)du = 0,$$

або

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)} du = C.$$

Взявши інтеграли та замінивши $u = y / x$,

отримаємо загальний інтеграл $\Phi(x, y / x) = C.$

1.5. Рівняння, що зводяться до однорідних

Нехай маємо рівняння вигляду $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Розглянемо два випадки

1) $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді система алгебраїчних рівнянь $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок (x_0, y_0).

Проведемо заміну $x = x_1 + x_0$, $y = y_1 + y_0$ та отримаємо

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1(x_1+x_0)+b_1(y_1+y_0)+c_1}{a_2(x_1+x_0)+b_2(y_1+y_0)+c_2}\right) = f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1+(a_1x_0+b_1y_0+c_1)}{a_2x_1+b_2y_1+(a_2x_0+b_2y_0+c_2)}\right).$$

Оскільки (x_0, y_0) - розв’язок системи алгебраїчних рівнянь, то диференціальне рівняння прийме вигляд

$$\frac{dy_1}{dx_1} == f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1}{a_2x_1+b_2y_1}\right)$$

і є однорідним нульового ступеня.

Робимо заміну $y_1 = ux_1, \quad dy_1 = udx_1 + x_1du.$

Підставимо в рівняння

$$u + x_1\frac{du}{dx_1} = f\left(\frac{a_1x_1+b_1ux_1}{a_2x_1+b_2ux_1}\right).$$

Одержимо

$$x_1du + \left[u - f\left(\frac{a_1+b_1u}{a_2+b_2u}\right)\right]dx_1 = 0.$$

Розділивши змінні, маємо

$$\int \frac{du}{u - f\left(\dfrac{a_1 + b_1 u}{a_2 + b_2 u}\right)} + \ln x_1 = C.$$

І загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд

$$\Phi(u, x_1) = C.$$

Повернувшись до вихідних змінних, запишемо

$$\Phi\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}, x - x_0\right) = C.$$

2) Нехай
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто строки лінійно залежні і
$$a_1x + b_1y = \alpha(a_2x + b_2y).$$

Робимо заміну
$$a_2x + b_2y = z.$$

Звідси
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2\right).$$

Підставивши в диференціальне рівняння, одержимо
$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2\right) = f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right),$$

або
$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right).$$

Розділивши змінні, отримаємо

$$\int \frac{dz}{a_2 + b_2 f\left(\dfrac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right)} - x = C.$$

Загальний інтеграл має вигляд

$$\Phi(a_2 x + b_2 y, x) = C.$$

1.6. Лінійні рівняння першого порядку

1.6.1. Загальна теорія

Визначення. Рівняння, що є лінійним відносно невідомої функції та її похідної, називається лінійним диференціальним рівнянням.

Його загальний вигляд такий:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

Якщо $q(x) \equiv 0$, тобто рівняння має вигляд $$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0,$$ то воно зветься ***однорідним***.

Однорідне рівняння є рівнянням зі змінними, що розділяються і розв'язується таким чином:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + \ln C,$$

$$\ln y = -\int p(x)dx + \ln C.$$

Нарешті $$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Розв’язок **неоднорідного** рівняння будемо шукати **методом варіації довільних сталих** (**методом невизначених множників Лагранжа**). Він складається в тому, що розв’язок неоднорідного рівняння шукається в такому ж вигляді, як і розв’язок однорідного, але C вважається невідомою функцією від x,

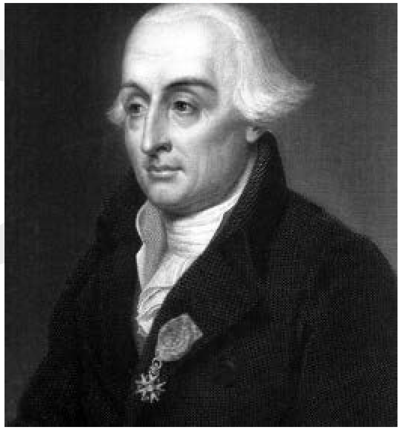
тобто $$C = C(x)$$

і $$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Для знаходження $C(x)$ підставимо y у рівняння

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Жозеф-Луї Лагранж



Звідси

$$dC(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Проінтегрувавши, одержимо

$$C(x) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

І загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = e^{-\int p(x)dx} [\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C].$$

Якщо використовувати початкові умови $y(x_0) = y_0$, то розв'язок можна записати у формі Коші:

$$y(x, x_0, y_0) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_t^x p(\xi)d\xi} q(t)dt.$$

Огюстен Луї Коші

1.6.2. Рівняння Бернуллі

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^{m}, \qquad m\neq 1$$

називається **рівнянням Бернуллі**.

Розділимо на y^m і одержимо

$$y^{-m}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-m}=q(x).$$

Зробимо заміну:

$$y^{1-m}=z, \qquad (1-m)y^{-m}\frac{dy}{dx}=dz/dx$$

Підставивши в рівняння, отримаємо

$$\frac{1}{1-m}\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x).$$

Одержали лінійне диференціальне рівняння. Його розв'язок має вигляд

$$z=e^{-(1-m)\int p(x)dx}\left[(1-m)\int q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx}dx+C\right].$$

1.6.3. Рівняння Рікатті

Jacopo Riccati

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$$

називається **рівнянням Рікатті.**

В загальному випадку рівняння Рікатті не інтегрується.
Відомі лише деякі частинні випадки рівнянь Рікатті, що інтегруються в квадратурах.

Розглянемо один з них.
Нехай відомий один частковий розв'язок $y = y_1(x)$.

Робимо заміну $y = y_1(x) + z$ і одержуємо

$$\frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{dz}{dx} + p(x)\left[y_1(x) + z\right] + r(x)\left[y_1(x) + z\right]^2 = q(x).$$

Оскільки $y_1(x)$ - частинний розв'язок, то

$$\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1 + r(x){y_1}^2 \equiv q(x).$$

Розкривши скобки і використовуючи вказану тотожність, одержуємо

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z + 2r(x)y_1(x)z \quad + r(x)z^2 = 0.$$

Перепишемо одержане рівняння у вигляді

$$\frac{dz}{dx} + \left[p(x) + 2r(x)y_1(x)\right]z = -r(x)z^2,$$

це рівняння Бернуллі з $m = 2$.

1.7. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв’язані відносно похідної

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв’язане відносно похідної, має такий вигляд

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1)$$

Функція $F(x, y, y')$ вважається неперервною в деякій області $D \subset \Re^3$.

Функцію $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційована на інтервалі (a, b), називають **розв’язком** рівняння (1), якщо на цьому інтервалі вона перетворює його у тотожність.

Іноді рівняння $F(x, y, y') = 0$ можна розв’язати відносно y' і воно має n-коренів,

тобто його можна записати у вигляді $\prod_{i=1}^{n} \left[y' - f_i(x, y) \right] = 0$.

Розв’язавши кожне з рівнянь $y' = f_i(x, y),\ i = \overline{1, n}$,

отримаємо n загальних розв’язків (або інтервалів)

$$y = \varphi_i(x, C),\ i = \overline{1, n} \qquad (\text{або } \varphi_i(x, y) = C,\ i = \overline{1, n}).$$

І загальний розв'язок вихідного рівняння, не розв'язаного відносно похідної має вигляд

$$\prod_{i=1}^{n}\left[y-\varphi_i(x,C)\right]=0 \quad \text{або} \quad \prod_{i=1}^{n}\left(\varphi_i(x,y)-C\right)=0.$$

Рівняння (1), так само, як і рівняння розв'язане відносно похідної, визначає на площині xOy деяке поле напрямків. **Але тепер, як правило, у заданій точці (x_0, y_0) матимемо не один, а декілька напрямків поля, бо розв'язуючи $F(x_0, y_0, y')=0$ відносно y', зазвичай одержуємо декілька дійсних різних розв'язків.**

Задача Коші для рівняння (1) формулюється так само, як і для рівняння, розв'язного відносно похідної, тобто, потрібно знайти розв'язок $y = y(x)$ рівняння (1), що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

При цьому, якщо таких розв'язків не більше ніж кількість напрямків поля, визначеного рівнянням (1) у цій точці, тобто не більше кількості розв'язків y_0' рівняння $F(x_0, y_0, y')=0$ то кажуть, що задача Коші має єдиний розв'язок. В противному випадку єдиність розв'язку цієї задачі порушується.

Нехай y_0' - один з дійсних коренів рівняння (1).
З'ясуємо коли ж таки справджується єдність розв'язку.

Теорема.

Нехай ліва частина рівняння (1) задовольняє наступні умови:

1) функція $F(x, y, y')$ визначена і неперервна разом з частинними похідними $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ в деякому замкненому околі точки (x_0, y_0, y_0');

2) $F(x_0, y_0, y_0') = 0$;

3) $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{(x_0, y_0, y_0')} \neq 0$

Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, визначений і неперервно диференційований у деякому околі точки $x = x_0$, який задовольняє умову $y(x_0) = y_0$, і такий, що $y'(x_0) = y_0'$.

Особливим розв'язком називають розв'язок, у кожній точці якого порушується умова його єдиності. Особливий розв'язок не можна отримати з формули загального розв'язку (загального інтеграла) диференціального рівняння при жодному значення довільної сталої C.

З Теореми випливає, що особливі розв'язки можуть існувати лише у тих точках, де порушуються умови цієї теореми. Тобто якщо $F(x, y, y')$ неперервна і має неперервні частинні похідні першого порядку, то особливі розв'язки потрібно шукати серед тих точок, координати яких задовольняють систему

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0, \end{cases} \qquad p = y'.$$

Якщо ця система сумісна, то, виключаючи параметр p, отримаємо деяку множину точок $\varphi(x, y) = 0$, яка може бути особливим розв'язком рівняння (1).
Однак, потрібно ще перевірити, чи геометричне місце точок $\varphi(x, y) = 0$ є розв'язком заданого рівняння, і чи у кожній точці порушується властивість єдиності розв'язку (тобто чи знайдений розв'язок є особливим).

1.7.1. Частинні випадки рівнянь, що інтегруються в квадратурах

Розглянемо ряд диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах.

1) Рівняння вигляду $F(y')=0$.

Нехай алгебраїчне рівняння $F(k)=0$ має по крайній мірі один дійсний корінь $k=k_0$.

Тоді, інтегруючи $y'=k_0$, одержимо $y=k_0x+C$.

Звідси $k_0=\dfrac{y-C}{x}$

і вираз $F\left(\dfrac{y-c}{x}\right)=0$ містить всі розв’язки вихідного диференціального рівняння.

2) Рівняння вигляду $F(x, y') = 0$.

Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y' = \psi(t). \end{cases}$

Використовуючи співвідношення $dy = y'dx$,

одержимо $dy = \psi(t)\varphi'(t)dt$.

Проінтегрувавши, запишемо

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

І загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C. \end{cases}$$

3) Рівняння вигляду $F(y, y') = 0$.

Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді $\begin{cases} y = \varphi(t) \\ y' = \psi(t). \end{cases}$

Використовуючи співвідношення $dy = y'\,dx$,

отримаємо $\varphi'(t)dt = \psi(t)dx$ і $dx = \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt$.

Проінтегрувавши, запишемо

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C.$$

І загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

4) Рівняння Лагранжа $y = \phi(y')x + \psi(y')$.

Введемо параметр $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$

і отримаємо $y = \phi(p)x + \psi(p).$

Продиференціювавши, запишемо $dy = \phi'(p)xdp + \phi(p)dx + \psi'(p)dp.$

Замінивши $dy = pdx$

одержимо $pdx = \phi'(p)xdp + \phi(p)dx + \psi'(p)dp.$

Звідси $[p - \phi(p)]dx - \phi'(p)xdp = \psi'(p)dp.$

І отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Його розв'язок $$x = e^{-\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p} dp} \left[\int \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} e^{\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p} dp} dp + C \right] = \Psi(p, C).$$

І остаточний розв'язок рівняння Лагранжа в параметричній формі запишеться у вигляді

$$\begin{cases} x = \Psi(p, C) \\ y = \varphi(p)\Psi(p, C) + \psi(p). \end{cases}$$

5) Рівняння Клеро.

Частинним випадком рівняння Лагранжа, що відповідає $\varphi(y') = y'$ є рівняння Клеро $y = y'x + \psi(y')$.

Поклавши $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$,

отримаємо $y = px + \psi(p)$.

Продиференціюємо $dy = pdx + xdp + \psi'(p)dp$.

Оскільки $dy = pdx$,

то $pdx = pdx + xdp + \psi'(p)dp$.

Скоротивши, одержимо $[x + \psi'(p)]dp = 0$.

Можливі два випадки.

1. $x+\psi'(p)=0$ і розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x=-\psi'(p) \\ y=-p\psi'(p)+\psi(p). \end{cases}$$

2. $dp=0, \quad p=C$ і розв'язок має вигляд

$$y=Cx+\psi(C).$$

Загальним розв'язком рівняння Клеро буде сім'я прямих $y=Cx+\psi(C)$.

Цю сім'ю огинає особа крива $x=-\psi'(p), \quad y=-p\psi'(p)+\psi(p)$.

6) Параметризація загального вигляду.

Нехай диференціальне рівняння $F(x,y,y')=0$ вдалося записати у вигляді системи рівнянь з двома параметрами

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v), \\ y=\psi(u,v), \\ y'=\theta(u,v) \end{cases}.$$

Використовуючи співвідношення $dy = y'\,dx$, одержимо

$$\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}du+\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}dv=\theta(u,v)\left[\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}dv\right].$$

Перегрупувавши члени, запишемо

$$\left[\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}-\theta(u,v)\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}\right]du=\left[\theta(u,v)\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right]dv.$$

Звідси

$$\frac{du}{dv}=\frac{\theta(u,v)\dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}-\dfrac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}}{\dfrac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}-\theta(u,v)\dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}}.$$

Або отримали рівняння вигляду

$$\frac{du}{dv}=f(u,v).$$

Зауваження. Параметризація загального вигляду не дає інтеграл диференціального рівняння. Вона дозволяє звести диференціальне рівняння, не розв'язане відносно похідної, до диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної !

2. Диференціальні рівняння вищих порядків

2.1. Загальні визначення. Існування та єдиність розв’язків рівнянь

Диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0.$$

Якщо диференціальне рівняння розв’язане відносно старшої похідної, то воно має вигляд

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n-1)}).$$

Іноді його називають **диференціальним рівнянням у нормальній формі**.

Для диференціального рівняння, *розв’язного відносно похідної*, **задача Коші** ставиться таким чином.

Потрібно знайти функцію $y = y(x)$, n- раз неперервно диференційовану, таку, що при підстановці в рівняння обертає його в тотожність і задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0^1, \ \dots \ , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}.$$

Для диференціального рівняння, *нерозв'язного відносно похідної*, задача Коші полягає в знаходженні розв'язку $y = y(x)$, що задовольняє початковим даним

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_0^1,\ \dots\ ,\ \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1},\ \ y^{(n)}(x_0) = y_0^n\ ,$$

де значення $x_0, y_0, y_0^1,\ \dots\ , y_0^{n-1}$ довільні,

а y_0^n один з коренів алгебраїчного рівняння $F(x_0, y_0, y_0^1,\ \dots\ , y^n) = 0$.

Теорема (існування та єдиності розв'язку задачі Коші рівняння, *розв'язного відносно похідної*).

Нехай у деякому замкненому околі точки $(x_0, y_0, y_0^1,\ \dots\ , y_0^{n-1})$ функція $f(x, y, y',\ \dots\ , y^{(n-1)})$ задовольняє умовам:

1) вона визначена і неперервна по всім змінним;

2) задовольняє умові Ліпшиця по всім змінним, починаючи з другої.

Тоді при $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, де h - досить мала величина, існує і єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння $y^{(n)} = f(x, y, y',\ \dots\ , y^{(n-1)})$, що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_0^1,\ \dots\ , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}\ .$$

Теорема **(існування та єдиності розв’язку задачі Коші рівняння, *нерозв’язного відносно похідної*).**

Нехай у деякому замкненому околі точки $(x_0, y_0, y_0^1, \ \dots\ , y_0^{n-1}, y_0^n)$ функція $F(x, y, y', \ \dots\ , y^{(n)})$ задовольняє умовам:

1) вона визначена і неперервна по всім змінним;

2) $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| < M_0, \left|\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right| < M_1, \ \dots\ , \left|\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}\right| < M_n$;

3) $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right| \neq 0$.

Тоді при $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, де h- досить мала величина, існує і єдиний розв’язок $y = y(x)$ рівняння $F(x, y, y', \ \dots\ , y^{(n)}) = 0$, що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^1, \ \dots\ , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}, \ y^{(n)}(x_0) = y_0^n \ .$$

Визначення. Загальним розв’язком диференціального рівняння n-го порядку називається n-раз неперервно диференційована функція $y = y(x, C_1, C_2, \ \dots\ , C_n)$, що обертає при підстановці рівняння на тотожність, у якій вибором сталих $C_1, \ \dots\ , C_n$ можна одержати розв’язок довільної задачі Коші в області існування та єдиності розв’язків.

2.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що інтегруються в квадратурах

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах.

1) Рівняння вигляду $y^{(n)}(x) = f(x)$.

Проінтегрувавши його n-раз одержимо загальний розв'язок у вигляді

$$y(x) = \underbrace{\int \ldots \int}_{n} f(x)\underbrace{dx \ \ldots \ dx}_{n} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ \ldots \ + C_{n-1}x + C_n \ .$$

Якщо задані умови Коші $\quad y(x_0) = y_0, \ \ y'(x_0) = y_0^1, \ \ldots \ , \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$,

то розв'язок має вигляд

$$y = \int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)dx \ \ldots \ dx +$$

$$+ \frac{y_0}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} + \frac{y_0^1}{(n-2)!}(x - x_0)^{(n-2)} + \ \ldots \ + y^{(n-2)}(x - x_0) + y_0^{(n-1)}.$$

2) Рівняння вигляду $F(x, y^{(n)}) = 0$.

Нехай це рівняння вдалося записати в параметричному вигляді $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t). \end{cases}$

Використовуючи основне співвідношення $y^{(n)} = \dfrac{dy^{(n-1)}}{dx}$ **тобто** $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$,

одержимо

$$dy^{(n-1)} = \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Проінтегрувавши його, маємо

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

І одержимо параметричний запис рівняння $(n-1)$-порядку $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^{(n-1)} = \psi_1(t, C_1). \end{cases}$

Проробивши зазначений процес ще $(n-1)$-раз, одержимо загальний розв’язок рівняння в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi_n(t, C_1, \ \ldots \ , C_n) \end{cases}$$

3) Рівняння вигляду $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$.

Нехай це рівняння вдалося записати в параметричному вигляді $\begin{cases} y^{(n-1)} = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t). \end{cases}$

Використовуючи основне співвідношення $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$,

одержуємо $$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt.$$

Проінтегрувавши, маємо $$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

І одержали параметричний запис рівняння $(n-1)$-порядку $\begin{cases} x = \psi_1(t, C_1) \\ y^{(n-1)} = \varphi(t). \end{cases}$

Використовуючи попередній пункт, понизивши порядок на одиницю, запишемо

$$\begin{cases} x = \psi_1(t, C_1) \\ y^{(n-2)} = \varphi_2(t, C_2). \end{cases}$$

Пробивши останню процедуру $(n-2)$-раз, запишемо загальний розв'язок у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \psi_1(t, C_1) \\ y = \varphi_n(t, C_2, \ \dots \ , C_n). \end{cases}$$

4) Нехай рівняння вигляду $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ можна розв'язати відносно старшої похідної

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}).$$

Домножимо його на $2y^{(n-1)}dx$ й одержимо

$$2y^{(n-1)}y^{(n)}dx = 2f(y^{(n-2)})y^{(n-1)}dx .$$

Перепишемо його у вигляді

$$d(y^{(n-1)})^2 = 2f(y^{(n-2)})d(y^{(n-2)}) .$$

Проінтегрувавши, маємо

$$(y^{(n-1)})^2 = 2\int f(y^{(n-2)})d(y^{(n-2)}) + C_1 ,$$

тобто

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int f(y^{(n-2)})d(y^{(n-2)}) + C_1} ,$$

або $$y^{(n-1)} = \pm\psi_1(y^{(n-2)}, C_1).$$

Таким чином одержали параметричний запис рівняння $(n-1)$-порядку

$$\begin{cases} y^{(n-2)} = t \\ y^{(n-1)} = \pm\psi_1(t, C_1) \end{cases}$$

І фактично повернулися до третього випадку.

2.3. Найпростіші випадки зниження порядку в диференціальних рівняннях вищих порядків

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь вищого порядку, що допускають зниження порядку.

1) Рівняння не містить шуканої функції і її похідних до $(k-1)$-порядку включно

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)} \ \dots \ , y^{(n)}\right) = 0.$$

Зробивши заміну: $y^{(k)} = z, \quad y^{(k+1)} = z', \ \dots \ , \ y^{(n)} = z^{(n-k)},$

одержимо рівняння $(n-k)$-порядку $F\left(x, z, z', \ \dots \ , z^{(n-k)}\right) = 0.$

2) Рівняння не містить явно незалежної змінної $F(y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0$.

Будемо вважати, що y - нова незалежна змінна, а $y', \ \dots \ , y^{(n)}$ - функції від y.

Тоді

$$y'_x = p(y),$$

$$y''_{x^2} = \frac{d}{dx} y'_x = \frac{d}{dy}(p(y))\frac{dy}{dx} = p'_y p,$$

$$y'''_{x^3} = \frac{d}{dx} y''_{x^2} = \frac{d}{dy}(p'_y p)\frac{dy}{dx} = (p''_{y^2} p + p'^2_{y^2})p,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Після підстановки одержимо диференціальне рівняння $(n-1)$-порядку.

$$F(y, p, p'_y p, (p''_{y^2} p + p'^2)p, \ \dots \ , p^{(n-1)}) = 0,$$

3) Нехай функція F диференціального рівняння $F(x, y, y', \ \dots \ y^{(n)}) = 0$ є однорідною щодо аргументів $y, y', \ \dots \ , y^{(n)}$.

Робимо заміну $y = e^{\int u dx}$, де $u = u(x)$ - нова невідома функція.

Одержимо

$$y' = e^{\int u dx} u,$$

$$y'' = e^{\int u dx} u^2 + e^{\int u dx} u' = e^{\int u dx} (u^2 + u'),$$

$$y''' = e^{\int u dx} u(u^2 + u') + e^{\int u dx} (2uu' + u'') = e^{\int u dx} (u^3 + 3uu' + u''),$$

....

Після підстановки одержимо

$$F(x, e^{\int u dx}, e^{\int u dx} u, e^{\int u dx} (u^2 + u'), e^{\int u dx} (u^3 + 3uu' + u''), \ \dots) = 0.$$

Оскільки рівняння однорідне відносно $e^{\int u dx}$, то цей член можна винести і на нього скоротити.

Одержимо диференціальне рівняння $(n-1)$-порядку

$$F(x, 1, u, u^2 + u', u^3 + 3uu' + u'', \ \dots \ , u^{(n-1)}) = 0$$

4) Нехай диференціальне рівняння $F(x,y,y',\ \dots\ ,y^{(n)})=0$, розписано у вигляді диференціалів

$\Phi(x,y,dx,dy,d^2y,\ \dots\ ,d^n y)=0$ і Φ- функція однорідна по всім змінним.

Зробимо заміну $x=e^t,\ y=ue^t$, де $u,\ t$ - нові змінні.

Тоді одержуємо

$$dx=e^t dt,\qquad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{u'_t e^t+ue^t}{e^t}=u'_t+u,\qquad y''_{x^2}=\frac{d}{dx}y'_x=\frac{d}{dt}(u'_t+u)\frac{dt}{dx}=\frac{u''_{t^2}+u'_t}{e^t},$$

$$y'''_{x^3}=\frac{d}{dx}y''_{x^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{u''_{t^2}+u'_t}{e^t}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{(u'''_{t^3}+u''_{t^2})e^t-(u''_{t^2}+u'_t)e^t}{e^{3t}}=\frac{u'''_{t^3}-u'_t}{e^{2t}}\ \dots\ .$$

Підставивши у початкове рівняння, одержимо

$$\Phi(x,y,dx,dy,\ d^2y,\ \dots\ ,\ d^n y)=\Phi(e^t,ue^t,e^t dt,\ (u'_t+u)e^t dt,(u''_{t^2}+u'_t)e^t dt,\ \dots)=0.$$

Скоротивши на e^t одержимо $\Phi(1,u,dt,u'_t+u,\ u''_{t^2}+u'_t,\ \dots,\ u_t^{(n)})=0$.

Тобто одержимо диференціальне рівняння, що не містить явно незалежної змінної, або повертаємося до другого випадку.

5) Нехай ліва частина рівняння $F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0$ є похідною деякого диференціального виразу ступеня $(n-1)$, тобто $$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n-1)}) = F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}).$$

У цьому випадку легко обчислюється, так званий, перший інтеграл

$$\Phi(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n-1)}) = C.$$

3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Рівняння вигляду

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y(x)=b(x)$$

називається **лінійним неоднорідним** диференціальним рівнянням n-го порядку.

Рівняння вигляду

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y(x)=0$$

називається **лінійним однорідним** диференціальним рівнянням n-го порядку.

Якщо при $x\in[a,b]$, $a_0(x)\neq 0$ коефіцієнти $b(x)$, $a_i(x)$, $i=\overline{0,n}$ неперервні, то для рівняння

$$y^{(n)}(x)=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y^{(n-1)}(x)-\ \dots\ -\frac{a_n(x)}{a_0(x)}y(x)+\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

виконуються умови теореми існування та єдиності і існує єдиний розв'язок $y=y(x)$, що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

3.1. Лінійні однорідні рівняння.

3.1.1. Властивості лінійних однорідних рівнянь

Властивість 1. Лінійність і однорідність зберігаються при довільному перетворенні незалежної змінної

$$x=\varphi(t).$$

Властивість 2. Лінійність і однорідність зберігаються при лінійному перетворенні невідомої функції

$$y(x)=\alpha(x)z(x).$$

3.1.2. Властивості розв'язків лінійних однорідних рівнянь

Властивість 1. Якщо $y=y_1(x)$ є розв'язком однорідного лінійного рівняння,

то і $y=Cy_1(x)$, де C - довільна стала, теж буде розв'язком однорідного лінійного рівняння.

Властивість 2. Якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв'язками лінійного однорідного рівняння,

то і $y=y_1(x)+y_2(x)$ теж буде розв'язком лінійного однорідного рівняння.

Властивість 3. Якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$- розв'язки однорідного лінійного рівняння, то і $y=\sum_{i=1}^{n}C_i y_i(x)$, де C_1, C_2, , C_n- довільні сталі, також буде розв'язком лінійного однорідного рівняння.

Властивість 4. Якщо комплексна функція дійсного аргументу $y(x)=u(x)+iv(x)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння, то окремо дійсна частина $u(x)$ і уявна $v(x)$ будуть також розв'язками цього рівняння.

3.1.3. Лінійна залежність і незалежність розв'язків. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння вищого порядку

Визначення. Функції $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)$ називаються **лінійно залежними** на відрізку $[a,b]$ якщо існують не всі рівні нулю сталі $C_1,\ \dots\ ,\ C_n$ такі, що при всіх $x\in[a,b]$

$$C_1y_1(x)+C_2\,y_2(x)+\ \dots+C_ny_n(x)\equiv 0.$$

Якщо ж тотожність справедлива лише при $C_1=C_2=\ \dots\ =C_n=0$,

то функції $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots\ ,\ y_n(x)$ називаються **лінійно незалежними**.

<u>Приклад 3.1.1.</u> Функції $1,\ x,\ x^2,\ \dots\ ,\ x^{n-1}$ - лінійно незалежні на будь-якому відрізку $[a,b]$, тому що вираз $C_1+C_2x+\ \dots\ +C_nx^{n-1}=0$ є многочленом ступеню $(n-1)$ і має не більш, ніж $(n-1)$ дійсних коренів.

<u>Приклад 3.1.2.</u> Функції $e^{\lambda_1x},\ e^{\lambda_2x},\ \dots\ ,\ e^{\lambda_nx}$, де всі λ_i - дійсні різні числа - лінійно незалежні.

<u>Приклад 3.1.3.</u> Функції $1,\ \sin x,\ \cos x,\ \dots\ ,\ \sin nx,\ \cos nx$ - лінійно незалежні.

Теорема. Для того щоб розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння $y_1(x), \ \dots \ , y_n(x)$ були лінійно незалежними, необхідно і достатньо, щоб **визначник Вронського**

$$W[y_1, \ \dots \ , y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

не дорівнював нулю в жодній точці $x \in [a, b]$, тобто $W[y_1(x), \ \dots \ , y_n(x)] \neq 0$.

Теорема. Загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ \dots \ + a_n(x)y(x) = 0$$

є лінійна комбінація n - лінійно незалежних розв'язків

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x).$$

Визначення. Будь-які n -лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку називаються **фундаментальною системою розв'язків**.

3.1.4. Формула Остроградського – Ліувіля

Формула, яка пов'язує значення визначника Вронського в довільній точці і його значення в початковій точці

$$W\left[y_1(x), y_2(x), \ \dots \ , y_n(x)\right] =$$

$$= W\left[y_1(x_0), y_2(x_0), \ \dots \ , y_n(x_0)\right] e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} .$$

називається формулою Остроградського-Ліувілля.

Зокрема, якщо рівняння має вид

$$y^{(n)}(x) + p_1(x) y^{(n-1)}(x) + \ \dots \ + p_n(x) y(x) = 0,$$

то формула запишеться у вигляді

$$W\left[y_1(x), y_2(x), \ \dots \ , y_n(x)\right] =$$

$$= W\left[y_1(x_0), y_2(x_0), \ \dots \ , y_n(x_0)\right] e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x) dx} .$$

3.1.5. Формула Абеля

Розглянемо застосування формули Остроградського-Ліувіля до рівняння 2-го порядку

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0.$$

Нехай $y_1(x)$- один з розв'язків.

Тоді
$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = C_2 e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Розкривши визначник, одержимо

$$y'(x)y_1(x) - y(x)y_1'(x) = C_2 e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Розділивши на $y_1^2(x)$, запишемо

$$\frac{y'(x)y_1(x) - y(x)y_1'(x)}{y_1^2(x)} = C_2 \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx},$$

або

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right)=C_2\,\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Проінтегрувавши, одержимо

$$\frac{y(x)}{y_1(x)}=C_2\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p_1(x)dx}dx+C_1.$$

Остаточно

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2\left\{y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p_1(x)dx}dx\right\}.$$

Отримана формула називається **формулою Абеля**.

Вона дозволяє по одному відомому розв’язку знайти загальний розв’язок однорідного лінійного рівняння другого порядку.

3.1.6. Лінійні однорідні рівняння з сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійні однорідні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_ny(x)=0.$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді $y(x)=e^{\lambda x}$.

Продиференціювавши, одержимо $y'(x)=\lambda e^{\lambda x},\ \ y''(x)=\lambda^2e^{\lambda x},\ \dots,\ y^{(n)}(x)=\lambda^n e^{\lambda x}$.

Підставивши отримані значення $y,\ y',\ \dots\ ,y^{(n)}$ диференціальне рівняння перепишемо

$$\lambda^n e^{\lambda x}+a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x}+\ \dots\ +a_ne^{\lambda x}=0.$$

Скоротивши на $e^{\lambda x}$, одержимо характеристичне рівняння

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ \dots\ +a_n=0.$$

Алгебраїчне рівняння n-го степеня має n- коренів.
У залежності від їхнього вигляду будемо мати різні розв'язки.

1) Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ \ldots \ , \lambda_n$ ***- дійсні і різні.***

Тоді функції $e^{\lambda_1 x}, \quad e^{\lambda_2 x}, \ \ldots \ , \quad e^{\lambda_n x}$ є розв'язками

й оскільки всі λ_i різні, то $e^{\lambda_i x}$- розв'язки лінійно незалежні,

тобто $\left\{e^{\lambda_i x}\right\}_{i=\overline{1,n}}$ фундаментальна система розв'язків.

Загальним розв'язком буде лінійна комбінація $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x}$.

2) Нехай маємо комплексно спряжені корені $\lambda = p + iq, \quad \overline{\lambda} = p - iq.$

Їм відповідають розв'язки $e^{(p+iq)x}, \quad e^{(p-iq)x}$.

Розкладаючи їх по формулі Ейлера, одержимо:

$$e^{(p+iq)x} = e^{px}e^{iqx} = e^{px}\cos qx + ie^{px}\sin qx = u(x) + iv(x),$$

$$e^{(p-iq)x} = e^{px}e^{-iqx} = e^{px}\cos qx - ie^{px}\sin qx = u(x) - iv(x).$$

І, як випливає з властивості 4, функції $u(x)$ й $v(x)$ будуть окремими розв'язками.

Таким чином, кореням $\lambda = p + iq, \quad \overline{\lambda} = p - iq$ відповідають два лінійно незалежних розв'язки

$$u(x) = e^{px}\cos qx, \quad v(x) = e^{px}\sin qx.$$

Загальним розв'язком, що відповідає цим двом кореням, буде

$$y(x) = C_1 e^{px}\cos qx + C_2 e^{px}\sin qx.$$

3) Нехай λ - кратний корінь, кратності k, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k, \; k \le n$.

а) Розглянемо випадок $\lambda = 0$.

Тоді загальним розв'язком, що відповідає кореню λ кратності k,

буде лінійна комбінація цих функцій $y(x) = C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}$.

б) Нехай $\lambda = v \ne 0$ - і корінь дійсний.

Тоді кореню $\lambda = v$ кратності k відповідає розв'язок $y(x) = C_1 e^{vx} + C_2 x e^{vx} + \ldots + C_k x^{k-1} e^{vx}$.

в) Нехай характеристичне рівняння має корені $\lambda = p + iq, \; \overline{\lambda} = p - iq$ кратності k.

Тоді загальним розв'язком, що відповідає цим кореням буде

$$y(x) = C_1 e^{px} \cos qx + C_2 x e^{px} \cos qx + \ldots + C_k x^{k-1} e^{px} \cos qx +$$

$$+ C_{k+1} e^{px} \sin qx + C_{k+2} x e^{px} \sin qx + \ldots + C_{2k} x^{k-1} e^{px} \sin qx.$$

3.1.7. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо деякі лінійні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами, які за допомогою заміни незалежної змінної або шуканої функції можна звести до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

1) **Рівнянням Ейлера** називають диференціальне рівняння вигляду

$$x^n y^{(n)}(x)+a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_{n-1} x y'(x)+a_n y(x)=0$$

Заміна пряма $x=e^t$ й зворотня $t=\ln x$.

2) Узагальнене рівняння Ейлера (**рівняння Лагранжа**)

$$(ax+b)^n y^{(n)}(x)+p_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)}(x)+\ \dots +p_{n-1}(ax+b)y'(x)+p_n y(x)=0$$

Заміна $(ax+b)=e^t$

3) **Рівняння Чебишова**

$$(1-x^2)y''(x)-xy'(x)+n^2 y(x)=0$$

Заміна $t=\arccos x$ $(x=\cos t)$

4) **Рівняння Бесселя** $x^2 y''(x)+xy'(x)+(x^2-\nu)y(x)=0$ при $\nu=1/4$

3.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Загальний вигляд лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь наступний

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y(x)=b(x).$$

3.2.1. Властивості розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

Властивість 1. Якщо $y_0(x)$ - розв'язок лінійного однорідного рівняння,

$y_1(x)$- розв'язок неоднорідного рівняння,

то $y(x)=y_0(x)+y_1(x)$ буде розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Властивість 2 (принцип суперпозиції). Якщо $y_i(x),\ i=\overline{1,n}$ - розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ \ldots\ +a_n(x)y(x)=b_i(x)\ ,\ i=\overline{1,m},$$

то $y(x)=\sum_{i=1}^{m}C_i y_i(x)$ з довільними сталими C_i буде розв'язком лінійного неоднорідного рівняння

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ \ldots\ +a_n(x)y(x)=\sum_{i=1}^{m}C_i b_i(x).$$

Властивість 3. Якщо комплексна функція $y(x)=u(x)+iv(x)$ з дійсними елементами є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння з комплексною правою частиною $b(x)=f(x)+ip(x),$

то дійсна частина $u(x)$ є розв'язком рівняння з правою частиною $f(x),$

а уявна $v(x)$ є розв'язком рівняння з правою частиною $p(x)$.

