费定晖　周学圣编演
郭大钧　邵品琮主审

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析习题集题解

山东科学技术出版社

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

（四）

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解
（四）
费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审
*
山东科学技术出版社出版
（济南市玉函路16号　邮编250002）
山东科学技术出版社发行
（济南市玉函路16号　电话2064651）
济南新华印刷厂印刷
*
787mm×1092mm　32开本　17印张　406千字
2001年3月第2版第9次印刷
印数：201 901—203 900
ISBN 7—5331—0102—2
O·8　定价：15.50元

图书在版编目(CIP)数据

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 (4)/费定晖编.—2版.—济南:山东科学技术出版社,1999.9(2001.3重印)

ISBN 7-5331-0102-2

Ⅰ.Б… Ⅱ.费… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.017-44

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第43958号

出版说明

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本，自50年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻易查抄

本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有周家云同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

目　　录

第五章 级 数

§1. 数项级数.同号级数收敛性的判别法

1°一般概念 对于数项级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a^n, \tag{1}$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$(级数的和)

存在,式中 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,则称级数(1)为收敛的.反之,则称级数(1)为发散的.

2°哥西准则 级数(1)收敛的充分且必要的条件为对于任何的 $\epsilon>0$,都存在有数 $N=N(\epsilon)$,使得当 $n>N$ 和 $p>0$ 时,不等式

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|<\epsilon$$

成立.

特别是,若级数收敛,则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

3°比较判别法 I. 设除级数(1)外,还有级数

$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots. \tag{2}$$

若当 $n\geqslant n_0$,不等式

$$0\leqslant a_n\leqslant b_n$$

成立,则1)从级数(2)收敛可推得级数(1)收敛;2)从级数(1)发散可推得级数(2)发散.

特别是，当 $n\to\infty$ 若 $a_n\sim b_n$，则正项级数(1)和(2)同时收敛或同时发散.

4°比较判别法Ⅱ. 设

$$a_n=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)^{①},$$

则(a)当 $p>1$ 时级数(1)收敛，(б)当 $p\leqslant1$ 时级数(1)发散.

5°达朗伯耳判别法　若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

则(a)当 $q<1$ 时级数(1)收敛，(б)当 $q>1$ 时级数(1)发散。

6°哥西判别法　若 $a_n\geqslant0(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

则(a)当 $q<1$ 时级数(1)收敛，(б)当 $q>1$ 时级数(1)发散。

7°拉阿伯判别法　若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

则(a)当 $p>1$ 时级数(1)收敛，(б)当 $p<1$ 时级数(1)发散。

8°高斯判别法　若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

式中 $|\theta_n|<C$ 而 $\varepsilon>0$，则(a)当 $\lambda>1$ 时级数(1)收敛，(б)当 $\lambda<1$ 时级数(1)发散；(в)当 $\lambda=1$ 时，若 $\mu>1$ 则级数(1)收敛；若 $\mu\leqslant1$ 则级数(1)发散。

9°哥西积分的判别法　若 $f(x)(x>0)$ 是非负的不增函数，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

---

① 记号 O^* 的意义参阅第一章§6，1°。

与积分 $$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$
同时收敛或同时发散。

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和：

2546. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots$.

解 由于

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{(-1)^n}{2^n}}{1+\frac{1}{2}},$$

故得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3},$$

即所给级数收敛，且其和为$\frac{2}{3}$.（以下有关各题省略这两句话）

2547. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

解 由于

$$\begin{aligned}S_n&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}},\end{aligned}$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

2548. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$.

解 由于

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n},$$

从而有

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

并且

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n&=S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\&=\frac{1}{2}\left(1+1+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right],\end{aligned}$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

2549. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$.

解 由于

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

2550. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$.

解 由于

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right),$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}.$$

2551. (a) $q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots \qquad (|q|<1)$;

(б) $q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots \qquad (|q|<1)$.

解 令 $z=q(\cos\alpha+i\sin\alpha)=qe^{i\alpha}$，其中 $i=\sqrt{-1}$.

于是得 $|z|=|q|<1$，并且有

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\alpha+i\sum_{n=0}^{\infty}q^n\sin n\alpha \tag{1}$$

及

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-q\cos\alpha-iq\sin\alpha}$$

$$=\frac{(1-q\cos\alpha)+iq\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}. \tag{2}$$

比较(1)、(2)两式的实部及虚部，即得

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin n\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\sin\alpha=\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$;

(б) $\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos n\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\alpha-1$

$$=\frac{1-q\cos\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}-1=\frac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}.$$

2552. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

解 由于

$$\begin{aligned}S_n&=(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})\\&\quad+(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})+(\sqrt{6}-2\sqrt{5}\\&\quad+\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\\&=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=1-\sqrt{2}\\&\quad+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},\end{aligned}$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}.$$

2553. 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的收敛性.

解 记 $x=k\pi$. 若 k 为整数，则由 $\sin nx=0$ 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 是收敛的，且其和为零. 若 k 非整数，我们以下将证 $\sin nx$ 并不趋于零，于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 发散. 可采用反证法. 假设

$$\lim_{n\to\infty}\sin nx=0,$$

则当 $n\to\infty$ 时也有 $\sin(n+1)x\to 0$. 但是

$$\sin(n+1)x=\sin nx\cos x+\cos nx\sin nx,$$

由 $\sin(n+1)x\to 0$ 及 $\sin nx\to 0$（当 $n\to\infty$ 时）知 $\cos nx\sin x\to 0$（当 $n\to\infty$ 时），而 $\sin x=\sin k\pi\neq 0$，故必有

$$\lim_{n\to\infty}\cos nx=0.$$

但

$$1=\sin^2 nx+\cos^2 nx.$$

令 $n\to\infty$，两端取极限，即得左端为 1 而右端为 0，这就产生了 1 与 0 相等的谬论. 这个矛盾证明了此假设不真，也即 $\sin nx \not\to 0$（当 $n\to\infty$ 时），从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的发散性获证.

2554. 证明，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则把该级数的项经过组合而不变更其先后次序所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n,\text{其中 } A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i\,(p_1=1,p_1<p_2<\cdots)$$

也收敛且有相同的和. 反之不真. 举出例子.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 的部分和叙列为

$$l_1,l_2,\cdots,l_n,\cdots,$$

则 $l_n=\sum_{i=1}^{n}A_i=\sum_{i=1}^{p_{n+1}-1}a_i.$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故其部分和叙列 $\{S_n\}$ 趋于定值 S. 因此，

$$\lim_{n\to\infty}l_n=\lim_{n\to\infty}S_{p_{n+1}-1}=S,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 是收敛的，且与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 有相同的和.

反之不真. 例如，级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

是发散的，但按下述方法组成的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

却是收敛的.

2555. 证明,若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的各项是正的,而把这级数的项经过组合而得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛,则原来的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛,记其和为 S. 考虑原级数的部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$,并注意到 $a_k>0(k=1,2,\cdots)$,故存在 n_0,使

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{l=1}^{n_0}A_l<S.$$

显然 $S_n<S_{n+1}$ 对一切 n 成立. 于是,$\{S_n\}$ 单调上升且有界. 因此,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在有限,即原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

研究下列级数的收敛性:

2556. $1-1+1-1+1-1+\cdots$.

解 由于通项 $a_n=(-1)^{n-1}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限不存在,更不可能趋于零,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散.

2557. $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.001}=1\neq0,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$ 发散.

数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$也收敛.

2563. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\cdots$.

解 由于$0<\frac{1}{n\sqrt{n+1}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛,故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$也收敛.

2564. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\cdots$.

解 由于$\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>\frac{1}{2n}>0$且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散,故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$也发散.

2565. 证明,由等差级数各项的倒数组成的级数是发散的.

证 设等差级数为$\sum_{n=1}^{\infty}[a+(n-1)d]$,其中$d$为公差.

当$d>0$时,总存在正整数n_0,使$a<(n_0-1)d$,则当$n\geqslant n_0$时,总有$a+(n-1)d<2(n-1)d$.于是,

$$\frac{1}{a+(n-1)d}>\frac{1}{2(n-1)d}>\frac{1}{2nd}>0,$$

注意到级数$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{2nd}$发散,因而级数$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$发散,故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$也发散.

当$d=0$时,a不可能为零,此时级数$\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\cdots$

$+\frac{1}{a}+\cdots$显然发散.

当 $d<0$ 时,将此级数的各项乘以 -1 即化为 $d>0$ 的情形,于是,这级数也发散.

总上所述,不论 d 为何值,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$ 均发散.

2566. 证明,若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,(A) 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$(B) 皆收敛且 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$(C) 也收敛. 若级数(A) 与(B) 皆发散,问级数(C) 的收敛性若何?

证 当级数(A) 及(B) 收敛时,由于 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$,故 $0\leqslant c_n-a_n\leqslant b_n-a_n$. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 收敛,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 也收敛,再由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 的收敛性即得知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[a_n+(c_n-a_n)]=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛.

若级数(A) 与(B) 皆发散,则级数(C) 可能收敛,也可能发散. 例如,级数

$$-1-1-1-\cdots\qquad 及\ 1+1+1+\cdots$$

皆发散,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 当 $c_n=0(-1<c_n<1)$ 时收敛;当 $c_n=\frac{1}{2}(-1<c_n<1)$ 也发散.

2567. 设已知二发散级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad 及 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

的各项不为负数，问下列二级数的收敛性若何：

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)$ 及(б) $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$?

解 (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)$ 可能收敛，也可能发散. 例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{2}$ 皆发散，但是 $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)=0+0+\cdots+0+\cdots$ 却收敛. 又如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 皆发散，但是 $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 也发散.

(б) $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$ 一定发散. 事实上，

$$\max(a_n,b_n)\geqslant a_n\geqslant 0,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$ 也发散.

2568. 证明，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a_n\geqslant 0)$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛. 倒过来不成立，举出例子.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 于是，总存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $0\leqslant a_n<1$. 从而，当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $0\leqslant a_n^2<a_n$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当然级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 收敛，

故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n^2$ 收敛，从而，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛.

反之不真. 例如，$a_n=\frac{1}{n}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 却发散.

2569. 证明，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)^2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

也收敛.

证 由于 $0 \leqslant 2|a_n b_n| \leqslant a_n^2+b_n^2$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|$ 收敛.

其次，由于 $(a_n+b_n)^2=a_n^2+b_n^2+2a_n b_n$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 皆收敛，故知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 也收敛.

最后，设 $b_n=\frac{1}{n}$，利用第一个结果即证得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 收敛.

2570. 证明，若

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = a \neq 0,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 $na_n=\dfrac{a_n}{\frac{1}{n}}$. 不妨设 $a>0$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a$，故对于任给的 $0<\varepsilon<a$，总存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $\dfrac{a_n}{\frac{1}{n}}>a-\varepsilon>0$ 或 $a_n>(a-\varepsilon)\dfrac{1}{n}>0$.

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 也收敛，从而会得出级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 收敛的错误结论. 因此，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

2571. 证明，若各项为正且其值单调减少的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

证 对于任何的 m 与 $n>m$，我们有

$$(n-m)a_n<a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n<a_m,$$

其中 a_m 为该收敛级数的余式，由此得

$$na_n<\frac{n}{n-m}a_m.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故对于任给的 $\varepsilon>0$，我们可取定某 m_0，使

$$a_{m_0}<\varepsilon.$$

其次，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-m_0}=1$，故存在 $n_0(n_0>m_0)$，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\frac{n}{n-m_0}<2.$$

于是，当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$0<na_n<2\varepsilon,$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. 本题获证.

2572. 若当 $p=1,2,3,\cdots$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0$. 问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛?

解 若当 $p=1,2,3,\cdots$时，

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0, \tag{1}$$

并不一定有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 例如，取 $a_n=\frac{1}{n}$，显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，但却有

$$0<a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}<\frac{p}{n+1},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p}{n+1}=0$，故对一切 p，(1)式均成立.

这个事实与哥西准则并不矛盾，因为在哥西准则中，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 和 $p>0$ 时，不等式

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

成立，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，其中的 N 只依赖于 ε，而与 p 无关. 本题的叙述中，条件并没有排除 N 要与 p 有关.

利用哥西准则，证明下列正项级数的收敛性：

2573. $a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots(|a_n|<10)$.

证 $$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n|&=\left|\frac{a_n}{10^n}+\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n+p-1}}{10^{n+p-1}}\right|\\&\leqslant\frac{|a_n|}{10^n}+\frac{|a_{n+1}|}{10^{n+1}}+\cdots+\frac{|a_{n+p-1}|}{10^{n+p-1}}\\&<\frac{1}{10^{n-1}}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{p-1}}\right)\\&<\frac{1}{10^{n-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\\&=\frac{1}{9\cdot10^{n-2}}.\end{aligned}$$

任给 $\varepsilon>0$，要 $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{10^{n-2}}<9\varepsilon$，即只要

$$n>2+\lg\frac{1}{9\varepsilon}.$$

取 $N=2+\left[\lg\frac{1}{9\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，不等式

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$

对一切正整数 p 皆成立，因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ 收敛．

2574. $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{2^n}+\cdots$.

证 $$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n|&=\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right|\\&\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}.\qquad(1)\end{aligned}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，故按哥西准则，对于任给的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，对任意正整数

p，有

$$\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}<\varepsilon. \tag{2}$$

由(1)式及(2)式得知，当 $n>N$ 时，不等式

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$

对一切正整数 p 皆成立. 因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ 收敛.

2575. $\frac{\cos x-\cos 2x}{1}+\frac{\cos 2x-\cos 3x}{2}+\cdots$

$+\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}+\cdots.$

解 $S_{n+p}-S_n=\sum\limits_{i=n+1}^{n+p}\frac{\cos ix-\cos(i+1)x}{i}$

$$=\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\sum_{i=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\cos(i+1)x$$

$$-\frac{\cos(n+p+1)x}{n+p},$$

故 $|S_{n+p}-S_n|\leqslant\frac{1}{n+1}+\sum\limits_{i=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)+\frac{1}{n+p}$

$$=\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}.$$

对于任给的 $\varepsilon>0$，取正整数 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于一切正整数 p，有

$$|S_{n+p}-S_n|<\frac{2}{n}<\varepsilon.$$

因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$ 收敛.

利用哥西准则，证明下列级数的发散性：

2576. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$.

解 取 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$. 不论 n 多大，若令 $p=n$，则有

$$|S_{n+p}-S_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{项}}$$

$$=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

2577. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

解 取 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{6}$. 不论 n 多大，若令 $p=3n$，则有

$$\begin{aligned}|S_{3n+p}-S_{3n}|&=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\\&\quad+\cdots+\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n}\\&>\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+3}-\frac{1}{3n+3}\\&\quad+\cdots+\frac{1}{6n}+\frac{1}{6n}-\frac{1}{6n}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\&>\frac{1}{3}\left(\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{项}}\right)\\&=\frac{1}{6}>\varepsilon_0.\end{aligned}$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)$ 发散.

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$收敛.

2581. (a) $\frac{2\cdot 1!}{1^1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\cdots+\frac{2^n n!}{n^n}+\cdots$;

(б) $\frac{3\cdot 1!}{1^1}+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+\cdots+\frac{3^n n!}{n^n}+\cdots$.

解 (a)由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$=\frac{2}{e}<1,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$收敛.

(б)由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}3\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$=\frac{3}{e}>1,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$发散.

2582. $\frac{(1!)^2}{2}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\cdots+\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{[(n+1)!]^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}$$

$$=0<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ 收敛.

2583. $\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3}+\frac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1000+n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000\cdot 1001\cdots(1000+n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$ 收敛.

2584. $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{4n+2}=\frac{3}{4}<1,$$

故级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+4)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n+2)}$ 收敛.

2585. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$,

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n=1}(\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2})=\sqrt{2}-1<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}$
$-\sqrt[2n+1]{2})$收敛.

2586. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}}{2+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{2}<1,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$收敛.

2587. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

解 $\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}\geqslant\frac{n^n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\sqrt[n]{n}>0,$

对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\sqrt[n]{n},$$

由于其通项趋于$\frac{1}{e}\neq0$,故它是发散的. 因此,原级数也是发散的.

注意,若用达朗伯耳判别法,则有$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$,无明确结论,此时还应改用高斯判别法.

2588. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

解 当$n>1$时,$\ln n<n$. 于是,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}>\frac{1}{\sqrt[n]{n}}>0.$$

对于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq0$，故它是发散的. 因此，原级数也发散.

注意，若用达朗伯耳判别法，将遇到与 2587 题类似的情况.

2589. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$.

解 由于

$$0<\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}<\frac{n^{n-1}}{(n^2)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{1}{n^2},$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数也收敛.

注意，若用达朗伯耳判别法，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\cdot\frac{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2n^2+5n+4)^{\frac{n+2}{2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{n}{(2n^2+5n+4)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2+5n+4}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

$$=e\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1,$$

也可证得原级数收敛.

2590. $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$.

解 方法一：

$$\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{4},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}}=2\sin\frac{\pi}{8},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}$$

$$=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}}=2\sin\frac{\pi}{16},$$

利用数学归纳法，可证得通项为

$$a_n=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$=\frac{1}{2}<1,$$

故级数收敛.

方法二：

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

利用数学归纳法，可证得

$$\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}}}}$$

$$\cdot\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{(n-1)\text{重根号}}}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}}}}$$

$$=\frac{1}{2}{}^{*)}<1,$$

故级数收敛.

*)利用 637 题的结果.

2591. 证明：若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\ (a_n>0),$$

则 $a_n=o(q_1^n)$，其中 $q_1>q$.

证　由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，故利用 141 题的结果，即得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q.$$

令 $\varepsilon=\frac{1}{2}(q_1-q)>0$，则由上式知存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\left|\sqrt[n]{a_n}-q\right|<\varepsilon,$$

从而有

$$\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon=\lambda q_1\ (n\geqslant n_0),$$

其中 $\lambda=\frac{q_1+q}{2q_1}<1$. 利用 $\lambda^n=o(1)$，即证得

$$a_n=\lambda^n q_1^n=o(q_1^n).$$

2592. 证明：若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1\ (a_n>0),$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

相反的结论不真. 研究例子

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots.$$

证　取 $0<\varepsilon<1-q$，由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1,$$

故存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon=l<1.$$

从而

$$0<a_n\leqslant a_{n_0}l^{n-n_0}\ (n\geqslant n_0).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}l^{n-n_0}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

反之不真，例如，级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

显然是收敛的. 但是，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}, 当\ n=2m+1;\\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{m}, 当\ n=2m,\end{cases}$$

故有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty.$$

2593. 证明，若对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\ (a_n>0)$ 极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q \tag{A}$$

存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q \tag{Б}$$

也存在.

相反的结论不真：若极限(Б)存在，则极限(A)可以不存在. 研究例子

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

证 利用 141 题的结论,本题的前半部分即得证.

反之不真.例如,对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2\cdot\sqrt[n]{2}}=\frac{1}{2}.$$

但是,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3+(-1)^{n+1}}{2[3+(-1)^n]}=\begin{cases}\frac{1}{4},当 n 为偶数;\\ 1;当 n 为奇数,\end{cases}$$

故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在.

2594. 证明,若

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q\ (a_n\geqslant 0),$$

则(a)当 $q<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;(б)当 $q>1$ 时这级数发散(**哥西判别法的推广**).

证 (a)取 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}(1-q)$. 由于 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$,故存在 n_0,使当 $n\geqslant n_0$ 时,有

$$0<\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon,$$

从而

$$0<\sqrt[n]{a_n}<\frac{q+1}{2}\ (n\geqslant n_0)$$

或

$$0<a_n<\left(\frac{q+1}{2}\right)^n\qquad(n\geqslant n_0).$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2}=\frac{1}{2}<1,$$

故它是收敛的，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$也是收敛的.