Теорема. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння складається з загального розв'язку лінійного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Як випливає з теореми для знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння треба шукати загальний розв'язок однорідного рівняння, тобто будь-які n - лінійно незалежні розв'язки і якийсь частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Розглянемо методи побудови частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.

3.2.2 Метод варіації довільної сталої побудови частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння

Метод варіації довільної сталої полягає в тому, що розв'язок неоднорідного рівняння шукається в такому ж вигляді, як і розв'язок однорідного, але сталі $C_i, \ i=\overline{1,n}$ вважаються невідомими функціями.

Якщо розглядати диференціальне рівняння другого порядку

$$a_0(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=b(x)$$

Де загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $y_{одн}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$,

то частинний розв'язок неоднорідного шукаємо у вигляді $y_{неодн}(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$.

Візьмемо похідну

$$y'_{неодн}(x)=C'_1(x)y_1(x)+C'_2(x)y_2(x)+C_1(x)y'_1(x)+C_2(x)y'_2(x)$$

і ***прирівняємо її першу частину до нуля***.

Отримаємо рівняння $C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0$.

Візьмемо другу похідну і отримаємо

$$y''_{неодн}(x)=C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x).$$

Підставивши значення функції, та її похідних у вихідне рівняння і скоротивши потрібні члени, отримаємо

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

Таким чином для знаходження функцій $C_1(x)$, $C_2(x)$ маємо систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=\dfrac{b(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Звідси $$C_1(x)=\int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \dfrac{b(x)}{a_0(x)} & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}dx, \quad C_2(x)=\int \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \dfrac{b(x)}{a_0(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}dx.$$

І одержуємо $$y_{неодн}(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$$

з обчисленими функціями $C_1(x)$ і $C_2(x)$.

3.2.3. Метод Коші

Нехай $y = K(x, s)$ – розв'язок однорідного диференціального рівняння, що задовольняє умови

$$K(s,s) = K'_x\,(s,s) = \ \dots\ = K_x^{(n-2)}(s,s) = 0, \qquad K_x^{(n-1)}(s,s) = 1.$$

Тоді функція
$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds$$

буде розв'язком неоднорідного рівняння, що задовольняє початкові умови $y(x_0) = y'(x_0) = \ \dots\ = y^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Дійсно, розглянемо похідні від функції $y(x)$:

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x} K'_x\,(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds + K\,(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

І оскільки $K(x,x) = 0$, то $y' = \int_{x_0}^{x} K'_x\,(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds$.

Аналогічно

$$y''(x)=\int_{x_0}^{x} K''_x\ (x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K'_x\ (x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}=\int_{x_0}^{x} K''_x\ (x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds.$$

....

$$y^{(n-1)}(x)=\int_{x_0}^{x} K_x^{(n-1)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K_x^{(n-2)}(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}=\int_{x_0}^{x} K_x^{(n-1)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds.$$

$$y^{(n)}(x)=\int_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K_x^{(n-1)}(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}$$

І оскільки $K_x^{(n-1)}(s,s)=1$, то

$$y^{(n)}=\int_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

Підставивши функцію $y(x)$ та її похідні у вихідне диференціальне рівняння, одержимо

$$a_0(x)\left[\int_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+\frac{b(x)}{a_0(x)}\right]+a_1(x)\left[\int_{x_0}^{x} K_x^{(n-1)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds\right]+\ldots$$

$$\ldots+a_n(x)\left[\int_{x_0}^{x} K(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds\right]=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left[a_0(x)K_x^{(n)}(x,s)+a_1(x)K_x^{(n-1)}(x,s)+\ \ldots\ +a_n(x)K(x,s)\right]\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+b(x)=b(x).$$

Оскільки $K(x,s)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння, то

$$a_0(x)K_x^{(n)}(x,s)+a_1(x)K_x^{(n-1)}(x,s)+\ \ldots\ +a_n(x)K(x,s)\equiv 0.$$

У такий спосіб показано, що $y(x)=\int_{x_0}^{x} K(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds$ є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння.

Підставляючи $x = x_0$ у вирази для $y(x),\ y'(x),\ \dots\ ,\ y^{(n)}(x)$

одержимо, що
$$y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Для знаходження функції $K(x,s)$ (інтегрального ядра) можна використати такий спосіб.

Якщо $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння, то загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{одн}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

Оскільки $K(x,s)$ є розв'язком однорідного рівняння, то його слід шукати у такому ж вигляді, тобто

$$K(x,s) = C_1(s) y_1(x) + C_2(s) y_2(x) + \dots + C_n(s) y_n(x).$$

Відповідні початкові умови мають вигляд

$$K(s,s)=0 \;\rightarrow\; C_1(s)y_1(s)+C_2(s)y_2(s)+\ldots+C_n(s)y_n(s)=0$$

$$K'_x(s,s)=0 \;\rightarrow\; C_1(s)y'_1(s)+C_2(s)y'_2(s)+\ldots+C_n(s)y'_n(s)=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K_x^{(n-2)}(s,s)=0 \;\rightarrow\; C_1(s)y_1^{(n-2)}(s)+C_2(s)y_2^{(n-2)}(s)+\ldots+C_n(s)y_n^{(n-2)}(s)=0.$$

$$K_x^{(n-1)}(s,s)=1 \;\rightarrow\; C_1(s)y_1^{(n-1)}(s)+C_2(s)y_2^{(n-1)}(s)+\ldots+C_n(s)y_n^{(n-1)}(s)=1.$$

Звідси

$$C_1(s)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(s) & \ldots\ldots\ldots\ldots & y_n(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0 & y_2^{(n-2)}(s) & \ldots\ldots\ldots & y_n^{(n-2)}(s) \\ 1 & y_2^{(n-1)}(s) & \ldots\ldots\ldots & y_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}}{W\left[y_1(s), y_2(s), \ \ldots \ , y_n(s)\right]}, \qquad C_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(s) & 0 & \ldots & y_n(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)}(s) & 0 & \ldots\ldots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1^{(n-1)}(s) & 1 & \ldots\ldots\ldots & y_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}}{W\left[y_1(s), y_2(s), \ \ldots \ , y_n(s)\right]},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$C_n(s)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & \dots & y_{n-1}(s) & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & & & \\ y_1^{(n-2)}(s) & y_2^{(n-2)}(s) & \dots\dots & y_{n-1}^{(n-2)}(s) & 0 \\ y_1^{(n-1)}(s) & y_2^{(n-1)}(s) & \dots\dots\dots & y_{n-1}^{(n-1)}(s) & 1 \end{vmatrix}}{W\left[y_1(s), y_2(s), \ \dots \ , y_n(s)\right]}.$$

І ядро $K(x,s)$ має вигляд

$$K(x,s)=C_1(s)y_1(x)+C_2(s)y_2(x)+\ldots+C_n(s)y_n(x)$$

з одержаними функціями $C_1(s), C_2(s), \ldots, C_n(s)$.

Якщо розглядати диференціальне рівняння другого порядку

$$a_0(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=b(x),$$

то функція $K(x,s)$ має вигляд

$$K(x,s)=C_1(s)y_1(x)+C_2(s)y_2(x),$$

де

$$C_1(s)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(s)\\ 1 & y_2'(s)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(s) & y_2(s)\\ y_1'(s) & y_2'(s)\end{vmatrix}},\qquad C_2(s)=\frac{\begin{vmatrix}y_1(s) & 0\\ y_1'(s) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(s) & y_2(s)\\ y_1'(s) & y_2'(s)\end{vmatrix}}.$$

Звідси

$$K(x,s)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(s)\\ 1 & y_2'(s)\end{vmatrix}y_1(x)+\begin{vmatrix}y_1(s) & 0\\ y_1'(s) & 1\end{vmatrix}y_2(x)}{W\left[y_1(s),y_2(s)\right]}=\frac{y_1(s)y_2(x)-y_1(x)y_2(s)}{W\left[y_1(s),y_2(s)\right]}.$$

3.2.4. Метод невизначених коефіцієнтів

Якщо лінійне диференціальне рівняння є рівнянням з сталими коефіцієнтами, а функція $b(x)$ **спеціального виду**, то частинний розв’язок можна знайти за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

1) Нехай $b(x)$ **має вид многочлена**, тобто $b(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_{s-1} x + A_s$.

а) Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння не має нульового кореня, тобто $\lambda \neq 0$.

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо вигляді:

$$y_{неодн} = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_{s-1} x + B_s,$$

де $B_0, \ \ldots, B_s$ - невідомі сталі.

Тоді

$$y'_{неодн} = sB_0 x^{s-1} + (s-1)B_1 x^{s-2} + \ldots + B_{s-1},$$

$$y''_{неодн} = s(s-1)B_0 x^{s-2} + (s-1)(s-2)B_1 x^{s-3} + \ldots + 2 \cdot 1 \cdot B_{s-2},$$

……………………………………………………..

Підставляючи у вихідне диференціальне рівняння, одержимо

$$a_0[\ldots]+\ \ldots\ +a_{n-2}[s(s-1)B_0x^{s-2}+(s-1)(s-2)B_1x^{s-3}+\ \ldots+2\cdot1\cdot B_{s-1}]+$$

$$+a_{n-1}[sB_0x^{s-1}+(s-1)B_1x^{s-2}+\ \ldots+B_{s-1}]+a_n[B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ \ldots+B_s]=$$

$$=A_0x^s+A_1x^{s-1}+\ \ldots+A_{s-1}x+A_s.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x запишемо:

$$\begin{aligned}
x^s\ &:\quad a_nB_0=A_0\\
x^{s-1}&:\quad a_nB_1+sa_{n-1}B_0=A_1\\
x^{s-2}&:\quad a_nB_2+(s-1)a_{n-1}B_1+s(s-1)a_{n-2}B_0=A_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Оскільки характеристичне рівняння не має нульового кореня, то

$$a_n\neq0.$$

Звідси одержимо

$$B_0 = \frac{1}{a_n} A_0, \qquad B_1 = \frac{1}{a_n}\left[A_1 - s a_{n-1} B_0\right], \ \ldots .$$

б) Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння має нульовий корінь кратності r.

Тоді частинний розв'язок вихідного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{неодн} = (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ \ldots \ + B_s) x^r .$$

2) Нехай $b(x)$ має вигляд $b(x) = e^{px}(A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ \dots \ + A_s)$.

а) Розглянемо випадок, коли p - не є коренем характеристичного рівняння.

Частинний розв'язок вихідного неоднорідного диференціального рівняння шукається у вигляді:

$$y_{неодн} = e^{px}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ \dots \ + B_s).$$

б) Розглянемо випадок, коли p - корінь характеристичного рівняння кратності r.

Тут частинний розв'язок вихідного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y_{неодн} = e^{px}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ \dots \ + B_s)x^r.$$

3) Нехай $b(x)$ має вигляд: $$b(x) = e^{px}[P_s(x)\cos qx + Q_l(x)\sin qx],$$

де $P_s(x)$, $Q_l(x)$ - многочлени степеня s і l, відповідно, і, наприклад, $l \le s$.

Використовуючи **властивості 2, 3** розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь, а також **випадки 2 а), б)** знаходження частинного розв'язку лінійних неоднорідних рівнянь, одержимо, що частинний розв'язок шукається у наступних виглядах:

а) $$y_{неодн} = e^{px}[(A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ \dots \ + A_s)\cos qx + \\ + (B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ \dots \ + B_s)\sin qx],$$

якщо $p \pm iq$ - не є коренем характеристичного рівняння;

б) $$y_{неодн} = e^{px}[(A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ \dots \ + A_s)\cos qx + \\ + (B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ \dots \ + B_s)\sin qx]x^r,$$

якщо $p \pm iq$ - є коренем характеристичного рівняння кратності r.

4. Системи диференціальних рівнянь

4.1. Загальна теорія

Система звичайних диференціальних рівнянь

$$F_k\left(x, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(k_1)}, y_2', y_2'', \ldots, y_2^{(k_2)}, \ldots, y_n', y_n'', \ldots, y_n^{(k_n)}\right) = 0, \quad k = \overline{1, n} \qquad (1)$$

яка є розв'язною відносно старших похідних $y_1^{(k_1)}$, $y_2^{(k_2)}, \ldots,$ $y_n^{(k_n)}$

називається **канонічною системою** диференціальних рівнянь.

Зазвичай вона записується наступним чином

$$\begin{cases} y_1^{(k_1)} = f_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n-1)}\right), \\ y_2^{(k_2)} = f_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n-1)}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(k_n)} = f_n\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n-1)}\right). \end{cases} \qquad (2)$$

Порядком системи називається число $p = k_1 + k_2 + \ldots k_n$

Приклад 1.

Звести до канонічного вигляду систему рівнянь

$$\begin{cases} y_2 y_1' - \ln(y_1'' - y_1) = 0 \\ e^{y_2'} - y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$$

►

Дана система має третій порядок, бо $k_1 = 2$, а $k_2 = 1$. Отже $p = 3$.

Розв'яжемо перше рівняння відносно y_1'', а друге відносно y_2' й отримаємо канонічну систему

$$\begin{cases} y_1'' = y_1 + e^{y_2 y_1'} \\ y_2' = \ln(y_1 + y_2) \end{cases}$$

◄

Співвідношення вигляду

$$\begin{cases} F_1(x_1', x_2', \dots x_n', x_1, x_2, \dots, x_n; t) = 0 \\ F_2(x_1', x_2', \dots x_n', x_1, x_2, \dots, x_n; t) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1', x_2', \dots x_n', x_1, x_2, \dots, x_n; t) = 0 \end{cases}$$

називається **системою** n- звичайних диференціальних рівнянь **першого порядку**.

Якщо система розв’язана відносно похідних і має вигляд

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1, x_2, \; \dots \; , x_n, t) \\ x_2'(t) = f_2(x_1, x_2, \; \dots \; , x_n, t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n'(t) = f_n(x_1, x_2, \; \dots \; , x_n, t) \end{cases} \tag{3}$$

то вона називається **системою в нормальній формі**.

Число n називається **порядком нормальної системи** (3).

Дві системи називаються **еквівалентними**, якщо вони мають одні й ті самі розв’язки.

Будь яку канонічну систему (2) можна звести до еквівалентної їй нормальної системи (3). Порядок цих систем буде однаковим.

Приклад 2.

Звести до нормальної наступну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} - y(t) = 0 \\ t^3 \dfrac{dy(t)}{dt} - 2x(t) = 0 \end{cases}$$

►Дана система має третій порядок, бо $k_1 = 2$, а $k_2 = 1$. Отже $p = 3$.

Покладемо $x(t) = x_1(t)$, $\dfrac{dx(t)}{dt} = x_2(t)$, $y(t) = x_3(t)$

Тоді матимемо наступну нормальну систему того ж таки третього порядку

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t) \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} = \dfrac{2x_1(t)}{t^3} \end{cases}$$

◄

Приклад 3.

Звести до нормальної системи наступне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+p(t)\frac{dx(t)}{dt}+q(t)x(t)=0$$

► Покладемо

$$x(t)=x_1(t), \qquad \frac{dx(t)}{dt}=x_2(t).$$

Тоді

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t), \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{dx_2(t)}{dt}$$

Отже нормальна система запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-p(t)x_2(t)-q(t)x_1(t) \end{cases}$$

◄

Визначення 4.1.1. Розв'язком системи диференціальних рівнянь називається набір n неперервно диференційованих функцій $x_1(t), \dots, x_n(t)$, які тотожно задовольняють кожному з рівнянь системи.

У загальному випадку розв'язок системи залежить від n - довільних сталих і має вигляд

$$x_1(t, C_1, \dots, C_n), \dots, x_n(t, C_1, \dots, C_n)$$

Задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку ставиться в такий спосіб. Потрібно знайти розв'язок, що задовольняє початковим умовам (умовам Коші):

$$x_1(t_0) = x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0.$$

Визначення 4.1.2. Розв'язок $x_1(t, C_1, \dots, C_n), \dots, x_n(t, C_1, \dots, C_n)$ називається **загальним**, якщо за рахунок вибору сталих $C_1, \dots, C_n$ можна розв'язати довільну задачу Коші.

Для систем звичайних диференціальних рівнянь досить важливим є поняття інтеграла системи. В залежності від гладкості (тобто диференційованості) можна розглядати два визначення інтеграла.

Визначення 4.1.3.

1. Функція $\boldsymbol{F(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}$ стала вздовж розв'язків системи, називається інтегралом системи.

2. Функція $\boldsymbol{F(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}$ повна похідна, якої в силу системи тотожно дорівнює нулю, називається інтегралом системи.

Для лінійних рівнянь існує поняття лінійної залежності і незалежності розв'язків. Для нелінійних рівнянь (систем рівнянь) аналогічним поняттям є функціональна незалежність.

Визначення 4.1.4.

Інтеграли $\boldsymbol{F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}$, $\boldsymbol{F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}$, … , $\boldsymbol{F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}$ називаються **функціонально незалежними**, якщо не існує функції $\boldsymbol{n}$- змінних $\boldsymbol{\Phi(z_1, \dots, z_n)}$ такої, що

$$\boldsymbol{\Phi(F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)) \equiv 0}.$$

Теорема.

Для того щоб інтеграли $F_1(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n,t)$, $F_2(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n,t)$,…, $F_n(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n,t)$ системи звичайних диференціальних рівнянь були функціонально незалежними, необхідно і достатньо, щоб визначник Якобі (якобіан) був відмінний від тотожного нуля, тобто

$$\frac{D(F_1,F_2,\ \dots\ ,F_n)}{D(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n)} \neq 0.$$

або ж

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = 0.$$

Визначення 4.1.5. Якщо $F\ (x_1, x_2,\ \ldots\ , x_n, t)$ інтеграл системи диференціальних рівнянь, то рівність $F\ (x_1, x_2,\ \ldots\ , x_n, t) = C$ називається **першим інтегралом**.

Визначення 4.1.6. Сукупність n- функціонально незалежних інтегралів називається **загальним інтегралом** системи диференціальних рівнянь.

Власне кажучи **загальний інтеграл** - це **загальний розв'язок** системи диференціальних рівнянь **у неявному вигляді.**

Теорема. (існування та єдиності розв'язку задачі Коші).

Для того щоб система диференціальних рівнянь, розв'язних відносно похідної, мала єдиний розв'язок, що задовольняє умовам Коші: $x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0,\ \ldots\ ,\ x_n(t_0) = x_n^0$

Достатньо виконання наступних умов:

1) функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ - неперервні за змінними $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ в околі початкової точки $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t_0$;

2) функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ задовольняють умову Ліпшиця за аргументами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у тому ж околі.

Зауваження Т. Умову Ліпшиця можна замінити більш грубою умовою, що перевіряється легше: умовою існування обмежених частинних похідних, тобто

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \le M,\ \ i, j = 1,2,\ \ldots\ , n.$$

Зауваження 1. Не всяку систему можна звести до одного диференціального рівняння!

Наприклад система

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t) \end{cases}$$

розпадається на два окремих рівняння. Загальний розв'язок отримується інтегруванням кожного з рівнянь самостійно

$$x_1(t) = C_1 e^{-t}, \quad x_2(t) = C_2 e^{t}.$$

Зауваження 2. Якщо число рівнянь в системі - n, а число невідомих функцій - N, причому $n < N$, то така система називається **невизначеною**. В цьому випадку можна довільно вибирати $N - n$ шуканих функцій (диференційованих необхідну кількість разів), й в залежності від них визначати останні n функцій.

Зауваження 3. Якщо число рівнянь в системі - n, а число невідомих функцій - N, причому $n > N$, то така система може виявитися **несумісною**. Тобто вона не має розв'язку.

4.1.1. Геометрична інтерпретація розв'язків

Назвемо $n+1$ -вимірний простір змінних $x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t$ **розширеним фазовим простором** $\Re^{n+1}$.

Тоді розв'язок $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ \dots \ , x_n = x_n(t)$ визначає в просторі $\Re^{n+1}$ деяку криву, що називається **інтегральною кривою**.

Загальний розв'язок (чи загальний інтеграл) визначає сім'ю інтегральних кривих, що всюди щільно заповнюють деяку область $D \subset \Re^{n+1}$ (область існування та єдиності розв'язків).

Задача Коші ставиться як виділення із сім'ї інтегральних кривих, окремої кривої, що проходить через задану початкову точку $M(x_1^0, x_2^0, \ \dots \ , x_n^0, t_0) \in D$.

4.1.2. Механічна інтерпретація розв’язків

В евклідовому просторі R^n змінних $x_1(t),\ \dots\ , x_n(t)$

розв’язок $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \dots\ ,\ x_n = x_n(t)$

визначає **закон руху** по деякій траєкторії в залежності від часу t.

При такій інтерпретації

функції $f_1,\ f_2,\ \dots\ ,\ f_n$ є **складовими швидкості руху**,

простір зміни змінних називається - **фазовим простором**,

система - **динамічною**,

крива, на якій відбувається рух $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \dots\ ,\ x_n = x_n(t)$ - **фазовою траєкторією**.

Фазова траєкторія є проекцією **інтегральної кривої** на **фазовий простір**.

Приклад 4. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -x(t) \end{cases}$$

з початковими даними $x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$.

► Продиференціюємо за t перше рівняння системи, і в те що отримали підставимо друге рівняння.

Матимемо одне рівняння другого порядку $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = 0$.

Його розв'язок $x(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$.

Тоді (зважаючи на друге рівняння системи) маємо

$$y(t) = -C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$$

Розв'язком задачі Коші матимемо

$$x(t) = x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t), \quad y(t) = -x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t) \qquad (*)$$

Піднесемо кожне з останніх до квадрату й почленно складемо:

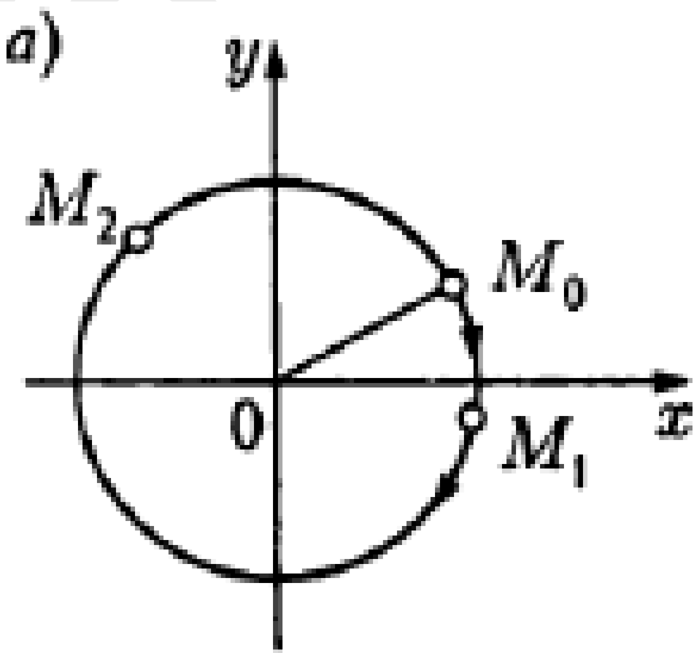
$x^2(t) + y^2(t) = R^2$, де $R = \sqrt{x_0^{\,2} + y_0^{\,2}}$. (Інтеграл системи).

Це коло, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Провівши деякі нескладні аналітичні міркування

(замінивши рівняння (*) на $x(t) = R\sin(t+\alpha), y(t) = R\cos(t+\alpha)$, де $\sin\alpha = \dfrac{x_0}{R}$, $\cos\alpha = \dfrac{y_0}{R}$)

побачимо, що в залежності від зміни часу, рух точки $M(x(t), y(t))$ відбувається згідно наступного рисунку



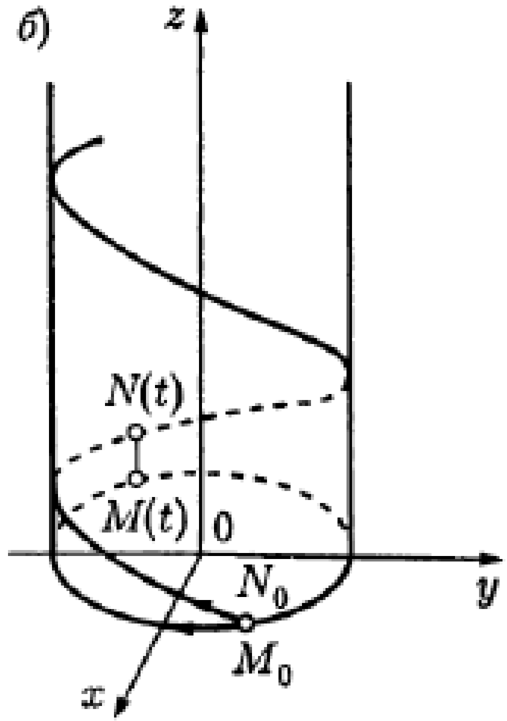
Дамо тепер іншу інтерпретацію отриманого результату.

У трьохвимірному просторі візьмемо праву систему декартових координат O_{xyz}.

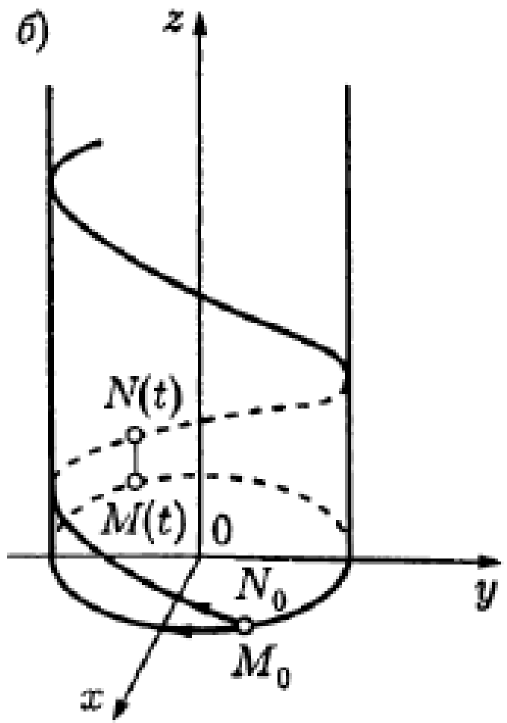
Легко переконатися, що точка $N(x(t), y(t), z(t))$, тобто точка з координатами

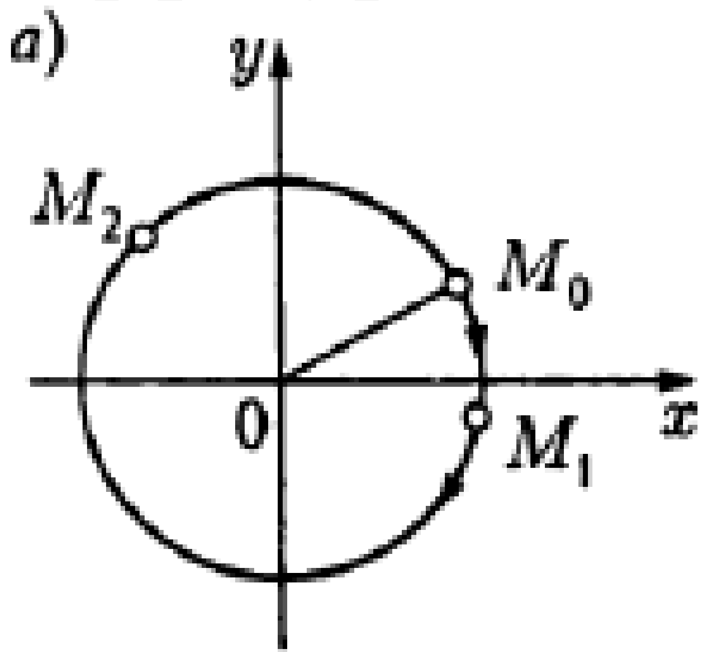
$$x(t) = R\sin(t+\alpha),\ y(t) = R\cos(t+\alpha),\ z(t) = t$$

рухається відповідно до наступного рис.



Цілком очевидно, що початкові точки M_0 та N_0 співпадають, й при будь якому t точка $N(t)$ проектується на фазову площину у точку $M(t)$.





◄

4.1. Метод виключення

(зведення системи диференціальних рівнянь до одного рівняння)

Частковим випадком канонічної системи диференціальних рівнянь є одне рівняння n-го порядку, що розв'язне відносно старшої похідної

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}\right).$$

Введенням нових функцій

$$x_1 = x'(t), \quad x_2 = x''(t), \quad \dots, \quad x_{n-1} = x^{(n-1)}(t)$$

це рівняння заміняється нормальною системою n рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x_1, \\ \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_{n-2}}{dt} = x_{n-1}, \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = f(t, x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \end{cases}$$

Можна стверджувати й зворотнє, що можливо (*згадаємо приклад Зауваження 1*), нормальна система $\boldsymbol{n}$ рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

еквівалентна одному диференціальному рівнянню $\boldsymbol{n}$-го порядку.

На цьому побудовано один з методів інтегрування систем диференціальних рівнянь – **метод виключення.**

Проілюструємо його на прикладі системи двох рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + f(t), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + g(t).$$

Тут a, b, c, d - константи, $f(t), g(t)$ - задані відомі функції, $x(t), y(t)$ - шукані невідомі функції.

З першого рівняння цієї системи знаходимо

$$y = \frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right).$$

й підставимо праву частину в друге рівняння замість $y(t)$, а похідну правої частини замість $\frac{dy(t)}{dt}$.

Отримаємо диференціальне рівняння другого порядку відносно $x(t)$

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx + P(t) = 0,$$

де A, B, C - константи.

Розв'язавши його знаходимо $x(t) = x(C_1, C_2, t)$, далі диференціюємо й маємо $\frac{dx(t)}{dt}$.

Підставляємо їх у попередній вираз, отриманий з першого рівняння, й знаходимо $y(t)$.

5. Системи лінійних диференціальних рівнянь.

5.1. Загальні положення.

Система диференціальних рівнянь, що записана у вигляді

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ \ldots\ + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ \ldots\ + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ \ldots\ + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t), \end{cases}$$

називається **лінійною неоднорідною системою диференціальних рівнянь**.

Система

$$
\begin{cases}
x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{1n}(t)x_n(t) \\
x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{2n}(t)x_n(t) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{nn}(t)x_n(t)
\end{cases}
$$

називається **лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь**.

Якщо ввести векторні позначення

$$
x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix},
$$

то лінійну неоднорідну систему можна переписати у вигляді

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t),$$

а лінійну однорідну систему у вигляді

$$x'(t) = A(t)x(t) .$$

Якщо функції $a_{ij}(t),\ \ f_i(t),\ \ \ i,j=\overline{1,n}$ неперервні в околі точки $(x_0,t_0)=(x_1^0, x_2^0,\ \dots\ , x_n^0, t_0),$ то виконані умови **теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші**, і існує єдиний розв'язок

$$x_1 = x_1(t),\ \ x_2 = x_2(t),\ \dots\ ,\quad x_n = x_n(t),$$

системи рівнянь, що задовольняє початковим даним

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0,\ \dots\ ,\quad x_n(t_0) = x_n^0.$$

5.1.1. Властивості розв'язків лінійних однорідних систем

Властивість 5.1.1. Якщо вектор $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ є розв'язком лінійної однорідної системи, то і $Cx(t)=\begin{pmatrix} Cx_1(t) \\ Cx_2(t) \\ \dots \\ Cx_n(t) \end{pmatrix}$, де C - довільна стала скалярна величина, також є розв'язком цієї системи.

Властивість 5.1.2. Якщо дві векторні функції $x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$, $x_2(t)=\begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}$ є розв'язками однорідної системи, то і їхня сума також буде розв'язком однорідної системи.

Властивість 5.1.3. Якщо вектори $x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \ldots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$, … , $x_n(t)=\begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \ldots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ є розв’язками однорідної системи, то і їхня лінійна комбінація з довільними коефіцієнтами також буде розв’язком однорідної системи.

Властивість 5.1.4. Якщо комплексний вектор з дійсними елементами $u(t)+iv(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \ldots \\ u_n(t) \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} v_1(t) \\ \ldots \\ v_n(t) \end{pmatrix}$ є розв’язком однорідної системи, то окремо дійсна $u(t)$ та уявна $v(t)$ частини є розв’язками системи.

Визначення 5.1.1. Вектори $x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \ldots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$, $x_2(t)=\begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \ldots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}$, … , $x_n(t)=\begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \ldots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ називаються **лінійно залежними** на відрізку $t\in[a,b]$, якщо існують не всі рівні нулю сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$, такі, що $C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\ldots+C_nx_n(t)\equiv 0$ при $t\in[a,b]$.

Якщо тотожність справедлива лише при $C_i=0,\ i=\overline{1,n},$ то вектори **лінійно незалежні**.

Визначення 5.1.2. Визначник, що складається з векторів $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, тобто

$$W[x_1(t), \ldots, x_n(t)] = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

називається **визначником Вронського**.

Теорема 5.1.1. Для того щоб розв'язки $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ були лінійно незалежні, необхідно і достатньо, щоб $W[x_1(t), \ldots, x_n(t)] \neq 0$ у жодній точці $t \in [a,b]$.

Теорема 5.1.2. Загальний розв'язок лінійної однорідної системи представляється у вигляді **лінійної комбінації n лінійно незалежних розв'язків**.

Властивість 5.1.5. Максимальне число незалежних розв'язків дорівнює кількості рівнянь.

Визначення 5.1.3. Матриця, складена з будь-яких n лінійно незалежних розв'язків, називається **фундаментальною матрицею** розв'язків системи.

Якщо лінійно незалежними розв'язками будуть

$$x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix},\ x_2(t)=\begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \dots ,\ x_n(t)=\begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \dots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

тоді матриця

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

буде **фундаментальною матрицею** розв'язків.

Як випливає з попередньої теореми загальний розв'язок може бути представлений у вигляді

$$x_{одн}(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t) \ ,$$

де C_i - довільні сталі.

Якщо ввести вектор $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}$, то загальний розв'язок можна записати у вигляді

$$x_{одн}(t) = X(t)C,$$

де $X(t)$ - фундаментальна матриця розв'язків.

5.1.2. Формула Якобі

Залежність визначника Вронського в довільний момент часу через значення в початковий момент має вигляд

$$W[x_1(t), \ \dots \ , x_n(t)] = W[x_1(t_0), \ \dots \ , x_n(t_0)]\exp(\int_{t_0}^{t} SpA(t)dt)$$

і називається **формулою Якобі**.

5.2. Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Система диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ \dots \ + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ \dots \ + a_{2n}x_n(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ \dots \ + a_{nn}x_n(t), \end{cases}$$

де a_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ - сталі величини, називається **лінійною однорідною системою зі сталими коефіцієнтами**.

У матричному вигляді вона записується

$$x'(t) = Ax(t).$$

5.2.1. Розв’язування систем однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами методом Ейлера.

Розв’язок системи шукаємо у вигляді вектора

$$x(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1 e^{\lambda t}\\ \alpha_2 e^{\lambda t}\\ \dots\\ \alpha_n e^{\lambda t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \dots\\ \alpha_n\end{pmatrix}e^{\lambda t}.$$

Підставивши в систему диференціальних рівнянь, одержимо

$$\begin{cases}\alpha_1\lambda e^{\lambda t}=a_{11}\alpha_1 e^{\lambda t}+a_{12}\alpha_2 e^{\lambda t}+\ \dots\ +a_{1n}\alpha_n e^{\lambda t}\\ \alpha_2\lambda e^{\lambda t}=a_{21}\alpha_1 e^{\lambda t}+a_{22}\alpha_2 e^{\lambda t}+\ \dots\ +a_{2n}\alpha_n e^{\lambda t}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_n\lambda e^{\lambda t}=a_{n1}\alpha_1 e^{\lambda t}+a_{n2}\alpha_2 e^{\lambda t}+\ \dots\ +a_{nn}\alpha_n e^{\lambda t}\end{cases}$$

Скоротивши на $e^{\lambda t}\neq 0$, і перенісши всі члени вправо, запишемо

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ \dots\ + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\alpha_2 + \ \dots\ + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ \dots\ + (a_{nn}-\lambda)\alpha_n = 0 \end{cases}$$

Отримана однорідна система лінійних алгебраїчних (відносно невідомих $\alpha_i,\ i=\overline{1,n}$) рівнянь має розв'язок тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Це рівняння, може бути записаним у векторно-матричній формі

$$\det(A-\lambda E)=0$$

і воно називається **характеристичним** (віковим) **рівнянням**.

Розкриємо його

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ \dots \ + p_{n-1}\lambda + p_n = 0.$$

Алгебраїчне рівняння n-го ступеня має n-коренів.

Розглянемо різні випадки.

1. Всі **корені характеристичного рівняння** $\lambda_1, \lambda_2, \ \dots \ , \lambda_n$ **(власні числа матриці** A**)** дійсні і різні.

Підставляючи їх по черзі в систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ \dots \ + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda_i)\alpha_2 + \ \dots \ + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ \dots \ + (a_{nn} - \lambda_i)\alpha_n = 0 \end{cases}$$

одержуємо відповідні ненульові розв’язки системи

$$\alpha^1=\begin{pmatrix}\alpha_1^1\\ \alpha_2^1\\ \ldots\\ \alpha_n^1\end{pmatrix},\quad \alpha^2=\begin{pmatrix}\alpha_1^2\\ \alpha_2^2\\ \ldots\\ \alpha_n^2\end{pmatrix},\ \ldots\ ,\ \alpha^n=\begin{pmatrix}\alpha_1^n\\ \alpha_2^n\\ \ldots\\ \alpha_n^n\end{pmatrix}$$

що являють собою **власні вектори**, які відповідають власним числам λ_i, $i=\overline{1,n}$.

У такий спосіб одержимо n- розв'язків

$$x_1(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1^1e^{\lambda_1t}\\ \alpha_2^1e^{\lambda_1t}\\ \ldots\\ \alpha_n^1e^{\lambda_1t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1^1\\ \alpha_2^1\\ \ldots\\ \alpha_n^1\end{pmatrix}e^{\lambda_1t},\quad x_2(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1^2e^{\lambda_2t}\\ \alpha_2^2e^{\lambda_2t}\\ \ldots\\ \alpha_n^2e^{\lambda_2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1^2\\ \alpha_2^2\\ \ldots\\ \alpha_n^2\end{pmatrix}e^{\lambda_2t},\ \ldots\ ,\ x_n(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1^ne^{\lambda_nt}\\ \alpha_2^ne^{\lambda_nt}\\ \ldots\\ \alpha_n^ne^{\lambda_nt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1^n\\ \alpha_2^n\\ \ldots\\ \alpha_n^n\end{pmatrix}e^{\lambda_nt}\ldots$$

Причому оскільки $\lambda_1, \lambda_2, \ \dots\ , \lambda_n$- різні, а $\alpha^1, \alpha^2, \ \dots\ , \alpha^n$- відповідні їм власні вектори, то розв'язки $x_1(t), \ \dots\ , x_n(t)$- лінійно незалежні, і загальний розв'язок системи має вигляд

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t).$$

Або у векторно-матричної формі запису

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_1^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_1^n e^{\lambda_n t} \\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_2^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_2^n e^{\lambda_n t} \\ \dots & & & \\ \alpha_n^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_n^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_n^n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix},$$

де $C_1, \ \dots\ , C_n$- довільні сталі.

2. Нехай $\lambda = p \pm iq$ пара комплексно спряжених коренів.

Візьмемо один з них, наприклад $\lambda = p + iq$. Комплексному власному числу відповідає комплексний власний вектор

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + is_1 \\ r_2 + is_2 \\ \dots\dots\dots \\ r_n + is_n \end{pmatrix}$$

і, відповідно, розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + is_1)e^{(p+iq)t} \\ (r_2 + is_2)e^{(p+iq)t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (r_n + is_n)e^{(p+iq)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + is_1) \\ (r_2 + is_2) \\ \dots\dots\dots \\ (r_n + is_n) \end{pmatrix} e^{(p+iq)t}$$

Використовуючи залежність $e^{(p+iq)t} = e^{pt}(\cos qt + i\sin qt)$, перетворимо розв'язок до вигляду:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + is_1)e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) \\ (r_2 + is_2)e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (r_n + is_n)e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt - s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt - s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt - s_n\sin qt) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\sin qt + s_1\cos qt) \\ e^{pt}(r_2\sin qt + s_2\cos qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\sin qt + s_n\cos qt) \end{pmatrix} = u(t) + iv(t).$$

І, як випливає з властивості 5.1.4 розв'язків однорідних систем, якщо комплексна функція $u(t)+iv(t)$ дійсного аргументу є розв'язком однорідної системи, то окремо дійсна і уявна частини також будуть розв'язками, тобто комплексним власним числам $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ відповідають лінійно незалежні розв'язки

$$u(t) = \begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt - s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt - s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt - s_n\sin qt) \end{pmatrix}, \quad v(t) = \begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt + s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt + s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt + s_n\sin qt) \end{pmatrix}.$$

3. Якщо характеристичне рівняння має кратний корінь λ кратності γ, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\gamma = \lambda$, то розв'язок системи рівнянь має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\beta_1^1 + \beta_1^2 t + \ldots + \beta_1^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \\ (\beta_2^1 + \beta_2^2 t + \ldots + \beta_2^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\beta_n^1 + \beta_n^2 t + \ldots + \beta_n^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

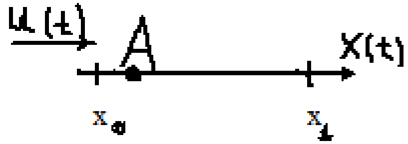
Підставивши його у вихідне диференціальне рівняння і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, одержимо $\gamma \times n$ - рівнянь, що містять $\gamma \times n$-невідомих. Тому що корінь характеристичного рівняння λ має кратність γ, то ранг отриманої системи $\gamma n - \gamma = \gamma(n-1)$. Вводячи γ довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_\gamma$ і розв'язуючи систему, одержимо

$$\beta_i^j = \beta_i^j(C_1, C_2, \ldots, C_\gamma), \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,\gamma}.$$

1.1. ПРО ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для ілюстрації постановок задач теорії керування наведемо найбільш прості та наочні приклади.

Приклад 1.
Нехай матеріальна точка A масою m рухається уздовж прямої.
На неї діє сила u.
Положення точки A характеризується координатою: $x = x(t)$.



Нехай також виконуються умови:

$$x(t_0) = x_0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = 0, \tag{1.7}$$

$$|u| \le \bar{u}, \ (\bar{u} > 0). \tag{1.8}$$

Ставиться задача: визначити силу $u = u_0(t)$, під дією якої точка A рухається так, що із заданого початкового стану (1.7) переміщується в інший заданий стан на момент $t = t_1$:

$$x(t_1) = x_1, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_1} = 0 \tag{1.9}$$

за мінімально можливий час

$$T_{\min} = \min_u (t_1 - t_0) = \min_u \int_{t_0}^{t_1} dt,.$$

Для розв'язання задачі треба записати рівняння руху точки $\boldsymbol{A}$.

Згідно з другим законом Ньютона це рівняння можна подати у вигляді:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=u \tag{1.10}$$

Точку $\boldsymbol{A}$, рух якої змінюється за рахунок зовнішньої сили $\boldsymbol{u}$, розглядаємо як приклад керованої системи.

Величину $\boldsymbol{u}$ називають керуючим впливом, функцією керування або просто керуванням.

Поставлена задача у теорії кеування *називається **задачею швидкодії***.

При розв'язуванні таких задач використовують поняття ***фазових координат*** та ***фазового простору***.

У даному прикладі фазовими координатами є дві змінні - $x_1(t)$, $x_2(t)$, пов'язані зі змінною $x(t)$ рівностями:

$$x_1 = x(t), x_2 = \frac{dx}{dt};$$

фазовим простором є координатна площина.

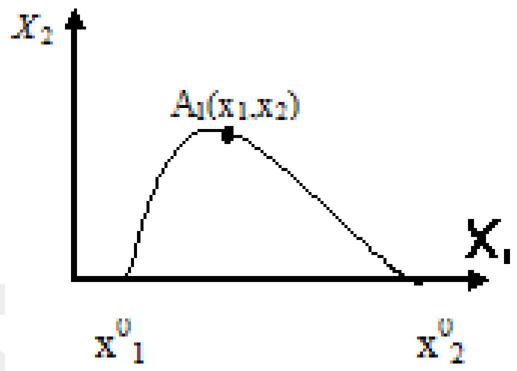
Тоді рівняння (1.10) можна записати у вигляді двох диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad \qquad (1.11)$$
$$m\frac{dx_2}{dt} = u$$

а граничні умови (1.7), (1.9) у вигляді:

$$x_1(t_0) = x_1^0 = x^0 \qquad x_1(t_1) = x_1^1 = x^1 \qquad (1.12)$$
$$x_2(t_0) = 0 \qquad x_2(t_1) = 0$$

Точку A_1 з координатами $(x_1(t), x_2(t))$ на площині $X_1 0 X_2$ називають фазовою точкою системи. Площину (див. рис.) називають ***фазовою площиною***, або, взагалі кажучи, - ***фазовим простором***, елементами якого є вектори фазових координат.



Приклад 2. Наведемо одну із задач оптимального розподілу ресурсів у динамічних системах на прикладі моделі бою двох сторін.

Динаміку бою можна описати такою системою рівнянь:

$$\frac{dx_1}{dt} = -bx_2 + u(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -ax_1 + v(t)$$,

де $x_1(t)$ – кількість бойових одиниць із боку A, що залишились боєздатними на момент часу $t \in [t_0, t_1]$,

$x_2(t)$ – кількість бойових одиниць, що залишились боєздатними на момент часу t для сторони B;

$u(t), \quad v(t)$ – темпи надходження бойових одиниць із резерву для сторін A та B відповідно на момент часу t;

a, b – середні ефективності швидкості стрільби бойових одиниць сторін A та B відповідно;

$T = t_1 - t_0$ – заданий час бою.

Нехай відомі:

$$x_1(t_0) = x_1^0$$
$$x_2(t_0) = x_2^0$$

а також величина $v(t)$.

Задача оптимального керування боєм:

знайти керування $u^0(t)$ за обмежень: $0 \le u(t) \le \bar{u}, \int_{t_0}^{t_1} u(t)dt \le \bar{\bar{u}}$, щоб досягався екстремум вибраного функціонала якості $Q(u(t))$.

Тут $\bar{u}, \bar{\bar{u}}$ – задані величини.

Критерієм найкращого керування може бути вибрана певна мета бою, наприклад:

$Q = x_2(t_1) \to \min\limits_u$ – на кінець бою сторона B має менше бойових одиниць;

$Q = x_1(t_1) \to \max\limits_u$ – мета сторони A: максимальне збереження своїх бойових одиниць на кінець бою.

Можна ввести й інші критерії оптимальності.

Приклад 3.

Система з випадковими збуреннями:

$$\frac{dx_1}{dt} = u \tag{1.16}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + \xi(t) \tag{1.17}$$

Тут $\xi(t)$ – випадковий процес,

$|u(t)| \le k = const, t \in [t_0, t_1]$.

Мета керованої системи (1.16) – відтворити рух некерованої системи (1.17).

Оскільки $x_2(t)$ – випадковий процес, то критерій оптимальності записується через математичне сподівання:

$$Q = M\{Q_1\} = M\{\int_{t_0}^{t_1} [(x_1 - x_2)]^2 + u^2\} \to \min_u \tag{1.18}$$

1.2. СТРУКТУРНІ СХЕМИ ОПИСУ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Систему керування в загальному випадку можна зобразити у вигляді структурної схеми:

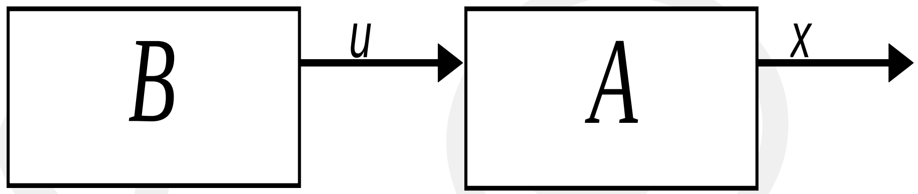


Рис. 1.2.

Тут:

$\boldsymbol{A}$ – об'єкт керування;

$\boldsymbol{B}$ – пристрій керування (або керуючий пристрій),

$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \left(\boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{t}), \ldots, \boldsymbol{x}_n(\boldsymbol{t})\right)^T$ – вектор фазових координат або фазовий стан системи,

T – знак транспонування;

$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}$ – фазовий простір,

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = \left(\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{t}), \ldots, \boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{t})\right)^T$ – векторна функція керування.

Вектор $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ називають ***вихідним сигналом***.

Вектор $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$ називають ***вхідним сигналом*** (входом до об'єкта $\boldsymbol{A}$).

Будемо вважати, що фазовий стан $x(t)$ об'єкта керування A в довільний момент часу $t > t_0$ визначається повністю й однозначно за його відомим початковим станом $x(t_0)$ та керуванням $u(t)$ при $t > t_0$.

Пару векторних функцій $(u(t), x(t))$ називають ***процесом керування***.

Для різних систем керування внутрішні характеристики об'єкта керування описуються відповідними залежностями різної природи – алгебраїчними, диференціальними, інтегральними та ін.

Правила (закон) перетворення вхідних сигналів у вихідні називають рівнянням об'єкта.

Широко розповсюджені неперервні системи керування, об'єкти яких описуються звичайними диференціальними рівняннями (див. приклади 1.1 – 1.3). Такі системи називають **системами із зосередженими параметрами**. Системи керування, об'єкти яких описуються за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних, називаються **системами з розподіленими параметрами**.

Критеріями оптимальності керування (критеріями якості об'єкта керування) *є* функції або ***функціонали на екстремум***.

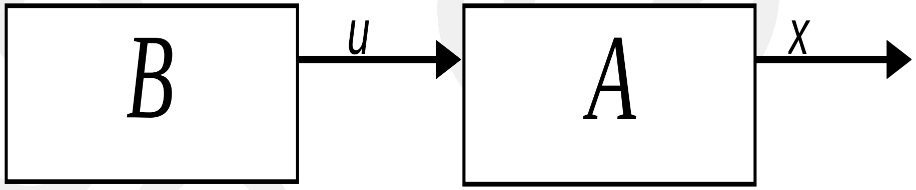
Зміст оптимальності в різних задачах може бути різним:
– приведення системи до заданого стану за найкоротший проміжок часу, тобто найшвидше;
– мінімізація енергетичних витрат на керування;
– мінімізація відхилення фазового стану системи від заданої траєкторії тощо.

Процес керування, що забезпечує екстремум (мінімум або максимум) функціонала якості об'єкта керування, називається оптимальним процесом керування.

Розглянемо тепер, які функції виконує пристрій керування $\boldsymbol{B}$.

Розглянемо два суттєво різних типи систем керування.

1) ***Системи програмного керування*** або незамкнені системи (***системи без оберненого зв'язку***).



У таких системах об'єкти керування $\boldsymbol{A}$ мають точно визначені наперед рівняння, що описують їх функціонування. Ці об'єкти керування позбавлені впливу випадкових збурень. Критерій якості для них є детермінованою величиною. Усі канали зв'язку, як пристрою керування так і об'єкта керування, захищені від будь-яких випадкових зовнішніх впливів та збурень.

Оптимальне керування $\boldsymbol{u^O(t)}$ можна обчислити наперед для всіх t ще до початку функціонування системи. Керуючий пристрій $\boldsymbol{B}$ має забезпечити тільки подачу розрахованого наперед керування $\boldsymbol{u^0(t)}$ на вхід об'єкта керування $\boldsymbol{A}$.

Утім, системи програмного керування мають обмежене застосування на практиці. Як правило, система керування має додаткові лінії зв'язку, за якими надходить інформація про стан об'єкта $\boldsymbol{A}$ на вхід керуючого пристрою $\boldsymbol{B}$.

2) ***Системи керування з оберненим зв'язком (замкнені системи керування).***

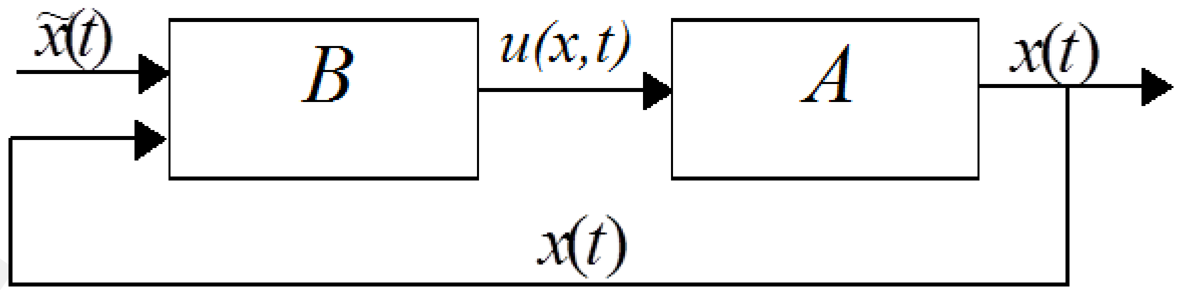


Рис. 1.3.

Тут $\tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})$ – заданий (програмний) вплив, що визначає роботу пристрою $\boldsymbol{B}$. Для програмних систем цей сигнал можна вважати частиною внутрішньої структури пристрою $\boldsymbol{B}$.

Обернений зв'язок необхідний, оскільки динамічні характеристики систем можуть бути відомі лише наближено і, крім того, на систему можуть впливати зовнішні збурення, як правило, випадкового характеру.

Контур оберненого зв'язку дозволяє керуючому пристрою враховувати відхилення й робити відповідну корекцію руху.

Системи з випадковими збуреннями, що діють на об'єкт керування, можна зобразити у вигляді структурної схеми:

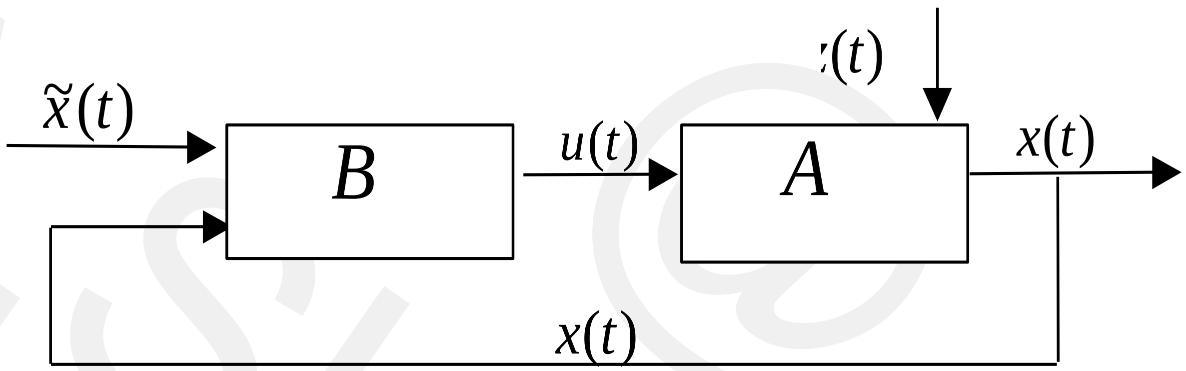


Рис. 1.4.

Тут $\boldsymbol{z(t)}$ – вектор випадкових збурень.

Критерій оптимальності для таких систем: знайти мінімум (максимум) функціонала

$$\boldsymbol{Q = M\{\int_{t_0}^{t_1} G(\tilde{x}(t), x(t), u(t), z(t), t)dt\}}$$

де $\boldsymbol{M}\{\cdot\}$ – математичне сподівання.

Параметри керування реальних систем не можуть приймати довільні значення, тобто завжди $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{U})$.

Множину $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{U})$ називають ***областю допустимих керувань*** (або областю керування),
де $\boldsymbol{U}$ – простір змінних $\boldsymbol{u_1, \ldots, u_r}$.
Множина $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{U})$ задається, як правило, системою рівностей або нерівностей.

Аналогічно $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{X})$, де $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{X})$ – ***область можливих станів*** системи,
де $\boldsymbol{X}$ – простір змінних $\boldsymbol{x_1, \ldots, x_n}$.

У загальному випадку можуть бути обмеження й на функціонали від вектор-функцій $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$:

$$\boldsymbol{L_\mu[x(t), u(t), z(t)] \in \Omega_\mu(L)}, \boldsymbol{\mu = \overline{1, m}},$$

де $\boldsymbol{\Omega_\mu(L)}$ – допустима область зміни функціонала.

Зауваження 1.1. ***У теорії керування вважають, що керування є кусково-неперервними або вимірними функціями.***

Термінологія, наведена вище, справедлива не тільки для неперервних систем, а й для дискретно-неперервних та дискретних систем керування.

Класифікація систем керування *можлива також і за іншими ознаками*:

1) ***Системи з повною інформацією про об'єкт керування***.

Такі системи – математична абстракція. Це тому, що в керуючий пристрій $\boldsymbol{B}$ введена повна апріорна інформація: рівняння об'єкта, усі обмеження, інформація про критерій оптимальності, про сигнал $\boldsymbol{x(t)}$, збурення $\boldsymbol{z(t)}$, про стан $\boldsymbol{x(t)}$ у кожний момент часу $\boldsymbol{t}$, що в реальних системах зробити майже неможливо.

Утім, ця абстракція часто з достатньою точністю відповідає реальним системам керування, коли неповнотою інформації можна знехтувати.

2) ***Системи з неповною інформацією про об'єкт керування й пасивним її накопиченням у процесі керування***.

Нехай неповнота інформації – це неповнота заданого сигналу $\boldsymbol{x(t)}$: тобто на вхід надходить сигнал $\boldsymbol{y(t)} : \boldsymbol{y(t)} \neq \tilde{x}(\boldsymbol{t})$. Процес накопичення інформації про $\boldsymbol{x(t)}$ не залежить від алгоритму (стратегії) керуючого пристрою $\boldsymbol{B}$. Накопичення інформації полягає у спостереженні й побудові прогнозу про сигнал $\boldsymbol{x(t)}$. Сам процес спостереження не залежить від того, яке рішення прийме пристрій $\boldsymbol{B}$ про характер $\boldsymbol{x(t)}$. Інформацію, отриману в результаті спостережень, можна тільки використати, але її не можна збільшити.

3) ***Системи з неповною інформацією про об'єкт керування, але з активним накопиченням її в процесі керування*** (системи дуального керування).

Пристрій $\boldsymbol{B}$ подає на $\boldsymbol{A}$ деяку послідовність керувань $\{\boldsymbol{u_i(t)}\}$, (тут $\boldsymbol{i}$ – індекс послідовності) і по оберненому зв'язку отримує реакції $\{\boldsymbol{y_i(t)}\}$, які аналізуються керуючим пристроєм $\boldsymbol{B}$. Пристрій $\boldsymbol{B}$ робить висновки про характеристики об'єкта керування, зокрема, про сигнал $\boldsymbol{x(t)}$. Мета цих дій об'єкта $\boldsymbol{B}$ – сприяти більш точному вивченню характеристик об'єкта керування $\boldsymbol{A}$ для більш ефективного керування цим об'єктом, тобто для генерації необхідних керувань. Системи з неповною інформацією виникають через те, що на систему впливають випадкові, непередбачені збурення.

1.3. МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Для математичної постановки задачі оптимального керування розглянемо фазові координати системи як функції часу $x = x(t)$ на деякому проміжку $t_0 \le t \le t_1$.

У початковий момент t_0 потрібно задати початкову умову $x(t_0) = x_0$, а також керування як функції часу $u = u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Тоді фазові координати $x = x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ визначатимуться як розв'язок задачі Коші:

$$x'(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1],$$
$$x(t_0) = x_0,$$

де

$f(x(t), u(t), t) = (f^1(x(t), u(t), t), \ldots, f^n(x(t), u(t), t))^T$ – відома вектор-функція,

Функція $f(x(t), u(t), t)$ описує внутрішні характеристики об'єкта керування та враховує зовнішні впливи на об'єкт.

Визначення 1.1.

Неперервна функція $x = x(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, що задовольняє рівність

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + x_0, \quad t_0 \le t \le t$$

називається ***розв'язком*** даної задачі Коші або траєкторією, що відповідає початковій умові $x(t_0) = x_0$ та керуванню $u = u(\cdot)$ і позначається через $x = x(\cdot, u, x_0)$ або $x = x(t, u, x_0)$.

Початкова точка траєкторії $x(t_0, u, x_0)$ називається ***лівим кінцем траєкторії***,

t_0 – ***початковим моментом часу***,

$x(t_1, u, x_0)$ називається ***правим кінцем траєкторії***,

t_1 – ***кінцевим моментом часу***.

Перейдемо до постановки задачі оптимального керування в загальному випадку.

Нехай

$$x(t) = x(t, u(\cdot), x_0) \in G(t), t_0 \le t \le t_1 \tag{1.19}$$

$$t_0 \in \Theta_0, t_1 \in \Theta_1 \tag{1.20}$$

де $G(t)$ – деяка задана множина з $E^n : G(t) \subset E^n$, а Θ_0, Θ_1 – задані множини на числовій осі $R = \{t : -\infty < t < +\infty\}$.

Не виключено, що $\Theta_0 = R$, $\Omega_1 = R$.

Обмеження вигляду (1.19) часто називають ***фазовими обмеженнями***.

Функції керування $u = u(t)$ мають задовольняти певні вимоги неперервності та гладкості, оскільки при надто розривних функціях $u(t)$ поставлена задача та керування $u(t)$ можуть не мати сенсу. У більшості прикладних задач керування $u(t)$ вибираються у вигляді кусково-неперервних функцій (див. зауваження 1.1.).

Є класи задач керування, в яких від функцій $u(t)$, крім неперервності, вимагається існування їх кусково-неперервних похідних. Такі керування називають ***кусково-гладкими***.

Керування $u(t)$, узагалі кажучи, задовольняють певні обмеження, які запишемо у вигляді

$$u(t) \in V(t), \ \ t_0 \le t \le t_1,$$

де $V(t)$ – задана множина: $V(t) \subseteq E^r$ при кожному $t \in [t_0, t_1]$.

Обмеження (1.20) потрібні, бо початковий та кінцевий моменти часу можуть залежати від керування (напр., у задачах швидкодії) і не завжди можуть бути задані наперед. Тоді вказують обмеження типу (1.20).

Розглянемо умови на кінцях траєкторії $x(t)$.

З обмеження (1.19) випливає при $t = t_0$ і $t = t_1$: $x(t_0) \in G(t_0)$, $x(t_1) \in G(t_1)$ відповідно.

Утім, бувають ситуації, наприклад, при $G(t) = E^n$, $t_0 \le t \le t_1$, коли обмеження на кінцях зручніше виділяти й розглядати окремо.

Будемо вважати, що в E^n при кожному $t_0 \in \Theta_0$ задана множина $S_0(t_0)$ і при кожному $t_1 \in \Theta_1$ задана множина $S_1(t_1)$.

Умови на кінцях траєкторії будемо тоді записувати у вигляді:

$$\begin{aligned} &x(t_0) \in S_0(t_0), t_0 \in \Theta_0 \\ &x(T) \in S_1(T), T \in \Theta_1 \end{aligned} \qquad (1.21)$$

У задачах оптимального керування прийнята така **класифікація умов** (1.20), (1.21):

якщо множина $\boldsymbol{\Theta_0}$ складається з єдиної точки, то ***початковий момент часу називають фіксованим***;
якщо $\boldsymbol{\Theta_1}$ складається з єдиної точки, то ***кінцевий момент часу називають фіксованим.***

Якщо множина $\boldsymbol{S_0(t_0)}$ (або $\boldsymbol{S_1(t_1)}$) складається з однієї точки й не залежить від $\boldsymbol{t_0}$: (або відповідно $\boldsymbol{S_1(T) = \{x_1\}, T \in \Theta_1}$), то кажуть, що:
лівий (або правий) кінець траєкторії закріплений.

Якщо $\boldsymbol{S_0(t_0) \equiv E^n, t_0 \in \Theta_0}$, або $\boldsymbol{S_1(t_1) \equiv E^n, t_1 \in \Theta_1}$,
то ***лівий (або правий) кінець траєкторії називають вільним.***

В інших випадках
лівий (або правий) кінець траєкторії називають рухомим (може рухатись по заданій кривій).

Нехай рух фазової точки $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ описується системою звичайних диференціальних рівнянь

$$x' = f(x, u, t) \tag{1.25}$$

де функція $f(x, u, t)$ визначена при $x \in G(t)$, $u \in V(t)$, $t_0 \le t \le t_1$.

Визначення 1.2. *Набір* $(t_0, t_1, x_0, u(\cdot), x(\cdot))$ *називається* ***допустимим набором***, *якщо*

- *керування* $u = u(\cdot) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ *визначене й кусково-неперервне на* $t_0 \le t \le t_1$ *і задовольняє обмеження* $u(t) \in V(t), t_0 \le t \le t_1$; $t_0 \in \Theta_0$, $t_1 \in \Theta_1$, $t_0 \le t_1$;
- $x = x(\cdot) = x(\cdot, u(t), x_0)$ – *траєкторія задачі Коші:*

$$x' = f(x, u, t),\ t_0 \le t \le t_1,\ x(t_0) = x_0, \tag{1.26}$$

яка визначена на відрізку $[t_0, t_1]$ *і задовольняє фазове обмеження (1.19),*

а $x(t_0) = x_0 \in S_0(t_0)$, $x(t_1) \in S_1(t_1)$.

Будемо вважати, що множина допустимих наборів $(t_0, t_1, x_0, u(\cdot), x(\cdot))$ непорожня.

Нехай на множині допустимих наборів задана функція (або цільова функція, функціонал)

$$J(x_0, u(\cdot), x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt + g_0(x_0, x(t_1), t_0, t_1), \qquad (1.27)$$

де

$f^0(x(t), u(t), t)$, $g_0(x_0, x(t_1), t_0, t_1)$ – задані функції при $x \in G(t)$, $u \in V(t)$,

$\sup \Theta_0 < \inf \Theta_1$, $\quad S_0(t_0) \subseteq G(t_0)$, $\quad t_0 \in \Theta_0$, $\quad S_1(t_1) \subseteq G(t_1)$, $\quad t_1 \in \Theta_1$.

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб мінімізувати або максимізувати функціонал (1.27) на множині допустимих наборів вигляду $(t_0, t_1, x_0, u(\cdot), x(\cdot))$.

Зауваження 1.2. Обмежимося розглядом задач на мінімум, оскільки задача на максимум функціонала J завжди може бути зведена до еквівалентної задачі на мінімум функціонала ($-J$).

Позначимо $J_* = \inf(t_0, t_1, x_0, u(\cdot), x(\cdot))$, де нижня грань береться за всіма допустимими наборами.

Визначення 1.3. *Допустимий набір* $(t_{0*}, t_{1*}, x_{0*}, u_*(\cdot), x_*(\cdot))$ *називається* ***розв'язком задачі оптимального керування***,

$u_*(\cdot)$ *– оптимальним керуванням,*

$x_*(\cdot)$ *– оптимальною траєкторією системи,*

якщо

$$J(t_{0*}, t_{1*}, x_{0*}, u_*(\cdot), x_*(\cdot)) = J_*.$$

Тоді задачу оптимального керування можна записати у вигляді:

$$J(x_0, u(\cdot), x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt + g_0(x_0, x(t_1), t_0, t_1) \to \inf \tag{1.28}$$

$$x' = f(x(t), u(t), t), \; t_0 \le t \le t_1 \tag{1.29}$$

$$x \in G(t), t_0 \le t \le t_1 \tag{1.30}$$

$$x(t_0) = x_0 \in S_0(t_0), \; x(t_1) \in S_1(t_1), \quad t_0 \in \Theta_0, \; t_1 \in \Theta_1 \tag{1.31}$$

$$u \in V(t), \; t_0 \le t \le t_1. \tag{1.32}$$

Вважаємо тут керування $u = u(\cdot)$ кусково-неперервним на $[t_0, t_1]$ (якщо не сказане інше).

На практиці зустрічаються задачі оптимального керування більш загального вигляду, ніж задача (1.28) – (1.32).

У теорії керування розглядаються також задачі, що враховують

- запізнення інформації,

- задачі з параметрами,

- з дискретним часом,

- з більш загальним виглядом цільової функції,

- задачі для інтегро-диференціальних рівнянь,

- для рівнянь із частинними похідними,

- для стохастичних рівнянь,

тощо.

2.1. ПОСТАНОВКА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ КЕРОВАНОСТІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Розглянемо систему керування, що описується лінійними диференціальними рівняннями

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{2.1}$$

де $x(t)$ – n-мірний, $u(t)$ – m-мірний вектор-стовпці, $A(t)$, $B(t)$ – відомі матриці відповідних розмірностей, елементи яких залежать від часу t.
Такі системи називаються ***нестаціонарними системами керування***.

Визначення 2.1. Система (2.1) називається ***цілком керованою***, якщо для двох довільних точок x^0, x^1 із фазового простору X і двох довільних значень t_0, t_1 аргументу t існує така функція керування $u(t), t \in [t_0, t_1]$, при якій розв'язок системи рівнянь (2.1) задовольняє умови $x(t_0) = x^0, x(t_1) = x^1$.

Позначимо: $X(t, \xi)$ – **фундаментальна матриця для однорідних рівнянь**, що відповідають рівнянням (2.1), нормована в точці ξ.

Введемо матрицю $$W(t,\xi) = X(t,\xi)B(\xi).$$

Матрицю $W(t,\xi)$ називають ***матрицею імпульсних перехідних функцій***.

Вважаємо $W(\mathrm{t},\xi)=\begin{pmatrix} w_1(\mathrm{t},\xi) \\ \vdots \\ w_n(\mathrm{t},\xi \end{pmatrix}$, де $w_i(\mathrm{t},\xi)$ – вектор-рядок:

$$w_i(\mathrm{t},\xi)=(w_{i1}(\mathrm{t},\xi),\ldots,w_{in}(\mathrm{t},\xi)),\ i=\overline{1,n} \qquad (2.2)$$

Теорема 2.1.. Для того, щоб система (2.1) була цілком керованою, необхідно й досить, щоб вектор-функції $w_1(\mathrm{t},\xi),\ldots,w_n(\mathrm{t},\xi)$ були лінійно-незалежними на довільному проміжку $[t_0,t_1]$.

Зауважимо, що умови, наведені в теоремі 2.1, практично важко використовувати, бо матриця $W(t,\xi)$ наперед не задається і її треба кожного разу обчислювати для різних значень t і ξ. Тому бажано знайти умови цілком керованості, що виражаються через матриці $A(t)$, $B(t)$.

Розглянемо це питання для систем керування, в яких A,B – матриці зі сталими елементами.
Такі системи будемо називати лінійними ***стаціонарними системами:***

$$\frac{dx}{dt}=Ax(t)+Bu(t). \qquad (2.3)$$

Теорема 2.2. Для цілком керованості стаціонарної системи (2.3) n-го порядку необхідно й досить, щоб

$$rangS_n=rang(B,AB,\ldots,A^{n-1}B)=n. \qquad (2.4)$$

Наслідок 2.1. Якщо в системі (2.3) вектор керування $u(t)$ одномірний, а $B = b$ – стовпчик, то необхідна й достатня умова цілком керованості має вигляд:

$$\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) \neq 0. \quad (2.5)$$

Співвідношення (2.4) і (2.5) називаються ***критеріями цілком керованості Калмана*** для лінійних стаціонарних систем.

Визначення 2.2. (*Цілком керованість на заданому проміжку*). Нестаціонарна система (2.1) називається цілком керованою на заданому проміжку $[t_0, t_1]$, якщо для 2-х довільних значень $x^0, x^1 \in X$ фазового простору можна вказати таку функцію керування $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, що розв`язок цієї системи задовольняє крайові умови: $x(t_0) = x^0, x(t_1) = x^1$.