2597. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$.

解 $0<\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}\leqslant\frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$.

对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}+1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{3}<1,$$

故它是收敛的，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$也是收敛的.

利用拉阿伯和高斯判别法，研究下列级数的收敛性：

2598. $\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^p+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^p+\cdots$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p-1}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{p}{2n+1}+0\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}=\frac{p}{2},$$

故当$\frac{p}{2}>1$即$p>2$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{p}$收敛．

2599. $\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\cdots(a>0,b>0,d>0)$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{b+nd}{a+nd}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{b+nd}{a+nd}-1\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)n}{a+nd}=\frac{b-a}{d},$$

故当$\frac{b-a}{d}>1$时，

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{b(b+d)\cdots[b+(n-1)d]}$收敛．

2600. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

解 $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\frac{n!\,e^n}{n^{n+p}}}{\frac{(n+1)!\,e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}}}=\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p}-1}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}+p}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e}e^{(\frac{1}{x}+p)\ln(1+x)}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e}e^{1+(p-\frac{1}{2})x+o(x)}-1}{x}=p-\frac{1}{2},$$

故当 $p-\frac{1}{2}>1$ 即 $p>\frac{3}{2}$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$ 收敛.

2601. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}}=+\infty,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2}\cdots(2+\sqrt{n}}$) 收敛.

2602. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}(p>0,q>0)$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^p\left(1+\frac{q}{n+1}\right)$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\left(1+\frac{q}{n+1}\right)-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p\left(1+\frac{qx}{1+x}\right)-1}{x}=p+q,$$

故当 $p+q>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}$ 收敛.

2603. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}(p>0,q>0)$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^q\frac{1+n}{p+n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[(1+\frac{1}{n})^q\frac{1+n}{p+n}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1+x)^{q+1}}{1+px}-1}{x}=q+1-p,$$

故当 $q+1-p>1$ 即 $q>p$ 时,级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$ 收敛.

2604. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p\left(\frac{n+1}{n}\right)^q$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left[(\frac{2n+2}{2n+1})^p\left(\frac{n+1}{n}\right)^q-1\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{2+2x}{2+x}\right)^p(1+x)^q-1}{x}=q+\frac{p}{2},$$

故当 $q+\frac{p}{2}>1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$

收敛.

2605. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^n(p>0)$.

解 令 $a_n=\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^n$. 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{x\ln n}{n}=0$ 故当 n 充

分大时，$a_n>0$.

当 $x=0$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，它当 $p>1$ 时收敛，而当 $p\leqslant 1$ 时发散，当 $x\neq 0$ 时，我们有

$$\ln(a_n n^{p+x})=x\ln n+n\ln\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)$$

$$=nu_n+n\ln(1-u_n)=nu_n^2\cdot\frac{u_n+\ln(1-u_n)}{u_n^2},$$

其中 $u_n=\frac{x\ln n}{n}$，$u_n\neq 0(n>1)$，$u_n\to 0$，$nu_n^2\to 0(n\to\infty)$. 由洛比塔法则，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n+\ln(1-u_n)}{u_n^2}=\lim_{V\to 0}\frac{v+\ln(1-v)}{v^2}$$

$$=\lim_{V\to 0}\frac{1-\frac{1}{1-v}}{2v}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{2(v-1)}=-\frac{1}{2},$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\ln(a_n n^{p+x})=0\text{ 或}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{p+x}}}=1.$$

由此可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+x}}$ 有相同的敛散性，故当 $p+x>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，而当 $p+x\leqslant 1$ 时发散.

综上所述，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 仅当 $x>1-p$ 时收敛.

2606. 证明：若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

则　　$a_n=o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)(\varepsilon>0)$.

证　下面记 $\alpha_n,\alpha'_n,\beta_n,\beta'_n,\beta''_n,\varepsilon_n$ 为无穷小量，即 $\alpha_n=o(1),\alpha'_n=o(1),\beta_n=o(1),\beta'_n=o(1),\beta''_n=o(1),\varepsilon_n=o(1)(n\to\infty)$.

由题设知，当 $n\to\infty$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}.$$

取对数，即得

$$\ln a_n-\ln a_{n+1}=\ln\left(1+\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}\right)$$

$$=\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n}(p+\alpha'_n).$$

令 $n=1,2,\cdots,N-1$ 并求和，则得

$$\ln a_1-\ln a_N=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}(p+\alpha'_n).$$

由 143 题（在其中令 $x_N=\sum\limits_{n=1}^{N-1}\frac{\alpha'_n}{n},y_N=\sum\limits_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}$）知

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\alpha'_n}{n}\right)\Big/\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\right)=\lim_{N\to\infty}\alpha'_N=0.$$

又由 146 题知

$$\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}=C+\ln(N-1)+\varepsilon_N,$$

其中 C 是尤拉常数，$\varepsilon_N\to0$. 于是，令

$$\beta_N=\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\alpha'_n}{n}\right)\Big/\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\right),$$

有　　$$\ln a_1-\ln a_N=(p+\beta_N)\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}$$

$$=(p+\beta_N)[C+\ln(N-1)+\varepsilon_N]$$

$$=(p+\beta_N)\ln(N-1)+k+\beta'_N,$$

其中 $k=Cp$ 为常数．于是，

$$\ln a_N=-(p+\beta_N)\ln(N-1)+k'-\beta'_N,$$

其中 $k'=\ln a_1-k$ 为常数，从而

$$a_N=e^{k'-\beta'_N}\cdot(N-1)^{-(p+\beta N)}$$

$$=e^{k'-\beta'_N}\cdot\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-(p+\beta_N)}\cdot N^{\beta''N}\cdot N^{-p}.$$

其中 $\beta''_N=-\beta_N$．由于 $\beta''_N=o(1)$，故对于任给的 $\varepsilon>0$，当 N 充分大时，有 $|\beta''_N|<\frac{\varepsilon}{2}$，从而 $N^{\beta''_N}<N^{\frac{\varepsilon}{2}}$．再注意到

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-(p+\beta N)}=1,$$

即知：当 N 充分大时，有

$$0<a_N\leqslant k''\cdot N^{\frac{\varepsilon}{2}}\cdot N^{-p}=O\left(\frac{1}{N^{p-\frac{\varepsilon}{2}}}\right),$$

其中 k'' 是常数．于是，得

$$a_N=o\left(\frac{1}{N^{p-\varepsilon}}\right).$$

本题获证．

求出通项 a_n 的减小的阶，从而研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性，设：

2607. $a_n=\dfrac{n^p+a_1n^{p-1}+\cdots+a_p}{n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q}$，其中 $n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q>0$.

解 由于 $a_n=O^*\left(\frac{1}{n^{q-p}}\right)$，故当 $q-p>1$ 即 $q>1+p$ 时，级数收敛．

2608. $a_n=\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}$.

解 由于 $a_n\geqslant0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^{p+1}}}=\pi \text{ 或 } a_n=O^*\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right),$$

故仅当 $1+p>1$ 即 $p>0$ 时，级数收敛．

2609. $a_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n-1}{n+1}(n>1)$.

解 由于 $a_n<0$，且

$$a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^p\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)=O^*\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right),$$

故仅当$\frac{p}{2}+1>1$ 即 $p>0$ 时，级数收敛．

2610. $a_n=\ln^p(\sec\frac{\pi}{n})$.

解 由于 $a_n>0(n>2$ 时)，且

$$a_n=\frac{1}{2^p}\ln^p\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}\right)\sim\frac{1}{2^p}\operatorname{tg}^{2p}\frac{\pi}{n}\sim\frac{1}{2^p}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2p}$$
$$=O^*\left(\frac{1}{n^{2p}}\right),$$

故仅当 $2p>1$ 即 $p>\frac{1}{2}$时，级数收敛．

2611. $a_n=\lg_{bn}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)\qquad(a>0,b>0)$.

解 显然 $b\neq1$(否则 a_n 无意义)．由于

$$a_n=\frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)}{n\ln b}\sim\frac{1}{\ln b}\cdot\frac{\sqrt[n]{a}}{n^2}=O^*\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故级数收敛．

2612. $a_n=\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p$.

解 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$

$=e^{n[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O^*(\frac{1}{n^3})]}$

$=e^{1-\frac{1}{2n}+O^*(\frac{1}{n^2})}$.

由于 $a_n>0$，且

$$a_n=[e(1-e^{-\frac{1}{2n}+O^*(\frac{1}{n^2})})]^p\sim e^p\left[\frac{1}{2n}+O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^p$$

$$=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

故仅当 $p>1$ 时，级数收敛.

2613. $a_n=\dfrac{1}{n^{1+\frac{k}{\ln n}}}$.

解 由于

$$a_n=n^{-(1+\frac{k}{\ln n})}=e^{-(1+\frac{k}{\ln n})\ln n}=e^{-(\ln n+k)}=\frac{1}{n}e^{-k},$$

故级数显然发散.

2614. $a_n=\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

解 由于

$$a_n=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}=O^*\left(\frac{1}{n}\right),$$

故级数发散.

2615. 证明：若有 $\alpha>0$ 使当 $n\geqslant n_0$ 时 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+\alpha(a_n>0)$，

解 $\dfrac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}=\dfrac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}$. 由洛比塔法则知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln\ln x)^2}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln\ln x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\ln x}=0,$$

故$\lim\limits_{x\to\infty}=\dfrac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}=0$，从而存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$\dfrac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}<1$，利用 2615 题的结论，即知级数发散.

利用哥西积分判别法，研究具如下通项的级数的收敛性：

2619. $a_n=\dfrac{1}{n\ln^p n}$.

解 由于不论 p 为何数，当 x 充分大时，函数$\dfrac{1}{x\ln^p x}$都是非负递减的，并且

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}=\begin{cases}\left.\dfrac{1}{(1-p)\ln^{p-1}x}\right|_2^{+\infty}, & p\neq 1;\\ \left.\ln\ln x\right|_2^{+\infty}, & p=1\end{cases}$$

仅当 $p>1$ 时收敛，故级数仅当 $p>1$ 时收敛.

2620. $a_n=\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ $(n>2)$.

解 易知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$(不论 p,q 为何实数)的导函数当 x 充分大时是负的，故当 x 充分大时，$f(x)$是非负递减函数。

若 $p=1$，则

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^q}$$

$$=\begin{cases}\left.\dfrac{1}{(1-q)(\ln\ln x)^{q-1}}\right|_3^{+\infty}, & q\neq 1;\\ \ln\ln\ln x\Big|_3^{+\infty}, & q=1.\end{cases}$$

当 $q>1$ 时收敛，$q\leqslant 1$ 时发散，故由哥西积分判别法知，原级数当 $p=1,q>1$ 时收敛，$p=1,q\leqslant 1$ 时发散.

若 $p\neq 1$，作代换 $\ln x=t$，有

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q}.$$

当 $p>1$ 时，取 $\eta>0$ 使 $p-\eta>1$，由于(不论 q 为何实数)

$$\lim_{t\to+\infty}t^{p-\eta}\cdot\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^\eta(\ln t)^q}=0,$$

故积分$\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q}$收敛，从而原级数收敛；当 $p<1$ 时，取 $\tau>0$ 使 $p+\tau<1$. 由于

$$\lim_{t\to+\infty}t^{p+\tau}\cdot\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^\tau}{(\ln t)^q}=+\infty,$$

故积分$\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q}$发散，从而原级数发散.

综上所述，可知原级数仅当 $p=1,q>1$ 及 $p>1,q$ 任意时收敛.

2621. 研究级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$$

的收敛性.

解 由于

$$\ln(n!)=\sum_{k=1}^{n}\ln k<n\ln n,$$

故

$$\frac{1}{\ln(n!)}>\frac{1}{n\ln n}>0.$$

利用 2619 题中 $p=1$ 的结果，知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$ 也发散．

2622. 证明：设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的项单调减小，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$ 同时收敛或同时发散．

证 设 $S_{2^n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}$，则因

$$a_1>a_2>\cdots a_{2^n}>a_{2^n+1}>\cdots>0,$$

故得

$$0<S_{2^n}<a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^n}+\cdots+a_{2^{n+1}-1})<a_1+2a_2+\cdots+2^na_{2^n}, \tag{1}$$

且有

$$\begin{aligned}S_{2^n}&=a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{n-1}+1}+\cdots+a_{2^n})\\&>\frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{n-1}a_{2^n}\\&=\frac{1}{2}(a_1+2a_2+2^2a_{2^2}+\cdots+2^na_{2^n})>0.\end{aligned} \tag{2}$$

由(1)式得知：若 $\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛；由(2)式得知：若 $\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散．由此本题获证．

注意，在此命题中，用作比较的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$$

可以用更普遍的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^n a_{m^n}$$

来代替，其中 m 为任一自然数．证法类似．

2623．设 $f(x)$ 为单调不增加的正值函数．证明，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛，则对于其余项 $R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ 有以下的估计：

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx < R_n < f(n+1)+\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx.$$

利用此式，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的和精确到 0.01.

解　由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 的收敛性，根据哥西积分判别法，知积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛．由于 $f(x)$ 单调不增加，故

$$f(n+k+1) \leqslant \int_{n+k}^{n+k+1} f(x)dx \leqslant f(n+k)$$

$$(k=1,2,3,\cdots).$$

将这些不等式相加，得

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(n+k+1) \leqslant \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(n+k),$$

即　$$R_n-f(n+1) \leqslant \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leqslant R_n,$$

或

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leqslant R_n \leqslant f(n+1)+\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx, \tag{1}$$

这就是所需证的不等式．

注意，原题中将(1)中的“$\leqslant$”误写为“$<$”，这是不

对的，例如，若令

$$f(x)=\frac{1}{n^2}，当 n\leqslant x<n+1 时(n=1,2,\cdots)，$$则不等式(1)中左端的"$\leqslant$"号成为"="号：

$$\int_{n+1}^{+\infty}f(x)dx=R_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots;$$

若令

$$f(x)=\frac{1}{n^2}，当 n<x\leqslant n+1 时(n=1,2,\cdots)，$$

则不等式(1)中右端的"$\leqslant$"成为"="号：

$$R_n=f(n+1)+\int_{n+1}^{+\infty}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots.$$

最后，利用不等式(1)来求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$的和，精确到0.01．易知，当取 $n=8$ 时，即有

$$R_8\leqslant\frac{1}{9^3}+\int_9^{+\infty}\frac{dx}{x^3}<0.008,$$

故取$\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k^3}\doteq 1.20$作为级数和的近似值，即可保证误差不超过0.01．

2624．证明厄耳玛可夫判别法：设 $f(x)$ 为单调减少的正值函数，又设

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(e^x)}{f(x)}=\lambda.$$

若 $\lambda<1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$收敛；若 $\lambda>1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$发散．

证 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x f(e^x)}{f(x)}=\lambda$，故对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $N>0$，使当 $x>N$ 时，有

$$e^x f(x)<(\lambda+\varepsilon)f(x).$$

当 $\lambda<1$ 时，取 ε 使 $\lambda+\varepsilon=\rho<1$，则有

$$e^x f(e^x)<\rho f(x).$$

于是，当 $m>N$ 时有

$$\int_N^m e^x f(e^x)dx<\rho\int_N^m f(x)dx,$$

即
$$\int_{e^N}^{e^m} f(x)dx<\rho\int_N^m f(x)dx,$$

也即

$$(1-\rho)\int_{e^N}^{e^m} f(x)dx<\rho\int_N^m f(x)dx-\rho\int_{e^N}^{e^m} f(x)$$

$$=\rho\int_N^{e^N} f(x)dx-\rho\int_m^{e^m} f(x)dx.$$

由于 N 充分大且 $m>N$，故 $m<e^m$. 又因 $f(x)>0$，故 $\int_m^{e^m} f(x)dx>0$. 从而

$$(1-\rho)\int_{e^N}^{e^m} f(x)dx<\rho\int_N^{e^N} f(x)dx,$$

$$\int_{e^N}^{e^m} f(x)dx<\frac{\rho}{1-\rho}\int_N^{e^N} f(x)dx.$$

固定 N，让 $m\to+\infty$，取极限即得

$$\int_{e^N}^{+\infty} f(x)dx\leqslant\frac{\rho}{1-\rho}\int_N^{e^N} f(x)dx=\text{常数}.$$

于是，由哥西积分判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.

当 $\lambda>1$ 时，则取 N 为充分大，可得

$$e^x f(e^x)\geqslant f(x)\qquad(x>N).$$

从而

$$\int_N^m e^x f(e^x)dx \geqslant \int_N^m f(x)dx,$$

即

$$\int_{e^N}^{e^m} f(x)dx \geqslant \int_N^m f(x)dx$$

或

$$\int_{e^N}^m + \int_m^{e^m} \geqslant \int_N^{e^N} + \int_{e^N}^m,$$

故

$$\int_m^{e^m} f(x)dx \geqslant \int_N^{e^N} f(x)dx \quad (m>N).$$

今设 $e_0=N+1, e_1=e^{e_0}, e_2=e^{e_1}, \cdots, e_{k+1}=e^{e_k}, \cdots$，并分别取 $m=e_0, e_1, e_2, \cdots$，则

$$\int_{e_1}^{e_2} f(x)dx \geqslant \int_N^{e^N} f(x)dx,$$

$$\int_{e_2}^{e_3} f(x)dx \geqslant \int_N^{e^N} f(x)dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{e_k}^{e_{k+1}} f(x)dx \geqslant \int_N^{e^N} f(x)dx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

最后得

$$\int_{e_0}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{e_{k-1}}^{e_k} f(x)dx$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} n\int_N^{e^N} f(x)dx = +\infty,$$

即 $\int_{e_0}^{+\infty} f(x)dx$ 为发散的，故由哥西积分判别法

知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

2625. 证明罗巴契夫斯基判别法:设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项单调趋于零,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$$

同时收敛或同时发散,其中 p_m 是满足不等式

$$a_n \geqslant 2^{-m}(n = 1, 2, \cdots, p_m)$$

的项 a_n 的最大的指标.