Теорема 2.3. Якщо для деякого t із заданого проміжку $[t_0, t_1]$ виконується умова

$$rang[z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)] = n, \quad (2.6)$$

де $z_1(t) = B(t), \quad z_k(t) = A(t)z_{k-1}(t) - \dfrac{dz_{k-1}}{dt}, \quad k = \overline{2, n},$

то система (2.1) – цілком керована на заданому проміжку.

2.2. СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЬ У ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

У теорії керування розглядаються задачі про спостережуваність.

Зміст цих задач: встановити алгоритм визначення частини або всіх фазових координат системи за умови, що відома друга частина фазових координат або деякі функції від цих координат, а також відома математична модель системи керування у вигляді системи диференціальних рівнянь.

Розглянемо задачу спостережуваності для лінійних систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \tag{2.8}$$

де $x(t)$ – n-мірний вектор стану системи, $A(t)$ – відома матриця $n \times n$.

Визначення 2.3. Задачу знаходження вектора $x(t)$ стану системи (2.8) або окремих його компонент за відомою на деякому проміжку $[t_0, t_1]$ функцією

$$y(t) = g^T(t)x(t), \tag{2.9}$$

де $g(t)$– відома n-мірна вектор-функція, будемо називати ***задачею спостережуваності лінійної системи*** (2.8).

Функцію $y(t)$ називають ***функцією (сигналом) виходу системи*** (2.8).

Зауваження 2.1. (***Узагальнення визначення 2.3***):
знайти вектор $x(t)$ або окремі його компоненти за відомою вектор-функцією виходу

$$y(t) = G^T(t)x(t), \tag{2.10}$$

де $G(t)$ – відома матриця $n \times m$.

Визначення 2.4. Якщо задача спостережуваності (2.8), (2.9) (або (2.8), (2.10)) має розв`язок, то система називається ***цілком спостережуваною*** або частково спостережуваною залежно від того, усі чи частину компонент вектора $x(t)$ вдається встановити.

Визначення 2.5. Пара матриць $A(t), G(t)$ називається спостережуваною, якщо можна розв`язати задачу спостережуваності для системи (2.8) за вектором виходу (2.10).

Розглянемо найбільш прості розв'язки задач спостережуваності.

Теорема 2.4. Нехай для кожного $t \in [t_0, t_1]$ існують і відомі $n-1$ похідні від вектора виходу (2.10) системи (2.8). Тоді для існування розв`язку задачі спостережуваності для системи (2.8) у фіксованій точці t у вигляді лінійної комбінації значень $y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ досить, щоб

$$rang \tilde{S}_n = n, \tag{2.11}$$

де

$$\tilde{S}_n(t) = (G_1(t), G_2(t), \dots, G_n(t)), \tag{2.12}$$

$$G_1^T(t) = G^T(t), \; G_{\nu+1}^T(t) = G_\nu^T(t)A(t) + \frac{dG_\nu^T(t)}{dt}, \; \nu = \overline{1, n-1}. \tag{2.13}$$

Зауваження 2.2. Коли $G_1(t) = g(t)$, то умова (2.11) має вигляд:

$$\det \ \tilde{S}_n(t) = \det(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)) \neq 0, \qquad (2.15)$$

де

$$g_1^T(t) = g^T(t), \ \ g_\nu^T(t) = g_{\nu-1}^T(t)A(t) + \frac{dg_{\nu-1}^T(t)}{dt}, \ \ \nu = 1,2,\dots,n.$$

Тоді для фіксованого t маємо:

$$x(t) = \tilde{S}_n^{*-1}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{pmatrix} \qquad (2.16)$$

Зауваження 2.3. Якщо система рівнянь (2.8) стаціонарна, тобто $A(t) = A = const$ і $G_1(t) = const$ $(g(t) = const)$, то тоді матриця $\tilde{S}_n$, умови (2.11), (2.15) і формула (2.16) набудуть відповідно вигляду:

$$\tilde{S}_n(t) = (G, A^T G, \ldots, {A^T}^{n-1} G).$$

$$rang\tilde{S}_n = rang(G, A^T G, \ldots, {A^T}^{n-1} G) = n. \qquad (2.17)$$

$$\det \tilde{S}_n(t) = \det\,(g, A^T g, \ldots, {A^T}^{n-1} g) \neq 0. \qquad (2.18)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} g^T \\ g^T A \\ \vdots \\ g^T A^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{pmatrix}. \qquad (2.19)$$

Відзначимо, що розв'язок задачі спостережуваності через вектор виходу та його похідні буває незручним на практиці, що пов'язано з необхідністю чисельно знаходити похідні заданої функції виходу $y(t)$.

2.3. ЗВ'ЯЗОК МІЖ СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЮ ТА КЕРОВАНІСТЮ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

Нехай маємо умову цілком керованості:

$$rang(z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)) = n, \tag{2.20}$$

де

$$z_1(t) = B(t), \quad z_k(t) = A(t)z_{k-1}(t) - \frac{dz_{k-1}(t)}{dt}, k = \overline{2, n}$$

для лінійної системи керування

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t).$$

Запишемо також умову цілком спостережуваності для лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) \quad \text{з виходом} \quad y(t) = G^T(t)x(t):$$

$$rang(G_1(t), G_2(t), \ldots, G_n(t)) = n, \tag{2.21}$$

де

$$G_1^T(t) = G^T(t), \; G_{\nu+1}^T(t) = G_\nu^T(t)A(t) + \frac{dG_\nu^T(t)}{dt}, \quad \nu = \overline{1, n-1}.$$

Умови (2.20), (2.21) подібні між собою за формою. Утім, існує зв`язок між ними й за змістом.

Теорема 2.5. Якщо виконується умова цілком керованості системи

$$\frac{dx}{dt} = -A^T(t)x(t) + G(t)u(t) \tag{2.22}$$

то виконується умова (2.21) цілком спостережуваності системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) \quad \text{з виходом} \quad y(t) = G^T(t)x(t).$$

Систему (2.22) називають ***спряженою*** до системи керування (2.1).

Таким чином, дана теорема дозволяє зводити дослідження задач спостережуваності лінійних систем до дослідження задач керованості спряжених систем. Це дає можливість використовувати результати, що стосуються керованості, при розв`язуванні задач спостережуваності.

Розглянемо випадок, коли елементи матриць A, G не залежать від t і перенесемо результати з теорії керованості на задачу спостережуваності.

Теорема 2.6. Для того щоб існував розв'язок задачі спостережуваності системи

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{з вектором виходу (вимірів)} \qquad y = G^T x$$

необхідно й досить, щоб виконувалась умова:

$$rang\tilde{S}_n = rang(G, A^T G, \dots, A^{T^{n-1}} G) = n.$$

Зауваження 2.4. Найчастіше задачі спостережуваності виникають у системах керування, тому вони розв'язуються паралельно із задачею керування рухом системи.

Щодо лінійних систем, це означає, що задача спостережуваності виникає не для системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$$

а для системи керування $\dfrac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$, де $u(t)$ – m-мірний вектор керування.

При цьому вектор виходу $y(t) = G^T(t)x(t)$ має розмірність m.

2.4. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

У багатьох випадках дослідникам невідомі як сама структура математичних моделей системи керування, так і параметри моделей. Це призводить до необхідності оцінки або самої структури й параметрів математичної моделі, або значень окремих параметрів при заданій наперед структурі моделі.

Розглянемо задачу знаходження невідомих параметрів математичної моделі, якщо її структура визначена у вигляді системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Задача знаходження (оцінки) невідомих параметрів математичної моделі об'єкта дослідження називається задачею ідентифікації.

Для ілюстрації підходів до розв'язання проблем такого типу розглянемо найпростішу задачу ідентифікації.

Нехай стан системи визначається вектором $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ із $\boldsymbol{n}$-мірного евклідового простору і для деякого значення аргументу $\boldsymbol{t}$ у результаті вимірів отримані вектори

$$x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^n x(t)}{dt^n}. \tag{2.26}$$

У цьому випадку задача ідентифікації полягає в необхідності знайти таку матрицю $\boldsymbol{A}$ розмірності $\boldsymbol{n \times n}$, щоб виконувались умови:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = Ax, \\ &\frac{d^2 x}{dt^2} = A\frac{dx}{dt}, \\ &\ldots \\ &\frac{d^n x}{dt^n} = A\frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Якщо для відомих вимірів (2.26) існує матриця $\boldsymbol{A}$, яка задовольняє співвідношення (2.27), то задача ідентифікації системи має розв'язок.

Позначивши рядки матриці $\boldsymbol{A}$ через $\boldsymbol{a}_1^T, \boldsymbol{a}_2^T, \ldots, \boldsymbol{a}_n^T$, рівняння (2.27) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} &\frac{dx_j}{dt} = a_j^T x, \\ &\ldots . \qquad\qquad , \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \\ &\frac{d^n x_j}{dt^n} = a_j^T \frac{d^n x}{dt^n} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Розглядаючи співвідношення (2.28) при кожному значенні j як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно елементів рядка $a_j^T = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})$, можна записати

$$\begin{bmatrix} x^T \\ \dfrac{dx^T}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}x^T}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} a_j = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_j}{dt} \\ \dfrac{d^2 x_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^n x_j}{dt^n} \end{bmatrix}. \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.29}$$

Умова існування розв’язку системи (2.29) має вигляд:

$$\det\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \right) \neq 0. \tag{2.30}$$

Якщо умова (2.30) виконується, то це означає, що параметри a_j математичної моделі у цьому випадку визначаються за формулами:

$$a_j = \begin{bmatrix} x^T \\ \dfrac{dx^T}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}x^T}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \dfrac{dx_j}{dt} \\ \dfrac{d^2x_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^n x_j}{dt^n} \end{bmatrix}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.31}$$

У результаті підстановки співвідношень (2.27) в умову (2.30) неважко отримати

$$\det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax}, \ldots \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}. \tag{2.32}$$

Порівнявши (2.32) з умовою (2.5) цілком керованості системи (2.3), можна сформулювати ***зв'язок між задачами ідентифікації та керованості***:

для існування розв'язку задачі ідентифікації у вигляді математичної моделі

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{Ax}$$

за умови спостереження вектора стану $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ достатньо, щоб матриця $\boldsymbol{A}$ та вектор $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ задовольняли умову (2.5) цілком керованості системи (2.3),

де $$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}).$$

Подібну аналогію можна встановити також між умовами ідентифікації та цілком спостережуваності.

Оскільки матриця $\boldsymbol{A}$ наперед невідома, то на практиці умову ідентифікації перевіряють за допомогою умови (2.30).

3.1. ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РУХУ ТА АНАЛІТИЧНЕ КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Нехай система керування описується рівнянням

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), u(t)) \tag{3.1}$$

де $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ – відповідно вектори стану та керувань, $F(t, x(t), u(t))$ – n-мірна вектор-функція, що описує рух системи.

Попередньо розглянемо систему (3.1), як диференціальних рівнянь, в більш компактному вигляді

$$\dot{y} = F(y, t). \tag{*}$$

Розв’язок системи рівнянь (*) має вигляд

$$y = \varphi(t),$$

де $\varphi(t)$ – векторна функція, що складається з n – неперервно диференційованих функцій $\varphi^T(t) = \left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\right)$.

Будемо використовувати одну з норм Евклідового простору R^n

$$\left\|\varphi(t) - y(t)\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i(t) - \varphi_i(t)\right)^2}.$$

Визначення 3.1 Розв’язок $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{t})$ системи (*) називається ***стійким за Ляпуновим*** (рівномірно за часом), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого іншого розв’язку $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ системи (*) при $\boldsymbol{t} > \boldsymbol{t}_0$ буде виконуватись $\|\varphi(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})\| < \varepsilon$, при $\|\varphi(\boldsymbol{t}_0) - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}_0)\| < \delta$ рис.3.1.

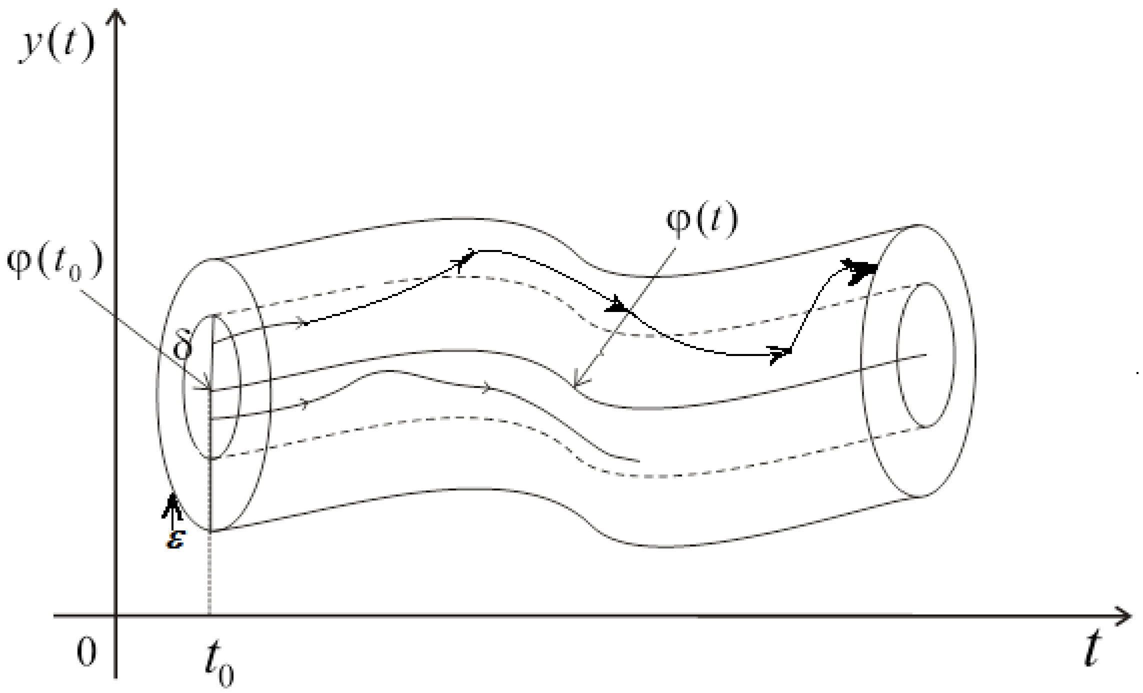


Рис.3.1.

Визначення 3.2 Розв'язок $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{t})$ системи (*) називається ***асимптотично стійким*** (рівномірно за часом), якщо він стійкий за Ляпуновим (Визн. 3.1) і

$$\lim_{\boldsymbol{t}\to\infty} \|\varphi(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})\| = 0.$$

Область $\Delta(\boldsymbol{t}_0) = \left\{ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}_0) : \lim_{\boldsymbol{t}\to\infty} \|\varphi(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})\| = 0 \right\}$ називається *областю притягання* рис.3.2.

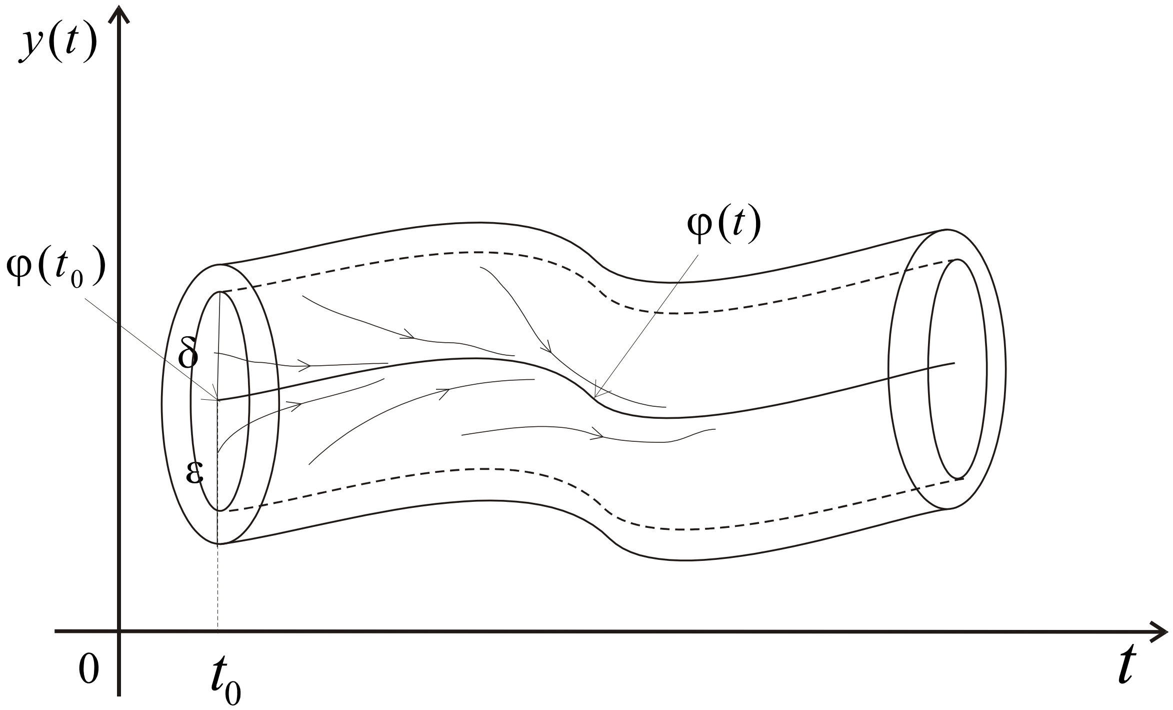


Рис.3.2.

Визначення 3.3 Розв'язок $\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{t})$ системи (*) називається ***нестійким***, якщо для скільки завгодно малого $\varepsilon>0$ існує хоча б один розв'язок $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t})$ такий, що при деякому $\boldsymbol{T}>\boldsymbol{t}_0$ буде виконуватись $\|\varphi(\boldsymbol{T})-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{T})\|>\varepsilon$, хоча $\|\varphi(\boldsymbol{t}_0)-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}_0)\|<\delta$, де $\delta>0$ як завгодно мала величина рис.3.3.

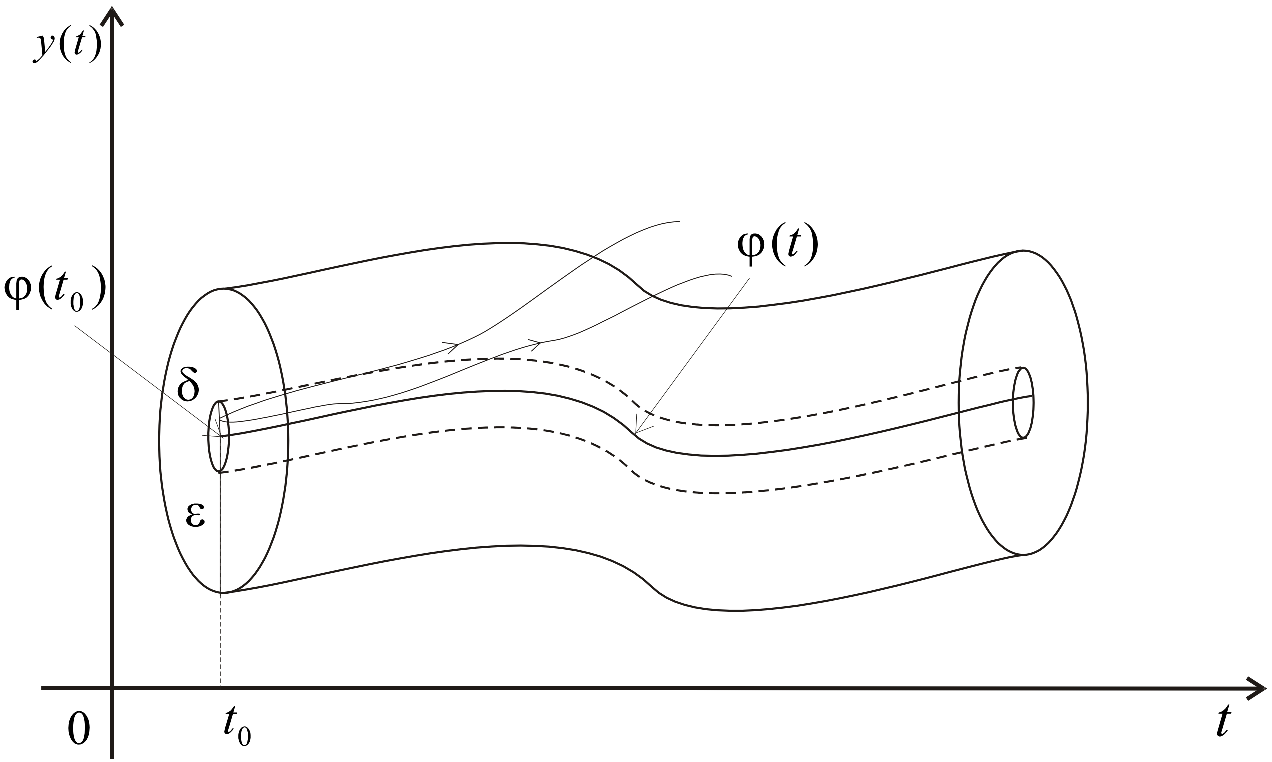


Рис.3.3.

Для постановки задач дослідження стійкості та конструювання регуляторів потрібно задати певний бажаний рух системи (3.1).

Будемо вважати, що траєкторія $x(t)$ на інтервалі $[t_0, \infty)$ змінюється згідно із заданим програмним режимом:

$$x(t) = x_{np}(t), \;\; t \in [t_0, \infty). \tag{3.2}$$

Нехай у момент часу $t^{(0)}$ система задовольняє умову $x(t^{(0)}) = x_{np}(t^{(0)})$.

Тоді ***задачу програмного керування можна сформулювати*** так:
знайти програмне керування $u_{np}(t)$, при якому розв'язок системи (3.1) забезпечує умову (3.2).

Задача дослідження стійкості програмного руху $x_{np}(t^{(0)})$ полягає у визначенні властивостей розв'язку системи (3.1) під дією програмного керування $u(t) = u_{np}(t)$ для $t > t^{(0)}$, якщо в початковий момент часу $t^{(0)}$ вектор стану системи отримує деяке збурення $\Delta x(t^{(0)})$:

$$x(t^{(0)}) = x_{np}(t^{(0)}) + \Delta x(t^{(0)}). \tag{3.3}$$

Визначення 3.4. ***Програмний рух*** $x_{np}(t)$ системи (3.1) називається ***стійким за Ляпуновим***, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що, якщо для початкових умов системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), u_{np}(t)) \tag{3.4}$$

виконується нерівність $$\left\|\Delta x(t^{(0)})\right\| = \left\|x(t^{(0)}) - x_{np}(t^{(0)})\right\| \le \delta,$$

то при $t > t^{(0)}$ для розв'язку системи (3.4) справедлива оцінка

$$\left\|\Delta x(t)\right\| \le \varepsilon,$$

де $\Delta x(t) = x(t) - x_{np}(t)$.

Визначення 3.5. ***Програмний рух*** системи (3.4) називається ***асимптотично стійким***, якщо до умов стійкості додається гранична умова:

$$\lim_{t\to\infty} \left\|\Delta x(t)\right\| = 0.$$

Під дією початкових збурень траєкторія збуреного руху буде мати вигляд

$$x(t) = x_{np}(t) + \Delta x(t).$$

Запишемо рівняння для $\Delta x(t)$ згідно із системою (3.4):

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = F(t, x_{np}(t) + \Delta x(t), u_{np}(t)) - F(t, x_{np}(t), u_{np}(t)) = \Phi(t, \Delta x(t), u_{np}(t)). \qquad (3.5)$$

Очевидно, що стійкість за Ляпуновим програмного руху системи (3.4) означає стійкість збурення $\Delta x(t) \equiv 0$ за Ляпуновим для системи (3.5).

Надалі будемо досліджувати на стійкість незбурений рух $\Delta x(t) \equiv 0$.

Зазвичай, програмний рух системи (3.4) і відповідний незбурений рух системи (3.5) є нестійкими.

Тому будемо розглядати задачу забезпечення стійкості цих систем шляхом введення додаткового керування $\Delta u(t, \Delta x(t))$, яке разом із програмним керуванням становить закон керування системою:

$$u(t) = u_{np}(t) + \Delta u(t, \Delta x(t)) \tag{3.6}$$

Тоді задача аналітичного конструювання регулятора системи (3.1) полягає у виборі такої залежності $\Delta u(t, \Delta x(t))$, за якої розв'язок $\Delta x(t) \equiv 0$ системи рівнянь

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = X(t, \Delta x(t), \Delta u(t, \Delta x(t))), \tag{3.7}$$

де $\quad X(t, \Delta x(t), \Delta u(t, \Delta x(t))) = \Phi(t, \Delta x(t), u_{np}(t) + \Delta u(t, \Delta x(t)))$,

був би стійким (асимптотично стійким) за Ляпуновим.

Якщо задати наперед структуру залежності $\Delta u(t, \Delta x(t))$ з точністю до значень деяких параметрів, то задача аналітичного конструювання регулятора зводиться до вибору значень цих параметрів системи (3.7) згідно з умовами стійкості за Ляпуновим розв'язку $\Delta x(t) \equiv 0$.

Часто таку задачу називають ***задачею статбілізації.***

3.2. Особливі точки лінійних стаціонарних систем на площині

Розглянемо побудову фазового портрету системи лінійних диференціальних рівнянь на площині

$$\dot{x} = ax + by,$$
$$\dot{y} = cx + dy.$$

Дотримуючись загальної теорії диференціальних рівнянь, будуємо характеристичне рівняння

$$\det\{A - \lambda I\} = 0, \qquad \text{тобто} \qquad \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Після розкриття характеристичного рівняння, отримуємо

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

В залежності від вільного члена, розглянемо два випадки.

I. Нехай визначник системи не дорівнює нулю, тобто

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Тоді характеристичне рівняння не має нульових коренів, тобто $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

1) Нехай **корені** λ_1, λ_2 **- дійсні, різні, одного знаку**.

а) Нехай, наприклад, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

Завжди існує лінійне неособливе перетворення,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

(розтяг з поворотом), яке приводить початкову систему до жорданової форми

$$\dot{\xi} = \lambda_1 \xi,$$
$$\dot{\eta} = \lambda_2 \eta.$$

Причому вектори

$$s_1^T = (\alpha_1, \beta_1), \; s_2^T = (\alpha_2, \beta_2)$$

є власними векторами матриці A, з відповідним власним числам λ_1, λ_2.

Розв'язком перетвореної системи буде

$$\xi = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \eta = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Для того, щоб побудувати фазовий портрет зробимо наступне.
Поділимо одне рівняння на інше

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\xi}{\eta}.$$

Звідси, відокремлюючи змінні,

$$\frac{d\xi}{\lambda_1 \xi} = \frac{d\eta}{\lambda_2 \eta}.$$

Проінтегрувавши, отримаємо

$$\frac{1}{\lambda_1}\ln|\xi| = \frac{1}{\lambda_2}\ln|\eta| + \frac{1}{\lambda_2}\ln c.$$

Звідси фазові траєкторії мають вигляд «узагальнених парабол» (Рис. 2.1)

$$\xi = c\eta^{\alpha}, \ \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1$$

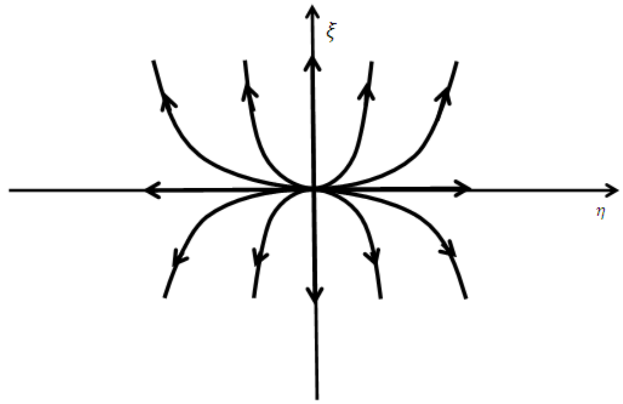


Рис. 2.1.

А після зворотного перетворення (також розтягнення і повороту) отримаємо портрет особливої точки, який називається **вузлом**.

Оскільки $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то $$x(t) \to \pm\infty, \quad y(t) \to \pm\infty,$$

і положення рівноваги називається **нестійким вузлом** (Рис.2.2.)

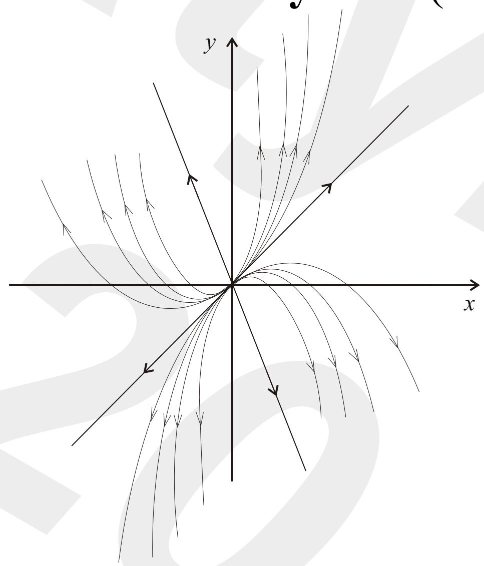


Рис. 2.2.

б) Якщо $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, то заміною $t \to -t$ переходимо до попереднього пункту. Тому якісна картина зберігається, але рух по траєкторіям направлено у протилежному напрямку.

Особлива точка називається **стійким вузлом** (Рис.2.3).

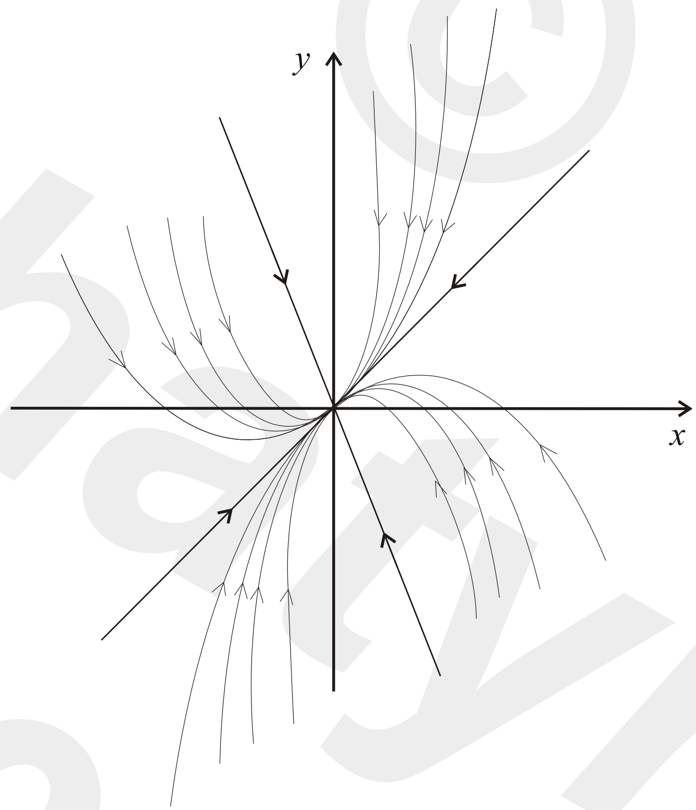


Рис. 2.3.

2) Нехай **корені** характеристичного рівняння **дійсні, різних знаків** (наприклад, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$). Повторюючи перетворення, наведені в попередньому пункті, отримаємо, що фазові траєкторії мають вигляд «узагальнених гіпербол»

$$\xi = c\eta^{\alpha},\ \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$$

Рух по цим траєкторіям йде згідно залежностей

$$\xi = c_1 e^{\lambda_1 t},\ \ \eta = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

А оскільки $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$, то $\xi(t) \to 0,\ \eta(t) \to \pm\infty$ (Рис. 2.4).

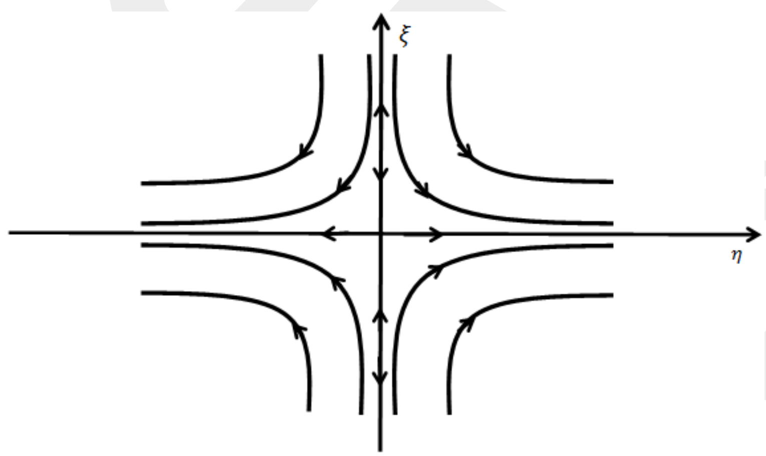


Рис. 2.4.

Після оберненого перетворення отримуємо фазовий портрет особливої точки, який називається **сідлом** (Рис. 2.5)**.**

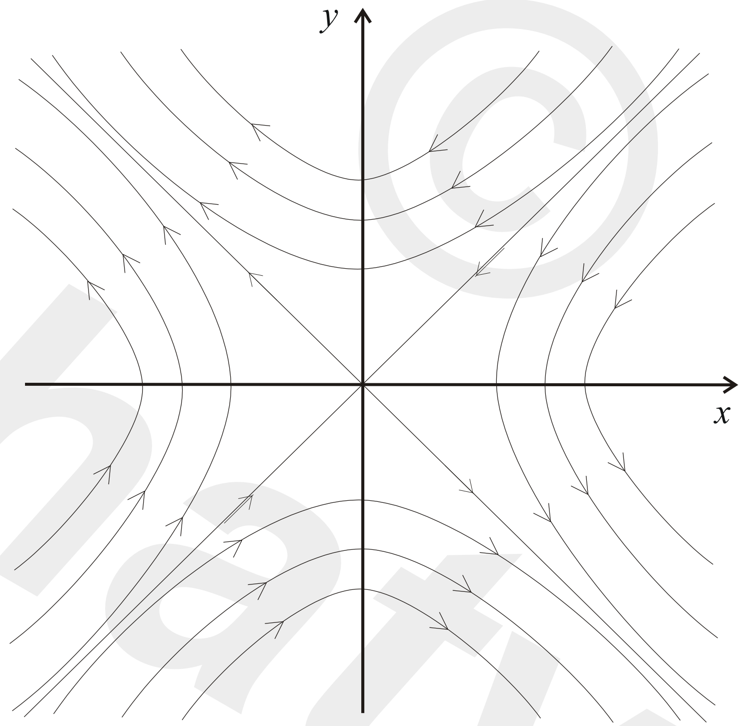


Рис. 2.5.

Прямі $\boldsymbol{l_1}$: і $\boldsymbol{l_2}$: визначені власними векторами $\boldsymbol{s_1^T}=\left(\alpha_1,\beta_1\right)$, $\boldsymbol{s_2^T}=\left(\alpha_2,\beta_2\right)$, називаються стійкою і нестійкою **сепаратрисами сідла.**

3)Нехай **корені** характеристичного рівняння **комплексні**, тобто $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$.
Після перетворення система буде мати вигляд

$$\dot{\xi} = p\xi + q\eta,$$
$$\dot{\eta} = -q\xi + p\eta.$$

Введемо полярні координати

$$\xi = r\cos\theta,\ \eta = r\sin\theta.$$

Після підстановки в перетворені рівняння, отримуємо

$$\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta} = pr\cos\theta + qr\sin\theta,$$
$$\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta} = -qr\cos\theta + pr\sin\theta.$$

Помноживши перше рівняння на $\cos\theta$, а друге на $\sin\theta$ і склавши, отримаємо

$$\dot{r}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) =$$

$$= r(p\cos\theta + q\sin\theta)\cos\theta + r(-q\cos\theta + p\sin\theta)\sin\theta =$$

$$= r\left(p\cos^2\theta + q\sin\theta\cos\theta - q\cos\theta\sin\theta + p\sin^2\theta\right) = rp.$$

Або

$$\dot{r} = pr.$$

Далі, помноживши перше рівняння на $-\sin\theta$, а друге на $\cos\theta$ і склавши, тримаємо

$$r\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\dot{\theta}=$$

$$=-r\left(p\cos\theta+q\sin\theta\right)\sin\theta+r\left(-q\cos\theta+p\sin\theta\right)\cos\theta=$$

$$=r\left(-p\cos\theta\sin\theta-q\sin^2\theta-q\cos^2\theta+p\sin\theta\cos\theta\right)=-qr.$$

Або

$$\dot{\theta}=-q.$$

Таким чином в полярній системі координат отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь

$$\dot{r}=pr,$$
$$\dot{\theta}=-q.$$

Вона має загальний розв'язок вигляду

$$r=r_0e^{pt},$$
$$\theta=\theta_0-qt,\ t\geq t_0.$$

Фазовий портрет перетвореної системи має вигляд спіралей.