证 由题设 p_m 是满足不等式 $a_n \geqslant 2^{-m}$ 的项 a_n 的最大指数,故有

$$\frac{1}{2^m} \leqslant a_{p_{m-1}+1} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

$$\frac{1}{2^m} \leqslant a_{p_{m-1}+2} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^m} \leqslant a_{p_m} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

$$a_{p_m+1} < \frac{1}{2^m},$$

于是,

$$a_{p_{m-1}+1} + a_{p_{m-1}+2} \cdots + a_{p_m} \geqslant (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^m}, \qquad (1)$$

$$a_{p_{m-1}+1} + a_{p_{m-1}+2} + \cdots + a_{p_m} < (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}. \qquad (2)$$

将(1)式及(2)式对 m 从 1 到 N 求和(其中 N 为任意正整数),得

$$\sum_{m=1}^{N}(a_{p_{m-1}+1}+\cdots+a_{p_m})\geqslant\sum_{m=1}^{N}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^m},$$

$$\sum_{m=1}^{N}(a_{p_{m-1}+1}+\cdots+a_{p_m})<\sum_{m=1}^{N}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}.$$

由上述两个不等式可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$ 同时收敛或同时发散．因此，我们如果能证明级数 $\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$ 与级数 $\sum_{m=1}^{\infty}p_m2^{-m}$ 同时收敛或同时发散，则命题即获证．

由 $\sum_{m=1}^{\infty}p_m2^{-m}$ 的收敛性易得 $\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$ 的收敛性．反之，若级数 $\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$ 收敛，则 $\sum_{m=1}^{\infty}p_m2^{-m}$ 也收敛．事实上，记 $A=\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-P_{m-1})\cdot\frac{1}{2^{m-1}}$，由于 $p_m-p_{m-1}\geqslant0(m=1,2,\cdots)$，故有

$$\begin{aligned}A&\geqslant\sum_{m=1}^{N}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}\\&=\sum_{m=1}^{N}p_m\cdot\frac{1}{2^{m-1}}-\sum_{m=1}^{N}p_{m-1}\cdot\frac{1}{2^{m-1}}\\&=\sum_{m=1}^{N}p_m\cdot\frac{1}{2^{m-1}}-\sum_{l=0}^{N-1}p_l\cdot\frac{1}{2^l}\\&=\frac{1}{2^{N-1}}p_N+\sum_{m=1}^{N-1}p_m\left(\frac{1}{2^{m-1}}-\frac{1}{2^m}\right)-p_0\\&=\sum_{m=1}^{N-1}p_m2^{-m}+\frac{1}{2^{N-1}}p_N-p_0.\end{aligned}$$

$$\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b}$$
$$=\frac{(2a-1)n+a^2-b}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})}.$$

由此可知，不论 $a=\frac{1}{2}$ 还是 $a\neq\frac{1}{2}$，当 n 充分大时，上式右端均保持定号，故原级数可当成正项级数处理．

若 $a=\frac{1}{2}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^2-b}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})}\Big/\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{a^2-b}{4},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故原级数收敛；

若 $a\neq\frac{1}{2}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2a-1)n+a^2-b}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b}}\Big/\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2a-1}{4}\neq 0,$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故原级数发散．

2628. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-1\right)+\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)\right].$$

分别考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}\right) \text{及} \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right),$$

它们都是正项级数．由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\pi^2}{32},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}\right)$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$ 收敛，从而，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right) \text{发散}.$$

2629. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right]$.

解 当 $x\neq0$ 及 $-1<x<+\infty$ 时，有

$$\ln(1+x)<x.$$

利用上式，即得

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

$$\ln\frac{n+1}{n}=-\ln\frac{n}{n+1}$$

$$=-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1},$$

即

$$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$$

于是，

$$0<\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}<\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{2}{\sqrt{n+1}}}<\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故原级数也收敛．

2630. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^{a}}$.

解 先设$a>2$. 利用斯特林格公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}n^{n}e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}\quad(0<\theta_n<1),$$

即得

$$\frac{\ln(n!)}{n^{a}}=\frac{\ln 2\pi}{2n^{a}}+\frac{\ln n}{2n^{a}}+\frac{\ln n}{n^{a-1}}+\frac{\theta_n}{12n^{a+1}}-\frac{1}{n^{a-1}}.$$

显然，当$a>2$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a}}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{a}}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{a-1}}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\theta_n}{n^{a+1}}$以及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a-1}}$均收敛，故原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^{a}}$收敛．

现设$a\leqslant 2$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=+\infty$，利用139题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}=+\infty,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)}{n^a}\bigg/\frac{1}{n^{a-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}=+\infty,$$

再注意到此时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a-1}}$发散，即知原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^a}$发散．

2631. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$.

解 方法一：

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(e^{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}-1\right)$$

$$=\frac{e^{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}-1}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}\cdot n(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}).$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=+\infty,$$

利用$\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$，即得$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=+\infty$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$收敛．

方法二：

当 t 充分大时，有

$$e^t \geqslant At^4 (A\text{ 为大于零的常数}),$$

故存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$e^{\sqrt[3]{n}} \geqslant An^{\frac{4}{3}}.$$

从而

$$e^{-\sqrt[3]{n}} \leqslant \frac{1}{A}n^{-\frac{4}{3}}.$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}}$ 收敛，故原级数收敛．

2632. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$.

解 当 t 充分大时，有 $e^t \geqslant Bt^7$ ($B>0$ 为常数)，故存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$0<n^2e^{-\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{B}n^{-\frac{7}{2}+2}=\frac{1}{B}n^{-\frac{3}{2}}.$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛，故原级数收敛．

2633. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$.

解 $a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}}-1 = \frac{\ln n}{e^{n^2+1}}-1 \sim \frac{\ln n}{n^2+1} \sim \frac{\ln n}{n^2}$. 又由于存在 n_0，使当 $n \geqslant n_0$ 时，有 $0<\frac{\ln n}{n^2} \leqslant \frac{A}{n^{\frac{3}{2}}}$ ($A>0$，常数)，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$ 收敛.

2634. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$.

解 先设 $c\neq 0$. 若 $bc-ad\neq 0$,应用阿拉伯判别法,我们有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}-\frac{a\ln(n+1)+b}{c\ln(n+1)+d}}$$

$$=n\left\{e^{\frac{(bc-ad)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(c\ln n+d)(c\ln(n+1)+d)}}-1\right\}$$

$$=\frac{e^{\frac{(bc-ad)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(c\ln n+d)(c\ln(n+1)+d)}}-1}{\frac{(bc-ad)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(c\ln n+d)[c\ln(n+1)+d]}}\cdot\frac{(bc-ad)\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

$$\cdot\frac{1}{(c\ln n+d)[c\ln(n+1)+d]}.$$

当 $n\to\infty$ 时,上述等式右端的第一个因子趋于 1,第二个因子趋于 $bc-ad$,第三个因子趋于零,因此,

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=0.$$

从而级数发散;若 $bc-ad=0$,此时 $a_n=$常数$>0(n=1,2,\cdots)$,故级数发散.

若 $c=0$,则,

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{e^{-\frac{a\ln(1+\frac{1}{n})}{d}}-1}{-\frac{a}{d}\ln(1+\frac{1}{n})}$$

$$\cdot\left(-\frac{a}{d}\right)\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\to-\frac{a}{d}\qquad(d\neq 0).$$

于是,如果 $-\frac{a}{d}>1$ 即 $\frac{a}{d}<-1$,则级数收敛;如果 $-\frac{a}{d}<1$,则级数发散;若 $-\frac{a}{d}=1$,则 $a_n=\frac{C}{n}$ ($C>0$ 是常

数)，从而级数发散.

2635. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$.

解 考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\frac{1}{n}}$. 由于

$$\frac{\dfrac{1}{\ln^2\frac{1}{n}}}{\dfrac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}}=\left(\frac{\ln\sin\frac{1}{n}}{\ln\frac{1}{n}}\right)^2$$

并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\sin\frac{1}{n}}{\ln\frac{1}{n}}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{\ln x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=1,$$

故
$$\frac{1}{\ln^2}(\sin\frac{1}{n})\sim\frac{1}{\ln^2\frac{1}{n}}=\frac{1}{\ln^2 n}.$$

又当 $n>1$ 时，$0<\ln n<\sqrt{n}$，故$\frac{1}{\ln^2 n}>\frac{1}{n}$. 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$ 发散，从而原级数发散.

2636. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\cos\frac{a}{n})^{n^3}$.

解 若 $a=0$. 级数显然发散.

若 $a\neq0$. 由于

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2}=e^{n^2\ln\cos\frac{a}{n}}$$

$$=e^{n^2\ln\left[1-\frac{a^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]}$$

$$=e^{n^2\left[-\frac{a^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]}=e^{-\frac{a^2}{2}+O(\frac{1}{n^2})}$$

并且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{-\frac{a^2}{2}}<1$,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$当$a\neq 0$时收敛.

2637. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$.

解 $a_n=\ln\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$

$$=\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\ln\left[1+\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}},$$

其中$\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\to 0$(当$n\to\infty$时).

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}\pi x-\cos\pi x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\operatorname{ch}\pi x+\pi\sin\pi x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\pi^2\operatorname{ch}\pi x+\pi^2\cos\pi x}{2}=\pi^2,$$

故得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}}}{\dfrac{1}{n^2}}\cdot\ln\left[1+\left(\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\left(\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}}$$

$=1\cdot\pi^2\cdot1=\pi^2$,

故存在常数 $k>0$,有 $\left|\dfrac{a_n}{\dfrac{1}{n^2}}\right|\leqslant k$($n$ 充分大),即 $|a_n|\leqslant k\cdot\dfrac{1}{n^2}$,由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,故原级数收敛.

2638. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

解 由于

$$n!>\left(\frac{n}{e}\right)^{n*)},$$

故有

$$\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}>\frac{1}{e^n}n^{n-\sqrt{n}}=b_n.$$

但 $\sqrt[n]{b_n}=\dfrac{1}{e}n^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\to+\infty$(当 $n\to\infty$ 时),因此级数

当 $a\neq\sqrt{bc}$ 时 $\ln\frac{a}{\sqrt{bc}}\neq 0$，且当 n 充分大时，级数的项不变号，故当 $a\neq\sqrt{bc}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$ 发散.

当 $a=\sqrt{bc}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}\right]$. 由于当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{\frac{(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}}{\frac{1}{n^2}}\to\frac{1}{8}(\ln b-\ln c)^2,$$

并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}\right]$ 收敛，即当 $a=\sqrt{bc}$ 时，原级数收敛.

2641. $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{n^a}-1)$.

解 当 $a\geqslant 0$ 时，$a_n=n^{n^a}-1\to\infty$（当 $n\to\infty$ 时），故级数发散.

当 $-1\leqslant a<0$ 时，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{x^a}-1}{\frac{1}{x^{|a|}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}-1}{\frac{1}{x^{|a|}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}\left(\frac{1}{x^{|a|+1}}-|a|\cdot\frac{\ln x}{x^{|a|+1}}\right)}{-|a|\cdot\frac{1}{x^{|a|+1}}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}(\ln x-|a|^{-1})=+\infty,$$

故对于 $a_n=n^{n^a}-1$，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^{|a|}}} \to \infty.$$

因此，存在常数 $k > 0$，使 $a_n \geqslant k \cdot \frac{1}{n^{|a|}}$，但当 $|a| \leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{|a|}}$ 发散，从而当 $-1 \leqslant a < 0$ 时，原级数发散.

当 $a<-1$ 时，取 β 使 $a<\beta<-1$，于是 $|a|>|\beta|>1$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{x^a}-1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}-1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}\left(\frac{1}{x^{|a|+1}}-|a|\cdot\frac{\ln x}{x^{|a|+1}}\right)}{-|\beta|\cdot\frac{1}{x^{|\beta|+1}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}\left(\left|\frac{a}{\beta}\right|\frac{\ln x}{x^{|a|-|\beta|}}-\frac{1}{|\beta|}\cdot\frac{1}{x^{|a|-|\beta|}}\right)$$

$$=0,$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{|\beta|}}}=0,$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{|\beta|}}$ 收敛，从而当 $a<-1$ 时，原级数收敛.

2642. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{1}{n^a}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^a}\right)\right]$.

解 $a_n=\ln\frac{1}{n^a}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^a}\right)$. 显然必须设 $a\geqslant 0$. 因若 $a<0$，则对于某些 n，$\ln(\sin n^{-a})$ 可能无意义. 当 $a=0$ 时，

$a_n=-\ln\sin 1=$常数$>0(n=1,2,\cdots)$，故此时级数发散，当 $a>0$ 时，将 a_n 改写为

$$a_n=\ln\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}=\ln\left[1+\left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}-1\right)\right]$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}-1\right)\ln\left[1+\left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}-1\right)\right]^{\frac{\sin\frac{1}{n^a}}{\frac{1}{n^a}-\sin\frac{1}{n^a}}}.$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^a}{\sin x^a}-1}{x^{2a}}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y}{\sin y}-1}{y^2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y-\sin y}{y^2\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{y-\sin y}{y^3}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{3y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{6y}=\frac{1}{6},$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{2a}}}=\frac{1}{6}.$$

从而得知：当 $2a>1$ 即 $a>\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

而当 $2a\leqslant 1$ 即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

2643. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}\ (a>0)$.

解 $a_n=a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}$. 当 $a=1$ 时，显然 $a_n=1$，因而级数发散. 当 $a\neq 1$ 时，考虑

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=(b+c\ln n)\ln a.$$

利用 2615 题的结果(对数判别法),即知:

(1)当 $c=0$,$b\ln a>1$,即 $a^b>e$ 时,原级数收敛;而当 $c=0$,$b\ln a\leqslant 1$,即 $a^b\leqslant e$ 时,原级数发散.

(2)当 $c\neq 0$,$c\ln a>0$,即 $a^c>1$ 时,原级数收敛;而当 $c\neq 0$,$c\ln a<0$ 即 $a^c<1$ 时,原级数发散.

综上所述,仅当 $c=0$,$a^b>e$ 及 $a^c>1$ 时,原级数收敛.

2644. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}(a>0,b>0)$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}}{\frac{1}{n^{a+b}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n+a+b}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{a}{n})^{n+b}(1+\frac{b}{n})^{n+a}}=\frac{1}{e^a\cdot e^b}$$

$$=e^{-(a+b)},$$

故当 $a+b>1$ 时,级数收敛;而当 $a+b\leqslant 1$ 时,级数发散.

2645. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\cdots(2n)!}$.

解 $a_n=\frac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\cdots(2n)!}$. 由于

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+2)^n}{(n+3)\cdots(2n+2)}<\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$$

$$=\left(\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2-2}\right)^{-1}\to\frac{1}{e}<1$$

（当 $n\to+\infty$ 时），

于是由 2592 题的结论知原级数收敛.

研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性，其通项如下：

2646. $u_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}$

解 由于

$$0<u_n\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{n^{-\frac{1}{2}}}{1}dx=n^{-\frac{3}{2}},$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

2647. $u_n=\dfrac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\,dx}$.

解 由于

$$0<u_n\leqslant\frac{1}{\int_0^n x\,dx}=\frac{2}{n^2}$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

2648. $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2x}{x}dx$.

解 由于

$$u_n\geqslant\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin^2x\,dx=\frac{1}{2(n+1)}>0,$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

2649. $u_n=\int_n^{n+1}e^{-\sqrt{x}}dx$.

解 由于

$$0<u_n\leqslant e^{-\sqrt{n}},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ 是收敛的*)，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

*)事实上，$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}}=0$，利用比较判别法即获证.

2650. $u_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin^3 x}{1+x}dx$.

解 由于函数 $\sin^3 x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{n}\right)$ $(n\geqslant 2)$ 内是单调增加的，故有

$$0\leqslant u_n\leqslant\frac{\sin^3\frac{\pi}{n}}{1+0}\cdot\frac{\pi}{n}\leqslant\left(\frac{\pi}{n}\right)^4\qquad(n\geqslant 2).$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

2651. $u_n=\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$.

解 由于

$$0<u_n\leqslant\frac{n\cdot n!}{n!\,(n+1)\cdots(2n)}=\frac{n}{(n+1)\cdots(2n)}$$

$$<\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}\text{（当 } n \text{ 足够大）},$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

2652. $u_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^a}$.

解 首先，我们证明：当 $\alpha>2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛．事实上，

$$0<u_n\leqslant\frac{n\ln^2 n}{n^{\alpha}}=\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}},$$

取 $\delta>0$ 使 $\alpha-1-\delta>1$，由于

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}}=\frac{\frac{\ln^2 n}{n^{\delta}}}{n^{\alpha-1-\delta}}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n^{\delta}}=0$，故当 n 充分大时，有

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}}\leqslant\frac{C}{n^{\alpha-1-\delta}}\quad(C\text{ 为正的常数}).$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1-\delta}}$ 收敛，故当 $\alpha>2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛．

其次，我们证明：当 $\alpha\leqslant 2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散．事实上，当 n 充分大时，有

$$u_n\geqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n^2}=\frac{\ln n!}{n^2}.$$

因为当 $1\leqslant r\leqslant n$ 时，$(n-r)(r-1)\geqslant 0$，故有

$$r(n-r+1)\geqslant n.$$

令 $r=1$，得 $1\cdot n=n$；

$r=2$，得 $2(n-1)\geqslant n$；

……………………

$r=n$，得 $n\cdot 1=1$.

连乘得

$$(n!)^2 \geqslant n^n \qquad \text{或 } n! \geqslant n^{\frac{n}{2}}.$$

利用上述不等式，可得

$$u_n \geqslant \frac{\ln n^{\frac{n}{2}}}{n^2} = \frac{\ln n}{2n} > \frac{1}{n} > 0 \quad (\text{当 } n \geqslant n_0 \text{ 时}),$$

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

用对应的级数来代替叙列 $x_n (n=1,2,\cdots)$，然后研究它们的收敛性，设：

2653. $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

解
$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} \\ &= O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，记 $x_0 = 0$，故

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

当 $n \to \infty$ 时的极根存在，即叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

2654. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}$.

解 $x_n - x_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\{(\ln n)^2 - [\ln(n-1)]^2\}$

$$=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\ln\frac{n}{n-1}\cdot\ln[n(n-1)]$$
$$=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left[\ln n^2+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[2\ln n-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$=\frac{\ln n}{n}-\left\{\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right\}=O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

考虑级数$\sum_{n=2}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$. 由级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$的收敛性可知级数$\sum_{n=2}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$收敛，于是

$$x_n=\sum_{k=2}^{n}(x_k-x_{k-1})$$

当$n\to\infty$时的极限存在，即叙列$\{x_n\}$收敛.

2655. 假如

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$；　(б)+ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$ *；

(в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$，

约需取级数的多少项来求级数的和方可精确到10^{-5}.

解 (a) 余项 $R_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$

$$=\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{N}.$$

欲精确到10^{-5}，只要$\frac{1}{N}<10^{-5}$，即只要

---

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明，中译本基本是按俄文第二版翻译的，俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

(в) 余项 $R_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$. 仍用不等式

$$k!>\left(\frac{k}{e}\right)^k\qquad(k=1,2,\cdots),$$

则有

$$R_N<\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{e}{2n-1}\right)^{2n-1}\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2n-1}$$
$$=\left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2N+1}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2l}.$$

取 $N\geqslant 1$, 则 $\frac{e}{2N+1}<1$, 故有

$$R_N<\left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2N+1}\frac{1}{1-\left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2}}.$$

今取 $N=5$, 则有

$$R_N<\left(\frac{e}{11}\right)^{11}\cdot\frac{121}{113.614}\approx10^{-6.6374}<10^{-5},$$

即此级数取 $N\geqslant5$ 项求和就可保证精确到 10^{-5}.

§ 2. 变号级数收敛性的判别法

1° 级数的绝对收敛性　　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{1}$$

称为绝对收敛, 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \tag{2}$$

收敛. 这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛, 绝对收敛级数的和与项相加的顺序无关.

要确定级数(1)的绝对收敛性, 只须把对于同号级数收敛性的已知

判别法应用于级数(2)就够了.

若级数(1)收敛,而级数(2)发散,则称级数(1)为条件收敛(非绝对收敛). 条件收敛级数的各项顺序加以改变后可使其和等于任何数(黎曼定理).

2° 莱布尼兹判别法　　交错级数

$$b_1 - b_2 + b_3 \cdots\cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots$$

$(b_n \geqslant 0)$ 收敛(一般说来,非绝对地),若(a) $b_n \geqslant b_{n+1} (n = 1, 2, \cdots)$ 和(6) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. 在这种情形下,对于级数的余项

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \cdots$$

有以下的估计

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \qquad (0 \leqslant \theta_n \leqslant 1).$$

3° 亚伯耳判别法　　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3}$$

收敛,若1),级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,2)数 $b_n (n = 1, 2, \cdots)$ 形成一单调并有界的叙列.

4° 迪里黑里判别法　　级数(3)收敛若:1)部分和 $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 是有界的;2)当 $n \to \infty$ 时 b_n 单调地趋近于零.

2656. 证明:可把非绝对收敛级数的各项不变更其顺序而分群组合起来使所得的新级数绝对收敛.

证　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一收敛而非绝对收敛的级数. 利用哥西准则,即知:

对于给定的 $\epsilon_1 = \frac{1}{2}$,存在 N_1,使对于任意自然数 m_1,有

$$|a_{N_1+1} + \cdots a_{N_1+m_1}| < \epsilon_1;$$

对于给定的 $\varepsilon_2=\frac{1}{2^2}$，存在 N_2（可取 $N_2>N_1$），使对于任意自然数 m_2，有

$$|a_{N_2+1}+\cdots+a_{N_2+m_2}|<\varepsilon_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

对于给定的 $\varepsilon_k=\frac{1}{2^k}$，存在 N_k（可取 $N_k>N_{k-1}$），使对于任意自然数 m_k，有

$$|a_{N_k+1}+\cdots+a_{N_k+m_k}|<\varepsilon_0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

令 $A_0=a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}$,

$A_1=a_{N_1+1}+a_{N_1+2}\cdots+a_{N_2}$,

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$A_k=a_{N_k+1}+a_{N_k+2}+\cdots+a_{N_k+1}$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

则有 $|A_k|<\varepsilon_k=\frac{1}{2^k}(k=1,2,\cdots)$，且 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k$ 是原级数的各项不变更其顺序而分群组合起来所得的新级数. 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

收敛，故级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|A_k|$ 收敛，即级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k$ 绝对收敛. 证毕.

2657. 设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，若(a) 当 $n\to\infty$ 时，此级数的通项 a_n 趋于零；(б) 由组合已给级数的各项但不变更原有顺序所得的某一级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛；(в) 在项 $A_n=\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i(p_1<$

$p_2<\cdots$）中相加项 a_i 的数目是有界的，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的.

证 设 A_n 中相加项的数目不超过某一固定的自然数 m，即

$$p_{n+1}-p_n\leqslant m\quad(n=1,2,\cdots).$$

任给 $\varepsilon>0$，考虑 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2m+1}>0$. 由 $a_n\to 0$（当 $n\to\infty$ 时），故存在 N'，使当 $n\geqslant N'$ 时，有

$$|a_n|<\varepsilon_1.$$

再由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的收敛性知，存在 $N_1\geqslant N'$，使当 $n\geqslant N_1$ 及 p 为任意自然数时，有

$$|A_n+A_{n+1}+\cdots+A_{n+p}|<\varepsilon_1.$$

今取 $N=p_{N_1}$，当 $n\geqslant N$ 时，对任意自然数 s，考察 $\varDelta_{n,s}=a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+s}$，注意每一个 a_i 必属于某一个 A_k. 记 A_n 内各项 a_i 元素的集合为 $\tilde{A}_n$，即知：当 $i<j$ 时，若 $a_i\in\tilde{A}_k$，$a_j\in\tilde{A}_l$，则必有 $k\leqslant l$. 今在 $\varDelta_{n,s}$ 中看各项. 显然 $a_n\in\tilde{A}_{N_1+r}$（$r\geqslant 0$）. 再看以后各项，便有

$$\varDelta_{n,s}=B+A_{N_1+r+1}+\cdots+A_{N_1+r+q}+B'$$

其中 $B=a_n+\cdots+a_{p_{N_1+r+1}-1}$，$B'=a_{p_{N_1+r+q+1}}+\cdots+a_{n+s}$. 很明显，$B$ 是 A_{N_1+r} 中一部分项之和，B' 是 $A_{N_1+r+q+1}$ 中一部分项之和，于是（注意 $n\geqslant N\geqslant N_1\geqslant N'$）

$$|B|\leqslant(p_{N_1+r+1}-p_{N_1+r})\varepsilon_1\leqslant m\varepsilon_1,$$

$$|B'|\leqslant(p_{N_1+r+q+2}-p_{N_1+r+q+1})\varepsilon_1\leqslant m\varepsilon_1,$$

$$|A_{N_1+r+1}+\cdots+A_{N_1+r+q}|<\varepsilon_1,$$

从而(当 $n\geqslant N$,s 为任何自然数)

$$|\Delta_{n,s}|\leqslant|B|+|A_{N_{1+r+1}}+\cdots+A_{N_{1+r+q}}|$$
$$+|B'|<(2m+1)\varepsilon_1=\varepsilon.$$

根据哥西收敛准则即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证毕.

2658. 证明:若将收敛级数的各项重新排列,而使每一项离开原有的位置不超过 m 个位置(m 为预先给定的数),则其和不变.

证 设原收敛级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,当然有 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 又记重排出的新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$,再记 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 N 项部分和为 $S_N=\sum_{n=1}^{N}a_n$,记 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的前 N 项部分和为 $\sigma_N=\sum_{n=1}^{N}b_n$. 当然有 $\lim_{N\to\infty}S_N=S$. 今证 σ_N 的极限也存在,且等于 S.

考察 σ_N 与 S_N 之差

$$\Delta_N=\sigma_N-S_N.$$

任给 $\varepsilon>0$,取 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2m}>0$,则存在 N_1,使当 $n\geqslant N_1$ 时,有 $|a_n|<\varepsilon_1$. 今取

$$N\geqslant N_1+2m,$$

又记 S_k 内各 a_n 项元素集合为 $\tilde{S}_k$,记 σ_k 内各 b_n 项元素集合为 $\tilde{\sigma}_k$,则有

$$\Delta_N=\sum_{b_n\in\tilde{\sigma}_N}b_n-\sum_{a_n\in\tilde{S}_N}a_n.$$

今从 a_1 查起,看 $a_1,a_2,\cdots$ 至 a_N,注意每一个 a_i 被重排

成 b_j 时，i 与 j 的标号差不超过 m. 因此，对每一个 a_i 总可以在 b_i 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $b_j=a_i$. 反过来，从 b_1 查起，看 $b_1,b_2,\cdots$ 至 b_N，对每一个 b_j 总可以在 a_j 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $a_i=b_j$. 但也可能且只有那种可能：最后一段不超过 m 个元素的 a_i，即 $a_N,a_{N-1},\cdots,a_{N-m}$ 之内若干个元素可能被迁到 b_N 之后，从而在 σ_N 内找不到搬迁元素，但个数（设为 r 个）不超过 m. 同样，也有可能最后一段不超过 m 个元素的 b_j，即 $b_N,b_{N-1},\cdots,b_{N-m}$ 之内若干个元素在 $\widetilde{S}_n$ 内找不到搬迁元素，但个数（设为 s 个）不超过 m. 除此之外均有对应的搬迁元素且一一对应. 于是，

$$
\begin{aligned}
|\Delta_N| &= \Big|\sum_{\substack{bn\in\widetilde{\sigma}_N\\ b_n\notin\widetilde{S}_N}} b_n - \sum_{\substack{a_n\in\widetilde{S}_N\\ a_n\notin\widetilde{\sigma}_N}} a_n\Big| \\
&\leqslant \sum_{\substack{b_n\in\widetilde{\sigma}_N\\ b_n\notin\widetilde{S}_N}} |b_n| + \sum_{\substack{a_n\in\widetilde{S}_N\\ a_n\notin\widetilde{\sigma}_N}} |a_n| \\
&< s\varepsilon_1 + r\varepsilon_1 \leqslant m\varepsilon_1 + m\varepsilon_1 = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

上式中 a_n 的下标 $n\geqslant N_1+m>N_1$，故 $|a_n|<\varepsilon$. 而 b_n 的下标 $n\geqslant N_1+m$，记住 b_n 由某 a_i 搬迁而来，其下标 i 在 n 的前后距离不超过 m，故此时 $i\geqslant N_1$，因而此时 $|b_n|=|a_i|<\varepsilon_1$. 从而上述不等式是成立的. 由极限定义知

$$\lim_{N\to\infty}\Delta_N=0,$$

也即有

$$\lim_{N\to\infty}\sigma_N=\lim_{N\to\infty}S_N=S.$$

从而命题获证.

证明下列级数的收敛性并求它们的和：

2659. $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\cdots$.

解 $S_n=1-\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}-\frac{7}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$,

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}-\cdots(-1)^{n-2}\frac{2n-3}{2^{n-1}}$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n},$$

将上面两式相加，得

$$\frac{3}{2}S_n=1-\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}-\frac{2}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2}{2^{n-1}}$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n}.$$

于是

$$3S_n=2-2+\frac{2}{2}-\frac{2}{2^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2}{2^{n-2}}$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$$
$$=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}\to\frac{2}{3}$$

（当 $n\to\infty$时），

即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{9}.$$

因此，原级数收敛．其和为$\frac{2}{9}$.

2660. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$.

解 显然该级数绝对收敛，从而它是收敛的，记其和为 S. 考虑一个特殊的部分和

$$S_{3n}=\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-3}}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-2}}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-1}}\right)$$
$$=\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\right)\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}},$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{10}{7}.$$

2661. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

解 考虑部分和 S_m. 当 $m=2n$ 时，有

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=C+\ln 2n+\varepsilon_{2n}-2\cdot\frac{1}{2}(C+\ln n+\varepsilon_n)^{*)}$$

$$=\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n=\ln 2+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

于是得

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\ln 2.$$

同样，当 $m=2n+1$ 时，也有

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)=\ln 2.$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}S_m=\ln 2,$$

即原级数收敛，其和为 ln2.

*） 利用 146 题的结果.

2662. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$，求从已知级数把各项重排后所成级数：

(a) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$

(б) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$

的和.

解 (a)考虑部分和 S_m. 当 $m=3n$ 时，有

$$S_{3n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}$$

$$+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}$$

$$=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1})$$

$$-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n})$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)$$

$$=\sigma_{2n}-\frac{1}{2}\sigma_n-\frac{1}{2}\sigma_{2n}=\frac{1}{2}(\sigma_{2n}-\sigma_n)$$

$$=\frac{1}{2}l_{2n},$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{1}{2}\ln 2$. 同样有

$$S_{3n+1}=S_{3n}+O\left(\frac{1}{n}\right),S_{3n+2}=S_{3n}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

当 $n\to\infty$时，它们与 S_{3n}有相同的极限，从而

$$\lim_{m\to\infty}S_m=\frac{1}{2}\ln 2,$$

即原级数收敛，其和为$\frac{1}{2}\ln 2$

2663. 把收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的项重排，使它成发散的.

解 我们这样进行重排：先取两个正项，然后取一个负项，得

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots \qquad (1)$$

将上述重排后所得的级数(1)每相邻三项结合而得一个新级数，如果它发散，当然上述重排后所得的级数也发散. 由于

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}>\frac{1}{\sqrt{4n}},\frac{1}{\sqrt{4n-1}}>\frac{1}{\sqrt{4n}},$$

故有

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}>\frac{2}{\sqrt{4n}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n}},$$

因而

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}$$
$$>\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2n}}>0 \quad (n=1,2,\cdots).$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

发散，从而，重排后所得的级数(1)也发散.

研究变号级数的收敛性：

2664. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$.

解 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，故原级数绝对收敛，从而也是收敛的.

2665. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

解 $a_n=(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+100}{3n+1}=\frac{2}{3}<1,$$

故原级数绝对收敛，从而也是收敛的.

2666. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots$.

解 将此级数每相邻三项组合得一新级数，它是交错级数，满足莱布尼兹判别法的两个条件，因而它是收敛的. 利用 2657 题的结果，即知原级数收敛. 显然此级数仅为条件收敛.

2667. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100}n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$.

解 由于当 $n\to\infty$时，$\frac{\ln^{100}n}{n}$单调下降趋于零，且

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{8}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}$$

为有界的，故按迪里黑里判别法即知原级数收敛.

2668. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$.

解 将通项改写为

$$(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}=(-1)^n\frac{1}{2n}+(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}.$$

显然级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}$收敛. 下面证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}$ 也收敛.事实上,部分和

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos 2n}{2n}-\sum_{n=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{2\cos 4n}{4n}$$
$$=S_N^{(1)}-S_N^{(2)}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4n}{2n}$ 均收敛(因为当 $k\to\infty$ 时,$\frac{1}{2k}$ 单调趋于零,且

$$\left|\sum_{n=1}^{k}\cos 2n\right|=\left|\frac{\sin(2k+1)-\sin 1}{2\sin 1}\right|\leqslant\frac{1}{\sin 1},$$

故由迪里黑里判别法即获证),记它们的和分别为 $S^{(1)}$ 及 $S^{(2)}$,则当 $N\to\infty$ 时,$S_N\to S^{(1)}-S^{(2)}$,即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛.从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$ 收敛.

2669. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

解 $(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

显见级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 均收敛,故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$ 收敛.

2670. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

解 $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$

$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left[1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O(\frac{1}{n})\right]$

$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$均收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故原级数发散.

2671. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

解 $\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})=\sin\left(n\pi\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}\right)$

$=\sin n\pi\left(1+\frac{k^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$

$=\sin\left(n\pi+\frac{k^2\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$

$=(-1)^n\sin\left(\frac{k^2\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$

$=(-1)^n\frac{k^2\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k^2\pi}{2n}$条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$收敛，故原级数收敛.

2672. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(\sqrt{n})}}{n}$.

解 这级数首先出现三个负项，之后出现五个正项．如此下去，若将这些相邻且具相同符号的几项合并成

一项，则所得的新级数为一交错级数：

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right). \quad (1)$$

容易证明不等式

$$\frac{2}{k+1}<\underbrace{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots}_{k\text{ 项}}$$

$$\underbrace{+\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}}_{(k+1)\text{项}}<\frac{2}{k}$$

事实上，开头 k 项的和小于 $k\cdot\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k}$，而后面 $k+1$ 项的和小于 $(k+1)\cdot\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k}$，所以整个和数小于 $\frac{2}{k}$. 左面的不等式可由整个和数大于 $k\cdot\frac{1}{k^2+k}+(k+1)\cdot\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{2}{k+1}$ 而得.

于是，级数(1)的通项当 $k\to\infty$ 时趋于零，并且它的绝对值单调减小，由莱布尼兹判别法即知级数(1)收敛.

注意，原级数的部分和恰好包含在级数(1)的某相邻两部分和之间，由级数(1)的收敛性知此两相邻部分和趋于同一极限，因此原级数部分和有极限，从而原级数收敛. 显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\right|$ 发散，故原级数仅为条件收敛.

2673. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

解 由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，即通项不趋于零，故级数发散．

2674. 证明：若

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)>0,$$

则交错级数 $b_1-b_2+b_3-b_4+\cdots+(-1)^{n-1}b_n+\cdots(b_n>0)$收敛．

证 设$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=A$，我们取 $\varepsilon>0$，使得 $A-\varepsilon>0$，则存在自然数 N，使当 $n\geqslant N$ 时，有

$$A-\varepsilon<n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)<A+\varepsilon$$

或

$$1<1+\frac{A-\varepsilon}{n}<\frac{b_n}{b_{n+1}}<1+\frac{A+\varepsilon}{n}.$$

因此当 $n\geqslant N$ 时，$b_n>b_{n+1}$，即 b_n 单调下降．

下面证明$\lim_{n\to\infty}b_n=0$. 事实上，利用 2606 题的结果即知

$$b_n=o\left(\frac{1}{n^{A-\varepsilon}}\right).$$

例如，取 $\varepsilon=\frac{A}{2}$，于是，当 $n\to\infty$时，有 $b_n\to0$.

因此，交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 收敛．

研究下列级数的绝对收敛性和条件收敛性：

2675. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

解 当 $p<0$ 时，由于 $n^{-p}\to+\infty$，故级数发散.

当 $p=0$ 时，由于 $n^{-p}=1$，故级数也发散.

当 $0 < p \leqslant 1$ 时，由于 $a_n > a_{n+1}$ 且 $a_n \to 0$（其中 $a_n = \frac{1}{n^p}$），故此交错级数收敛；然当 $0 < p \leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散，故此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 仅为条件收敛.

当 $p > 1$ 时，由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 绝对收敛.

2676. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$.

解 首先研究此级数当 p 为何值时绝对收敛. 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

且当 $p > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛，故当 $p > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 绝对收敛.

当 $p \leqslant 0$ 时，原级数显然发散.

下面研究当 $0 < p \leqslant 1$ 时原级数的收敛性，将通项改写成 $\frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 当 $0 < p \leqslant 1$ 时条件收敛，而叙列 $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 为一单调上升且趋于 1 的叙列，故由亚伯耳判别法即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$

收敛．但因级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$当$0<p\leqslant 1$时发散，故当$0<p\leqslant 1$时，原级数仅为条件收敛．

2677．$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$．

解 $\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+O(\frac{1}{n^{3p}})$．

考虑级数

(1)$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$，(2)$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$，(3)$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{3p}}$．

显然当$p>1$时，级数(1)，(2)，(3)均绝对收敛，故当$p>1$时，原级数绝对收敛．

当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时，级数(1)条件收敛，级数(2)及(3)均绝对收敛，故当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时原级数条件收敛．

当$p\leqslant 0$时，由于通项不趋于零，故原级数发散．

最后，设$0<p\leqslant\frac{1}{2}$．令m是满足

$$mp\leqslant 1<(m+1)p$$

的唯一正整数(显然$m\geqslant 2$)．我们有

$$\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2p}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^{3n}}{n^{3p}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{4p}}+\cdots+(-1)^{m-1}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{(-1)^{mn}}{n^{mp}}+O\left(\frac{1}{n^{(m+1)p}}\right).$$

若m为偶数，则由于交错级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$，

$$\sqrt[n]{|a_n|}\geqslant a \text{ 或 } |a_n|\geqslant a^n>1,$$

上式表明，当 $n\to\infty$ 时，a_n 并非趋于零，故此时原级数发散．

2679. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$.

解 当 x 为负整数时，级数显然无意义.

当 x 不为负整数时，此交错级数满足莱布尼兹判别法的条件，故它是收敛的. 但因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x+n}$ 发散，故原级数当 x 不为负整数时仅为条件收敛.

2680. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$.

解
$$\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}=\frac{(-1)^n}{n^p\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^p}$$
$$=\frac{(-1)^n}{n^p}\left[1-\frac{p\cdot(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{p}{n^{p+1}}+O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right).$$

当 $0<p\leqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+2}}$ 绝对收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$ 当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛.

当 $p>1$ 时，由 $\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}=O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 即知原级数绝对收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时，通项不趋于零，原级数显然发散.

2681. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^{p}}$.

解 由于

$$\frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^{p}}=\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)^{-p}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}-\frac{p}{n^{\frac{p+1}{2}}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right), \tag{1}$$

故原级数当 $p>2$ 时绝对收敛；而当 $p\leqslant 0$ 时原级数显然发散. 下面我们再来研究当 $0<p\leqslant 2$ 时原级数的收敛性.

当 $1<p\leqslant 2$时，由(1)式第一项组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}$ 条件收敛，而由第二项、第三项组成的级数显然收敛，故此时原级数条件收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时，由第一项及第三项组成的级数收敛，但由第二项组成的级数发散，故此时原级数发散.

2682. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}+\sin\frac{n\pi}{4}}$.

解 $$\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}+\sin\frac{n\pi}{4}}=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}}\left[1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}}\right]^{-1}$$

$$=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}}\left[1-\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}}+O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}}-\frac{\sin^{2}\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{3p}}\right).$$

当 $2p>1$ 即 $p>\frac{1}{2}$ 时，由第二项及第三项所组成的级数均收敛，而对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$，由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$ 且 $\frac{1}{n^p}$ 单调减小，又

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{8}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}},$$

故由迪里黑里判别法知它是收敛的. 从而当 $p>\frac{1}{2}$ 时，原级数收敛. 又因 $\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2n^p}$，且当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^p}$ 收敛，故当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}$ 发散，从而此时原级数条件收敛.

当 $p>1$ 时，由 $\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}=O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 即知原级数绝对收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时，原级数显然发散.