а) Якщо $\boldsymbol{p > 0}$, то $\boldsymbol{r(t) \to +\infty}$ і спіралі розкручуються (Рис. 2.6).
Після проведення зворотнього перетворення отримуємо «деформовані» спіралі.
Оскільки спіралі також розкручуються, то положення рівноваги називається **нестійким фокусом**.

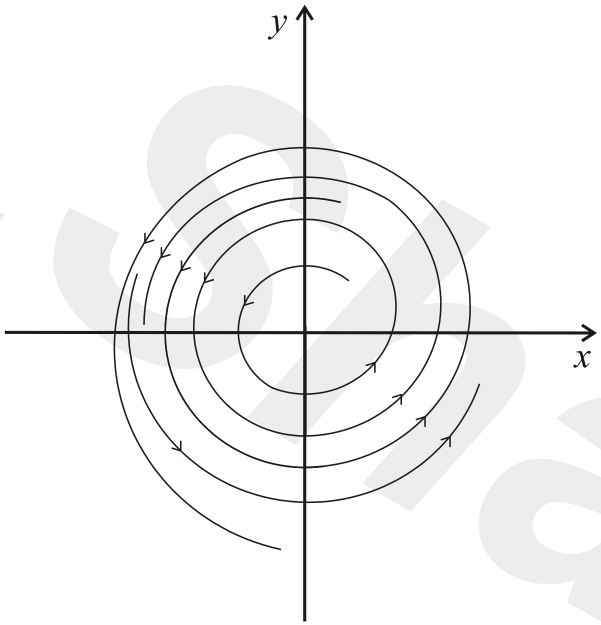


Рис. 2.6.

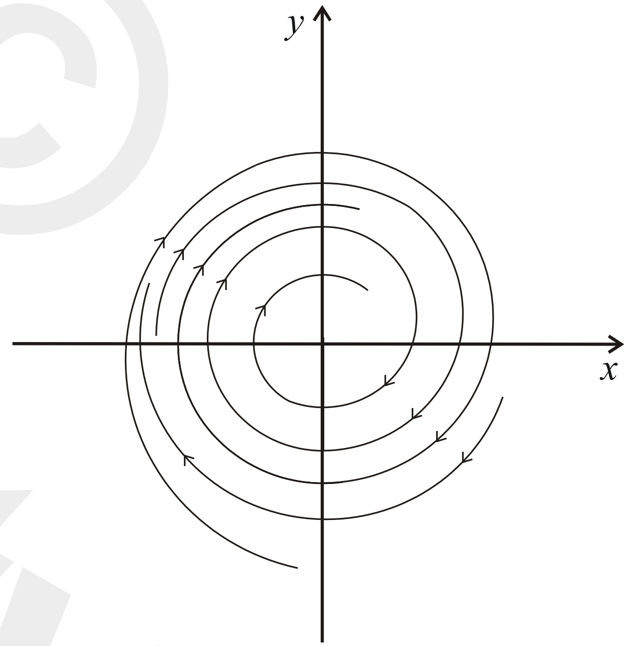


Рис. 2.7.

б) Якщо $\boldsymbol{p < 0}$, то $\boldsymbol{r(t) \to 0}$ і спіралі скручуються (Рис. 2.7).
Після проведення зворотнього перетворення отримуємо «деформовані» спіралі з тим самим напрямком руху.
Положення рівноваги називається **стійким фокусом.**

Розтяг спіралей та напрямок обертання визначається вектором швидкості, що обчислюється в «зручній» точці.

4) Нехай **корені** характеристичного рівняння **суто уявні**, тобто $\lambda_1 = +iq$, $\lambda_2 = -iq$. Виконавши перетворення, наведенні в попередньому пункті, отримуємо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{r} = 0,$$
$$\dot{\theta} = -q.$$

Її розв'язками будуть

$$r = r_0,\ \ \theta = \theta_0 - qt,\ t \ge t_0.$$

Таким чином траєкторії перетвореної системи мають вигляд кіл.
Після проведення зворотнього перетворення отримуємо сімейство «еліпсів».

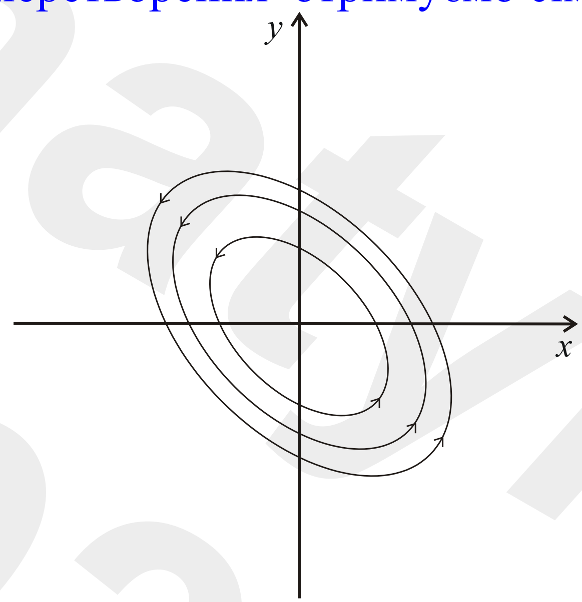


Рис.2.8

Положення рівноваги називається – **центр** (Рис.2.8).

Розтяг еліпсів та напрямок обертання визначається вектором швидкості, що обчислюється в «зручній» точці.

5) Нехай **корені** характеристичного рівняння **кратні**, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. В цьому випадку перетворена система може мати два вигляди.

а) Якщо матриця Жордана має вигляд

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

то система розщеплюється на дві підсистеми

$$\dot{\xi} = \lambda \xi, \ \ \dot{\eta} = \lambda \eta.$$

Загальний розв’язок перетвореної системи має вигляд

$$\xi = c_1 e^{\lambda t}, \ \ \eta = c_2 e^{\lambda t},$$

а траєкторії $\xi = c\eta$ являють собою сімейство прямих, які проходять через початок координат.

Зворотне перетворення не змінює фазовий портрет і в залежності від знаку λ можливе представлення у вигляді **нестійкого дикритичного вузла** (якщо $\lambda > 0$, Рис. 2.9.) і **стійкого дикритичного** вузла (якщо $\lambda < 0$, Рис. 2.10).

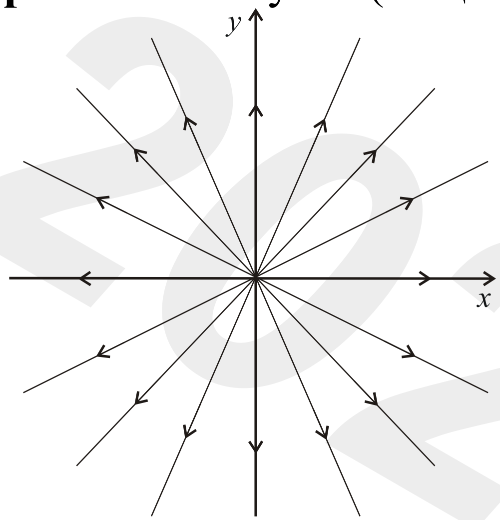


Рис. 2.9.

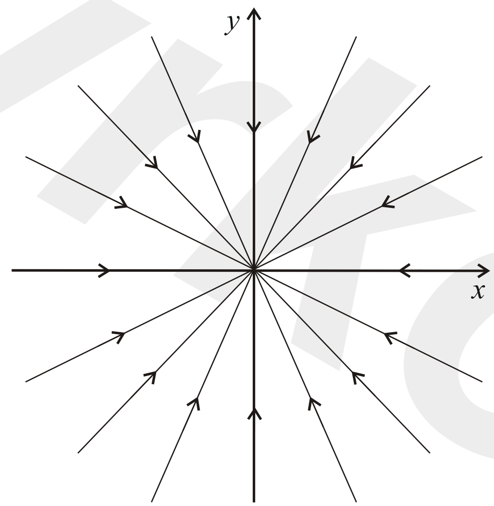


Рис. 2.10.

б) Якщо матриця Жордана має вигляд

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

то перетворена система має вигляд

$$\dot{\xi} = \lambda\xi + \eta, \quad \dot{\eta} = \lambda\eta.$$

Її загальний розв'язок має вигляд

$$\xi = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, \quad \eta = c_2 e^{\lambda t}.$$

Розв'язкам відповідають траєкторії

$$\xi = c\eta + \frac{1}{\lambda}\ln|\eta|.$$

Після зворотнього перетворення фазовий портрет має вигляд

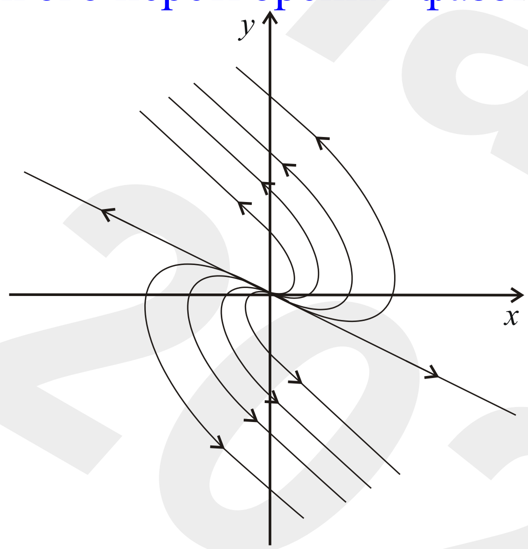


Рис. 2.11.

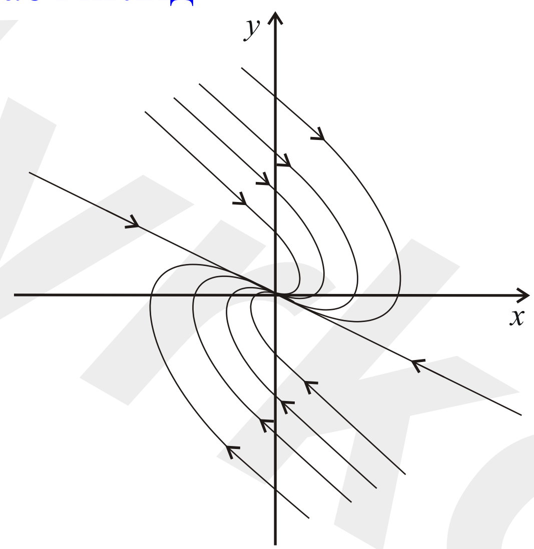


Рис. 2.12.

Особлива точка називається, відповідно, **нестійким виродженим вузлом** (якщо $\lambda > 0$, Рис. 2.11) і **стійким виродженим вузлом** (якщо $\lambda < 0$, Рис. 2.12).

II. Розглянемо другий випадок, при якому визначник системи дорівнює нулю, тобто

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0.$$

В цьому випадку характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda = 0$$

має, хоча б, один нульовий корінь.

1) Нехай $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = a + d \neq 0$.
Перетворена система має вигляд

$$\dot{\xi} = 0,$$
$$\dot{\eta} = (a+d)\eta.$$

Її загальним розв’язком буде

$$\xi = c_1, \;\; \eta = c_2 e^{(a+d)t}.$$

Фазові траєкторії являють собою сімейство паралельних прямих $(\xi = c_1)$, які перетинаються одною особливою прямою $(\eta = 0)$.

а) Причому, якщо $a+d<0$, то на сімействі прямих $\xi=c_1$ при $c_2>0$ рух направлено вправо, а при $c_2<0$ - вліво. Особлива пряма $\eta=0$ є **нестійкою особливою прямою** (Рис. 2.13)**.**

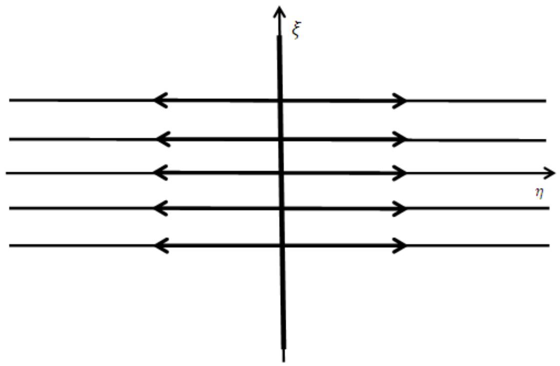


Рис. 2.13.

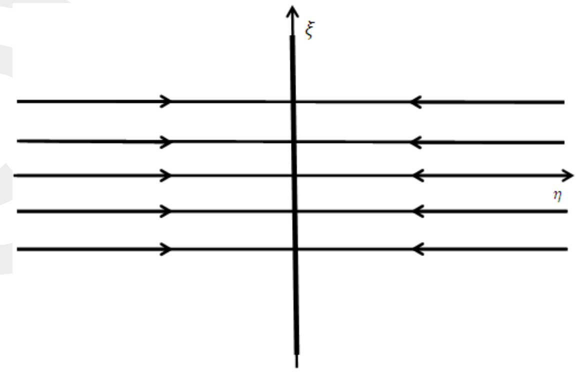


Рис. 2.14

б) Якщо ж $a+d>0$, то на сімействі прямих $\xi=c_1$ при $c_2>0$ рух направлено вліво, а при $c_2<0$ - вправо. Особлива пряма $\eta=0$ є **стійкою особливою прямою (**Рис. 2.14)**.**

Після проведення зворотного перетворення якісна картина не змінюється та траєкторії мають вигляд (Рис. 2.15, Рис. 2.16).

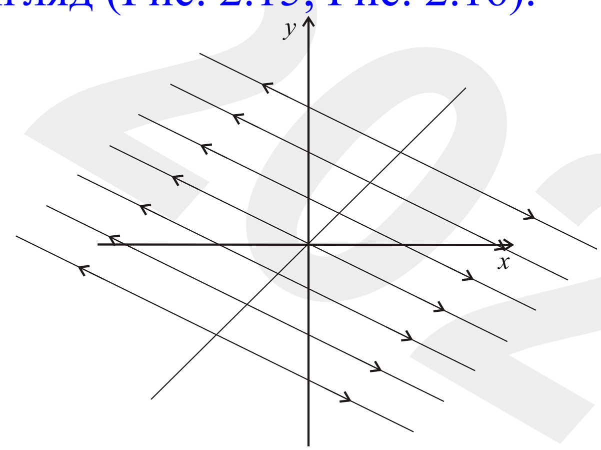


Рис. 2.15.

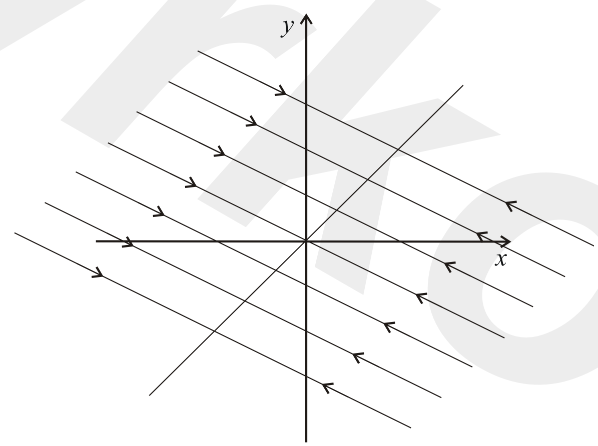


Рис. 2.16.

2) Нарешті, нехай $a+d=0$, тобто $\lambda_1=0$ і $\lambda_2=0$.
В цьому випадку (повністю нульова система не розглядається) перетворена система має вигляд

$$\dot{\xi}=\eta,$$
$$\dot{\eta}=0.$$

Її загальний розв'язок має вигляд

$$\xi=c_1+c_2 t,\ \eta=c_2.$$

При $c_2=0$ отримуємо $\xi=c_1$, $\eta=0$, тобто крива (пряма) $\eta=0$ є особливою. Оскільки при $c_2>0$ буде $\xi\to+\infty$, а при $c_2<0$ буде $\xi\to 0$, то рух справа буде направлено вгору, а зліва – вниз (Рис. 2.17).

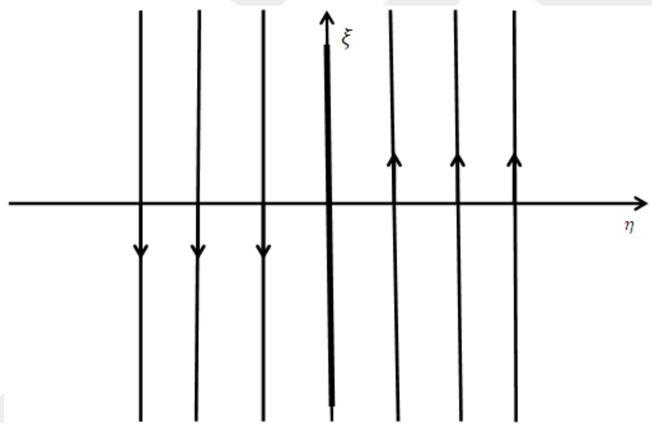


Рис. 2.17.

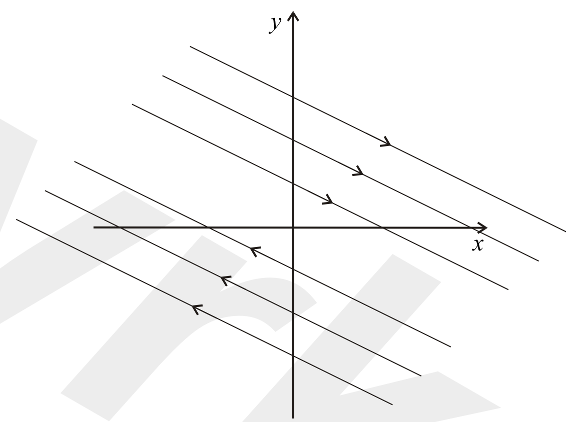


Рис. 2.18.

Після зворотного перетворення отримуємо фазовий портрет системи типу **«водорозділу»** (Рис. 2.18).

Позначимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \qquad \sigma = a + d.$$

Тоді в площині виміру параметрів (σ, Δ) залежності типів положення рівноваги мають наступний вигляд (Рис. 2.19)

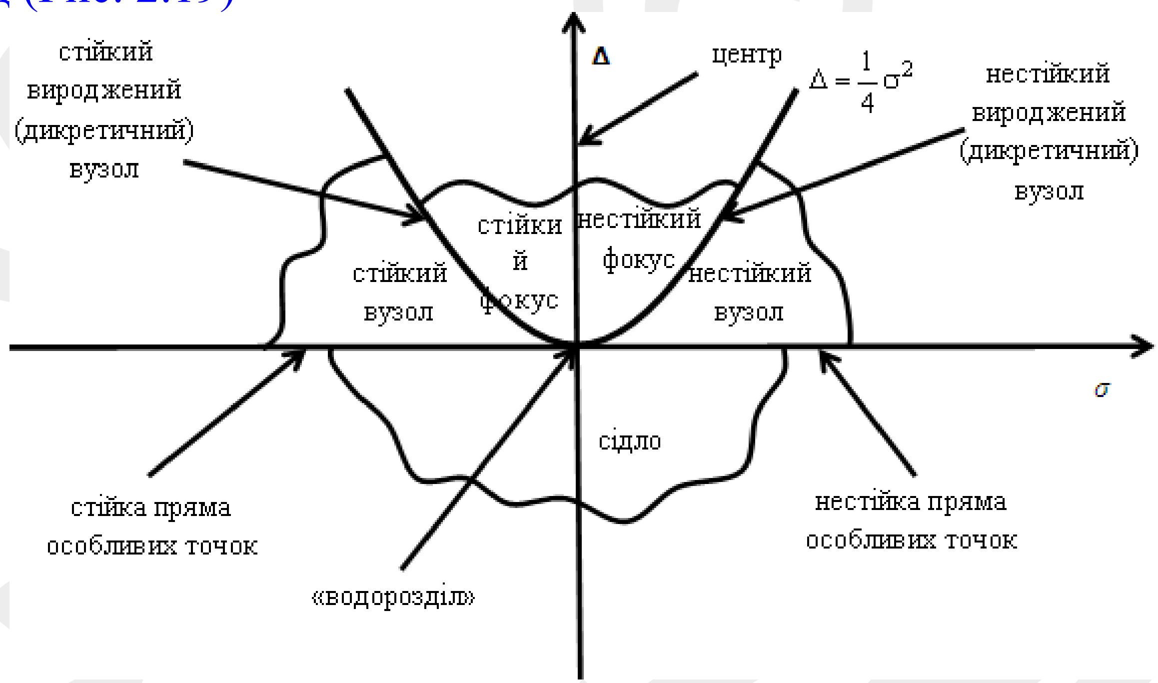


Рис. 2.19.

Оскільки характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$,

то $$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}\right].$$

І крива $\Delta = \frac{1}{4}\sigma^2$ є так званою **біфуркаційною**.

3.3. СТІЙКІСТЬ У ЗАСТОСУВАННІ ДО АНАЛІТИЧНОГО КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Нехай система (3.7) є лінійною:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t, \Delta x(t)). \tag{3.8}$$

Позначивши $\Delta x(t) = x(t)$, $\Delta u(t) = u(t)$, перепишемо систему (3.8) у вигляді:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t, x(t)). \tag{3.9}$$

Задачу аналітичного конструювання регулятора для лінійної системи (3.9) сформулюємо таким чином:

знайти матрицю $C(t)$ розмірності $m \times n$ таку, щоб при керуванні $u(t, x(t)) = C(t)x(t)$ нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (3.9), тобто системи рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A(t) + B(t)C(t))x(t) \tag{3.10}$$

буде асимптотично стійким за Ляпуновим.

Розглянемо спочатку лінійні стаціонарні системи

$$\frac{dx}{dt} = (A + BC)x(t). \tag{3.11}$$

Скористаємось відомими результатами дослідження стійкості розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь.

Теорема 3.1. Для асимптотичної стійкості за Ляпуновим лінійної стаціонарної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{A}x(t) \tag{3.12}$$

необхідно й досить, щоб усі корені λ_j характеристичного рівняння

$$\det(\tilde{A} - \lambda E) = 0 \tag{3.13}$$

мали від'ємні дійсні частини:

$$\operatorname{Re}\lambda_j < 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3.14}$$

Тут і далі E – одинична матриця.

Застосуємо цю теорему до задачі аналітичного конструювання регулятора системи (3.11).

Запишемо для цієї системи характеристичне рівняння

$$\det(A + BC - \lambda E) = 0. \tag{3.15}$$

Корені даного рівняння будуть залежати від невідомих елементів матриці C, тобто $\lambda_j = \lambda_j(C)$.

Згідно з теоремою 3.1, невідомі елементи матриці C вибираємо з умови $\operatorname{Re}\lambda_j < 0, \quad j = \overline{1,n}$, що й забезпечить асимптотичну стійкість системи (3.11).

Теорема 3.2 (Критерій Рауса-Гурвиця). Нехай характеристичне рівняння (3.13) має вигляд:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{3.16}$$

Тоді для того, щоб усі корені характеристичного рівняння (3.16) мали від'ємні дійсні чистини: $\operatorname{Re}\lambda_j < 0, \quad j = \overline{1,n}$, необхідно й досить виконання умови додатності всіх головних мінорів матриці:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n+1} & a_n \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

де $a_j = 0$ при $j > n$, $a_0 \neq 0$.

Тобто має виконуватись система нерівностей:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} > 0, \quad \text{тощо.} \tag{3.18}$$

Якщо застосувати критерій Рауса-Гурвиця до задачі аналітичного конструювання регулятор системи (3.11), то отримаємо головні мінори, які будуть залежати від невідомих елементів матриці C.

В результаті маємо систему нерівностей

$$\Delta_j(C) > 0, \; j = \overline{1,n}. \tag{3.19}$$

Матриця C, що знаходиться з цієї системи нерівностей, згідно з теоремою 3.2 забезпечує від'ємність дійсних частин коренів характеристичного рівняння, тобто виконання умови (3.14). Тоді згідно з критерієм асимптотичної стійкості (теорема 3.1) лінійна стаціонарна система (3.11) буде асимптотично стійкою за Ляпуновим.

МОДАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ

Розглянемо систему зі скалярним керуванням

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + bu(t),\ A, b - const. \tag{3.20}$$

Тут A - $n \times n$ матриця, b – n-вектор-стовпчик, u – скаляр.

Теорема 3.3. Якщо система (3.20) цілком керована, тобто виконується умова

$$\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) \neq 0 \tag{3.21}$$

то існує функція керування

$$u(t) = c^T x(t), \qquad \text{де} \quad c = (c_1, \ldots, c_n)^T \tag{3.22}$$

при якій система

$$\frac{dx}{dt} = (A + bc^T)x(t) \tag{3.23}$$

має наперед довільно задані корені $\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n$ характеристичного рівняння

$$\det(A + bc^T - \lambda E) = 0. \tag{3.24}$$

Доведення цієї теореми побудовано так, що одночасно вказано алгоритм знаходження величин $c_1, \ldots, c_n$ за відомими значеннями коренів $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n$ характеристичного рівняння (3.24).

У процесі доведення отримано явний вигляд вектора c:

$$c = (S_n^{-1})^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ p_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \ldots & 1 \end{bmatrix}^{-1} (p - a) \qquad (3.25)$$

Тут

$$S_n = (b, Ab, \ldots, A^{n-1}b),$$

$$\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = -S_n^{-1} A^n b,$$

a – n-вектор стовбчик,

що знаходиться через відомі значення коренів $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n$ характеристичного рівняння (3.24), фактично це значення коефіцієнтів відповідного характеристичного поліному.

Алгоритм розв'язку задачі модального керування.

0-й крок. Обчислити матрицю керовансті $S_n = (b, Ab, \ldots, A^{n-1}b)$, та переконатися у цілком керованості досліджуваної системи.

1-й крок. Обчислити матрицю обернену до матриці керовності: $(S_n)^{-1}$

2-й крок. Обчислити вектор $A^n b$

3-й крок. Обчислити вектор $\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = -S^{-1}A^n b$

4-й крок. Визначити характеристичний поліном за заданими коренями

$$(\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2)\ldots(\lambda - \bar{\lambda}_n) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

та скомпонувати вектор коефіцієнтів характеристичного полінома $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

5-й крок. Обчислити за формулою (3.25) вектор $\boldsymbol{c}$:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = ({S_n}^{-1})^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right)$$

6-й крок. Записати шукане керування

$$u(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t)$$

3.3.1. МОДАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ

Розглянемо систему зі скалярним керуванням

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + bu(t), \; A, b - const. \tag{3.20}$$

Тут A - $n \times n$ матриця, b – n-вектор-стовпчик, u – скаляр.

Теорема 3.3. Якщо система (3.20) цілком керована, тобто виконується умова

$$\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) \neq 0 \tag{3.21}$$

то існує функція керування

$$u(t) = c^T x(t), \qquad \text{де} \quad c = (c_1, \ldots, c_n)^T \tag{3.22}$$

при якій система

$$\frac{dx}{dt} = (A + bc^T)x(t) \tag{3.23}$$

має наперед довільно задані корені $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n$ характеристичного рівняння

$$\det(A + bc^T - \lambda E) = 0. \tag{3.24}$$

Доведення цієї теореми побудовано так, що одночасно вказано алгоритм знаходження величин $c_1,\dots,c_n$ за відомими значеннями коренів $\bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_n$ характеристичного рівняння (3.24).

У процесі доведення отримано явний вигляд вектора c:

$$c=(S_n^{-1})^T\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ p_1 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & 1\end{bmatrix}^{-1}(p-a) \tag{3.25}$$

Тут

$$S_n=(b, Ab,\dots, A^{n-1}b),$$

$$\begin{pmatrix}p_n\\ p_{n-1}\\ \vdots\\ p_1\end{pmatrix}=-S_n^{-1}A^n b,$$

a – n-вектор стовбчик,

що знаходиться через відомі значення коренів $\bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_n$ характеристичного рівняння (3.24), фактично це значення коефіцієнтів відповідного характеристичного поліному.

Алгоритм розв'язку задачі модального керування.

0-й крок. Обчислити матрицю керовансті $S_n = (b, Ab, \ldots, A^{n-1}b)$, та переконатися у цілком керованості досліджуваної системи.

1-й крок. Обчислити матрицю обернену до матриці керовності: $(S_n)^{-1}$

2-й крок. Обчислити вектор $A^n b$

3-й крок. Обчислити вектор $\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = -S^{-1}A^n b$

4-й крок. Визначити характеристичний поліном за заданими коренями

$$(\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2)\ldots(\lambda - \bar{\lambda}_n) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

та скомпонувати вектор коефіцієнтів характеристичного полінома $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

5-й крок. Обчислити за формулою (3.25) вектор $\boldsymbol{c}$:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (S_n{}^{-1})^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right)$$

6-й крок. Записати шукане керування

$$u(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t)$$

3.4. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ЛЯПУНОВА ДО ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ПРОГРАМНИХ РУХІВ

Розглянемо систему керування:

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(t, x(t), u(t, x(t))) \tag{3.26}$$

яка відповідає системі (3.7) при $\Delta x(t) = x(t)$, $\Delta u(t) = u(t)$.

Як відомо з теорії стійкості, найбільш загальним методом дослідження систем на стійкість є так званий ***метод функцій Ляпунова (або прямий метод, або другий метод Ляпунова)***.

Цей метод не вимагає знання загального розв'язку системи диференціальних рівнянь (3.26) і дозволяє зробити висновок про характер стійкості нульового розв'язку системи, використовуючи функції Ляпунова, що мають бути спеціально побудовані. За характером поведінки функцій Ляпунова згідно із системою (3.26) і робиться висновок про стійкість або нестійкість нульового розв'язку.

Основна ідея другого методу А.М.Ляпунова полягає в тому, що стійкість нульового розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи визначається з поведінки наперед визначеної функції Ляпунова.

Фізична інтерпретація

Коливання маятника, чи ***рух кульки*** можна описати за допомогою систем диференціальних рівнянь.

Ці системи мають ***два стани рівноваги*** – верхній та нижній.

Верхній стан рівноваги – нестійкий,
нижній – стійкий.

Якщо за характеристичну функцію брати повну енергію, то стійкість буде там, де енергія мінімальна, причому, при переході до стійкого стану рівноваги енергія зменшується.

Таким чином, дослідження стійкості фізичної системи можна проводити, використовуючи функцію повної енергії (енергетичної функції).

Наведемо означення та формулювання основних теорем другого методу Ляпунова.

Нехай для системи (3.26) існує така сукупність керувань $u(t, x(t))$, при яких у деякій області

$$\|x\| \le H \tag{3.27}$$

виконуються умови існування розв'язків рівнянь (3.26). Тут H – деяке задане число, $H > 0$.

Нехай функція $X(t, x(t), u(t, x(t)))$ – аналітична (неперервна й диференційована) в області (3.27) і задовольняє умову $X(t, 0, u(t, 0)) = 0$.

Розглянемо стаціонарну систему, тобто частинний випадок системи (3.26), коли права частина рівнянь явно не залежить від часу:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, u(x)) \tag{3.28}$$

Введемо до розгляду неперервну функцію $v(x)$, яка задовольняє умови:

а) $v(0) = 0$;

б) $v(x)$ – однозначна в області (3.27);

в) $\dfrac{\partial v(x)}{\partial x_j}$, $j = \overline{1, n}$ - неперервні в області (3.27).

Визначення 3.2. Функція $v(x)$ називається додатно-визначеною, якщо для деякого заданого числа $H > 0$ в області $\|x\| \le H$ виконується умова: $v(x) > 0$, при $\|x\| \ne 0$.

Визначення 3.3. Функція $v(x)$ називається додатно-сталою, якщо для деякого заданого числа $H > 0$ в області $\|x\| \le H$ виконується умова $v(x) \ge 0$.

Аналогічно вводяться поняття від’ємно-визначеної та від’ємно-сталої функцій.

Визначення 3.4. Функція $v(x)$ називається знакозмінною, якщо в області $\|x\| \leq H$ для як завгодно малого заданого числа $H > 0$ вона приймає як додатні, так і від’ємні значення.

Визначення 3.5 ***Повною похідною функції*** $v(x,t)$ ***в силу системи*** $x'(t) \ =F(x,t)$ називається функція

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + (grad(v(x,t)), F(x,t)) =$$

$$= \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=}^{n} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t))$$

В основі другого методу Ляпунова лежать дві теореми про стійкість та теорема Четаєва про нестійкість.

Наступні дві теореми є фактично безпосередніми наслідками **Першої та Другої теорем Ляпунова** на випадок розгляду систем керування типу (3.26).

Теорема 3.4. Якщо для системи керування (3.28) можна визначити таку додатно-визначену функцію $v(x)$, щоб її повна похідна по t згідно з цією системою

$$\frac{dv}{dt} = grad^T v(x)\frac{dx}{dt} = grad^T v(x) X(x, u(x)) = w(x) \tag{3.30}$$

була від'ємно-сталою функцією $w(x) \le 0$,

то програмний рух $x(t) \equiv 0$ системи (3.28) буде стійкий за Ляпуновим.

Теорема 3.5. Якщо для системи (3.28) можна визначити таку додатно-визначену функцію $v(x)$, щоб її повна похідна по t згідно з цією системою

$$\frac{dv}{dt} = grad^T v(x)\frac{dx}{dt} = grad^T v(x) X(x, u(x)) = w(x)$$

була від'ємно-визначеною функцією $w(x) < 0$,

то програмний рух $x(t) \equiv 0$ системи (3.28) буде асимптотично стійкий за Ляпуновим.

Функції $v(x)$, які задовольняють Теоремам 3.4 та 3.5 називають **функціями Ляпунова**.

Геометрична інтерпретація теорем Ляпунова

Метод функцій Ляпунова допускає просту геометричну інтерпретацію:

1. Існування додатно-визначеної функції Ляпунова означає існування всюди щільної системи поверхонь рівня $v(x) = \alpha$, які не розширюються та охоплюють початок координат.

2. Умова $\frac{dv}{dt} = w(x) < 0$, $\left(\frac{dv}{dt} = w(x) \leq 0\right)$ означає, що векторне поле системи спрямоване всередину областей, обмежених поверхнями рівня (або дотикається до них).

Перша терема Ляпунова, про стійкість представлена на рис.3.1.
Друга теорема Ляпунова, про асимптотичну стійкість представлена на рис.3.2.

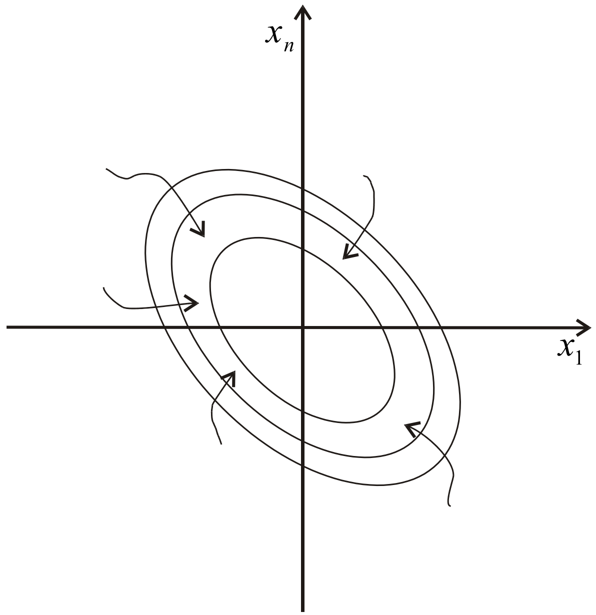


Рис.3.1. Геометрична інтерпретація першої теореми Ляпунова.