当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由于

$$\frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n}=\frac{1-\cos\frac{n\pi}{8}}{2n}\geqslant 0,$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{8}}{2n}$收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n}$发散，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}$发散. 再仿 2677 题 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 情形之证，即易知原级数发散.

2683. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

解 通项为

$$\begin{aligned}a_n&=(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}\\&=(-1)^n\frac{1}{\sqrt[100]{n}}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\&=\frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}+O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}\right).\end{aligned}$$

显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}$绝对收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$条件收敛，故原级数条件收敛.

2684. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n^{100}}{2^n}$,

解 考虑绝对值组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n^{100}}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{100}}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100}=\frac{1}{2}<1,$$

故原级数绝对收敛.

2685. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{n^2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}}=e^0=1,$$

从而知通项 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$当 $n\to\infty$时并不趋于零，故原级数发散.

2686. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

解 由于$\frac{1}{\ln n}$当 $n\to\infty$时单调下降趋于零，又部分和

$$\left|\sum_{m=2}^{n}\sin\frac{m\pi}{12}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{24}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{12}}{2\sin\frac{\pi}{24}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

有界，故级数收敛.

但是

$$\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}\right|\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{12}}{\ln n}=\frac{1-\cos\frac{n\pi}{6}}{2\ln n}$$

$$=\frac{1}{2\ln n}-\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{2\ln n},$$

而级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散，级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{\ln n}$ 收敛，故级数

$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}\right|$发散. 从而,原级数仅为条件收敛.

2687. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$.

解 记 $A_l=\{n|[\sqrt{n}]=l\}(l=1,2,\cdots)$. 显然 A_l 中的元素 n 满足

$$l^2\leqslant n<(l+1)^2,$$

于是 A_l 中元素的个数为 $2l+1$. 考虑,

$$u_l=\sum_{n\in A_l}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p},$$

则有

$$u_l=\sum_{n\in A_l}\frac{(-1)^l}{n^p}=(-1)^l v_l,$$

其中

$$v_l=\sum_{n\in A_l}\frac{1}{n^p}.$$

当 $p>0$ 时,有

$$\begin{aligned}v_l-v_{l+1}&=\sum_{s=0}^{2l}\frac{1}{(l^2+s)^p}-\sum_{s=0}^{2(l+1)}\frac{1}{[(l+1)^2+s]^p}\\&=\sum_{s=0}^{2l}\left\{\frac{1}{(l^2+s)^p}-\frac{1}{[(l+1)^2+s]^p}\right\}\\&\quad-\frac{1}{[(l+1)^2+2l+1]^p}\\&\quad-\frac{1}{[(l+1)^2+2l+2]^p}\\&=\sum_{s=0}^{2l}\frac{[(l+1)^2+s]^p-(l^2+s)^p}{(l^2+s)^p[(l+1)^2+s]^p}\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{[(l+1)^2+2l+1]^p}$$
$$-\frac{1}{[(l+1)^2+2l+2]^p}.$$

考虑函数 $f(x)=x^r(r>1)$. 当 $x>y>0$ 时，由微分学中值公式，有

$$x^r-y^r=r\xi^{r-1}(x-y)\geqslant ry^{r-1}(x-y),$$

其中 $y<\xi<x$.

于是，令 $r=2p$，$x=\sqrt{(l+1)^2+s}$，$y=\sqrt{l^2+s}$，

则当 $p>\frac{1}{2}$ 时，有

$$\begin{aligned}&[(l+1)^2+s]^p-(l^2+s)^p\\&=(\sqrt{(l+1)^2+s})^{2p}-(\sqrt{l^2+s})^{2p}\\&\geqslant 2p\cdot(\sqrt{l^2+s})^{2p-1}\{\sqrt{(l+1)^2+s}-\sqrt{l^2+s}\}\\&=2p(\sqrt{l^2+s})^{2p-1}\cdot\frac{2l+1}{\sqrt{(l+1)^2+s}+\sqrt{l^2+s}}\\&\geqslant\frac{2pl^{2p-1}(2l+1)}{2\sqrt{l^2+4l+1}},\end{aligned}$$

从而当 $p>\frac{1}{2}$ 时，有

$$\begin{aligned}v_l-v_{l+1}&\geqslant\frac{pl^{2p-1}(2l+1)^2}{(l^2+4l+1)^{2p+\frac{1}{2}}}-\frac{2}{(l^2+4l+2)^p}\\&\geqslant\frac{2l^{2p-1}(l^2+l+\frac{1}{4})}{(l^2+4l+1)^{2p+\frac{1}{2}}}\\&\quad\cdot\left[2p-\frac{(l^2+4l+1)^{p+\frac{1}{2}}}{l^{2p-1}(l^2+l+\frac{1}{4})}\right].\end{aligned}$$

由于 $2p>1$，而

$$\lim_{l\to+\infty}\frac{(l^2+4l+1)^{p+\frac{1}{2}}}{l^{2p-1}(l^2+l+\frac{1}{4})}=1,$$

故当 l 充分大时，$v_l-v_{l+1}>0$.

于是存在 l_0，使当 $l\geqslant l_0$ 时，v_l 是单调下降的叙列. 又当 $n\in A_l$，$p>0$ 时有

$$\frac{1}{(l+1)^{2p}}<\frac{1}{n^p}\leqslant\frac{1}{l^{2p}},$$

故

$$\frac{2l+1}{(l+1)^{2p}}<v_l\leqslant\frac{2l+1}{l^{2p}}.$$

上述不等式说明，当 $p>\frac{1}{2}$ 时，v_l 是单调下降且趋于零的叙列（当 $l\to+\infty$），从而知级数

$$\sum_{l=1}^{\infty}u_l=\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l v_2$$

是一个收敛级数. 显然当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时，级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}u_l$ 仅为条件收敛. 当 $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}u_l$ 绝对收敛. 当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}u_l$ 发散.

现在看原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，其中 $a_n=\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$. 记其部分和为 $S_N=\sum\limits_{n=1}^{N}a_n$，又记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和为 $\sigma_M=\sum\limits_{n=1}^{M}u_n$. 那末任意一个部分和 S_N 均被包含在某相邻两个部分和 σ_M 与 σ_{M+1} 之间，即有

$$|S_N-\sigma_M|\leqslant|\sigma_{M+1}-\sigma_M|.$$

注意，当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛，而当$p>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛. 此时记其和为σ，则有

$$\lim_{M\to\infty}\sigma_M=\sigma.$$

因此，

$$\lim_{N\to\infty}S_N=\lim_{M\to\infty}\sigma_M=\sigma,$$

也即$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$有同样的收敛结论. 从而当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时，原级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛；当$p>1$时绝对收敛，当$p\leqslant\frac{1}{2}$时发散（否则这时的$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛），其中当$p=1$时就是2672题.

2688. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

解 记$a_n=\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$. 为研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性，我们引进集合

$$A_k=\{n\,|\,[\ln n]=k\}\quad(k=1,2,\cdots).$$

那末集合A_k内的元素n具有性质

$$k\leqslant\ln n<k+1,$$

或写成

$$e^k\leqslant n<e\cdot e^k$$

其个数$p_k=[(e-1)e^k]$. 将A_k内的元素从小到大排列，可记为

$$=|u_k|=v_k\geqslant\frac{e-1}{2e}=2\varepsilon>\varepsilon. \tag{2}$$

(1)式与(2)式矛盾.因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

2689. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right)^p.$

解 设 $a_n=(-1)^{n-1}\left(\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right)^p.$

当 $p\leqslant0$ 时,显然 $|a_n|\geqslant1$,故 a_n 不趋于零(当 $n\to\infty$),因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

当 $0<p\leqslant2$ 时,记 $a_n=(-1)^{n-1}b_n$,其中

$$b_n=\left(\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\right)^p.$$

由 $\left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^p<1$ 易知

$$b_n>\left(\frac{2n+1}{2(n+1)}\right)^p b_n=b_{n+1}\qquad(n=1,2,\cdots),$$

且有(见第10题的不等式)

$$0<b_n<\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)^p\to0\quad(\text{当 }n\to\infty\text{时}),$$

故由莱布尼兹判别法即知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.但由2598题的结果知,当 $0<p\leqslant2$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散.于是,当 $0<p\leqslant2$ 时,原级数条件收敛.

当 $p>2$ 时,由2598题的结果知,原级数绝对收敛.

2690. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}.$

解 记 $a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=\sin n\cdot\sin n^2$. 显然$\{a_n\}$单调下降趋于零，且

$$\left|\sum_{n=1}^{N}b_n\right|=\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}[\cos n(n-1)-\cos n(n+1)]\right|$$
$$=\left|\frac{1}{2}[\cos 0-\cos N(N+1)]\right|\leqslant 1,$$

有界($N=1,2,\cdots$)，故由迪里黑里判别法知级数收敛.

2691. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n^2$.

解 我们即将指出 $\sin n^2$ 当 $n\to\infty$时并不趋于零，因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n^2$ 发散. 现用反证法，假设

$$\lim_{n\to\infty}\sin n^2=0,$$

于是，$\sin^2(n^2)\to 0$(当 $n\to\infty$时). 由 $\sin^2(n^2)+\cos^2(n^2)=1$ 知 $\cos^2(n^2)\to 1$(当 $n\to\infty$时). 由于

$$\sin(n+1)^2=\sin(n^2+2n+1)$$
$$=\sin n^2\cos(2n+1)+\cos n^2\sin(2n+1),$$

故

$$\cos^2(n^2)\sin^2(2n+1)$$
$$=[\sin(n+1)^2-\sin n^2\cos(2n+1)]^2.$$

让 $n\to\infty$，注意 $\sin n^2\to 0$，于是，由

$$\sin(n+1)^2\to 0 \text{ 及 } \cos^2(n^2)\to 1.$$

便有 $\sin^2(2n+1)\to 0$，因此 $\sin(2n+1)\to 0$. 同理可得 $\sin(2n-1)\to 0$(当 $n\to\infty$). 又从

$$\sin(2n+1)+\sin(2n-1)=2\sin 2n\cos 1$$

知还有 $\sin 2n\to 0$(当 $n\to\infty$时)，即有

$$\sin m\to 0 \quad (\text{当 } m\to\infty\text{时}).$$

从而也有 $\sin^2 n\to 0$ 及 $\cos^2 n\to 1$. 但

$$\sin(n+1)=\sin n\cos 1+\cos n\sin 1,$$

或写成

$$\cos^2 n\sin^2 1=[\sin(n+1)-\sin n\cos 1]^2.$$

让 $n\to\infty$，于上式的两端取极限，并注意到 $\sin^2 1\neq 0$，$\cos^2 n\to 1$，从而产生左端为 $\sin^2 1$ 而右端为零的矛盾. 因此，假设

$$\lim_{n\to\infty}\sin n^2=0$$

不真，即原命题 $\sin n^2\not\to 0$（当 $n\to\infty$ 时）成立. 因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n^2$ 发散.

2692. 设

$$R(x)=\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q}$$

为有理函数，式中 $a_0\neq 0,b_0\neq 0$ 及当 $x\geqslant n_0$ 时，$|b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q|>0$.

研究级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$

的绝对收敛性和条件收敛性.

解 首先考虑绝对收敛性.

当 $q-p>1$ 即当 $q>p+1$ 时，由于

$$|R(n)|=\left|\frac{a_0+a_1n^{-1}+\cdots+a_pn^{-p}}{b_0n^{q-p}+b_1n^{q-p-1}+\cdots+b_qn^{-p}}\right|$$

$$\sim\frac{|a_0|}{|b_0|n^{q-p}},$$

而 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^{q-p}}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$ 绝对收敛.

当 $q\leqslant p+1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}|R(n)|$ 发散.

但当 $p<q$ 时，$(-1)^nR(n)\sim(-1)^n\dfrac{a_0}{b_0n^{q-p}}$，容易验证原级数符合莱布尼兹判别法的条件，故当 $p<q\leqslant p+1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$ 条件收敛.

当 $p\geqslant q$ 时，显见 $R(n)\to 0$（当 $n\to\infty$ 时），故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$ 发散.

研究下列级数的收敛性：

2693. $\dfrac{1}{1^p}-\dfrac{1}{2^q}+\dfrac{1}{3^p}-\dfrac{1}{4^q}+\dfrac{1}{5^p}-\dfrac{1}{6^q}+\cdots$.

解 当 $p>1,q>1$ 时，显然级数绝对收敛.

当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，显然级数并非绝对收敛，但由莱布尼兹判别法知级数收敛. 因此，当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，级数条件收敛.

当 p、q 中有一个小于或等于零时，由于通项不趋于零（当 $n\to\infty$），故级数发散.

2694. $1+\dfrac{1}{3^p}-\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{5^p}+\dfrac{1}{7^p}-\dfrac{1}{4^p}+\cdots$.

解 当 $p>1$ 时，由于原级数是由绝对收敛的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}$ 交换项数重排而得来的，因此它也是绝对收敛的. 下面我们再讨论条件收敛性.

当 $0<p<1$ 时，考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，其中

$$u_n=\frac{1}{(4n-3)^p}+\frac{1}{(4n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}$$

$$=\frac{1}{(4n)^p(1-\frac{3}{4n})^p}+\frac{1}{(4n)^p(1-\frac{1}{4n})^p}-\frac{1}{(2n)^p}$$

$$=\frac{1}{(4n)^p}\left[1+\frac{3p}{4n}+1+\frac{p}{4n}+O(\frac{1}{n^2})\right]-\frac{1}{(2n)^p}$$

$$=\frac{1}{2^p(2n)^p}\left[2+\frac{p}{n}+O(\frac{1}{n^2})\right]-\frac{1}{(2n)^p}$$

$$=\frac{1}{(2n)^p}(\frac{1}{2^{p-1}}-1)+\frac{4p}{(4n)^{p+1}}$$

$$+O(\frac{1}{n^{p+2}}). \tag{1}$$

由第一项组成的级数发散到$+\infty$,而由其余各项分别组成的级数均收敛.因此,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.易证原级数与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$同时收敛或同时发散(这可用部分和作比较而得),从而当 $0<p<1$ 时,原级数发散.

当 $p=1$ 时,(1)式第一项为零,而由第二项及第三项分别组成的级数显然收敛,故当 $p=1$ 时,原级数收敛,并且显然不是绝对收敛的,即原级数条件收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时,原级数显然发散.

2695. $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{1^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{9^p}+\frac{1}{11^p}-\frac{1}{5^p}+\cdots$.

解 易证原级数与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$同时收敛或同时发散,其中

$$u_n=\frac{1}{(4n-3)^p}+\frac{1}{(4n-1)^p}-\frac{1}{(2n-1)^p}$$

$$=\frac{1}{2^p(2n)^p}[2+\frac{p}{n}+O(\frac{1}{n^2})]$$

$$-\frac{1}{(2n)^p}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{2n})^p}$$

$$=\frac{1}{(2n)^p}(\frac{1}{2^{p-1}}-1)+\frac{1}{2^p}(\frac{p}{2^p}-\frac{p}{2})$$

$$\cdot\frac{1}{n^{p+1}}+O(\frac{1}{n^{p+2}}). \qquad (1)$$

当 $p>1$ 时，级数显然绝对收敛.

当 $0<p<1$ 时，由(1)式第一项组成的级数发散，而由(1)式第二项及第三项所分别组成的级数均收敛. 因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 从而当 $0<p<1$ 时，原级数发散.

当 $p=1$ 时，原级数条件收敛. 事实上，此时(1)式中第一项及第二项均为零，而由第三项所组成的级数收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，从而原级数收敛. 但级数

$$1+\frac{1}{3}+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{5}+\cdots$$

是发散的.

当 $p\leqslant0$ 时，原级数显然发散.

2696. $1-\frac{2}{2^q}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}-\frac{2}{5^q}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{2}{8^q}+\frac{1}{9^p}+\cdots$.

解 当 $p>1,q>1$ 时，记 $\delta=\min(p,q)>1$. 由于级数

$$1+\frac{2}{2^q}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{2}{5^q}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{2}{8^q}+\frac{1}{9^p}+\cdots \qquad (1)$$

的前 N 项部分和 S_N 有

$$S_N\leqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{2}{k^\delta}=2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^\delta}<+\infty,$$

故 $\{S_N\}$ 单调上升且有界，从而 $\lim\limits_{N\to\infty}S_N$ 存在. 于是，原级数当 $p>1,q>$ 时绝对收敛.

当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，由于级数(1)的 S_N 有

$$S_N\geqslant \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\to+\infty(\text{当 } N\to+\infty \text{ 时}),$$

故原级数并不绝对收敛. 但当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，可考虑级数 $(1-\frac{2}{2^p})+\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$，其中

$$\begin{aligned}
u_k&=\frac{1}{(3k)^p}+\frac{1}{(3k+1)^p}-\frac{2}{(3k+2)^p}\\
&=\frac{1}{(3k)^p}\left[1-(1+\frac{2}{3k})^{-p}\right]\\
&\quad+\frac{1}{(3k+1)^p}\left[1-(1+\frac{1}{3k+1})^{-p}\right]\\
&=\frac{1}{(3k)^p}\left[\frac{p}{3k}+O(\frac{1}{k^2})\right]\\
&\quad+\frac{1}{(3k+1)^p}\left[\frac{p}{3k+1}+O(\frac{1}{k^2})\right]\\
&=\frac{2p}{(3k)^{p+1}}+\frac{2p}{(3k+1)^{p+1}}+O(\frac{1}{k^{p+2}})\\
&=\frac{3p}{(3k)^{p+1}}+O(\frac{1}{k^{p+2}}).
\end{aligned}$$

因此，显然 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 收敛. 易证原级数与级数 $(1-\frac{2}{2^p})+\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 同时收敛或同时发散. 因而原级数当 $0<p=q\leqslant 1$ 时条件收敛.

当 p,q 中有一个小于或等于零时，原级数显然发散.

2697. 证明：级数

(a) $\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots,$

(б) $\cos x+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}+\cdots$

在区间$(0,\pi)$内不绝对收敛.

证 (a) $\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n}=\frac{1-\cos 2nx}{2n}$

$$=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2nx}{2n}.$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散到$+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n}$收敛(这是因为$\frac{1}{2n}$单调趋于零，且$\sum\limits_{n=1}^{N}\cos 2nx$有界，故由迪里黑里判别法即获证)，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n}\right|$$

在$(0,\pi)$内发散. 至于原级数的收敛性是显然的. 因此，原级数在$(0,\pi)$内仅为条件收敛.

(б)可用(a)的方法证明. 事实上，由

$$\left|\frac{\cos nx}{n}\right|\geqslant\frac{\cos^2 nx}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{\cos 2nx}{2n}$$

即知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n}\right|$$

在$(0,\pi)$内发散. 至于原级数的收敛性是显然的.

因此，原级数在$(0,\pi)$内仅为条件收敛.

2698. 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\ (0<x<\pi)$$

对全体参数(p,x)定出：(a)绝对收敛域；(б)非绝对收敛域.

解 当 $p>1$ 时，由于

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p},\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}(0<x<\pi),$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，故这两个级数当 $p>1$ 时，对于 $(0,\pi)$ 内任一 x 值均绝对收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时，由于 $\frac{1}{n^p}$ 单调下降趋于零，且部分和 $\sum_{n=1}^{N}\cos nx$ 及 $\sum_{n=1}^{N}\sin nx$ 均有界 $(0<x<\pi)$，故由迪里黑里判别法知两级数均收敛. 但绝对值组成的级数均发散，事实上，

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\cos^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}+\frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$ 当 $0<p\leqslant 1$ 时发散到 $+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^p}$ 当 $0<p\leqslant 1$ 时收敛，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^p},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{n^p}$$

当 $0<p\leqslant 1$ 时均发散. 因此，当 $0<p\leqslant 1$ 时，对于 $(0,\pi)$ 内任一 x 值，级数，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$$

均为条件收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时，两级数显然发散.