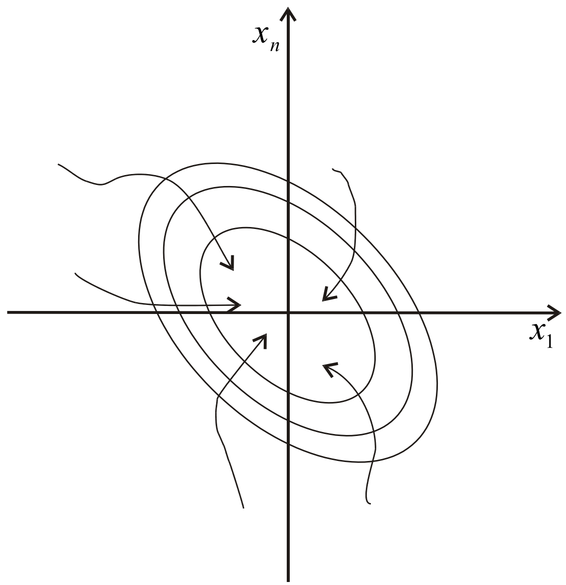


Рис.3.2. Геометрична інтерпретація другої теореми Ляпунова.

Методи побудови функції Ляпунова

В розглянутих вище теоремах використовується поняття додатної визначеності функції $v(x)$, яка найчастіше будується у вигляді квадратичної форми $v(x) = x^T Dx$ з деякою додатно-визначеною матрицею D.

Для перевірки знако-визначеності матриці D використовують критерій Сильвестра.

Теорема 3.6 ***(критерій Сильвестра)*** Для того щоб квадратична форма $v(x) = x^T Dx$ була додатно-визначеною необхідно і достатньо, щоб головні діагональні мінори матриці D були додатними

$$d_{11} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad , \det\begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} > 0. \tag{3.29}$$

До даного часу не існує (і мабуть, не буде існувати) конструктивних методів побудови функції Ляпунова!!!

«Побудова функції Ляпунова – це мистецтво»

Розглянемо деякі частинні випадки.

1. ***Нехай розглядається лінійна стаціонарна система на площині***

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t), \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

Функцію Ляпунова (ФЛ) шукаємо у вигляді квадратичної форми

$$v(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

де A, B, C – невідомі сталі.

Виберемо сталі таким чином, щоб для похідної в силу системи виконувалась умова

$$\frac{dv(x, y)}{dt} = -2(x^2 + y^2).$$

Після підстановки одержимо (в лівій частині повна похідна ФЛ в силу системи)

$(2Ax + 2By)x'(t) + (2Bx + 2Cy)y'(t) = -2(x^2 + y^2)$ або $(2Ax + 2By)(ax + by) + (2Bx + 2Cy)(cx + dy) = -2(x^2 + y^2)$

Розкривши дужки, запишемо

$$Aax^2 + Baxy + Abxy + Bby^2 + Bcx^2 + Ccxy + Bdxy + Cdy^2 = -x^2 - y^2.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових ступенях, одержимо:

$$
\begin{array}{c|l}
x^2 & \multirow{3}{*}{$\begin{cases} aA + cB = 1 \\ bA + (a+d)B + cC = 0 \\ bB + dC = -1 \end{cases}$} \\
xy & \\
y^2 &
\end{array}
$$

Звідси, розв'язуючи систему за правилом Крамера, маємо

$$
A = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -1 & c & 0 \\ 0 & a+d & c \\ -1 & b & d \end{vmatrix}, \quad B = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}, \quad C = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a & c & -1 \\ b & a+d & 0 \\ 0 & b & -1 \end{vmatrix},.
$$

де

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & a+d & c \\ 0 & b & d \end{vmatrix}
$$

Використовуючи критерій Сильвестра, запишемо умови додатної визначеності функції $v(x, y)$. Вони мають вигляд

$$
A > 0 \quad \text{та} \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0.
$$

Тобто, при виборі параметрів, що задовольняють ці нерівності , ФЛ існує, а отже система стійка!

2. ***Розглянемо рівняння коливання маятника***

$$x''(t) + g(x)x'(t) + f(x) = 0,$$

де $f(x)$ - відновлююча сила (***керуючий вплив***), $g(x)$ – сила тертя.

Зробимо заміну $x'(t) = y(t)$

і перепишемо рівняння другого порядку у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -f(x) - g(x)y(t) \end{cases}$$

Функцію Ляпунова беремо у вигляді повної енергії (суми кінетичної і потенціальної енергій)

$$v(x,y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(\tau)d\tau.$$

Тоді для її похідної буде виконуватись

$$\frac{dv(x,y)}{dt} = f(x)y(t) + y(t)[-f(x) - g(x)y(t)] = -y^2(t)g(x).$$

Звідси умови стійкості стану рівноваги будуть мати вигляд $f(x) > 0,\ g(x) \geq 0.$

3. ***Розглянемо лінійну стаціонарну систему загального вигляду***

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(t) \in \Re^n$$

Функцію Ляпунова будуємо у вигляді квадратичної форми

$$v(x) = x^T Hx,$$

де H – деяка додатно визначена матриця. Повна похідна функції $v(x)$ в силу системи має вигляд

$$\frac{dv(x)}{dt} = x'^T Hx + x^T Hx' = (Ax)^T Hx + x^T H(Ax) = x^T (A^T H + HA)x.$$

Будемо вимагати, щоб похідна дорівнювала від'ємно визначеній квадратичній формі

$$W(x) = -x^T Cx,$$

де C – деяка додатно визначена матриця. Тоді при заданій матриці C пошук додатно визначеної матриці H зводиться до розв'язку матричного рівняння Ляпунова

$$A^T H + HA = -C.$$

Доведено, що для існування квадратичної функції Ляпунова для лінійних стаціонарних систем необхідною та достатньою умовою є асимптотична стійкість матриці A, тобто матриця A повинна мати власні числа з від'ємною дійсною частиною. Причому матриця H знаходиться з матричного рівняння Ляпунова при довільній додатно визначеній матриці C.

Розглянемо ***метод дослідження на стійкість за першим (лінійним) наближенням*** системи керування (3.28)

$$\frac{dx}{dt} = X(x, u(x)).$$

Цей метод називають ще ***першим методом Ляпунова***.

При його застосуванні з правої частини рівнянь нелінійної системи виділяється лінійна по x частина. Потім окремо досліджується на стійкість система, у рівнянні якої справа стоїть тільки виділена лінійна функція. Це система першого або лінійного наближення. Тоді характер стійкості розв'язку початкової нелінійної системи буде таким самим, як і розв'язку системи першого наближення. Формулювання основних теорем цього методу наведені нижче.

Зобразимо систему (3.28) у вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu(x) + \tilde{X}(x, u(x)), \tag{3.31}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\Big|_{x=0} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n}\Big|_{x=0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1}\Big|_{x=0} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\Big|_{x=0} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial u_1}\Big|_{x=0} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial u_m}\Big|_{x=0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial u_1}\Big|_{x=0} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial u_m}\Big|_{x=0} \end{pmatrix},$$

функція $\tilde{X}(x, u(x))$ при $x \to 0$ має порядок малості не нижче другого.

Права частина системи (3.28) – n-мірна вектор-функція:

$$X(x, u(x)) = (X_1(x, u(x)), \ldots, X_n(x, u(x)))^T.$$

Нехай керування задається у вигляді $u(x) = Cx(t)$.

Тоді система першого наближення має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = (A + BC)x(t). \tag{3.32}$$

Теорема 3.7. Якщо програмний рух $x(t) \equiv 0$ для системи першого наближення $\dfrac{dx}{dt} = (A + BC)x$ є асимптотично стійким за Ляпуновим, то такий рух асимптотично стійкий також і для нелінійної системи (3.31) незалежно від вигляду нелінійних функцій $\tilde{X}(x, u(x))$.

Теорема 3.8. Якщо серед коренів характеристичного рівняння системи першого наближення (3.32) $\det(A + BC - \lambda E) = 0$ знайдеться хоча б один із додатною дійсною частиною, то програмний рух $x(t) \equiv 0$ нелінійної системи (3.31) буде нестійкий за Ляпуновим незалежно від вигляду нелінійних функцій $\tilde{X}(x, u(x))$.

Теорема 3.9. Якщо характеристичне рівняння $\det(A + BC - \lambda E) = 0$ системи першого наближення (3.32) не має коренів із додатними дійсними частинами то, залежно від характеру нелінійності функцій $\tilde{X}(x, u(x))$, програмний рух $x(t) \equiv 0$ нелінійної системи (3.31) може бути як стійким, так і нестійким за Ляпуновим (так званий ***критичний випадок***).

Визначення 3.6. Програмний рух системи $x(t) \equiv 0$ системи

$$\frac{dx}{dt} = X(x, u(x)) + R(t, x) \tag{3.33}$$

називається ***стійким за умови постійно діючих збурень***, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0, \exists \delta_2 > 0$$

такі, що, як тільки

$$\|x(t_0)\| \le \delta_1, \quad \|R(t_0, x)\| \le \delta_2,$$

то при $t \ge t_0$ для траєкторії системи виконується нерівність $\|x(t)\| \le \varepsilon$, $t \ge t_0$.

Теорема 3.10. Якщо для системи $\frac{dx}{dt} = X(x, u(x))$ можна знайти таку додатно-визначену функцію $v(x)$, щоб її повна похідна по t згідно з цією системою $\frac{dv}{dt} = grad^T v(x) X(x, u(x)) = w(x)$ була від'ємно-сталою функцією $w(x) \leq 0$ (тобто виконувалися умови теореми 3.4), то програмний рух $x(t) \equiv 0$ системи (3.33) буде стійким за умови постійно діючих збурень.

Приклади дослідження стійкості нульового розв'язку нелінійної системи за лінійним наближенням

Розглянемо нелінійну систему диференційних рівнянь на площині

$$\begin{cases} x'(t) = P(x(t), y(t)), \\ y'(t) = Q(x(t), y(t)) \end{cases}$$

1. Розв’яжемо систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} P(x(t), y(t)) = 0, \\ Q(x(t), y(t)) = 0 \end{cases}$$

Розв’язки $(x_i, y_i), i \in I$ цієї системи будуть ***особливими точками***.

2. Візьмемо точку (x_k, y_k). Розкладемо функції $P(x(t), y(t))$, $Q(x(t), y(t))$ в ряд Тейлора в околі точки (x_k, y_k) з точністю до лінійного наближення і запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} x'(t) = P(x_k, y_k) + \dfrac{\partial P(x, y)}{\partial x}\Big|_{(x_k, y_k)} \cdot (x - x_k) + \dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y}\Big|_{(x_k, y_k)} \cdot (y - y_k) + R_1(x, y), \\ y'(t) = Q(x_k, y_k) + \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\Big|_{(x_k, y_k)} \cdot (x - x_k) + \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial y}\Big|_{(x_k, y_k)} \cdot (y - y_k) + R_2(x, y) \end{cases}$$

Оскільки (x_k, y_k) – особлива точка, то $P(x_k, y_k) = 0$, $Q(x_k, y_k) = 0$.

Позначивши

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x_k, y_k)} = a_k, \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x_k, y_k)} = b_k,$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x_k, y_k)} = c_k, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x_k, y_k)} = d_k,$$

одержимо систему

$$\begin{cases} x'(t) = a_k(x(t) - x_k) + b_k(y(t) - y_k) + R_1(x,y), \\ y'(t) = c_k(x(t) - x_k) + d_k(y(t) - y_k) + R_2(x,y) \end{cases}$$

3. Відкинемо нелінійні члени $R_1(x,y)$, $R_2(x,y)$, та одержимо систему лінійного наближення

$$\begin{cases} x'(t) = a_k(x(t) - x_k) + b_k(y(t) - y_k), \\ y'(t) = c_k(x(t) - x_k) + d_k(y(t) - y_k) \end{cases}$$

Приклад 3.1 За допомогою методу лінійного наближення дослідити стійкість нульового розв‘язку $x(t)\equiv 0$ нелінійної системи

$$\begin{cases} x'(t)=e^{x+2y}-\cos 3x, \\ y'(t)=\sqrt{4+8x}-2e^{y} \end{cases}$$

Розкладемо праві частини в околі особливої точки в ряд з точністю до лінійного наближення

$$\begin{cases} x'(t)=(e^{x+2y}-\cos 3x)|_{(0,0)}+e^{x+2y}|_{(0,0)}\cdot x+3\sin 3x|_{(0,0)}\cdot x+2e^{x+2y}|_{(0,0)}\cdot y+R_1(x,y), \\ y'(t)=(\sqrt{4+8x}-2e^{y})|_{(0,0)}+\dfrac{8}{2\sqrt{4+8x}}|_{(0,0)}\cdot x-2e^{y}|_{(0,0)}\cdot y+R_2(x,y) \end{cases}$$

Відкинувши члени порядків вище першого, одержуємо

$$\begin{cases} x'(t)=x(t)+2y(t), \\ y'(t)=2x(t)-2y(t) \end{cases}.$$

Характеристичне рівняння лінеаризованої системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-6=0,\ \lambda_1=-3<0,\quad \lambda_2=2>0.$$

Звідси нульовий розв‘язок вихідної нелінійної системи нестійкий.

<u>Приклад 3.2</u> За допомогою методу лінійного наближення дослідити, при яких значеннях параметрів буде стійким нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - 2y(t) + x^2(t), \\ y'(t) = x(t) + by(t) + x(t)y(t) \end{cases}$$

Лінійне наближення має вигляд

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - 2y(t), \\ y'(t) = x(t) + by(t) \end{cases}$$

Характеристичне рівняння матриці лінійного наближення має вигляд

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & -2 \\ 1 & b-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+b)\lambda + (ab+2) = 0.$$

Необхідна і достатня умова асимптотичної стійкості має вигляд

$$-(a+b) > 0, \ \ ab+2 > 0.$$

В площині параметрів отримаємо область асимптотичної стійкості рис.3.3.

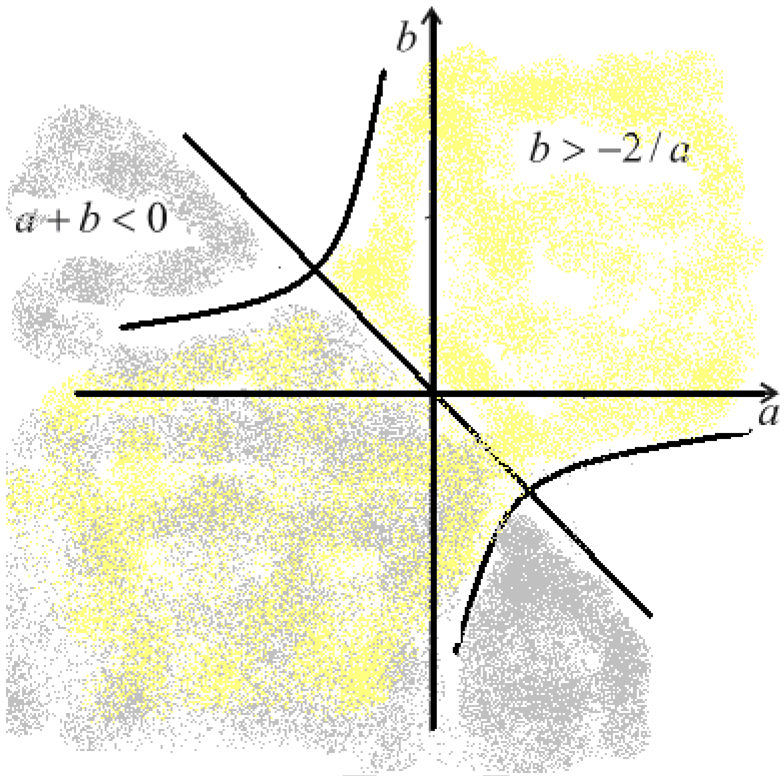


Рис.3.3.

4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ ЯК ЗАДАЧ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Варіаційне числення, як відомо, вивчає методи, що дозволяють знаходити мінімальні та максимальні значення функціоналів.

Даний розділ спрямовано на дослідження можливостей застосування відомих методів варіаційного числення до задач оптимізації систем керування.

Для того, щоб показати, як і в яких випадках задачі теорії керування можна звести до задач варіаційного числення, запишемо окремо постановки задач теорії керування та варіаційного числення.

<table>
<tr><th>Задача теорії керування</th><th>Задача Лагранжа варіаційного числення</th></tr>
<tr><td>

Для системи

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x,u,t),\ i=\overline{1,n}, \qquad (4.1)$$

де

$x(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))^T$ - вектор стану,

$u(t)=(u_1(t),\ldots,u_r(t))^T$ – вектор керувань,

з початковим станом

$$x_i(t_0) = x_{0i}, \qquad i=\overline{1,n}, \qquad (4.2)$$

на фіксованому проміжку часу $[t_0, t_1]$

треба знайти такий вектор керувань $u(t)$

і відповідну (4.1), (4.2) траєкторію $x(t)$,

які б забезпечували мінімум функціонала

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt. \qquad (4.3)$$

</td><td>

Потрібно знайти таку вектор-функцію

$x(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))^T$

з початковою умовою (4.2), щоб функціонал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G^1(x,\frac{dx}{dt},t)dt \qquad (4.4)$$

приймав своє мінімальне значення.

</td></tr>
</table>

Для того, щоб показати, як задачу теорії керування можна звести до задачі варіаційного числення, будемо вимагати, щоб керування в системі (4.1) знаходились у вигляді

$$\boldsymbol{u_i = \varphi_i(x, \frac{dx}{dt}, t)}, \qquad \boldsymbol{i = \overline{1, n}}. \tag{4.5}$$

Підставивши (4.5) в (4.3), отримаємо функціонал

$$\boldsymbol{Q = \int_{t_0}^{t_1} G^1(x, \frac{dx}{dt}, t) dt},$$

який є функціоналом (4.4) **задачі Лагранжа**.

Таким чином, за умов (4.5) задача оптимізації (4.1) – (4.3) системи керування полягає у знаходженні оптимальної траєкторії, на якій досягається мінімум функціонала (4.4), що повністю збігається із задачею Лагранжа.

Отже, коли в системах керування вектор керувань можна зобразити у вигляді (4.5), то задачу оптимального керування можна звести до задачі варіаційного числення.

Наведемо постановки основних задач варіаційного числення в термінах теорії керування.

Задача Майера.

Нехай задані рівняння руху системи у вигляді (4.1)

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x,u,t),\ i = \overline{1,n},$$

початковий і кінцевий стани

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \tag{4.6}$$

Функціонал

$$Q = g(x,u,t)\big|_{t=t_1}, \tag{4.7}$$

де $g(x,u,t)$ – функція, визначена на множині кінцевих станів системи.

Необхідно знайти таку вектор-функцію керувань $u(t)$ і відповідну до (4.1), (4.6) траєкторію $x(t)$, щоб функціонал (4.7) набував свого мінімального значення.

Задача Больця.

Нехай задані рівняння руху системи у вигляді (4.1)

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u, t),\ i = \overline{1, n},$$

початковий і кінцевий стани (4.6),

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,$$

функціонал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u, t)dt + g(x, u, t)\big|_{t=t_1}. \tag{4.8}$$

Задача Больця полягає у знаходженні такої вектор-функції керувань $u(t)$, і відповідну траєкторію $x(t)$, щоб задовольнялись умови (4.1), (4.6) і функціонал (4.8) набував свого мінімального значення.

Відмітимо, що остання задача є найбільш загальною, але шляхом введення додаткових змінних завжди можна одну з наведених задач звести до іншої й навпаки.

4.2. НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІОНАЛІВ

Для дослідження необхідних і достатніх умов екстремуму функціоналів наведемо деякі визначення.

Визначення 4.1. Змінна величина Q називається функціоналом, що залежить від функції $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ і позначається $Q[x(t)]$, якщо кожній функції $x(t)$ з деякого класу відповідає число $Q[x(t)]$.

Визначення 4.2. Функція

$$\delta x(t) = x(t) - x^O(t) \tag{4.9}$$

називається варіацією аргументу $x(t)$.

Визначення 4.3. Якщо приріст $\Delta Q[x(t)] = Q[x(t)] - Q[x^O(t)]$ функціонала $Q[x(t)]$ можна записати у вигляді

$$\Delta Q[x(t)] = Q[x(t)] - Q[x^O(t)] = Q[x^O(t) + \delta x(t)] - Q[x^O(t)] =$$

$$= L[x(t), \delta x(t)] + \beta[x(t), \delta x(t)] \times \max_{t \in [t_0, t_1]} \|\delta x(t)\|, \tag{4.10}$$

то $L[x(t), \delta x(t)]$ – лінійна відносно варіації аргументу $\delta x(t)$ частина приросту функціонала $Q[x(t)]$ – називається варіацією (першою варіацією) функціонала й позначається

$$\delta Q[x(t)] = L[x(t), \delta x(t)]. \tag{4.11}$$

Тут $\beta[x(t), \delta x(t)] \to 0$ при $\max_{t \in [t_0, t_1]} \|\delta x(t)\| \to 0$.

Теорема 4.1. Якщо функціонал $Q[x(t)]$ має варіацію (4.11) і досягає екстремуму (мінімуму чи максимуму) на $x^0(t)$, де $x^0(t)$ – внутрішня точка області визначення функціонала,

то
$$\delta Q[x^0(t)] = 0.$$

Наведемо необхідні й достатні умови екстремуму функціонала залежно від постановок задач варіаційного числення.

Задача із закріпленими (нерухомими) кінцями траєкторії.

Теорема 4.2. Необхідними умовами екстремуму функціонала

$$Q[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} G(x, \frac{dx}{dt}, t)dt \qquad (4.12)$$

для траєкторії $x(t) \in C^1_{[t_0,t_1]}$ із закріпленими кінцями $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ за умови, що функція $G = G(x, \frac{dx}{dt}, t)$ – двічі диференційована за всіма своїми аргументами, є рівняння **Ейлера-Лагранжа**:

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial x_i'} = 0, \ \ i = \overline{1,n}. \qquad (G_x' - \frac{d}{dt}G_{x'}' = 0) \qquad (4.13)$$

тобто, якщо функціонал (4.12) досягає екстремуму на кривій $x^0(t)$, то ця крива є розв'язком рівняння (4.13).

Зауваження 4.1. Рівняння (4.13) завжди є диференціальними рівняннями другого порядку.

Для одномірного $x(t)$ рівняння (4.13) можна аналітично проінтегрувати в таких випадках:

– G не залежить явно від x': $G = G(x, t)$;

– G не залежить явно від t: $G = G(x, x')$;

– G не залежить явно від x: $G = G(x', t)$;

– G лінійна відносно x': $G = g_1(x, t) + x' \cdot g_2(x, t)$.

Розв’язок рівнянь (4.13) визначає цілу множину кривих, на яких функціонал (4.12) може досягати свого екстремуму, а може й не досягати.

Щоб визначити, чи досягається екстремум на окремих кривих і дослідити характер екстремуму, треба перевірити виконання достатніх умов екстремуму.

Умова Якобі в аналітичній формі.

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку відносно функції $w = w(t)$:

$$\left(G_{xx} - \frac{d}{dt}G_{xx'}\right)w - \frac{d}{dt}\left(G_{x'x'}w'\right) = 0.$$

Це рівняння називається **рівнянням Якобі**.

Якщо існує розв'язок рівняння $w(t)$ такий, що при $t = t_0$: $w(t_0) = 0$ і не дорівнює нулю в жодній іншій точці проміжку, тобто $w(t) \neq 0$, $t_0 < t \leq t_1$,
тодів існує **поле (екстремалей)**, що складається з кривих – розв'язків (4.13), яке включає досліджувану криву (екстремаль) $x(t)$.

Теорема 4.3. Нехай крива $x(t)$ – розв'язок рівняння (4.13), що задовольняє умову Якобі.

Тоді достатньою умовою досягнення функціоналом $Q[x(t)]$ вигляду (4.12) мінімуму на кривій $x(t)$ є **умова Вейєрштраса**:

$$E(x, x', t, v) \geq 0 \tag{4.14}$$

для довільних значень v, $t_0 \leq t \leq t_1$,

де $E(x, x', t, v) = G(x, v, t) - G(x, x', t) - (v - x')^T G_{x'}(x, x', t)$ – **функція Вейєрштраса**.

Зауваження 4.2. Умова Вейєрштраса має й необхідний характер у тому смислі, що, якщо в точках досліджуваної кривої $\boldsymbol{x(t)}$ – розв'язку рівняння (4.13), яка задовольняє умову Якобі, для деяких значень $\boldsymbol{v}$ функція $\boldsymbol{E(x, x', t, v)}$ має протилежні знаки, то екстремум не досягається.

Теорема 4.4. Якщо на кривій $\boldsymbol{x(t)}$ досягається мінімум функціонала (4.12) для задачі із закріпленими кінцями траєкторії, то виконується **умова Лежандра**:

$$\boldsymbol{G_{x'x'}(x, x', t) \geq 0} \tag{4.15}$$

для довільних значень $\boldsymbol{x', t_0 < t \leq t_1}$.

Теорема 4.5. Нехай досліджувана крива $\boldsymbol{x(t)}$ – розв'язок рівняння (4.13) для задачі із закріпленими кінцями траєкторії. Тоді умова Лежандра (4.15) у поєднанні з умовою Якобі є достатніми умовами досягнення мінімуму функціоналом (4.12) на кривій $\boldsymbol{x(t)}$.

Зауваження 4.3. Наведені вище достатні умови є достатніми умовами так званого **сильного мінімуму** функціонала (4.12) для задачі із закріпленими кінцями траєкторії.

Щоб отримати умови максимуму функціонала, треба в наведених вище умовах мінімуму (4.14), (4.15) взяти знаки нерівностей протилежними.

Розглянемо варіаційну задачу з рухомим кінцем траєкторії.

Нехай один кінець траєкторії закріплено в точці $x(t_0)=x_0$, а інший – на кривій $x(t)=\varphi(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, тобто $x(t_1)=\varphi(t_1)$.

Теорема 4.6. Необхідними умовами екстремуму функціонала (4.12) на множині неперервно-диференційованих функцій $x(t)$ таких, що один кінець траєкторії закріплено в точці $x(t_0)=x_0$, а інший – на кривій $x(t)=\varphi(t)$, тобто $x(t_1)=\varphi(t_1)$, є рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial x_i'}=0,\ i=\overline{1,n}$$

і умова трансверсальності:

$$G\Big|_{t=t_1}-\sum_{i=1}^{n}[x_i'(t_1)-\varphi_i'(t_1)]\frac{\partial G}{\partial x_i'}\Big|_{t=t_1}=0. \qquad (4.16)$$

Тут, як і раніше, $G(x,x',t)$ – двічі диференційована за всіма аргументами функція.

Умову (4.16) можна записати в компактнішій формі:

$$[G+(\phi'-x')^T G_{x'}]\Big|_{t=t_1}=0.$$

Дослідимо варіаційні задачі для функціоналів із вищими похідними:

$$Q=\int_{t_0}^{t_1} G(x(t),x'(t),x''(t),\ldots,x^{(n)}(t),t)dt. \tag{4.17}$$

Теорема 4.7. Необхідною умовою екстремуму функціонала (4.17) на множині $2n$ разів неперервно-диференційованих функцій $x(t)$, заданих разом із своїми похідними до $(n-1)$-го порядку включно в початковий і кінцевий моменти часу за умови, що функція G за всіма аргументами $n+2$ рази диференційована, є рівняння **Ейлера-Лагранжа–Пуасона**:

$$G_x-\frac{d}{dt}G_{x'}+\frac{d^2}{dt^2}G_{x''}-\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dt^n}G_{x^{(n)}}=0. \tag{4.18}$$

Відзначимо, що диференціальне рівняння (4.18) є рівнянням порядку $2n$.

Теорема 4.8. Якщо на кривій $x(t)$, на якій може досягатися екстремум функціонала (4.17), виконана умова

$$G_{x^{(n)}x^{(n)}}\geq 0\,(\leq 0) \tag{4.19}$$

і відрізок $[t_0,t_1]$ не містить точок, спряжених із точкою t_0, то на цій кривій досягається мінімум (максимум) функціонала (4.17).

4.3. ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА НА УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ ІЗ ЗАКРІПЛЕНИМИ КІНЦЯМИ ТРАЄКТОРІЙ

Розглянемо задачу мінімізації функціонала

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x, x', t)dt, \tag{4.20}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, у випадку, коли змінні $x_1, \ldots, x_n$ – залежні.

Вигляд залежності будемо визначати трьома типами співвідношень:

кінцеві: $$\varphi_j(x, t) = 0, \tag{4.21}$$

диференціальні: $$\phi_j(x, x', t) = 0, \tag{4.22}$$

інтегральні: $$\psi_j = \int_{t_0}^{t_1} \phi_j(x, x', t)dt, \quad j = 1,2,\ldots,m < n. \tag{4.23}$$

Задача мінімізації функціонала (4.20) з урахуванням однієї з умов (4.21) – (4.23) називається варіаційною задачею на умовний екстремум.

Задача мінімізації функціонала (4.20) із залежностями диференціального типу (4.22) називається загальною задачею Лагранжа. До неї зводяться всі інші задачі на умовний екстремум.

Розв’язок задачі (4.20), (4.22) збігається з розв’язком задачі на безумовний екстремум функціонала:

$$Q' = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{G}(x, x', t)dt, \quad \text{де} \quad \tilde{G} = G + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\varphi_j. \qquad (4.24)$$

Тут $\lambda_j(t), j = \overline{1, m}$ – деякі невизначені функції, які разом із функціями $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ є незалежними аргументами функціонала (4.24).

Рівняння Ейлера-Лагранжа для функціонала (4.24):

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x'} = 0$$

разом з обмеженнями (4.22) утворюють замкнену систему $n + m$ рівнянь із невідомими $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ і $\lambda_j(t), j = \overline{1, m}$.

Сталі інтегрування вказаної системи знаходяться із заданих умов $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

5.3. РІВНЯННЯ БЕЛМАНА ДЛЯ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Рівняння Белмана для неперервних систем в інтегральній формі

Розглянемо задачу оптимального керування з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторій. Потрібно знайти мінімум функціонала

$$Q = Q(u) = \int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt + \Phi(x(t_1)) \tag{5.12}$$

для системи

$$x'(t) = f(x,u,t) \tag{5.13}$$

з початковою умовою $x(t_0) = x_0$,

і з обмеженнями на керування

$$u = u(t) \in \Omega_t(U) \tag{5.14}$$

та на траєкторії

$$x = x(t) \in \Omega_t(X), \tag{5.15}$$

для всіх $t_0 \le t \le t_1$.

Вважаємо, що

моменти часу t_0, t_1 фіксовані,

функції $G(x,u,t)$, $\Phi(x(t))$, вектор-функції $f(x,u,t)$ – неперервні за змінними x,u і кусково-неперервні за t на проміжку $[t_0,t_1]$.

Крім того, для функції $f(x,u,t)$ виконуються умови Ліпшиця за змінною керування, тобто для довільних w,v з множини (5.14):

$$\left| f(x,w,t) - f(x,v,t) \right| \le \alpha \left| w - v \right|,$$

де $\alpha > 0$ – деяка стала величина.

Припускаємо, що $u(t)$ – кусково-неперервна функція змінної t на проміжку $[t_0,t_1]$.

Візьмемо для довільного фіксованого $t \in [t_0, t_1]$ деяку точку $x = x(t) \in \Omega_t(X)$.

Для цих t і $x(t)$, які візьмемо за t_0 та $x(t_0)$ відповідно, розглянемо задачу (5.12)-(5.15).

Розв'язок цієї задачі запишемо як $u^0(\tau, x)$, $x^0(\tau)$, $t_0 \le \tau \le t_1$.

Мінімум відповідного функціонала для даного розв'язку позначимо через $S(x,t)$.

$$S(x,t) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t\le\tau\le t_1 \\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \{\int_t^{t_1} G(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \Phi(x(t_1))\} =$$

Задача А

$$= \int_t^{t_1} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + \Phi(x^0(t_1)).$$

Візьмемо на інтервалі $[t,t_1]$ довільний момент часу $t+\Delta t$ і точку $x(t+\Delta t)\in\Omega_{t+\Delta t}(X)$.

Розглянемо задачу (5.12)-(5.15) для цих $t+\Delta t$, $x(t+\Delta t)$, які візьмемо за t_0 та $x(t_0)$ відповідно.

Відзначимо, що ця задача відрізняється від попередньої лише початковими даними.

Мінімум відповідного функціонала позначимо через $S(x(t+\Delta t),t+\Delta t)$.

$$S(x(t+\Delta t),t+\Delta t)=$$

$$=\min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U)\\ t+\Delta t\le\tau\le t_1\\ x(t+\Delta t)\in\Omega_{t+\Delta t}(X)}}\left\{\int_{t+\Delta t}^{t_1}G(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau+\Phi(x(t_1))\right\}=$$

<u>Задача В</u>

$$=\int_{t+\Delta t}^{t_1}G(\tilde{x}(\tau),\tilde{u}(\tau,x(t+\Delta t),\tau)d\tau+\Phi(\tilde{x}(t_1)),$$

де $\tilde{u}(\tau,x(t+\Delta t))$, $\tilde{x}(\tau)$ – розв’язок задачі (5.12)-(5.15) на проміжку $[t+\Delta t,t_1]$.

Виберемо за $x(t+\Delta t)$ той стан системи (5.13), в який вона потрапляє в момент $t+\Delta t$, рухаючись із точки $x(t)$ по оптимальній траєкторії $x^0(\tau)$, тобто за стан $x(t+\Delta t)$ візьмемо стан $x^0(t+\Delta t)$.

Тоді, згідно з принципом оптимальності, розв'язки наведених вище двох задач збігаються на проміжку $t+\Delta t \le \tau \le t \le t_1$.

Тому

$$S(x(t+\Delta t), t+\Delta t) = \int_{t+\Delta t}^{t_1} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + \Phi(x^0(t_1)).$$

Повернемося до значення функціонала $S(x,t)$.

Використовуючи властивість адитивності інтеграла можемо записати

$$S(x,t) = \int_{t}^{t+\Delta t} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau +$$

$$+ \int_{t+\Delta t}^{t_1} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + \Phi(x^0(t_1)).$$

Звідси

$$S(x,t) = \int_{t}^{t+\Delta t} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + S(x^0(t+\Delta t), t+\Delta t),$$

де траєкторія $x^0(t+\Delta t)$ системи (5.13) отримана під дією керування $u^0(\tau)$.

Отже,

$$S(x,t)=\int_{t}^{t+\Delta t} G(x^0(\tau),u^0(\tau,x),\tau)d\tau + S(x^0(t+\Delta t,u^0(\tau)),t+\Delta t).$$

Ця рівність виконується лише для оптимального керування $u^0(\tau)$. Якщо брати інші керування з множини допустимих керувань згідно з (5.14), то права частина останньої рівності може тільки збільшитись.

Отже, отримаємо **рівняння Белмана в інтегральній формі**

$$S(x,t)=$$

*

$$=\min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U)\\ t\le\tau\le t+\Delta t\le t_1\\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}}\left\{\int_{t}^{t+\Delta t} G(x(\tau),u(\tau,x),\tau)d\tau + S(x(t+\Delta t,u(\tau,x)),t+\Delta t)\right\}.$$

Позначимо це рівняння через *.

Рівняння Белмана в диференціальній формі для неперервних систем

Для задачі (5.12)-(5.15),

запишемо рівняння Белмана в диференціальній формі.

Для цього скористаємося отриманим вище рівнянням Белмана в інтегральній формі (*).

Додатково до наведених у цій задачі умов будемо вважати:

керування $u(t)$ неперервні за t,

для задачі (5.12)-(5.15) функція $S(x,t)$ має неперервні частинні похідні:

за фазовими координатами $$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} \equiv grad_x^T S(x,t) \equiv \left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_n}\right),$$

та часом $$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t};$$

За цих припущень, розклавши рівняння Белмана в інтегральній формі **(*)** в ряд Тейлора й знехтувавши членами другого порядку й вище, можна записати рівняння у вигляді:

для задачі з фіксованим часом і вільним правим кінцем

$$S(x,t) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U)\\ t_0\le t\le\tau\le t+\Delta t\le t_1\\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \{G(x(\tau),u(\tau),\tau)\Delta t + S(x,t) +$$

$$+\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\Delta t + grad_x^T S(x,t)(x(t+\Delta t,u(\tau)) - x) + o(\Delta t)\};$$

Тут τ – деяке фіксоване значення, $o(\Delta t)$ – нескінченно мала більш високого порядку малості, ніж Δt.