总之，当 $0<x<\pi$ 时，两级数的(a)绝对收敛域为 $p>1$；(б)条件收敛域为 $0<p\leqslant 1$.

$$a_n=\frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!\,n^{p+\varepsilon}},$$

取对数，有

$$\begin{aligned}\ln a_n&=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{p}{k})-(p+\varepsilon)\ln n\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{p}{k}+\sum_{k=1}^{n}O(\frac{1}{k^2})-(p+\varepsilon)\ln n\\&=p\ln n+pr+A_1+O(\frac{1}{n})-p\ln n-\varepsilon\ln n\\&=pr+A_1+O\left(\frac{1}{n}\right)-\varepsilon\ln n\to-\infty\end{aligned}$$

（当 $n\to+\infty$ 时），

其中 r 及 A_1 为某些常数，从而知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 由莱布尼兹判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛. 因此，当 $p<q\leqslant p+1$ 时，原级数条件收敛.

当 $q=p$ 时，有

$$\ln a_n=pr+A_1+O(\frac{1}{n})\to pr+A_1\text{（当 }n\to\infty\text{时）},$$

也即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e^{pr+A_1}\neq0$，原级数发散.

当 $q<p$ 时，对于足够大的 n 有 $a_n<a_{n+1}$，可见通项也不趋于零，故原级数也发散.

总之，(a)级数的绝对收敛域为 $q>p+1$；

(6)级数的条件收敛域为 $p<q\leqslant p+1$.

2700. 研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}$$

的收敛性，其中 $\binom{m}{n}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$

解 记 $a_n=\binom{m}{n}$，有

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{n+1}{m-n}\right|$$

$$=\left|(1+\frac{1}{n})\left[1+\frac{m}{n}+O(\frac{1}{n^2})\right]\right|$$

$$=1+\frac{m+1}{n}+O(\frac{1}{n^2}),$$

故由高斯判别法知：当 $m+1>1$ 即当 $m>0$ 时，级数绝对收敛. 当 $m<0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散. 至于当 $m=0$ 时，级数每一项为零，因此，级数显然绝对收敛.

下面我们证明：当 $-1<m<0$ 时，级数收敛，从而知级数条件收敛. 事实上，当 n 足够大之后，易见 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\binom{m}{n}$ 为交错级数. 又因 $-1<m<0$，故 $\left|\frac{m-n}{n+1}\right|<1$，它等价于 $|a_{n+1}|<|a_n|$，这表明级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 的通项的绝对值是单调减少的. 现在再证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$. 为此，取对数，有

$$\ln|a_n|=\ln\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\right|$$

$$=\ln\left|\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n}\right)\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{m+1}{k}\right).$$

由于当 $k\to\infty$ 时，$\ln(1-\frac{m+1}{k})\Big/(-\frac{m+1}{k})\to 1$，而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散到 $+\infty$，故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1-\frac{m+1}{k})$ 发散到 $-$

∞. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$. 由莱布尼兹判别法知$\sum\limits_{n=n}^{\infty}a_n$收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛.

当 $m\leqslant-1$ 时，由于级数的通项不趋于零，故级数发散.

总之，当 $m\geqslant 0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}$绝对收敛；当 $-1<m<0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}$条件收敛.

2701. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1,$$

则可否断定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛?

解 如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$均为正项级数，则由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛可断定$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛. 但当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$不一定都是正项级数时，则由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性不能断定$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛. 例如，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

是收敛的，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}=1,$$

但级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$$

却是发散的.事实上,它是由收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$及发散级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$相加而得的,故它是发散的.

2702. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为非绝对收敛的级数及

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|+a_i}{2},N_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|-a_i}{2},$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=1.$

证 首先注意,非绝对收敛即条件收敛,若级数发散,本命题不一定成立. 例如,取$a_i=1$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=0$;若$a_i=1$(当$i=1(\bmod 2)$时)或$a_i=-\frac{1}{2}$(当$i=0(\bmod 2)$时),此时将有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=\frac{1}{2}$,等等,

当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛时,有

$$\frac{N_n}{P_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|a_i|-\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|+\sum_{i=1}^{n}a_i}=\frac{1-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}}{1+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}}$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛及$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}=0,$$

从而即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=1.$$

2703. 证明:对于每一个 $p>0$,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

的和是在$\frac{1}{2}$与 1 之间.

证 首先,由于此级数的前 $2n$ 项的和

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}\right)$$

中每一个括号内的数大于零,故$\{S_{2n}\}$是一个单调上升的叙列. 又因

$$S_{2n}=1-\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}\right)-\left(\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5^p}\right)-\cdots$$
$$-\left(\frac{1}{(2n-2)^p}-\frac{1}{(2n-1)^p}\right)-\frac{1}{(2n)^p}<1,$$

故$\{S_{2n}\}$是以 1 为上界的叙列．从而知 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}$存在且不超过 1.

由于此级数当 $p>0$ 时是收敛的，故对于叙列$\{S_{2n}\}$，它的极限与级数的和相等，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}\leqslant 1 \quad (p>0)$$

(对于 $p=1$，此级数的和为 $\ln 2$).

其次，我们证明此和不小于$\frac{1}{2}$，仍考虑前 $2n$ 项的部分和 S_{2n}，则有 $S_{2n}=1-\frac{1}{2^p}+\tilde{S}_{2n}$，其中

$$\tilde{S}_{2n}=\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(2k-1)^p}-\frac{1}{(2k)^p}\right]$$
$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{p}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}},$$

这里 $0<\theta_k<1(k=2,3,\cdots,n)$．由于 $p>0$ 以及

$$\frac{1}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}}\geqslant\frac{1}{(2k)^{p+1}}(k=2,3,\cdots).$$

即得

$$\tilde{S}_{2n}\geqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{p}{(2k)^{p+1}}=\frac{p}{2^{p+1}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{p+1}}$$
$$\geqslant\frac{p}{2^{p+1}}\left[\int_2^n\frac{dx}{x^{p+1}}+\frac{1}{n^{p+1}}\right]$$
$$=\frac{1}{2^{p+1}}\left[-\frac{1}{px^p}\Big|_2^n+\frac{1}{n^{p+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p} + \frac{p}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^{p+1}}$$
$$= \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p}(1 - \frac{p}{n})$$
$$= \frac{1}{2^{2p+1}} + \Delta_n,$$

此处

$$\Delta_n = \frac{-1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p}(1-\frac{p}{n}) = O(\frac{1}{n^p})(\text{当 } n\to\infty\text{时}).$$

于是，对任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N_0，使当 $n\geqslant N_0$ 时，有 $|\Delta_n|<\varepsilon$. 这时有

$$S_{2n} = 1-\frac{1}{2^p}+\tilde{S}_{2n} \geqslant 1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{2p+1}}-\varepsilon.$$

但当 $p>0$ 时，

$$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{2p+1}}>\frac{1}{2},$$

这是因为

$$2^p+\frac{1}{2^p}>2,$$

故得

$$1+\frac{1}{2^{2p}}>\frac{2}{2^p}\text{或}\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2p+1}}>\frac{1}{2^p}.$$

从而

$$S_{2n}>\frac{1}{2}-\varepsilon,$$

故收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 的和

$$S=\lim_{n\to\infty}S_{2n}\geqslant\frac{1}{2}-\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，即得 $S\geqslant\frac{1}{2}$. 综上所述，

$$\frac{1}{2}\leqslant S\leqslant 1.$$

2704. 证明:若把级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

的各项重新安排,而使挨次 p 个正项的一组与挨次 q 个负项的一组相交替,则新级数的和为

$$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

证 按题意,我们欲证

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{2q}$$
$$+\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{4p-1}-\frac{1}{2q+2}-\cdots$$
$$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}. \qquad (1)$$

首先,我们有

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\varepsilon_n,$$

其中 C 为尤拉常数,而 ε_n 为无穷小,由此即得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}H_m=\frac{1}{2}\ln m+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\varepsilon_m,$$

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}=H_{2k}-\frac{1}{2}H_k$$
$$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln k+\frac{C}{2}+\varepsilon_{2k}-\frac{1}{2}\varepsilon_k.$$

于是,若把级数(1)的 p 项或 q 项的数串组合起来,考虑

$$S_{2n}=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{2q}$$
$$+\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{2(n-1)q}+\frac{1}{2(n-1)p+1}$$

$$+\cdots+\frac{1}{2np-1}$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{2np}{2(n-1)q}+\alpha_n$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+\alpha_n',$$

其中 $\alpha_n\to 0,\alpha_n'\to 0$（当 $n\to\infty$）；又因 $S_{2n+1}=S_{2n}+\beta_n$，其中 $\beta_n\to 0$（当 $n\to\infty$ 时），故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+\ln 2$. 从而级数(1)的和为 $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

2705. 证明：若将调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

之项的符号改变使得 p 个正项之后跟随着 q 个负项（$p\neq q$），但不变更原来的顺序，则此级数始终是发散的．仅当 $p=q$ 时为收敛的．

证 若 $p\neq q$，不妨设 $p>q$，记

$$a_k=\frac{1}{(p+q)k+1}+\cdots+\frac{1}{(p+q)k+p}$$

$$-\frac{1}{(p+q)k+p+1}-\cdots-\frac{1}{(p+q)k+p+q}.$$

由于其中正项的项数比负数的项数为多，且所有正项中任一项均比任一负项的绝对值为大，故有

$$a_k>\frac{1}{(p+q)k+1}>0\quad(k=1,2,\cdots).$$

但 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p+q)k+1}$ 发散，故 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ 发散，从而比较一下即知所得级数发散（若 $p<q$ 同理可证）.

若 $p=q$，记

其和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，则将有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

也收敛，得出矛盾．于是，此时两级数的和一定发散．

(6) 可为收敛，可为发散．例如：

(1) 设 $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散，但 $c_n = 0$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，

(2) 设 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$，则 $c_n = \frac{2}{n}$. 显见，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

均发散．

2707. 求二级数的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3}\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right].$$

解 两级数显然是收敛的．因此，它们的和也是收敛的．逐项相加，即可求得两级数的和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+1}} = \frac{4}{3^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

求下列级数的和：

2708. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right]$.

解 此级数是由两收敛级数逐项相加而得的，因此它是收敛的，且其和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+(-\frac{1}{3})$$

$$\cdot\frac{1}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{3}{4}.$$

2709. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

解 原级数显然绝对收敛，记其和为 S，则有

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}-1.$$

设将 $n=0,1,2,\cdots$ 分成三类：

$A_1=\{n\mid n=3k,k=0,1,2,\cdots\}$，

$A_2=\{n\mid n=3k+1,k=0,1,2,\cdots\}$，

$A_3=\{n\mid n=3k+2,k=0,1,2,\cdots\}$，

则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}=\sum_{n\in A_1}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$$

$$+\sum_{n\in A_2}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}+\sum_{n\in A_3}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi}{3}}{2^{3k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(\pi+\frac{\pi}{3})}{2^{3k+2}}$$

$$=\left[1+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2^2}\cos(\pi+\frac{\pi}{3})\right]\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2^3})^k$$

$$= (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{5}{7},$$

以上计算是合理的，因为上述三个级数均绝对收敛，故其和为$\frac{5}{7}$. 从而知原级数的和为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} - 1$$

$$= \frac{5}{7} - 1 = -\frac{2}{7}.$$

2710$^+$. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{[\frac{n}{2}]} y^{[\frac{n+1}{2}]}$ $(|xy| < 1)$.

解 设将 $n=0,1,2,\cdots$分成二类：

$A_1 = \{n \mid n = 2k, k = 0,1,2,\cdots\}$,

$A_2 = \{n \mid n = 2k+1, k = 0,1,2,\cdots\}$,

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{[\frac{n}{2}]} y^{[\frac{n+1}{2}]} = \sum_{n \in A_1} x^{[\frac{n}{2}]} y^{[\frac{n+1}{2}]} + \sum_{n \in A_2} x^{[\frac{n}{2}]} y^{[\frac{n+1}{2}]}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k + \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^{k+1}.$$

显然上式右端两级数当 $|xy| < 1$ 时绝对收敛，故原级数收敛，且其和为

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{[\frac{n}{2}]} y^{[\frac{n+1}{2}]} = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k + y \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k$$

$$= (1+y) \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k = \frac{1+y}{1-xy}.$$

2711. 证明：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1.$$

证　此两级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$及$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$均绝对收敛，其中

$$a_n=\frac{1}{n!},b_n=\frac{(-1)^n}{n!},$$

故可写成

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n,$$

其中

$$\begin{aligned}c_n&=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{i!}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!}\right]\\&=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\cdot\frac{n!}{i!(n-i)!}\\&=\frac{1}{n!}(1-1)^n=0\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

从而知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n=1.$$

当然，由e的定义知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e\text{ 及 }\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=e^{-1},$$

从而也就可以直接计算得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=e\cdot e^{-1}=1.$$

2712. 证明：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n\quad(|q|<1).$$

证 由 $|q|<1$ 知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ 绝对收敛，故可写成

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}c_n,$$

其中

$$c_n=\sum_{i=0}^{n}q^i\cdot q^{n-i}=q^n\cdot\sum_{i=0}^{n}1=(n+1)q^n$$

$$(n=0,1,2\cdots).$$

因此，

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q_n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.$$

2713. 证明：收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的平方是发散级数．

证 如果此级数的平方收敛，则可写其积为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$，即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}c_n,$$

其中

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{1}{1}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}}\\&\quad+\cdots+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}}\\&\quad+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1}\\&=(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}}+\cdots\right.\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{n-k+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}).$$

由于括号中的每一项都大于$\frac{1}{n}$ *)，故 $|c_n|>1$，这与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛相矛盾．因此，级数$(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}})^2$发散．

*) 只要证 $k(n-k+1)<n^2$ 或 $n^2-nk+k^2-k>0$. 由于

$$n^2-nk+k^2-k=(n-\frac{k}{2})^2+\frac{3k^2-4k}{4},$$

故只要证 $3k^2-4k>0$. 但 $3k^2-4k=3k(k-\frac{4}{3})$，可见对于 $k=2,3,\cdots$ 上式成立．至于当 $k=1$ 时，显然有 $1\cdot(n-1+1)=n\leqslant n^2$ 或$\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}}\geqslant\frac{1}{n}$. 因而不等式 $k(n-k+1)<n^2$ 成立．

2714. 证明：下面二级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}(\alpha>0)\text{ 及 }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}(\beta>0)$$

的积当 $\alpha+\beta>1$ 时是收敛级数，而当 $\alpha+\beta<1$ 时是发散级数．

证 记

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(\alpha>0,\beta>0).$$

按乘法法则应有

$$c_n = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{(n-i+1)^\beta}\right]$$

$$= (-1)^{n-1}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i+j=n+1}}\frac{1}{i^\alpha j^\beta} = (-1)^{n-1}d_n,$$

其中

$$d_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}(n=1,2\cdots).$$

(1) 当 $\alpha+\beta\leqslant 1$ 时,有

$$d_n \geqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant \frac{n}{2}}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}$$

$$\geqslant \frac{1}{(\frac{n}{2})^\alpha}\sum_{1\leqslant i\leqslant \frac{n}{2}}\frac{1}{(n-i+1)^\beta}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha}\sum_{\frac{n}{2}<j\leqslant n}\frac{1}{j^\beta} \geqslant \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha}\int_{\frac{n}{2}}^{n}\frac{dt}{t^\beta}$$

$$=2^\alpha\cdot\frac{1}{1-\beta}\left(1-\frac{1}{2^{1-\beta}}\right)n^{1-(\alpha+\beta)}.$$

于是,当 $\alpha+\beta<1$ 时,$d_n\to+\infty$(当 $n\to\infty$时);当 $\alpha+\beta=1$ 时,$d_n\geqslant 2^\alpha\cdot\frac{1}{1-\beta}(1-\frac{1}{2^{1-\beta}})>0$,即当 $\alpha+\beta\leqslant 1$ 时,d_n 不趋于零(当 $n\to\infty$时),从而知

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}d_n$$

为发散级数.

(2) 当 $\alpha+\beta>1$ 时,有

$$d_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant \frac{n}{2}}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta} + \sum_{\frac{n}{2}\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}$$

$$= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

其中

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{1\leqslant i\leqslant \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta}$$

$$\leqslant \frac{1}{(\frac{n}{2}+1)^\beta} \sum_{1\leqslant i\leqslant \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha}$$

$$\leqslant \frac{1}{(\frac{n}{2}+1)^\beta} \left(1 + \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dt}{t^\alpha}\right)$$

$$= O(\frac{1}{n^\beta}) + O\left(n^{-\beta} - \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dt}{t^\alpha}\right)$$

$$= O(n^{-\beta}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}),$$

同理有

$$\sum\nolimits_2 \leqslant O(n^{-\alpha}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}).$$

由于 $\alpha > 0, \beta > 0, 1-(\alpha+\beta) < 0$，故有 d_n 趋于零：

$$d_n \leqslant O(n^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}) \to 0$$

$$(\text{当 } n \to \infty \text{ 时}).$$

记 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的部分和为

$$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n.$$

考虑原两级数的部分和

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}, B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\beta}.$$

今考察下列差数

$$\Delta_n = A_n B_n - S_n$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j^\beta}\right) - S_n$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i^\alpha}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j^\beta}\right) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ i+j=k+1}} \frac{1}{i^\alpha j^\beta} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i^\alpha}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j^\beta}\right) \\
&\quad - \sum_{\substack{2 \leqslant i+j \leqslant n+1 \\ 1 \leqslant i, j \leqslant n}} \sum \left(\frac{(-1)^i}{i^\alpha}\right)\left(\frac{(-1)^j}{j^\beta}\right). \\
&= \sum_{s=1}^{2n-1} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant s \\ i+j=s+1}} \frac{(-1)^{s+1}}{i^\alpha j^\beta} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ i+j=k+1}} \frac{(-1)^{k-1}}{i^\alpha j^\beta} \\
&= \sum_{s=n+1}^{2n-1} (-1)^{s-1} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant s \\ i+j=s+1}} \frac{1}{i^\alpha j^\beta}.
\end{aligned}
$$

为估计上述差数各项，可看下列乘法表(图 5.1). $A_n B_n$

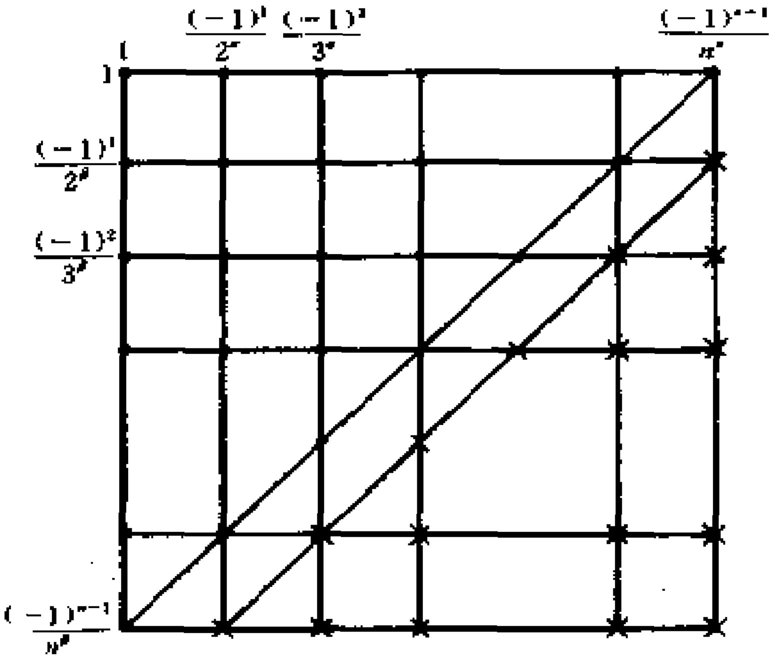

图 5.1

$$= d_{n+1}.$$

由前已证：当 $\alpha+\beta>1$ 时，$d_n\to 0$（当 $n\to\infty$时），故有 $\Delta_n\to 0$（当 $n\to\infty$时）. 于是

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(A_nB_n-\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i^{\alpha}}\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j^{\beta}}\right),$$

其中右端两级数的收敛性是由 $\alpha>0,\beta>0$，按莱布尼兹判别法获得的。于是，当 $\alpha+\beta>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}(\alpha>0)$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}(\beta>0)$ 的积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 为收敛级数。

2715. 验证下面二发散级数

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \text{ 和 } 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

的积是绝对收敛级数.

证 记 $1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_m$,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}v_m,$$

其中

$$u_1=1,u_2=-\frac{3}{2},u_3=-\left(\frac{3}{2}\right)^2,\cdots,u_m=-\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1}$$
$$(m=2,3,\cdots),$$

$$v_1=1,v_2=2+\frac{1}{2^2},v_3=\frac{3}{2}\left(2^2+\frac{1}{2^3}\right),\cdots,v_m=\left(\frac{3}{2}\right)^{m-2}\left(2^{m-1}+\frac{1}{2^m}\right)\qquad(m=2,3,\cdots).$$

因此 $c_1=u_1v_1=1$. 一般地，在

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$$

中，按乘积定义有

$$\begin{aligned}
c_n&=u_1v_n+u_1v_{n-1}+\cdots+u_{n-1}v_2+u_nv_1\\
&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}\\
&\quad\cdot\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\cdots+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\right]\\
&\quad\cdot\left(2+\frac{1}{2^2}\right)+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right]\\
&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}[(2^{n-1}-2^{n-2}-2^{n-3}-\cdots\\
&\quad-2-2^0)+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{2}\right)]\\
&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left[\left(2^{n-1}-\frac{2^{n-1}-1}{2-1}\right)+\left[\frac{1}{2^n}-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right]\right]\\
&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\cdot\frac{3}{2^n}\\
&=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1},
\end{aligned}$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 绝对收敛.

§4. 函数项级数

1° 收敛域　使函数项级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1}$$

收敛的 x 值的总体 X 叫做此级数的收敛域，而函数

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\qquad (x\in X)$$

称为级数的和.

2° 一致收敛性　对于函数叙列

$$f_1(x),f_2(x)\cdots,f_n(x),\cdots$$

如果：1) 存在有极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\qquad (a<x<b);$$

2) 对于任何的数 $\epsilon>0$ 可以确定 $N=N(\epsilon)$，使得当 $n>N$ 和 $a<x<b$ 时，

$$|f(x)-f_n(x)|<\epsilon$$

成立，则称这函数叙列在区间 (a,b) 内为一致收敛. 此种情形写：$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

若函数项级数(1)的部分和叙列：

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)(n=1,2,\cdots)$$

在区间 (a,b) 内一致收敛，则称(1)在此已知区间内为一致收敛.

3° 哥西判别准则　级数(1)在已知区间 (a,b) 内一致收敛的充分而且必要的条件为：对于每一个 $\epsilon>0$，有数 $N=N(\epsilon)$ 存在，使得当 $n>N$ 和 $p>0$ 时不等式

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}u_i(x)\right|<\epsilon\quad (a<x<b)$$

成立.

4° 外耳什特拉斯判别法　对于级数(1)，若有收敛的数项级数

$$c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots\tag{2}$$

存在，使对于 $a<x<b$ 下列不等式都成立

$$|u_n(x)|\leqslant c_n(n=1,2,\cdots),$$

则级数(1)在区间 (a,b) 内绝对并一致收敛.

5° 亚伯耳判别法　如果:1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛;2) 函数 $b_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 全体是有界的并对每一个 x 形成一单调的叙列,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{3}$$

于区间 (a,b) 内一致收敛.

6° 迪里黑里判别法　如果 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和全体是有界的;2) 叙列 $b_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 对于每一个 x 都是单调的,并且当 $n \to \infty$ 时在 (a,b) 内一致地趋于零,则级数(3) 在区间 (a,b) 内一致收敛.

7° 函数项级数的性质　(a) 以连续函数为项的一致收敛级数的和是连续函数.

(б) 若函数项级数(1) 在区间 (a,b) 内一致收敛且有有穷的极限 $\lim_{x \to a} u_n(x) = A_n(n=1,2,\cdots)$,则 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛,2) 下之等式成立:

$$\lim_{x \to a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} [\lim_{x \to a} u_n(x)].$$

(в) 若收敛级数(1) 的各项当 $a < x < b$ 时皆可微分并且导函数的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛,则

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

(г) 若级数(1) 的各项连续,并且此级数在有穷区间 (a,b) 内一致收敛,则

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \tag{4}$$

一般说来,若当 $n \to \infty$ 时 $\int_a^b R_n(x) dx \to 0$,则公式(4) 为真,这里 $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$. 这个最后的条件对于积分的限是无穷大的时候也适合.

定出下列函数项级数的(绝对的和条件的)收敛域.

2716. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$.

解 令$\frac{1}{x}=y$,则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}ny^n.$$

显然上式右端级数的收敛半径为1. 因此,仅当

$|y|=\left|\frac{1}{x}\right|<1$ 即 $|x|>1$ 时,原级数绝对收敛.

2717. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\right|}=1,$$

故仅当$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$即$(1-x)^2<(1+x)^2$或$x>0$时,级数绝对收敛.

当$x=0$时,原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$,显见它为条件收敛. 当$x<0$时,原级数通项不趋于零,故发散.

2718. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}}=1,$$

故仅当 $\left|\dfrac{x}{2x+1}\right|<1$ 即 $x^2<4x^2+4x+1$ 或

$$(3x+1)(x+1)>0 \tag{1}$$

时，级数绝对收敛，解不等式(1)，得

$$x>-\frac{1}{3} \text{ 或 } x<-1,$$

即为所求的绝对收敛域. 当 $x=-\dfrac{1}{3}$ 或 $x=-1$ 时，原级数通项不趋于零，故发散.

2719. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+1}=1,$$

故仅当 $\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|<1$ 时，级数绝对收敛. 解此不等式：

$$4x^2<1+2x^2+x^4,(x^2-1)^2>0,$$

即 $|x|\neq 1$. 于是，当 $|x|\neq 1$ 时，级数绝对收敛.

当 $x=-1$ 时，原级数为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，由 2689 题的结果知它是条件收敛的.

当 $x=1$ 时，原级数为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，仍由同题的结果知它是发散的.

2720. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}}{\frac{(n+1)3^{2n+2}}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3^2(n+1)}=\frac{2}{9},$$

故仅当$|x(1-x)|<\frac{2}{9}$时，级数绝对收敛. 解此不等式：

$$-\frac{2}{9}<x(1-x)<\frac{2}{9}.$$

于是，x 的值应为

$$x^2-x-\frac{2}{9}<0 \text{ 及 } x^2-x+\frac{2}{9}>0$$

的公共部分，也即

$$-\frac{\sqrt{17}-3}{6}<x<\frac{3+\sqrt{17}}{6} \text{ 及 } x>\frac{2}{3} \text{ 或 } x<\frac{1}{3}$$

的公共部分，合并得

$$-\frac{\sqrt{17}-3}{6}<x<\frac{1}{3} \text{ 及 } \frac{2}{3}<x<\frac{\sqrt{17}+3}{6},$$

此即级数的绝对收敛域.

当在此二区间的端点时，级数显然发散.

2721. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n^2}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{2},$$

故仅当$|\sin x|<\frac{1}{2}$时，级数绝对收敛. 解之，得

$$|x-k\pi|<\frac{\pi}{6}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

当 $|x-k\pi|=\frac{\pi}{6}$ 时，由绝对值组成的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，它是收敛的.

因此，当 $|x-k\pi|\leqslant\frac{\pi}{6}(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$ 时，级数绝对收敛.

2722. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$.

解 当 $p>1$ 及 $x\neq k(k=-1,-2,\cdots)$ 时，级数显然绝对收敛.

当 $0<p\leqslant1$ 及 $x\neq k(k=-1,-2,\cdots)$ 时，级数条件收敛.

当 $p\leqslant0$ 时，级数发散.

2723. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p\sin nx}{1+n^q}(q>0;0<x<\pi)$.

解 由于

$$\frac{|\sin nx|}{2n^{q-p}}\leqslant\left|\frac{n^p\sin nx}{1+n^q}\right|\leqslant\frac{1}{n^{q-p}},$$

故当 $q-p>1$ 即 $q>p+1$ 时，级数绝对收敛；而当 $q\leqslant p+1$ 时，由绝对值组成的级数发散(理由可参看2698题的题解).

当 $p<q\leqslant p+1$ 时，由于对 $0<x<\pi$ 内任一固定的 x，$\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx$ 有界，且

$$\frac{n^p}{1+n^q}\sim\frac{1}{n^{q-p}}\longrightarrow0\quad(\text{当 }n\to\infty\text{时})$$

故级数收敛.

当 $q\leqslant p$ 时，级数显然发散.

总之，当 $q>p+1$ 时，级数绝对收敛；而当 $p<q\leqslant p+1$时，级数条件收敛.

2724. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$(拉伯耳特级数).

解 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}\quad (\text{A})\qquad 与\sum_{n=1}^{\infty}x^n\quad (\text{Б}).$$

当 $|x|<1$ 时，级数(Б)绝对收敛. 根据亚伯耳判别法，以单调递减且有下界的因子$\frac{1}{1-x^{2n}}$乘此级数的对应项所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^{2n}}\qquad (\text{B})$$

也收敛，且为绝对收敛.

同理，再以单调递减且有界的因子x^n乘级数(B)的对应项所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1-x^{2n}}$$

仍然收敛，且为绝对收敛. 由于

$$\frac{x^n}{1-x^n}=\frac{x^n}{1-x^{2n}}+\frac{x^{2n}}{1-x^{2n}},$$

故原级数当 $|x|<1$ 时绝对收敛.

当$|x|=1$ 时，级数(A)显然无意义.

当$|x|>1$ 时，级数(Б)显然发散. 下证级数(A)也发散. 若不然，当$|x|>1$时，由级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

收敛，再根据亚伯耳判别法，我们就会推出级数

当 $|x|>1$ 时，原级数可写为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}$.

由于 $\left|\frac{1}{x}\right|<1$，再根据上面的讨论，故原级数绝对收敛.

总之，当 $|x|\neq 1$ 时，原级数绝对收敛.

2727. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$.

解 记 $a_n=\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$，则当 $|x|<1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{|1+x^{n+1}|}=|x|<1,$$

故级数绝对收敛.

当 $|x|>1$ 时，级数可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{n(1-n)}{2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}, \qquad (1)$$

其中级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 当 $|x|>1$ 即 $\left|\frac{1}{x}\right|<1$ 时绝对收敛. 与 $|x|<1$ 的情况一样，得知级数(1)当 $|x|>1$ 时绝对收敛.

当 $x=-1$ 时，通项无意义. 但当 $x=1$ 时，原级数的通项 $a_n=\frac{1}{2^n}$，显然级数收敛.

总之，当 $x\neq -1$ 时，原级数绝对收敛.

2728. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}}=e^{-x},$$

故当 $x>0$ 时，$e^{-x}<1$，级数绝对收敛. 而当 $x=0$ 时，级数可写为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$，显然发散. 又当 $x<0$ 时，$e^{-x}>1$，级数发散.

2729. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\frac{1}{1+a^{2n}x^{2}}$.

解 记 $a_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\frac{1}{1+a^{2n}x^{2}}$，则当 $x=0$ 时，

$$a_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}>\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\frac{1}{n},$$

故原级数发散. 当 $x\neq 0$ 时：

(1) 当 $|a|>1$ 时，有

$$0<a_n<\frac{1}{a^{2n}x^{2}}=\frac{1}{x^{2}}\left(\frac{1}{|a|}\right)^{2n},$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2}}\left(\frac{1}{|a|}\right)^{2n}$ 的收敛性即知原级数绝对收敛.

(2) 当 $|a|\leqslant 1$ 时，有

$$|a_n|\geqslant\frac{1}{1+x^{2}}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}>\frac{1}{1+x^{2}}\cdot\frac{1}{n},$$

故原级数发散.

2730. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}})\ (x>0)$.

解 记 $a_n=(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}})$.

(1)当 $x=2$ 时，显然 $a_n=0(n=1,2,\cdots)$，故级数绝

对收敛.

(2) 当 $x\neq 2$ 时，注意 $x>0$，故有 $x^{\frac{1}{n}}\to 1$(当 $n\to\infty$). 因此，当 n 足够大时，a_n 不变号，从而若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则必绝对收敛. 今用阿拉伯判别法，有

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(x^{\frac{1}{n+1}}-1)}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}\right]=\ln x,$$

故当 $\ln x>1$ 即 $x>e$ 时，原级数绝对收敛. 当 $x<e$ 时，原级数发散. 而当 $x=e$ 时，此时有(考虑当 n 足够大时)

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{1}{2-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1-(e^{\frac{1}{n}}-1)}$$

$$=1+(e^{\frac{1}{n}}-1)+O((e^{\frac{1}{n}}-1)^2),$$

但 $e^{\frac{1}{n}}-1=\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$，故得

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

按高斯判别法，原级数发散.

总之，当 $x=2$ 及当 $x>e$ 时，原级数绝对收敛.

2731. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

解 对于任意的 x，只要 n 足够大，该项就为正. 因此，它可以看成正项级数. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}}{\frac{1}{n^x}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x,$$

故利用正项级数的判别法知：当 $x>1$ 时，级数收敛，且为绝对收敛；当 $x\leqslant 1$ 时，级数发散.

2732. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}(x>0,y>0)$.

解 若 $x<1$，将原级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^n}.$$

由于

$$0<\frac{x^n}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^n}\leqslant x^n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 当 $|x|<1$ 时收敛，故原级数绝对收敛.

同理，当 $y<1$ 时，原级数绝对收敛. 总之，当 $0<\min(x,y)<1$ 时，原级数绝对收敛.

2733. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+y^n}(y\geqslant 0)$.

解 记 $a_n=\frac{x^n}{n+y^n}(y\geqslant 0)$.

(1)当 $|x|<1$ 时，易见

$$|a_n|\leqslant|x|^n(n=1,2,\cdots).$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}|x|^n$ 的收敛性知原级数绝对收敛.

(2)当 $x=1$ 时，1°若 $y>1$，则由

$$|a_n|=\frac{1}{n+y^n}<\left(\frac{1}{y}\right)^n,$$

易见原级数绝对收敛，2°若 $0\leqslant y\leqslant 1$，由于

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+y^n}\to 1(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

易见原级数发散.

(3)当 $x=-1$ 时,1°若 $y>1$,由

$$|a_n|=\frac{1}{n+y^n}<\left(\frac{1}{y}\right)^n(n=1,2,\cdots),$$

易见原级数绝对收敛. 2°若 $0\leqslant y\leqslant 1$,由

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n+y^n}(n=1,2,\cdots),$$

易见原级数条件收敛.

(4)当 $|x|>1$ 时,1°若 $y=0$,则由

$$a_n=\frac{x^n}{n}(n=1,2,\cdots),$$

易见原级数发散. 2°若 $y>0$,则当 $\left|\frac{x}{y}\right|<1$ 即 $|x|<y$ 时,有

$$|a_n|=\frac{|x|^n}{a+y^n}<\left|\frac{x}{y}\right|^n,$$

故原级数绝对收敛. 当 $\left|\frac{x}{y}\right|\geqslant 1$ 时,若 $y>1$,有

$$|a_n|=\left|\frac{x}{y}\right|^n\cdot\frac{1}{1+\frac{n}{y^n}}\to+\infty(\text{当 } n\to\infty\text{时});$$

若 $0<y\leqslant 1$,有

$$|a_n|>\frac{|x|^n}{n+1}\to+\infty\quad(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

故当 $\left|\frac{x}{y}\right|\geqslant 1$ 时,原级数发散.

总之,当 $|x|<1,0\leqslant y<+\infty$;当 $|x|=1,y>1$ 及当 $|x|>1,|x|<y$ 时,原级数绝对收敛. 当 $x=-1,0\leqslant y$

$\leqslant 1$ 时，原级数条件收敛.

2734. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$.

解 由于

$$a_n=\sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$$
$$=\sqrt[n]{\left(\frac{|x|}{\max(|x|,|y|)}\right)^{n^2}+\left(\frac{|y|}{\max(|x|,|y|)}\right)^{n^2}}\cdot(\max(|x|,|y|))^n$$

及 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\max(|x|,|y|)$，故当 $\max(|x|,|y|)<1$ 时，级数绝对收敛；当 $\max(|x|,|y|)>1$ 时，级数发散；当 $\max(|x|,|y|)=1$ 时，由于 $a_n\to 1$（当 $n\to\infty$），故级数发散.

2735. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}(x\geqslant 0)$.

解 (1) 当 $0\leqslant x<1$ 时，此级数可与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^y}$ 相比，它们具有相同的敛散性. 事实上

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{x^n}=1,$$

且这两个级数均为正项级数. 对于正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^y}, \tag{1}$$

其通项 $\frac{x^n}{n^y}\leqslant n^{|y|}x^n=b_n(n=1,2,\cdots)$，但因

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=x<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，且为绝对收敛. 因此，级数(1) 绝对

收敛，从而原级数也是绝对收敛的.

(2) 当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{n^y}$. 于是，当 $y>1$ 时收敛，且为绝对收敛；当 $y\leqslant 1$ 时发散.

(3) 当 $x>1$ 时，原级数的通项可写成

$$\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}=\frac{\ln x^n\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{n^y}$$

$$=\frac{\ln x}{n^{y-1}}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{n^y}.$$

由上式右端第一项所组成的级数当 $y-1>1$ 即 $y>2$ 时收敛，而当 $y\leqslant 2$ 时发散. 由上式右端第二项所组成的级数，利用 $0<\frac{1}{x}<1$ 及最初讨论的结果，得知它对任意的 y 值均收敛. 因此，原级数当 $x>1$，$y>2$ 时收敛，且为绝对收敛.

总之，当 $0\leqslant x<1$，$-\infty<y<+\infty$；当 $x=1$，$y>1$ 及当 $x>1$，$y>2$ 时，原级数绝对收敛.

2736. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^n\left(x+\frac{y}{n}\right)$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\operatorname{tg}^n\left(x+\frac{y}{n}\right)\right|}=|\operatorname{tg}x|,$$

故当 $|x-k\pi|<\frac{\pi}{4}$（其中 k 为整数）时，$|\operatorname{tg}x|<1$，从而级数绝对收敛. 而当 $|x-k\pi|\geqslant\frac{\pi}{4}$ 时，由于 $\operatorname{tg}^n\left(x+\frac{y}{n}\right)\to\infty$，故级数发散.

2737. 证明：若劳郎级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 当 $x=x_1$ 和 $x=x_2$（$|x_1|<|x_2|$）时收敛，则此级数当 $|x_1|<|x|<|x_2|$ 时也收敛.

证 由于劳郎级数当 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 时收敛，故级数

$$(1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n,\qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_1^{-n},$$

$$(3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n\qquad (4)\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_2^{-n}$$

均收敛. 于是，由(3)知，当 $|x|<|x_2|$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛. 由(2)知，当 $\left|\dfrac{1}{x}\right|<\left|\dfrac{1}{x_1}\right|$ 即当 $|x_1|<|x|$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 收敛. 因而，当 $|x_1|<|x|<|x_2|$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 均收敛，也即 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛.