Зауважимо, що величина $S(x,t)$ зліва і справа взаємно знищується.

При переході до границі при $\Delta t \to 0$ матимемо:

$$\tau \to t, \quad u(\tau) \to u(t),$$

$$x(\tau) \to x(t), \quad x(t+\Delta t, u(\tau)) \to x(t),$$

$$\frac{x(t+\Delta t, u(\tau)) - x(t)}{\Delta t} \to x'(t).$$

Отже, одержимо рівняння:

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \min_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U) \\ t_0 \le t \le t_1}} \{G(x,u,t) + \operatorname{grad}_x^T S(x,t)x'(t)\},$$

Це рівняння має виконуватись у кожній точці оптимальної траєкторії системи $x' = f(x,u,t)$.

В результаті

рівняння Белмана в диференціальній формі
для задачі з фіксованим часом й вільним правим кінцем траєкторій (5.12)-(5.15)

прийме вигляд

(+) $$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \min_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U)\\ t_0\le t\le t_1}} \{G(x,u,t) + \mathrm{grad}_x^T S(x,t)\cdot f(x,u,t)\},$$

$$S(x,t_1) = \Phi(x(t_1)).$$

Початкові умови випливають із вигляду функції $S(x,t)$.

Приклад 6.1. Знайти оптимальні керування й траєкторію, для яких функціонал

$$Q(u)=\int_0^T u^2(t)dt+\lambda x^2(T),$$

приймає свого мінімального значення для системи

$$x'(t)=u(t)$$

з початковою умовою $$x(0)=x_0.$$

Тут $\lambda>0$ – задана стала величина, T – задане, $0\le t\le T$.

Розв’язок.

Оскільки час фіксований, то рівняння Белмана в диференціальній формі для цієї задачі запишемо у вигляді

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=\min_u\{u^2(t)+\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}u(t)\},$$

$$S(x,T)=\lambda x^2(T). \qquad (!)$$

Звідси

$$\min_{u}\left\{\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}+u^2(t)+\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}u(t)\right\}=0 \qquad (*)$$

З необхідної умови мінімуму по керуванню маємо

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}+2u(t)=0$$

Отже, знайдене керування буде мати вигляд:

$$u^0(t)=-\frac{1}{2}\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}$$

Підставивши цей вираз у рівняння Белмана (*)

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}=0,$$

одержимо

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^2=0$$

Отримали нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних.

Розв'язок цього рівняння – функцію $S(x,t)$ – будемо шукати у вигляді полінома з невідомими коефіцієнтами, які залежать від часу t:

$$S(x,t)=c_0(t)+c_1(t)x+c_2(t)x^2. \qquad (**)$$

Підставимо останній вираз $S(x,t)$ у рівняння Белмана (**) та в умову для $S(x,t)$ (!):

$$\begin{cases} c_0'(t)+c_1'(t)x+c_2'(t)x^2-\dfrac{1}{4}(c_1(t)+2c_2(t)x)^2=0 \\ c_0(T)+c_1(T)x+c_2(T)x^2=\lambda x^2 \end{cases}$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x одержимо систему нелінійних диференціальних рівнянь з початковими умовами (на правому кінці)

$$\begin{cases} c_0'(t)-\dfrac{1}{4}c_1^2(t)=0 \\ c_1'(t)-c_1(t)c_2(t)=0 \\ c_2'(t)-c_2^2(t)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_0(T)=0 \\ c_1(T)=0 \\ c_2(T)=\lambda \end{cases}$$

Звідси, враховуючи, що $c_1^2(t) \ge 0$, знаходимо

$$c_0(t) \equiv 0,\ c_1(t) \equiv 0,\ 0 \le t \le T.$$

Розв'яжемо останнє рівняння системи:

$$\frac{dc_2(t)}{dt} - c_2^2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dc_2(t)}{c_2^2(t)} = dt \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{c_2(t)} = t + C \quad \Rightarrow \quad c_2(t) = -\frac{1}{t+C}$$

де C – стала інтегрування.

Враховуючи умову $c_2(T) = -\frac{1}{T+C} = \lambda$, маємо $C = -\frac{1+\lambda T}{\lambda}$.

Отже,
$$c_2(t) = \frac{\lambda}{1 - \lambda(t-T)}.$$

Таким чином функція Белмана остаточно запишеться у наступному вигляді

$$S(x,t) = \frac{\lambda x^2}{1-\lambda(t-T)}.$$

Тоді функція керування (виписана через функцію Белмана) як функція координат системи,

$$u^0 = -\frac{\lambda x}{1-\lambda(t-T)}, \quad 0 \le t \le T$$

є розв'язком задачі синтезу оптимального керування.

Далі підставимо u^0 у систему:

$$x'(t) = -\frac{\lambda x}{1-\lambda(t-T)} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{\lambda x}{1-\lambda(t-T)} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{d(1-\lambda(t-T))}{1-\lambda(t-T)} \Rightarrow \ln x = \ln C(1-\lambda(t-T))$$

де C – стала інтегрування.

Таким чином, траєкторія має вигляд

$$x = C(1-\lambda(t-T)).$$

Невідому константу визначимо з початкової умови:

$$x(0) = (1+\lambda T)C = x_0.$$

Звідси $$C = \frac{x_0}{1+\lambda T}.$$

Отже, оптимальна траєкторія матиме вигляд

$$x^0(t) = \frac{(1-\lambda(t-T))x_0}{1+\lambda T}$$

Тоді $$u^0(t) = \frac{\lambda x_0}{1+\lambda T}, \qquad 0 \le t \le T$$ – оптимальне керування.

Приклад 6.2. Знайти оптимальні керування й траєкторію, для яких функціонал

$$Q(u)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{1}u^2(t)dt+\frac{1}{2}x_2^2(1), \quad \text{де} \quad t\in[t_0,1],$$

для системи

$$\begin{cases} x_1'(t)=x_2(t) \\ x_2'(t)=u(t) \end{cases}$$

з початковою умовою

$$\begin{cases} x_1(t_0)=x_{10} \\ x_2(t_0)=x_{20} \end{cases}$$

досягає свого мінімального значення.

Розв’язок. Запишемо рівняння Белмана для функції $S(x,t)$:

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \min_u\{\frac{1}{2}u^2(t) + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1}x_2(t) + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2}u(t)\}$$

за умови

$$S(x_1, x_2, 1) = \frac{1}{2}x_2^2(1)$$

Перепишемо це рівняння у вигляді

$$\min_u\{\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2(t) + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1}x_2(t) + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2}u(t)\} = 0$$

З необхідної умови мінімуму маємо

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2} + u(t) = 0$$

Звідси отримаємо вигляд можливого оптимального керування через функцію Белмана

$$u^0(x_1, x_2, t) = -\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2} \quad .$$

Підставимо це $u^O(x_1, x_2, t)$ у рівняння Белмана.

Отже, для розв'язування задачі треба знайти функцію $S(x_1, x_2, t)$, що задовольняє рівняння

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1} x_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_2}\right)^2 = 0$$

за умови, що $$S(x_1, x_2, 1) = \frac{1}{2} x_2^2(1)$$

Функцію $S(x_1, x_2, t)$ <u>будемо шукати у вигляді квадратичної форми</u>:

$$S(x_1, x_2, t) = c_{11}(t) x_1^2 + 2c_{12}(t) x_1 x_2 + c_{22}(t) x_2^2$$

Підставимо це зображення функції $S(x_1, x_2, t)$ у рівняння та умову для функції $S(x_1, x_2, t)$ і для визначення коефіцієнтів полінома отримаємо систему диференціальних рівнянь з початковими умовами (на правому кінці)

$$\begin{cases} c'_{11}(t) - 2c_{12}^2(t) = 0 \\ c'_{12}(t) + c_{11}(t) - 2c_{12}(t)c_{22}(t) = 0, \\ c'_{22}(t) + 2c_{12}(t) - 2c_{22}^2(t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_{11}(1) = 0 \\ c_{12}(1) = 0 \\ c_{22}(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Виконавши необхідні обчислення, знаходимо:

$$c_{11}(t) = c_{12}(t) \equiv 0; \ \ c_{22}(t) = \frac{1}{2(2-t)} \ \ , \ t \in [t_0, 1].$$

Отже, у даному випадку функція Белмана має остаточний вигляд

$$S(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2}\frac{x_2^2(t)}{2-t}.$$

Тоді $$u^0(x_1, x_2, t) = \frac{x_2(t)}{t-2}$$ – розв’язок задачі синтезу оптимального керування.

Таким чином, система керування матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = \dfrac{x_2}{t-2} \end{cases}$$

Зінтегруємо систему

$$\frac{dx_2}{x_2} = \frac{dt}{t-2} \quad \Rightarrow \quad \ln x_2 = \ln C(t-2) \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = C(t-2)$$

$$x_1'(t) = C(t-2), \qquad x_1(t) = Ct(\frac{1}{2}t-2) + D$$

де $C,\ D$ – сталі інтегрування.

З початкових умов визначимо невідомі сталі інтегрування:

$$x_1(t_0) = Ct_0(\frac{1}{2}t_0 - 2) + D = x_{10}$$

$$x_2(t_0) = C(t_0 - 2) = x_{20}$$

Звідси

$$C = \frac{x_{20}}{(t_0 - 2)}, \qquad D = x_{10} - \frac{x_{20} t_0 (\frac{1}{2} t_0 - 2)}{(t_0 - 2)}.$$

Отже, оптимальна траєкторія системи матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{x_{20}}{(t_0 - 2)} t(\dfrac{1}{2} t - 2) + x_{10} - \dfrac{x_{20} t_0 (\frac{1}{2} t_0 - 2)}{(t_0 - 2)} \\ x_2(t) = \dfrac{x_{20}}{t_0 - 2}(t - 2) \end{cases}$$

Тоді оптимальне керування запишеться

$$u^0(x_1, x_2, t) = \frac{x_{20}}{t_0 - 2}.$$

5.4. МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Нехай об’єкт керування описується рівняннями:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{5.22}$$

де $x(t) = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – вектор стану системи, $A(t)$ – $n \times n$ матриця, $u(t) = (u_1, \ldots, u_r)^T$ – вектор керувань, $B(t)$ – матриця розмірності $n \times r$, $t \in [t_0, t_1]$.

Початковий стан заданий $x(t_0) = x_0$,
час t_1 – фіксований,
стан $x(t_1)$ – вільний.

Задача полягає в тому, щоб для системи (5.22) знайти керування й траєкторію, на яких функціонал

$$Q(x,u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u)dt + \frac{1}{2}x^T(t_1)Fx(t_1) \tag{5.23}$$

досягає свого мінімального значення.

Тут $Q(t), R(t), F$ – симетричні додатно-визначені матриці.

Задача оптимального керування лінійною системою (5.22) з мінімізацією квадратичного функціонала (5.23) у теорії керування називається задачею **аналітичного конструювання оптимального регулятора** для лінійної системи.

Розв'яжемо цю задачу за допомогою рівняння Белмана в диференціальній формі, яке для даної задачі набуває вигляду:

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \min_{u(t)}\{\frac{1}{2}x^T Q(t)x + \frac{1}{2}u^T R(t)u + \operatorname{grad}_x^T S(x,t)(A(t)x + B(t)u)\},$$

де
$$grad_x^T S(x,t) \equiv \frac{\partial S^T(x,t)}{\partial x} \equiv (\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_n}).$$

Знайдемо керування з необхідної умови екстремуму:

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial u} = R(t)u + B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} = 0,$$

$$R(t)u = -B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}.$$

Звідси
$$u^0 = -R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}.$$

Підставимо це керування в рівняння Белмана для $S(x,t)$. Маємо

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}x^T Q(t)x +$$

$$+\frac{1}{2}(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x})^T B(t)R^{-1}(t)R(t)R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} +$$

$$+(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x})^T (A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x})\},$$

Звідки

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}x^T Q(t)x -$$

$$-\frac{1}{2}(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x})^T B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} + (\frac{\partial S(x,t)}{\partial x})^T A(t)x,$$

$$S(x,t_1) = \frac{1}{2}x^T(t_1)Fx(t_1).$$

Розв'язок цього рівняння – функцію $S(x,t)$ – будемо шукати у вигляді квадратичної форми

$$S(x,t)=\frac{1}{2}x^T P(t)x,$$

де $P(t)$ – симетрична матриця, що підлягає визначенню.

Знайдемо похідні за часом і за станами цієї функції.

Маємо $$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}=P(t)x,\quad \frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}x^T\frac{dP(t)}{dt}x.$$

Підставимо ці вирази в рівняння й отримаємо:

$$-\frac{1}{2}x^T\frac{dP(t)}{dt}x=\frac{1}{2}x^T Q(t)x-\frac{1}{2}x^T P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x+x^T P(t)A(t)x.$$

Це буде виконуватися для довільних значень x тоді й тільки тоді, коли матриця $P(t)$ задовольняє рівняння

$$-\frac{1}{2}\frac{dP(t)}{dt}=\frac{1}{2}Q(t)-\frac{1}{2}P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)+P(t)A(t).$$

Скористаємось тим, що для матриць справедливо: $CD = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}C^T D$.

Остаточно отримаємо

$$\frac{dP(t)}{dt} = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) - Q(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t). \qquad (5.24)$$

$$P(t_1) = F. \qquad (5.25)$$

Диференціальні рівняння (5.24) називаються **матричним рівнянням Ріккаті.**

Таким чином, матрична функція $P(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ є розв'язком задачі Коші (5.24), (5.25) із зворотним напрямком зміни аргументу t.

Розв'язавши цю задачу Коші, знайдемо $P(t)$, а значить і функцію $S(x,t)$.

Тоді оптимальне керування запишеться, як $u^0 = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x$,
а система керування прийме вигляд

$$\frac{dx}{dt} = \left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)\right]x.$$

Разом з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ маємо задачу Коші розв'язавши яку отримаємо оптимальну траєкторію.

5.1. МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

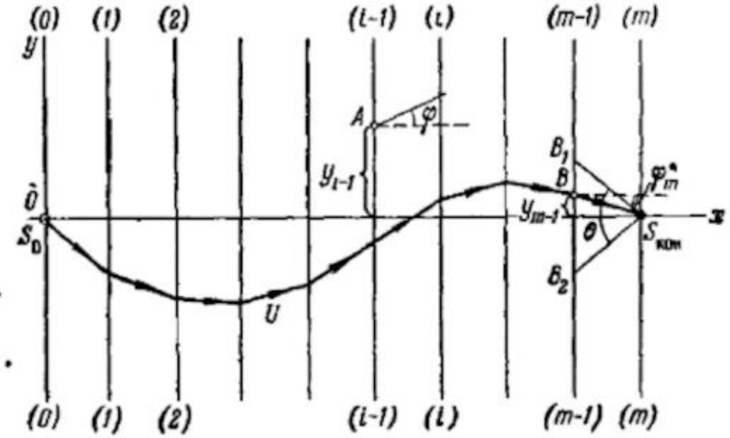
$$U_i^*(y_{i-1}) = \varphi_i^*(y_{i-1})$$

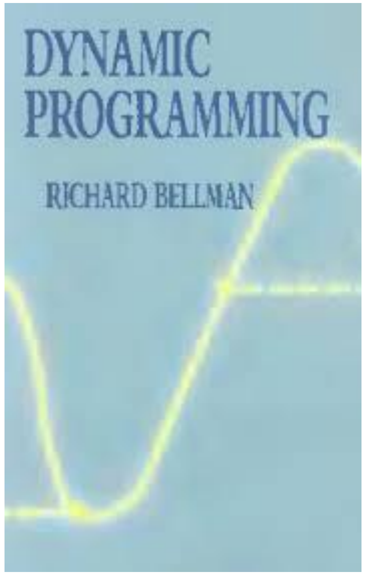
$$\varphi_m^* = \varphi_m^*(y_{m-1})$$

$$T_m^* = T_m^*(y_{m-1})$$

$$\varphi_m^*(y_{m-1}^{(1)}); \quad \varphi_m^*(y_{m-1}^{(2)}); \ \dots$$

$$T_m^*(y_{m-1}^{(1)}); \quad T_m^*(y_{m-1}^{(2)}); \ \dots$$





Розглянемо задачу оптимального керування:
знайти керування та траєкторії, на яких функціонал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u, t)dt + \Phi(x(t_1)) \tag{5.1}$$

досягає свого екстремального (мінімального) значення для системи

$$x'(t) = f(x, u, t), \tag{5.2}$$

де

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \Omega_t(X) \subseteq X, \tag{5.3}$$

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T \in \Omega_t(U) \subseteq U. \tag{5.4}$$

Тут X – фазовий простір, U – простір керувань, $t \in [t_0, t_1]$.

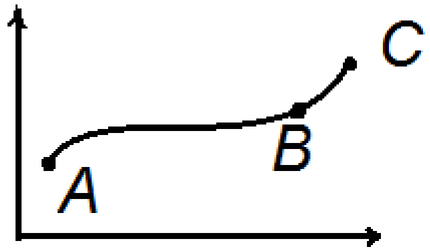
У задачі (5.1) – (5.4) моменти часу t_0, t_1 у загальному випадку вважаються невідомими й підлягають визначенню.

Ці моменти після їх визначення будемо позначати через t_0^0, t_1^0.

Метод динамічного програмування є наслідком принципу оптимальності, який був сформульований Р.Белманом. Принцип оптимальності справедливий для досить широкого класу задач оптимального керування, але не для всіх.

Для задачі (5.1) – (5.4) **принцип оптимальності** може бути сформульований таким чином:

якщо деяка траєкторія AC керованої системи (5.2) є оптимальною траєкторією задачі (5.1) – (5.4), то траєкторія BC також буде оптимальною при будь-якому виборі точки B на оптимальній траєкторії AC.



Наведемо інше формулювання принципу оптимальності.

Нехай $u^0(t), x^0(t),\ t_0 \le t \le t_1$ – розв'язок задачі (5.1) – (5.4),

де $u^0(t)$ – оптимальне керування,

$x^0(t)$ – оптимальна траєкторія,

і нехай t' – довільний фіксований момент часу, $t' \in [t_0, t_1]$.

Тоді розв'язок задачі (5.1) – (5.4) для $t \ge t'$ визначається фіксованим значенням $x^0(t')$ і не залежить від $u^0(t), x^0(t)$ для $t < t'$,

тобто

$$\inf_{u \in \Omega(U(x^0(t')))} \{\int_{t'}^{t_1} G(x,u,t)dt + \Phi(x(t_1))\} = \int_{t'}^{t_1} G(x^0,u^0,t)dt + \Phi(x^0(t_1)).$$

Для задачі (5.1)–(5.4) принцип оптимальності Белмана доводиться на основі властивості адитивності визначеного інтеграла.

Доведення принципу оптимальності можна провести наступним чином.
Нехай:

$$Q^0 = \inf_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U)\\ x(t)\in\Omega_t(X)\\ t_0^0\le t\le t_1^0}} Q(u) = \int_{t_0^0}^{t_1^0} G(x^0,u^0,t)dt + \Phi(x^0(t_1^0)) =$$

$$= \int_{t_0^0}^{t^*} G(x^0,u^0,t)dt + \int_{t^*}^{t_1^0} G(x^0,u^0,t)dt + \Phi(x^0(t_1^0)) = Q_1^0 + Q_2^0.$$

Тут t^* – довільна точка з $[t_0^0, t_1^0]$.

Розглянемо задачу (5.1)-(5.4) за умови, що: $t_0^0 = t^*, x(t^*) = x^0(t^*)$.

Розв'язок цієї задачі позначимо через $\tilde{u}(t), \tilde{x}(t), \quad t^* \le t \le t_1^0$.

Припустимо, всупереч принципу оптимальності, що цей розв'язок не співпадає з $u^0(t), x^0(t)$ при $t > t^*$.

Тоді

$$\tilde{Q}=\int_{t^*}^{\tilde{t}_1} G(\tilde{x},\tilde{u},t)dt+\Phi(\tilde{x}(\tilde{t}_1))<Q_2^0.$$

Побудуємо допустиме керування для задачі (5.1)-(5.4) у вигляді кусково-неперервної функції

$$u_*(t)=\begin{cases} u^0(t), & t_0^0\le t<t^*, \\ \tilde{u}(t), & t^*\le t<t_1^0. \end{cases}$$

Відповідна цьому керуванню траєкторія буде мати вигляд:

$$x_*(t)=\begin{cases} x^0(t), & t_0^0\le t<t^*, \\ \tilde{x}(t), & t^*\le t\le t_1^0. \end{cases}$$

Для розв'язку $u_*(t), x_*(t)$ задачі (5.1)-(5.4) будемо мати

$$Q(u_*)=Q_1^0+\tilde{Q}<Q_1^0+Q_2^0=Q^0.$$

Остання нерівність вказує на те, що розв'язок $u^0(t), x^0(t)$ не є оптимальним, оскільки $u_*(t)$ дає менше значення функціоналу Q.

Протиріччя доводить справедливість принципу оптимальності.

Різницеве Рівняння Белмана для дискретних систем

Наведемо дискретний аналог задачі оптимального керування (5.1)-(5.4).

Розіб'ємо заданий інтервал часу рівномірно точками: $t_0^0 = t_0, t_1, t_2, \dots t_k, \dots, t_1^0 = t_N$.

Позначимо

підінтервали часу через $\Delta t_k = \Delta t = t_{k+1} - t_k$,

стан системи в моменти часу t_k через $x(t_k) = x_k, k = \overline{0, N}$,

і керування відповідно $u(t_k) = u_k, k = \overline{0, N-1}$.

Тоді дискретний аналог функціоналу (5.1) буде мати вигляд:

$$Q = Q(x_0, t_0, \{u_k\}_{k=0}^{k=N-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} G(x_k, u_k, t_k)\Delta t_k + \Phi(x_N) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} F_0(x_k, u_k, t_k) + \Phi(x_N) \longrightarrow \inf \qquad (5.5)$$

Дискретний аналог для системи (5.2) отримаємо наступним чином:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t_k} = f(x_k, u_k, t_k),$$

звідки

$$x_{k+1} - x_k = f(x_k, u_k, t_k)\Delta t_k,$$

або

$$x_{k+1} = F(x_k, u_k, t_k),\ k = \overline{0, N-1}, \tag{5.6}$$

Множини (5.3), (5.4) у випадку дискретного часу будуть мати вигляд, відповідно:

$$x_k \in \Omega_k(X),\ k = \overline{0, N}\ , \tag{5.7}$$

$$u_k \in \Omega_k(U),\ k = \overline{0, N-1}\ . \tag{5.8}$$

Для постановки задачі оптимального керування дискретною системою (5.6) припускається, що множини (5.7), (5.8) непорожні та обмежені. Задача оптимального керування (5.5) – (5.8) має сенс лише в тому випадку, коли з точок множини $\Omega_0(X)$ можна перейти в точки множини $\Omega_N(X)$ через точки множин $\Omega_k(X)$, $k = \overline{1, N-1}$.

Визначення 5.1. Множина $\Omega_N(X)$ називається **досяжною** з точок $x_k \in \Omega_k(X)$, $k = \overline{0, N-1}$, якщо існують такі допустимі керування $\{u_j\}$, $j = \overline{k, N-1}$, що відповідна їм згідно з рівнянням (5.6) траєкторія $\{x_j\}$, $j = \overline{k, N}$ з початковою точкою x_k з'єднує цю точку з деякою точкою множини $\Omega_N(X)$.

Якщо множина початкових значень $\Omega_0(X)$ складається не з одного елементу, то задача (5.5) – (5.8) розбивається на дві задачі:

а) знаходження допустимих керувань, які доставляють мінімум функціонала (5.5) при фіксованому значенні $x_0 \in \Omega_0(X)$, тобто

$$\min_{\{u_k\}_{k=0}^{k=N-1}} Q(x_0, t_0, \{u_k\}_{k=0}^{k=N-1}) = Q(x_0, t_0);$$

б) знаходження мінімуму $Q(x_0, t_0)$ як функції змінної x_0 на множині $\Omega_0(X)$, тобто

$$Q^0 = \min_{x_0 \in \Omega_0(X)} Q(x_0, t_0) = Q^0(t_0).$$

Для фіксованого моменту часу $t_k, k = \overline{0, N-1}$ введемо деяку функцію $S_k(x_k, t_k)$, яку будемо називати **функцією Белмана**, у вигляді:

$$S_k(x_k, t_k) = \min_{\{u_j\}_{j=k}^{j=N-1}} \{\sum_{j=k}^{N-1} F_0(x_j, u_j, t_j) + \Phi(x_N)\} = \sum_{j=k}^{N-1} F_0(x_j, u_j^0(x_k), t_j) + \Phi(x_N), \qquad (5.9)$$

де $u_j^0(x_k)$, $k = \overline{j, N-1}$, – послідовність керувань, що відповідає оптимальному руху системи (5.6) з деякої точки $x_k \in \Omega_k(X)$, взятої в момент t_k, у точки множини $\Omega_N(X)$.

Виокремо у формулі (5.9) перший член.

Маємо

$$S_k(x_k,t_k)=F_0(x_k,u_k^0(x_k),t_k)+\sum_{j=k+1}^{N-1}F_0(x_j,u_j^0(x_k),t_j)+\Phi(x_N).$$

Далі візьмемо $j=k+1$

і для керувань $u_k^0(x_k)$, під дією яких система (5.6) переходить у точку

$$x_{k+1}:\quad x_{k+1}=F_0(x_k,u_k^0(x_k),t_k),$$

розглянемо функцію Белмана

$$S_{k+1}(x_{k+1},t_{k+1})=\min_{\{u_k\}_{j=k+1}^{j=N-1}}\{\sum_{j=k+1}^{N-1}F_0(x_j,u_j,t_j)+\Phi(x_N)\}=\sum_{j=k+1}^{N-1}F_0(x_j,u_j^0(x_{k+1}),t_j)+\Phi(x_N),$$

(5.10)

де $u_j^0(x_{k+1})$, $j=\overline{k+1,N-1}$ – послідовність керувань, які відповідають оптимальному руху системи (5.6) із вказаної точки $x_{k+1}\in\Omega_{k+1}(X)$ у точки множини $\Omega_N(X)$.

З принципу оптимальності Белмана випливає, що розв'язок задачі (5.5)-(5.8) на проміжку $[t_k, t_N]$ збігається з розв'язком відповідної задачі на $[t_{k+1}, t_N]$, якщо перехід від x_k до x_{k+1} здійснено згідно з оптимальним керуванням $u_k^0(x_k)$ для системи керування (5.6).

Звідси будуть збігатися керування:

$$u_k^0(x_k) = u_j^0(x_{k+1}), \ j = \overline{k+1, N-1}.$$

Отже, враховуючи це та формулу (5.10), вираз для функції $S_k(x_k, t_k)$ можна записати у вигляді:

$$S_k(x_k, t_k) = F_0(x_k, u_k^0(x_k), t_k) + S_{k+1}(x_{k+1}, t_{k+1}).$$

Оскільки $x_{k+1} = F_0(x_k, u_k^0(x_k), t_k)$, остаточно отримаємо:

$$S_k(x_k, t_k) = \min_{u_k \in \Omega_k(U)} \{F_0(x_k, u_k, t_k) + S_{k+1}(F(x_k, u_k, t_k), t_{k+1})\}, \quad k = \overline{0, N-1}. \qquad (5.11)$$

При цьому $\qquad S_N(x_N, t_N) = \Phi(x_N).$

Рівняння (5.11) називається **різницевим рівнянням Белмана.**

5.2. АЛГОРИТМ МЕТОДУ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Алгоритм методу динамічного програмування розв'язування задачі вигляду (5.5) – (5.8) для дискретних систем керування складається з двох частин:

знаходження керувань як функцій від станів системи (**прямий хід**)

та обчислення оптимальних керувань і оптимальної траєкторії (**зворотний хід**).

<u>А: Прямий хід.</u>

Крок 1.

Покладемо в рівнянні Белмана (5.11) $\boldsymbol{k = N-1}$ і розв'яжемо задачу

$$\boldsymbol{S_{N-1}(x_{N-1}, t_{N-1}) = \min_{u_{N-1} \in \Omega_{N-1}(U)} \{F_0(x_{N-1}, u_{N-1}, t_{N-1}) + \Phi(F(x_{N-1}, u_{N-1}, t_{N-1}))\}}$$

для всіх точок множини $\boldsymbol{\Omega_{N-1}(X)}$, з яких досяжна множина $\boldsymbol{\Omega_N(X)}$,

тобто для точок $\boldsymbol{x_N = F(x_{N-1}, u_{N-1}(x_{N-1}), t_{N-1}) \in \Omega_N(X)}$.

Знаходимо $\boldsymbol{u^0_{N-1}(x_{N-1})}$ як функцію точок $\boldsymbol{x_{N-1} \in \Omega_{N-1}(X)}$.

Крок 2. Для $\boldsymbol{k = N-2}$ розв'яжемо задачу

$$S_{N-2}(x_{N-2},t_{N-2}) = \min_{u_{N-2}\in\Omega_{N-2}(U)}\{F_0(x_{N-2},u_{N-2},t_{N-2}) + S_{N-1}(x_{N-1},t_{N-1})\} =$$

$$= \min_{u_{N-2}\in\Omega_{N-2}(U)}\{F_0(x_{N-2},u_{N-2},t_{N-2}) + S_{N-1}(F(x_{N-2},u_{N-2},t_{N-2}),t_{N-1})\}$$

для всіх $x_{N-2} \in \Omega_{N-2}(X)$, з яких досяжна множина $\Omega_N(X)$.

Звідси знаходимо $u^0_{N-2}(x_{N-2})$ для $x_{N-2} \in \Omega_{N-2}(X)$.

……………………….

Продовжуємо далі процес, поки не дійдемо до $\boldsymbol{k = 0}$.

………………………..

Крок N. Для $\boldsymbol{k = 0}$ розв'яжемо задачу

$$S_0(x_0,t_0) = \min_{u_0\in\Omega_0(U)}\{F_0(x_0,u_0,t_0) + S_1(F(x_0,u_0,t_0),t_1)\}$$

для всіх $x_0 \in \Omega_0(X)$, з яких досяжна множина $\Omega_N(X)$.

Одержимо $u^0_0(x_0)$, $x_0 \in \Omega_0(X)$.

В: Зворотній хід.

Якщо множина $\Omega_0(X)$ складається більш ніж з одного елементу, то потрібно розв'язати задачу:

$$\min_{x_0 \in \Omega_0(X)} S_0(x_0, t_0) = S_0(x_0^0, t_0) = Q^0(t_0).$$

Знайшовши x_0^0, отримаємо оптимальне керування $u_0^0(x_0^0) = u_0^0$ у момент часу $t = t_0$.

Крок 1. Підставимо знайдені оптимальні x_0^0, $u_0^0(x_0^0)$ у рівняння (5.6):

$$x_1^0 = F(x_0^0, u_0^0, t_0).$$

Знайшли x_1^0 у момент $t = t_1$.

Підставляючи значення x_1^0 у функцію $u_1^0(x_1^0)$, отриману на прямому ході алгоритму, знаходимо оптимальне керування $u_1^0(x_1^0) = u_1^0$.

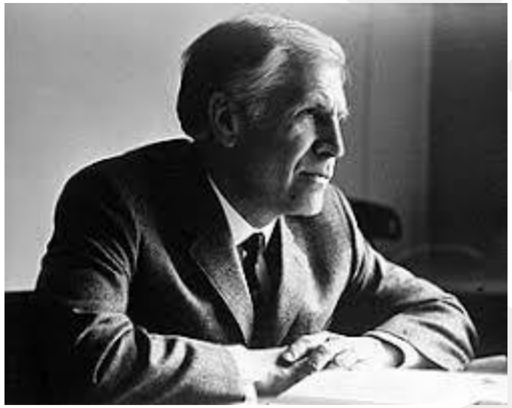
Продовжуємо цей процес.

……………………………

Крок N. Аналогічно знаходимо керування $u_{N-1}^0(x_{N-1}^0) = u_{N-1}^0$ і точку $x_N^0 = F(x_{N-1}^0, u_{N-1}^0, t_{N-1})$.

Таким чином, знайшли $\{u_j^0\}, j = \overline{0, N-1}, \{x_j^0\}, j = \overline{0, N}$ – оптимальне керування та оптимальну траєкторію для задачі (5.5)-(5.8).

6.1. ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА ДЛЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ІЗ ЗАКРІПЛЕНИМИ КІНЦЯМИ ТРАЄКТОРІЙ ТА ФІКСОВАНИМИ ПОЧАТКОВИМ І КІНЦЕВИМ МОМЕНТАМИ ЧАСУ



Розглянемо задачу оптимального керування із закріпленими кінцями траєкторій та фіксованим часом. Треба мінімізувати функціонал

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt \to \inf \tag{6.1}$$

для системи

$$x'(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \le t \le t_1 \tag{6.2}$$

за умов

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \tag{6.3}$$

$$u(t) \in V, t_0 \le t \le t_1, \tag{6.4}$$

де $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ – фазові координати,

$u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ – керування, що вважаються кусково-неперервними функціями на $[t_0, t_1]$, моменти часу t_0, t_1 і точки x_0, x_1 – задані,

множина $V \subseteq E^r$ (E^r - Евклідів r-вимірний простір) не залежить від часу,

фазові обмеження для $t \in [t_0, t_1]$ відсутні,

$f(x(t), u(t), t) = (f^1(x(t), u(t), t), \ldots, f^n(x(t), u(t), t))^T$.

Для формальної постановки задачі введемо деякі позначення та будемо вважати виконаними певні припущення.

Припустимо, що функції $f^{j}(x(t),u(t),t)$, $j=\overline{0,n}$ мають частинні похідні (*для спрощення записів аргументи функцій будемо опускати в тих випадках, які не викликають непорозумінь*):

$$\frac{\partial f^{j}(x(t),u(t),t)}{\partial x_i}=\frac{\partial f^{j}}{\partial x_i}=f^{j}_{x_i},\ i=\overline{1,n}.$$

Аналогічно позначимо:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=\begin{pmatrix} f^{1}_{x_1} & \cdots & f^{1}_{x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ f^{n}_{x_1} & \cdots & f^{n}_{x_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f^{1}_{x} \\ \vdots \\ f^{n}_{x}\end{pmatrix},$$

(6.5)

$$\frac{\partial f^{0}}{\partial x}=f^{0}_{x}=(f^{0}_{x_1},\quad \dots,\quad f^{0}_{x_n})^{T}.$$

Вважаємо:

функції $f^{j}(x(t),u(t),t)$, $j=\overline{0,n}$ та частинні похідні f_x, f^{0}_{x} з формул (6.5) – неперервні за сукупністю аргументів $(x,u,t)\in E^{n}\times E^{r}\times[t_0,t_1]$.

Далі, введемо n **допоміжних змінних** $\psi(t)=(\psi_1(t),...,\psi_n(t))^T \in E^n$

та **сталу** ψ_0.

Для цих змінних і сталої визначимо функцію:

$$H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0)=$$

$$=\psi_0 f^0(x(t),u(t),t)+\psi_1(t) f^1(x(t),u(t),t)+...+\psi_n(t) f^n(x(t),u(t),t)= \qquad (6.6)$$

$$=\psi_0 f^0(x(t),u(t),t)+\psi^T(t) f(x(t),u(t),t).$$

Функція $H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0)$ називається **функцією Гамільтона – Понтрягіна.**

Нехай $u = u(t)$ – кусково-неперервне керування, що задовольняє умову (6.4),
а $x(t) = x(t, u, x_0)$ – розв'язок системи (6.2), що відповідає цьому керуванню $u(t)$, початковій умові x_0 і визначений на всьому відрізку $[t_0, t_1]$.

Парі $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ поставимо у відповідність систему лінійних диференціальних рівнянь відносно допоміжних змінних $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))^T$:

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{6.7}$$

або інакше

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\sum_{j=0}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial f^j(x(t), u(t), t)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

де $\psi_0(t) = \psi_0$ – стала величина.

Систему лінійних диференціальних рівнянь (6.7) називають **спряженою системою**, що відповідає парі $(u(t), x(t, u, x_0))$, $t_0 \le t \le t_1$.

Запишемо систему (6.7) у векторній формі:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -H'_x(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)$$

або

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\psi_0 f_x^0(x(t), u(t), t) - (f_x(x(t), u(t), t)^T \psi(t),$$

для всіх $t_0 \le t \le t_1$.

Теорема 6.1. (**Принцип максимуму** – необхідна умова оптимальності. Закріплені кінці траєкторій, початковий і кінцевий моменти часу фіксовані).

Нехай $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ – розв'язок задачі (6.1)-(6.4).

Тоді необхідно існує неперервна вектор-функція $\psi(t), t_0 \le t \le t_1$ і стала ψ_0 такі, що:

1) $\psi_0 \le 0, \quad |\psi_0| + \|\psi(t)\| \ne 0, \quad t_0 \le t \le t_1$; (6.8)

2) $\psi(t)$ є розв'язком спряженої системи (6.7), яка відповідає розв’язку $(u(t), x(t))$;

3) при кожному $t \in [t_0, t_1]$ функція Гамільтона – Понтрягіна $H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ як функція змінної $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ досягає своєї верхньої грані на множині V при $u = u(t)$, тобто:

$$\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0). \tag{6.9}$$

Центральне місце в теоремі 6.1 займає умова максимуму. Тому **теорему 6.1** і наступні аналогічні теореми прийнято називати **принципом максимуму**.

Умова (6.8) гарантує, що функція не перетвориться на тотожний нуль і робить умову максимуму (6.9) змістовною.

Як користуватися теоремою 6.1 на практиці?

Знаходять функцію $u = u(x,t,\psi,\psi_0)$, що дає $\sup\limits_{u\in V} H(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)$.

При цьому змінні x,t,ψ і стала ψ_0 вважаються параметрами.

Відзначимо, що
$$u = u(x,t,\psi,\psi_0) \in V \,. \qquad (6.10).$$

Якщо початкова задача (6.1)-(6.4) має розв'язок, то функція (6.10) визначена на непорожній множині, що випливає з умови максимуму (6.9).

Далі складають систему з $2n$ диференціальних рівнянь:
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,u(x,t,\psi,\psi_0),t) \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -H'_x(x,u(x,t,\psi,\psi_0),t,\psi,\psi_0) \end{cases} \qquad (6.11)$$

для всіх $t \in [t_0, t_1]$ відносно невідомих функцій $x(t),\psi(t)$.

Загальний розв'язок системи (6.11) містить $2n$ довільних сталих.
Для їх визначення треба мати $2n$ умов.

В задачі (6.1) – (6.4) ці умови такі: $x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1.$

Система (6.11) містить ще один невідомий параметр $\psi_0 \le 0$.

Як його визначити?

Зауважимо, що функція $H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)$, яка визначається співвідношенням (6.6), лінійна й однорідна відносно змінних $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$, тобто

$$H(x(t), u(t), t, \alpha\psi(t), \alpha\psi_0) = \alpha H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0), \quad \forall \alpha.$$

Звідси та з умови

$$H(x(t), u(x, t, \psi(t), \psi_0), t, \psi(t), \psi_0) = \sup_{u \in V} H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0) \tag{6.12}$$

маємо

$$u(x, t, \alpha\psi(t), \alpha\psi_0) \equiv u(x, t, \psi(t), \psi_0), \quad \forall \alpha. \tag{6.13}$$

Отже теорема 6.1 визначає $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$ лише з точністю до додатного множника, і цим множником можна скористатися на свій розсуд.

На практиці, враховуючи умови теореми 6.1, зокрема, обмеження (6.8), найчастіше покладають

$$|\psi_0|^2 + \|\psi(\bar{t})\|^2 = 1, \quad \psi_0 \leq 0, \tag{6.14}$$

де $\bar{t}$ – деякий момент часу, $t_0 \leq \bar{t} \leq t_1$,

наприклад, $\bar{t} = t_0$ або $\bar{t} = t_1$.

У тих задачах, у яких вдається заздалегідь показати, що $\psi_0 < 0$, замість умови нормування (6.14) часто покладають

$$\psi_0 = -1.$$

Крайову задачу,
що складається з умови максимуму (6.12), системи диференціальних рівнянь (6.11), крайових умов (6.3) та умови нормування (6.14),

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, u(x,t,\psi,\psi_0), t) \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -H'_x(x, u(x,t,\psi,\psi_0), t, \psi, \psi_0) \end{cases}$$

$$x(t_0) = x_0,\; x(t_1) = x_1$$

$$H(x(t), u(x,t,\psi(t),\psi_0), t, \psi(t), \psi_0) = \sup_{u \in V} H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)$$

$$|\psi_0|^2 + \|\psi(\bar{t})\|^2 = 1, \quad \psi_0 \le 0$$

називають **крайовою задачею принципу максимуму** для задачі оптимального керування (6.1) – (6.4).

Нехай вдалося визначити з умов (6.11), (6.3), (6.14) деякі $x(t),\psi(t),\psi_0,\quad t_0 \le t \le t_1$. Підставимо їх у (6.10) і отримаємо функцію:

$$u = u(x(t),t,\psi(t),\psi_0) \in V,\quad t_0 \le t \le t_1. \tag{6.15}$$

Нехай ця функція виявилася кусково-неперервною функцією. З (6.10), (6.12), (6.15) випливає, що отримане керування $u(t),\ t_0 \le t \le t_1$ задовольняє умову максимуму (6.9), тобто згідно з теоремою 6.1 може претендувати на роль оптимального керування задачі (6.1)-(6.4), а відповідна до нього траєкторія $x(t) = x(t,u(t),x_0),\ t_0 \le t \le t_1$ – на роль оптимальної траєкторії цієї задачі. Тобто вони є розв’язком, підозрілим на оптимальний.

Чи буде знайдена пара $(u(t),x(t)),\ t_0 \le t \le t_1$ насправді розв’язком задачі (6.1)-(6.4), тобто оптимальним розв’язком, **теорема 6.1** не гарантує, оскільки ця теорема **дає** лише **необхідну умову оптимальності**. Може бути, що пара $(u(t),x(t)),\ t_0 \le t \le t_1$ задовольняє умови теореми 6.1, але не є розв'язком задачі (6.1)-(6.4).

Утім, якщо з якихось міркувань відомо (зазвичай, з фізичного змісту задачі), що дана задача (6.1)-(6.4) має розв'язок, а з крайової задачі принципу максимуму знайдені $x(t),\psi(t),\psi_0,t_0 \le t \le t_1$ однозначно, то знайдене керування (6.15) і буде оптимальним.

6.2. ФОРМУЛЮВАННЯ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА ДЛЯ ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ КІНЦЯМИ ТРАЄКТОРІЙ ТА ФІКСОВАНИМ ЧАСОМ

Розглянемо задачу оптимального керування з більш загальними умовами на кінцях траєкторій; початковий і кінцевий моменти часу, як і раніше, фіксовані:

$$J(x_0, u(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(t_1)) \to \inf , \qquad (6.16)$$

$$x'(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \le t \le t_1, \qquad (6.17)$$

$$x(t_0) \in S_0, x(t_1) \in S_I, \qquad (6.18)$$

$$u(t) \in V , \; t_0 \le t \le t_1, \qquad (6.19)$$

де керування $u(t)$ – кусково-неперервні на $t \in [t_0, t_1]$,
тобто $u(t) = u(t+0)$ при $t_0 \le t \le t_1$, а при $t = t_1$: $u(t_1) = u(t_1 - 0)$;
початковий і кінцевий моменти часу t_0, t_1 – фіксовані;
$f(x(t), u(t), t) = (f^1(x(t), u(t), t), \ldots, f^n(x(t), u(t), t))^T$.

Вважаємо, що правий кінець траєкторій ***вільний***: $S_I \equiv E^n$,
та (або)
лівий кінець траєкторій ***вільний***: $S_0 \equiv E^n$,

Далі будемо вважати:

функції $f^j(x(t),u(t),t)$, $j=\overline{0,n}$, $\Phi(x)$ мають частинні похідні за змінними $x_1,\dots,x_n$ і неперервні разом із цими похідними за сукупністю своїх аргументів при всіх $x\in E^n$, $u(t)\in V$, $t\in[t_0,t_1]$

Також позначимо: $$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\Phi'_x=(\Phi_{x_1},\dots,\Phi_{x_n})^T,$$

Теорема 6.2 (**Принцип максимуму** – необхідна умова оптимальності. Кінці траєкторій вільні, початковий і кінцевий моменти часу фіксовані).

Нехай $(u(t),x(t))$, $t_0\le t\le t_1$ – розв'язок задачі (6.16)-(6.19).

Тоді необхідно існує неперервна вектор-функція $\psi(t), t_0\le t\le t_1$ і стала ψ_0 такі, що:

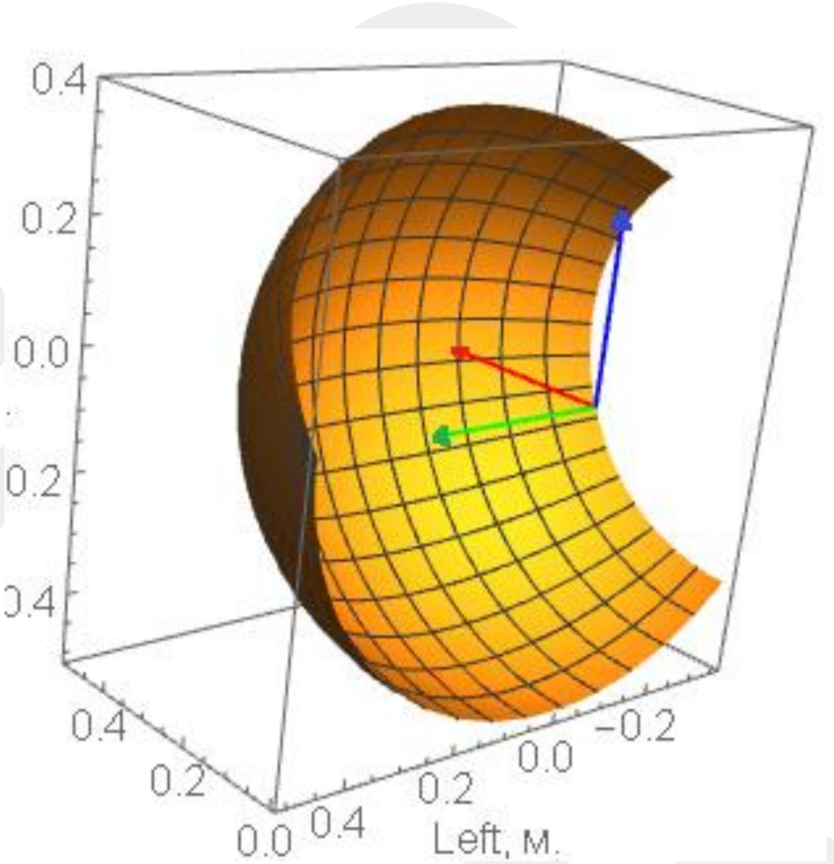
1) $\psi_0\le 0, |\psi_0|+\|\psi(t)\|\ne 0, \quad t_0\le t\le t_1$;

2) $\psi(t)$ є розв'язком спряженої системи (6.7), яка відповідає розв'язку $(u(t),x(t))$, який розглядається;

3) при кожному $t\in[t_0,t_1]$ функція Гамільтона – Понтрягіна $H(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)$ як функція змінної $u(t)=(u_1(t),\dots,u_r(t))^T$ досягає своєї верхньої грані на множині V при $u=u(t)$, тобто:

$$\sup_{u\in V} H(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0).$$

4) на лівому і правому кінцях траєкторії $x(t)$ виконуються умови трансверсальності, які у випадку задачі (6.16)-(6.19) означають, що вектор $\psi(t_1)-\psi_0\Phi'_x(x(t_1))$ ***ортогональний до множини*** S_I у точці $x(t_1)\in S_I$, а вектор $\psi(t_0)$ ***ортогональний до множини*** S_0 у точці $x(t_0)\in S_0$.


0.4
0.2
0.0
0.2
0.4
0.4
0.2
0.0
0.4
0.2
0.0
−0.2
Left, м.

Тут також можна прийняти умову нормування (6.14), або умову $\psi_0 = -1$, якщо відомо, що $\psi_0 < 0$.

Ще треба вказати $2n$ умов для визначення $2n$ сталих, від яких залежатиме загальний розв'язок системи (6.11).

Для цього розглянемо **умови трансверсальності** на кінцях траєкторії $x(t)$.

Наведемо ці ***умови на правому кінці*** траєкторії.

Правий кінець вільний, тобто: $S_I \equiv E^n$.

Тоді умова ортогональності вектора $\psi(t_1) - \psi_0 \Phi'_x(x(t_1))$ до всього простору E^n означає:

$$\psi(t_1) - \psi_0 \Phi'_x(x(t_1)) = 0. \tag{6.24}$$

Це дає n граничних умов для системи (6.11).

Наведемо ***умови трансверсальності на лівому кінці*** траєкторії $x(t)$.

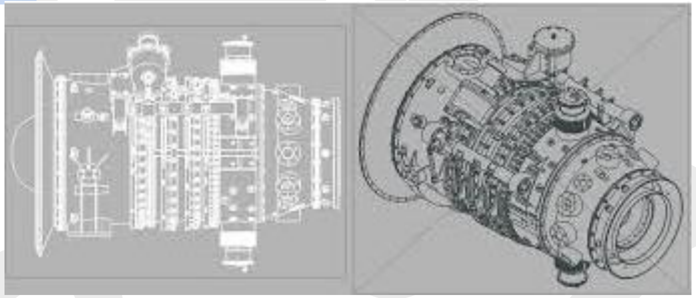
Лівий кінець вільний, тобто: $S_0 \equiv E^n$.

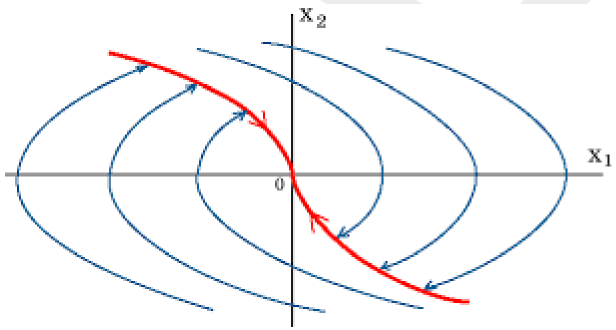
Тоді умова трансверсальності записується так:

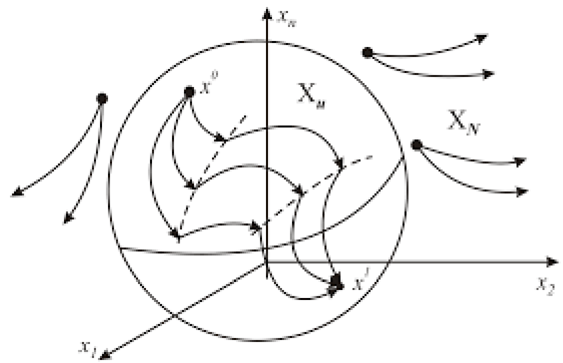
$$\psi(t_0) = 0. \tag{6.30}$$

Співвідношення (6.30) дають n граничних умов для системи (6.11).

6.4. ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ ДО ЗАДАЧІ ШВИДКОДІЇ







Для системи керування

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = u(t) \end{cases}$$

із закріпленими кінцями траєкторій

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{10} \\ x_2(t_0) = x_{20} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(t_1) = 0 \\ x_2(t_1) = 0 \end{cases},$$

та за умови обмеження на керування $|u(t)| \le 1$

знайти керування й траєкторії, які мінімізують час руху системи із заданої початкової точки в початок координат.

В даній задачі критерій оптимальності буде мати вигляд

$$T = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 \to \min .$$

Застосовуємо принцип максимуму Понтрягіна.
Будуємо функцію Гамільтона-Понтрягіна (відразу покладаємо $\psi_0 = -1$)

$$H(x(t), u(t), t, \psi(t)) = \psi_1(t) x_2(t) + \psi_2(t) u(t) - 1.$$

Записуємо спряжену систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1(t)}{dt} = -\dfrac{\partial H(x(t), u(t), t, \psi(t))}{\partial x_1} = 0 \\ \\ \dfrac{d\psi_2(t)}{dt} = -\dfrac{\partial H(x(t), u(t), t, \psi(t))}{\partial x_2} = -\psi_1(t) \end{cases}.$$

Шукаємо керування $u^0(t)$, при якому функція Гамільтона-Понтрягіна $H(x(t), u(t), t, \psi(t))$ досягає максимуму:

$$\max_u H(x(t), u, t, \psi(t)).$$

Зауважимо, що в даній задачі **функція** $H(x(t), u(t), t, \psi(t))$ **лінійна за керуванням** $u(t)$ **на замкненому проміжку** $|u(t)| \le 1$, а значить, **може досягати свого максимуму лише на кінцях цього відрізка**.

Якщо $\psi_2(t) > 0$, то функція $H(x(t), u(t), t, \psi(t))$ зростає із зростанням $u(t)$, тому її максимум досягається на правому кінці відрізка, тобто $u^0 = 1$.

Аналогічно, при $\psi_2(t) < 0$ отримуємо $u^0 = -1$.

Якщо $\psi_2(t) = 0$ то $H(x(t), u(t), t, \psi(t))$ від $u(t)$ не залежить і його можна покласти довільним із допустимої області, зокрема: $u^0 = 0$.

Значить, $u^0 = sign\psi_2(t)$ для $\psi_2(t) \neq 0$.

Знаходимо $\psi_1(t)$ та $\psi_2(t)$ як розв'язок спряженої системи:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1(t)}{dt} = 0 \\ \dfrac{d\psi_2(t)}{dt} = -\psi_1(t) \end{cases}$$

Отримаємо

$$\psi_1(t) = C_1, \quad \psi_2(t) = -C_1 t + C_2.$$

Таким чином, оптимальне керування визначається за формулою: $\boldsymbol{u^0 = sign(-C_1 t + C_2)}$.

Оскільки знайдена функція $\boldsymbol{\psi_2(t)}$ лінійна, то вона може змінювати свій знак на довільному замкненому проміжку не більш ніж в одній точці.

Значить, керування $\boldsymbol{u^0(t)}$ буде змінюватися з ***+1*** на ***–1*** (або з ***–1*** на ***+1***) теж не більш ніж в одній точці на проміжку $[\boldsymbol{t_0, t_1}]$.

Цю точку називають **точкою перемикання**.

Таким чином,

незалежно від вибору початкової точки $\boldsymbol{x_0 = (x_{10}, x_{20})^T}$,

відповідне оптимальне керування є кусково-сталою функцією, яка приймає значення ***+1*** або ***–1***

та має не більше двох інтервалів сталості.

Розглянемо можливі випадки.

а) $u^0 = 1$

Система керування набуває вигляду:
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 1 \end{cases}.$$

Знайдемо звідси $x_1(t)$ як функцію від $x_2(t)$:

$$dx_2(t) = dt \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dx_2(t)} = x_2 \Rightarrow dx_1(t) = x_2 dx_2(t).$$

Звідси маємо:

$$x_1(t) = \frac{1}{2} x_2^2(t) + C,$$

де C – стала інтегрування.

Таким чином отримали **сім'ю парабол**. Серед них є тільки одна, що проходить через початок координат. У цьому випадку стала величина $C = 0$. Нехай початкова точка x_0 траєкторії лежить на цій параболі. Тоді система потрапляє в початок координат під дією тільки керування $u^0 = 1$.

Знайдемо час руху системи з урахуванням того, що $dx_2(t) = dt$. Для цього проінтегруємо друге рівняння:

$$T = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{x_2(t_0)}^{x_2(t_1)} dx_2(t) = x_2(t_1) - x_2(t_0) = -x_2(t_0) = -x_{20}.$$

б) $u^0 = -1$

Тоді система керування набуває вигляду: $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -1 \end{cases}$.

Знайдемо, як і вище, залежність $x_1(t)$ від $x_2(t)$:

$$dx_2(t) = -dt \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dx_2(t)} = -x_2 \Rightarrow dx_1(t) = -x_2 dx_2(t).$$

Звідси маємо:

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) + D,$$

де D – стала інтегрування.

Аналогічно отримали **сім'ю парабол**, серед яких є тільки одна, що проходить через початок координат у випадку, коли $D = 0$. Нехай початкова точка x_0 траєкторії вибрана на цій параболі. Тоді система потрапляє в початок координат під дією тільки керування $u^0 = -1$.

Знайдемо час руху системи:

$$T = -\int_{t_0}^{t_1} dt = -\int_{x_2(t_0)}^{x_2(t_1)} dx_2(t) = -x_2(t_1) + x_2(t_0) = x_2(t_0) = x_{20}.$$

Позначимо дуги, по яких система може потрапити в початок координат, через L_1 і L_{-1} для керувань $u^0 = 1$ і $u^0 = -1$ відповідно (рис. 6.1.). Очевидно, що при $x_0 \in L_1$ оптимальна траєкторія є частиною дуги L_1, а у випадку $x_0 \in L_{-1}$ – частиною дуги L_{-1}. Напрямок руху за кривими – до початку координат.

Крива $L_{-1}L_1$ називається **<u>лінією перемикання.</u>** Лінія перемикання $L_{-1}L_1$ поділяє всю фазову площину на дві частини: $X_{-1}X_1$.

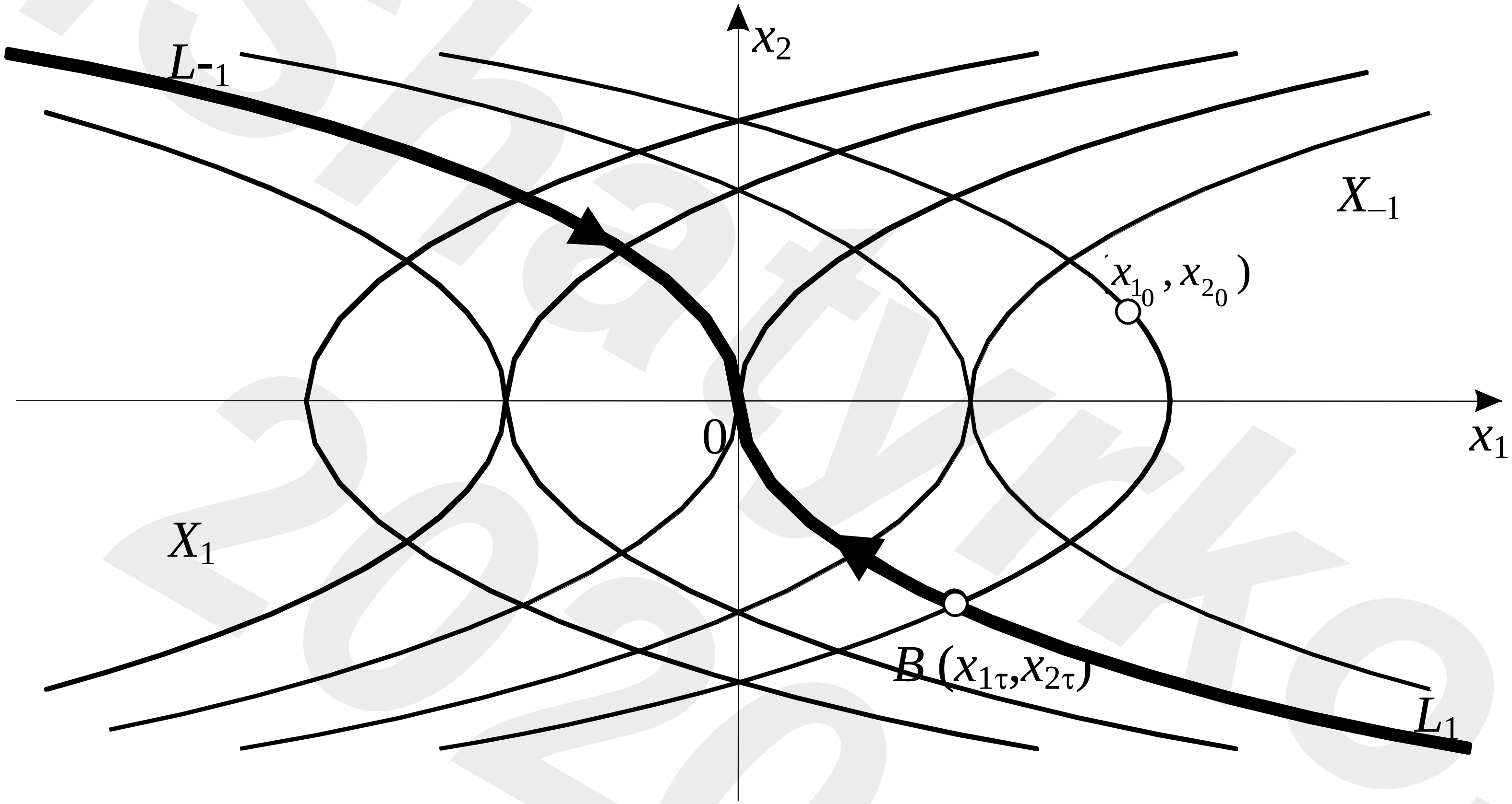
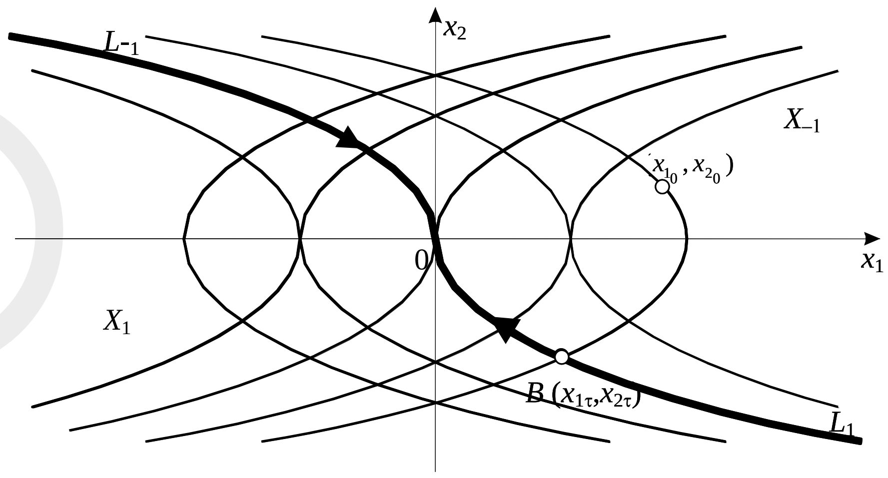


Рис. 6.1.

в) Нехай оптимальне керування змінюється з $\boldsymbol{u^0 = -1}$ на $\boldsymbol{u^0 = 1}$

Для цього випадку початкова точка буде належати частині $\boldsymbol{X_{-1}}$ фазової площини: $\boldsymbol{x_0 \in X_{-1}}$ (див. рис. 6.1). Тоді траєкторія руху системи складається з двох частин: від $\boldsymbol{x_0}$ до точки $\boldsymbol{B}$ під дією керування $\boldsymbol{u^0 = -1}$ і від точки $\boldsymbol{B}$ до початку координат під дією керування $\boldsymbol{u^0 = 1}$.



Рух від початкової точки $\boldsymbol{x_0}$ до точки $\boldsymbol{B}$ буде проходити по параболі: $\boldsymbol{x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) + D}$.

Знайдемо сталу $\boldsymbol{D}$ за умови, що дана парабола проходить через точку $\boldsymbol{x_0 = (x_{10}, x_{20})^T}$.

Маємо

$$\boldsymbol{x_{10} = -\frac{1}{2}x_{20}^2 + D \Rightarrow D = x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2}.$$

Від точки $\boldsymbol{B}$ до початку координат система буде рухатись під дією керування $\boldsymbol{u^0 = 1}$ по частині $\boldsymbol{L_1}$ лінії перемикання $\boldsymbol{L_{-1}L_1}$. У цьому випадку стала величина $\boldsymbol{C = 0}$.

Знайдемо координати $(\boldsymbol{x_{1\tau}, x_{2\tau}})$ точки $\boldsymbol{B}$ як точки перетину двох парабол:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2 \\ x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 \end{cases}.$$

Отримаємо:

$$x_{1\tau} = \frac{1}{2}\left(x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2\right)$$

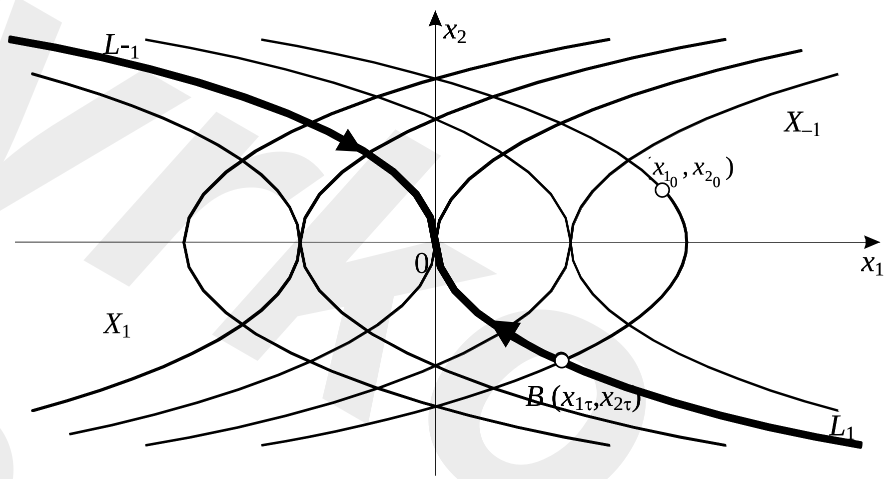
$$x_{2\tau} = -\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}}.$$

Знайдемо тепер час руху системи керування з початкової точки x_0 у початок координат.

Він буде складатися з часу руху з точки x_0 у точку B і з часу руху з точки B у початок координат.

Позначимо момент часу, в який система попадає в точку B, через τ.

Тоді загальний час руху системи буде дорівнювати: $(\tau - t_0) + (t_1 - \tau)$.



Знайдемо час руху системи з точки x_0 у точку B під дією керування $u^0 = -1$.

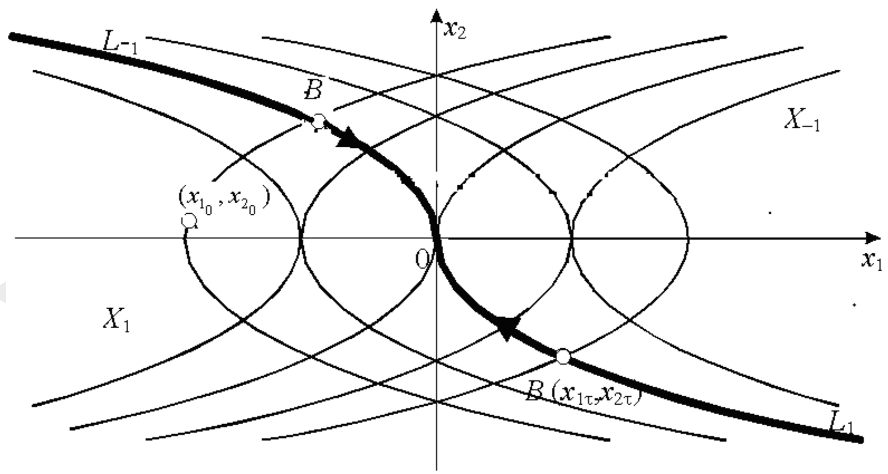
$$\int_{t_0}^{\tau} dt = \tau - t_0 = -\int_{x_2(t_0)}^{x_2(\tau)} dx_2(t) = x_{20} - x_{2\tau}.$$

Час руху системи від точки B у початок координат по частині L_1 лінії перемикання $L_{-1}L_1$ під дією керування $u^0 = 1$ буде:

$$t_1 - \tau = -x_{2\tau} = \sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}}$$

Отже, загальний час руху системи з точки x_0 у початок координат для випадку, коли керування спочатку є $u^0 = -1$, а потім у точці B перемикається на $u^0 = 1$, буде

$$T = (\tau - t_0) + (t_1 - \tau) = x_{20} + 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}}.$$



г) Нехай оптимальне керування змінюється з $u^0 = 1$ на $u^0 = -1$.

Для цього випадку початкова точка буде належати частині X_1 фазової площини: $x_0 \in X_1$.

Тоді траєкторія руху системи складається з двох частин:

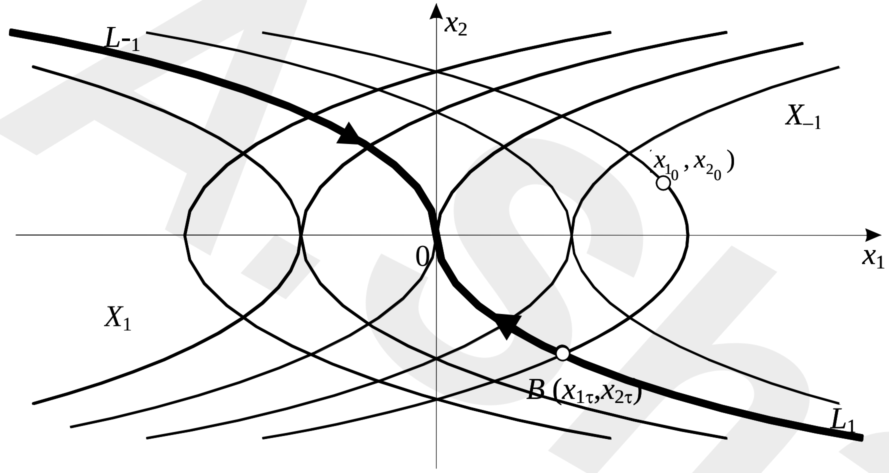
від точки x_0 – під дією керування $u^0 = 1$ – до точки перемикання,

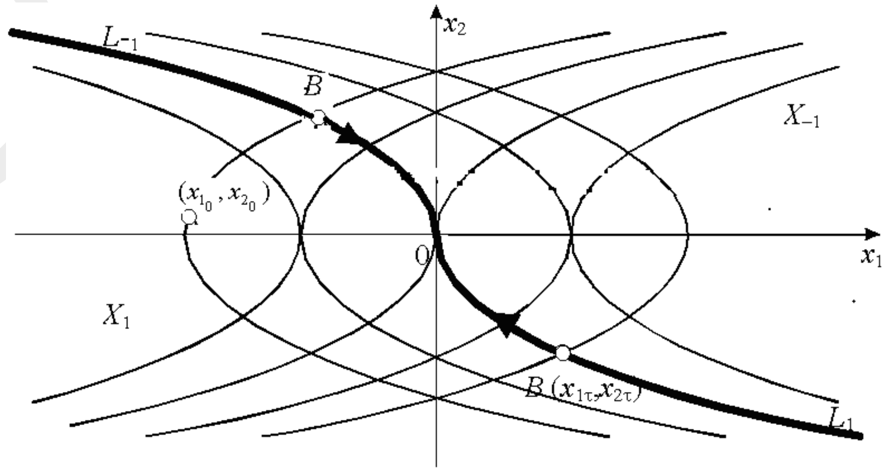
і далі по дузі L_{-1} лінії перемикання – під дією керування $u^0 = -1$ – до початку координат.

Виконавши аналогічні пункту в) дії й перетворення, знайдемо час руху системи в цьому випадку:

$$T = -x_{20} + 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 - x_{10}}\,.$$

Таким чином, із розглянутих випадків випливає, що мінімальний час переводу системи із заданої точки $\boldsymbol{x_0}$ у початок координат визначається лише координатами початкової точки траєкторії:





$$\boldsymbol{T = 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10} + x_{20}}\,,\quad x_0 \in X_{-1}}$$

$$\boldsymbol{T = 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 - x_{10} - x_{20}}\,,\quad x_0 \in X_{1}}$$

Відзначимо, що **для лінійних систем керування принцип максимуму для задачі швидкодії є необхідною й достатньою умовами оптимальності**.

Отже, знайдені керування та траєкторія є оптимальними.