2738. 求劳郎级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$$

的收敛域并求它的和.

解 考虑级数

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n,\qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2^n} x^{-n}.$$

显然仅当 $|x|<2$ 时，级数(1)收敛；仅当 $|x|>\dfrac{1}{2}$ 时，级数(2)收敛. 因此，当 $\dfrac{1}{2}<|x|<2$ 时，原级数收敛.

当$\frac{1}{2}<|x|<2$时，记级数(1)的和为$S_+(x)$，级数(2)的和为$S_-(x)$. 显然有

$$S_-(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n=-S_+\left(\frac{1}{x}\right).$$

今求$S_+(x)$. 注意当$\frac{1}{2}<|x|<2$时，下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2^n}x^n,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n$$

均收敛，且有

$$\begin{aligned}S_+(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2^n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{2^{m+1}}x^{m+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\\&=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\\&=\frac{x}{2}S_+(x)+\frac{x}{2-x},\end{aligned}$$

得

$$S_+(x)=\frac{\frac{x}{2-x}}{1-\frac{x}{2}}=\frac{2x}{(2-x)^2}.$$

从而

$$S_-(x)=-\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{\left(2-\frac{1}{x}\right)^2}=-\frac{2x}{(2x-1)^2},$$

故当$\frac{1}{2}<|x|<2$时，有

记 $a_n = \dfrac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}$. 显然，当 x 为任意数，$y = 0,1,2,\cdots$ 时，$a_n = 0(n = 1,2,\cdots)$. 于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 研究一下 $y \neq k(k = 0,1,2,\cdots)$ 的情形，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = -\frac{n+1}{n+1+t} \cdot \frac{1}{ex}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= -\frac{n+1}{n-y} \cdot \frac{1}{ex}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

(1) 当 $|x|<1$ 时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{n+1}{n-y}\right| \cdot \frac{1}{e|x|}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{|x|} > 1,$$

故此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

(2) 当 $|x| > 1$ 且 n 充分大时，有 $|a_n| < |a_{n+1}|$，故 $a_n \nrightarrow 0$，从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(3) 当 $|x| = 1$（考虑 n 足够大）时，有

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n+1}{n-y} \cdot \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \left[1+\frac{1+y}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \cdot \left[1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= 1+\frac{1+\left(y-\frac{1}{2}\right)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是，1° 当 $y > \frac{1}{2}$ 时，由高斯判别法知，此时级数绝对收敛. 2° 当 $y \leqslant \frac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散. 但当 $|y| < \frac{1}{2}$ 时，

有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=-\frac{1}{x}\left[1+\frac{\mu}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],$$

其中 $0<\mu<1$. 显然，当 $x=-1$ 时，a_n 不变号，因此可看成正项级数，且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\mu}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

由高斯判别法知此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为交错级数，且当 n 足够大时，

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1+\frac{\mu}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)>1,$$

也即 $|a_n|$ 单调下降. 此外，还有

$$|a_n|=|y|=(1-y)(2-y)\cdots(n-1-y)\frac{e}{n^n}$$

$$=e|y|\frac{1-y}{n}\frac{2-y}{n}\cdots\frac{n-1-y}{n}\frac{1}{n}<\frac{e|y|}{n}\to 0$$

(当 $n\to\infty$).

由莱布尼兹判别法，便知当 $x=1$，$|y|<\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

总之，当：(1) $|x|<1$，y 为任意数；(2) $|x|=1$，$y>\frac{1}{2}$；(3) x 为任意数，$y=0,1,2,\cdots$ 时，原级数绝对收敛. 当 $x=1$，$|y|<\frac{1}{2}$ 时，原级数条件收敛.

2740. 证明：若迪里黑里级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 当 $x=x_0$ 收敛，则此级数当 $x>x_0$ 时也收敛.

证 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}\cdot\frac{1}{n^{x-x_0}}$. 由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$收敛，并且$\frac{1}{n^{x-x_0}}$当$x>x_0$时单调下降趋于零，故根据亚伯耳判别法即知：当$x>x_0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$收敛.

2741. 证明：叙列$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$在区间(a,b)内一致收敛于极限函数$f(x)$的充分而且必要的条件是

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0,$$

式中 $$\gamma_n(x)=|f(x)-f_n(x)|.$$

证 先证必要性.

由于$f_n(x)$在(a,b)内一致收敛于$f(x)$，故对任给的$\varepsilon>0$，总存在$N(\varepsilon)>0$,，使当$n>N(\varepsilon)$时，对于区间(a,b)内的一切x值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，当$n>N(\varepsilon)$时，有

$$\sup_{a<x<b}\{\gamma_n(x)\}\leqslant\varepsilon,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0.$$

再证充分性.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\{\sup\limits_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0$，故对任给的$\varepsilon>0$，总存在$N(\varepsilon)>0$，使当$n>N(\varepsilon)$时，有

$$\sup_{a<x<b}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

于是，对于(a,b)内的一切x值，只要当$n>N(\varepsilon)$时，就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在(a,b)内一致收敛于 $f(x)$.

2742. 叙列 $f_n(x)(n=1,2\cdots)$. (a)在区间$(x_0,+\infty)$上收敛；(б)在每一个有穷的区间$(a,b)\subset(x_0,+\infty)$上一致收敛；(в)在区间$(x_0,+\infty)$上一致收敛是什么意思？

解 (a)对于任意的 $\varepsilon>0$ 及任意的 $x_0<x<+\infty$，都存在一个正整数 $N=N(\varepsilon,x)$，使得当 $n>N$ 时，恒有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称叙列 $f_n(x)$在区间$(x_0,+\infty)$上收敛. 要注意的是，N 不仅与 ε 有关，而且与值 x 有关.

(б)对每一个$(a,b)\subset(x_0,+\infty)$，如果对于任给的 $\varepsilon>0$，存在一个 $N=N(\varepsilon,a,b)$，使当 $n>N$ 时，对于(a,b)内的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

则称 $f_n(x)$在(a,b)上一致收敛.

(в)如果对于任给的 $\varepsilon>0$，都有正整数 $N=N(\varepsilon)$存在($N(\varepsilon)$仅与 ε 有关)，使当 $n>N$ 时，对所有的 $x_0<x<+\infty$，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称 $f_n(x)$在$(x_0,+\infty)$上一致收敛.

2743. 对于叙列

$$f_n(x)=x^n(n=1,2,\cdots)\quad(0<x<1)$$

求出其项的最小号码 $N=N(\varepsilon,x)$，使从这项起叙列的项在已知点 x 与极限函数的差不超过 0.001，设 $x=\frac{1}{10},\frac{1}{\sqrt{10}},\cdots,\frac{1}{\sqrt[m]{10}},\cdots$.

此叙列在已知区间(0,1)内是否一致收敛？

解 显见极限函数为零. 于是考虑

$$|x^n-0|<\varepsilon,$$

其中 $\varepsilon=0.001$. 当 $0<x<1$ 时,上式即 $x^n<\varepsilon$ 或 $n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}$,故最小号码为 $N=\left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}\right]$.

当 $x=\frac{1}{10}$时,$N=3$;

当 $x=\frac{1}{\sqrt{10}}$时,$N=6$;

……

当 $x=\frac{1}{\sqrt[m]{10}}$时,$N=3m$,

……

下面研究此叙列在(0,1)内的一致收敛性. 由于当 x 趋于 1 时,$\lg x$ 趋于零,故

$$\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}\longrightarrow+\infty\quad(0<\varepsilon<1,x\to1-0),$$

即$\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}$无限增加. 因此,不可能找到一个公共的 N(它仅与 ε 有关)值,使当 $n>N$ 时,对于(0,1)内的一切 x 值,皆有 $x^n<\varepsilon$. 因此,叙列

$$f_n(x)=x^n(n=1,2,\cdots)\quad(0<x<1)$$

在区间(0,1)内不一致收敛.

2744. 应当取级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

的若干项方可使部分和 $S_n(x)$当$-\infty<x<+\infty$时与级数的和之差小于 ε? 设:

(a)$\varepsilon=0.1$;　　　(6)$\varepsilon=0.01$;

(в)$\epsilon=0.001$.

求出 n 的数值来.

解 易证此级数收敛，记其和为

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

如果取 n 项，其部分和为 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k(k+1)}$. 欲使其误差 $\Delta_n(x)=|S(x)-S_n(x)|$ 小于 ϵ，问项数 n 为若干？可用下列估计法：

$$\begin{aligned}\Delta_n(x)&=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k(k+1)}\right|\\&=\left|\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{\sin kx}{k(k+1)}\right|\\&\leqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{|\sin kx|}{k(k+1)}\\&\leqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{N+1}\right)=\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

若令 $\frac{1}{n+1}<\epsilon$，也即当 $n>\frac{1}{\epsilon}-1$ 时就有 $\Delta_n(x)<\epsilon$.

记 $N_0=\left[\frac{1}{\epsilon}\right]$，则当 $n>\left[\frac{1}{\epsilon}\right]+\left\{\frac{1}{\epsilon}\right\}-1=N_0-(1-\{\frac{1}{\epsilon}\})$ 时，即有 $\Delta_n(x)<\epsilon$，其中 $\left\{\frac{1}{\epsilon}\right\}$ 表示 $\frac{1}{\epsilon}$ 的零头部分.

也即可取

$$n=N_0,N_0+1,N_0+2,\cdots$$

均有 $\Delta_n(x)<\varepsilon$. 所取的项数 N_0 与 ε 的关系，按题设数值，可有

ε	(a)0.1	(б)0.01	(в)0.001
N_0	10	100	1000

2745⁺. 对怎样的 n，不等式

$$\left|e^x-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|<0.001\quad(0\leqslant x\leqslant 10)$$

能保证成立?

解 由台劳公式，有

$$\begin{aligned}\Delta_n(x)&=\left|e^x-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|\\&=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\\&\leqslant\frac{e^{10}}{(n+1)!}10^{n+1},\end{aligned}$$

其中 $0<\theta<1$. 欲 $\Delta_n(x)<0.001$，只要

$$\frac{e^{10}}{(n+1)!}10^{n+1}<\frac{1}{1000}.$$

也即要求 n，使

$$e^{10}10^{n+4}<(n+1)!.$$

为此，两边取对数，有

$$10+(n+4)\ln 10<\sum_{k=2}^{n+1}\ln k=p_n.\qquad(1)$$

注意到

$$p_n>\int_1^{n+1}\ln t\,dt=(n+1)\ln(n+1)-n.$$

若能有

$$(n+1)\ln(n+1)>n(1+\ln 10)+10+4\ln 10, \quad (2)$$

就可保证(1)式成立，从而 $\Delta_n(x)<0.001$. 为解(2)中的 n，可用估算法，例如当 $n=39$ 时，(2)式就成立，故对于 n 取 39，即取 39 项时就能保证 $\left|e^x-\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|<0.001(0\leqslant x\leqslant 10)$.

研究叙列在所示区间上的一致收敛性：

2746. $f_n(x)=x^n$； (a) $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$； (б) $0\leqslant x\leqslant 1$.

解 (a)当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x).$$

任给 $\varepsilon>0$，由于

$$|f_n(x)-f(x)|=|x|^n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

故要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，即只要

$$n>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}.$$

取 $N=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-0|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)=x^n$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上一致收敛于零.

$$(б)\ f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & 若\ x=1,\\ 0, & 若\ 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$[0,1]$上收敛而不一致收敛.

2747. $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$；$0\leqslant x\leqslant 1$.

解 当 $x=0$ 或 1 时，$f_n(x)=0$；当 $0<x<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 因此，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n-x^{n+1}=g(x).$$

由于 $g'(x)=x^{n-1}[n-(n+1)x]$，故若令 $g'(x)=0$，即求得 $x=\frac{n}{n+1}$. 显然，当 $0<x<\frac{n}{n+1}$时，$g'(x)>0$；当 $\frac{n}{n+1}<x<1$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$在 $x=\frac{n}{n+1}$达到$[0,1]$上的最大值. 于是，对于 $0\leqslant x\leqslant 1$，有

$$g(x)\leqslant\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+1}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要$\frac{1}{n+1}<\varepsilon$，即只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于$[0,1]$上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-0|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛于零.

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx}{1+n+x}-x\right|$$
$$=\frac{x+x^2}{1+n+x}<\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>\frac{2}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $[0,1]$ 上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-x|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 x.

2751. $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$；(a) $0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon$；(б) $1-\varepsilon\leqslant x\leqslant 1+\varepsilon$；(в) $1+\varepsilon\leqslant x<+\infty$，其中 $\varepsilon>0$.

解 (a) 当 $0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon$ 时

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{x^n}{1+x^n}<(1-\varepsilon)^n.$$

任给 $\varepsilon'>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon'$，只要 $(1-\varepsilon)^n<\varepsilon'$，即只要 $n>\frac{\lg\varepsilon'}{\lg(1-\varepsilon)}$. 取 $N=\left[\frac{\lg\varepsilon'}{\lg(1-\varepsilon)}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $[0,1-\varepsilon]$ 上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon'.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[0,1-\varepsilon]$ 上一致收敛于零.

$$(б)\ f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, & 若\ 1-\varepsilon\leqslant x<1;\\ \frac{1}{2}, & 若\ x=1,\\ 1, & 若\ 1<x\leqslant 1+\varepsilon.\end{cases}$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{3}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$，就有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{3}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[1-\varepsilon,1+\varepsilon]$ 上收敛而不一致收敛.

(в) 当 $1+\varepsilon\leqslant x<+\infty$ 时

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=1=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{1+x^n}<\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}.$$

任给 $\varepsilon'>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon'$，只要 $\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}<\varepsilon'$，即只要 $n>\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon'}}{\lg(1+\varepsilon)}$. 取 $N=\left[\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon'}}{\lg(1+\varepsilon)}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $x\geqslant 1+\varepsilon$ 的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-1|<\varepsilon'.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛于 1.

2752. $f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$；(a) $0\leqslant x\leqslant 1$；(б) $1<x<+\infty$.

解 (a) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x).$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<1$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{n}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=1>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

(б) 当 $1<x<+\infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{2nx}{1+n^2x^2}<\frac{2nx}{n^2x^2}<\frac{2}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>\frac{2}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $x>1$ 的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

因此，$f_n(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致收敛.

2753. $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$；$-\infty<x<+\infty$.

解 当 $-\infty<x<+\infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=|x|=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{x^2+\frac{1}{n^2}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|}<\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于一切实数 x，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

因此，$f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

2754. $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$；$0<x<+\infty$.

解 当 $0<x<+\infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left[\left(x+\frac{1}{n}\right)-x\right]}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=f(x).$$

若取 $x=\frac{1}{n}$，则有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|n\left[\sqrt{\frac{2}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right]-\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n}}}\right|$$

$$=\sqrt{n}\left|\sqrt{2}-1-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{n}\frac{\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{2}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{2(\sqrt{2}+1)^2}>\frac{1}{18}\sqrt{n}.$$

当 n 充分大时，它就可以大于指定的 $\varepsilon_0>0$. 因此，$f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2755. (a) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$；$-\infty<x<+\infty$；

(6) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$；$-\infty<x<+\infty$.

解 (a) 当 $-\infty<x<+\infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{|\sin nx|}{n}\leqslant\frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于一切实数 x，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(б)当$-\infty<x<+\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x).$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<1$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{n\pi}{2}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{n\pi}{2}\right)-f\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|=1>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

2756. (a) $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx$；$0<x<+\infty$；(б) $f_n(x)=x\operatorname{arctg} nx$；$0<x<+\infty$.

解 (a)当 $0<x<+\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{arc\,tg} nx=\frac{\pi}{2}=f(x).$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{\pi}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{n}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\operatorname{arc\,tg}1-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{4}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$(0,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

(б)当 $0<x<+\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\frac{\pi}{2}x=f(x),$$

并有

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)|&=x\left|\operatorname{arc\,tg} nx-\frac{\pi}{2}\right|\\&=x\left|-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{nx}\right|\\&\leqslant x\cdot\frac{1}{nx}=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

任给 $\varepsilon>0$，要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $x>0$ 的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(0,+\infty)$上一致收敛.

2757. $f_n(x)=e^{n(x-1)}$；$0<x<1$.

解 当 $0<x<1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x).$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<e^{-1}$，不论 n 多么大，只要取 $x=1-\frac{1}{n}$，就有

$$\left|f_n\left(1-\frac{1}{n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|=e^{n\left(1-\frac{1}{n}-1\right)}=e^{-1}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$(0,1)$上收敛而不一致收敛.

2758. $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$；(a) $-l<x<l$，其中 l 为任意的正数；(6) $-\infty<x<+\infty$.

解 (a)当 $-l<x<l$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

并有(当 $n>[l]$时)

$$|f_n(x)-f(x)|=e^{-(x-n)^2}\leqslant e^{-(n-l)^2}.$$

任给 $\varepsilon>0$，(可设 $\varepsilon<1$)，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>[l]$且 $e^{-(n-l)^2}<\varepsilon$，即只要 $n>l+\ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

取 $N=\left[l+\ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于$(-l,l)$上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(-l,l)$上一致收敛.

(б)当$-\infty<x<+\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x).$$

取ε_0使$0<\varepsilon_0<1$，不论n多么大，只要取$x=n$，就有

$$|f_n(n)-f(n)|=1>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

2759. $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$；$0<x<1$.

解 当$0<x<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0$. 又$\lim\limits_{t\to+0}t\ln t=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x).$$

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|.$$

任给$\varepsilon>0$. 由于$\lim\limits_{t\to+0}t\ln t=0$，故存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使当$0<t<\delta$时，恒有$|t\ln t|<\varepsilon$. 取$N=\left[\frac{1}{\delta}\right]$，则当$n>N$时，$\frac{1}{n}<\delta$，从而对一切$0<x<1$，都有$0<\frac{x}{n}<\delta$，故

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(0,1)$上一致收敛.

2760. $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$；(a)在有穷的区间$(a,b)$上；(б)在区间$(-\infty,+\infty)$上.

解 (a)当$a<x<b$时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right\}^x=e^x=f(x).$$

记 $C=\max\{|a|,|b|\}$. 由台劳公式知

$$\ln f_n(x)=n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$
$$=n\left[\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\theta x}{n}\right)^3}\cdot\frac{x^3}{n^3}\right],$$

其中 $0<\theta<1$, $\left|\frac{\theta x}{n}\right|\leqslant\frac{c}{n}$, $|x^3|\leqslant c^3$, 故

$$\ln f_n(x)=x-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是易知

$$f_n(x)=e^{x-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}=e^x\left[1-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

取适当大的 N_1, 则当 $n>N_1$ 时, 就有

$$|f_n(x)-f(x)|=e^x\left|-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|$$
$$\leqslant\frac{c^2e^c}{n}\quad(a<x<b)$$

任给 $\varepsilon>0$, 要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 只要 $n>N_1$, 且 $n>\frac{c^2e^c}{\varepsilon}$. 取 $N=\max\left(N_1,\left[\frac{c^2e^c}{\varepsilon}\right]\right)$, 则当 $n>N$ 时, 对于 (a,b) 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛.

(6) $|f_n(x)-f(x)|=\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-e^x\right|.$

不论 n 多么大, 只要取 $x=n$, 就有

$$|f_n(n)-f(n)|=2^n\left[\left(\frac{e}{2}\right)^n-1\right],$$

它趋于 $+\infty$, 不可能小于任给的 $\varepsilon>0$. 因此, $f_n(x)$ 在

$(-\infty,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

2761. $f_n(x)=n(x^{\frac{1}{n}}-1)$；$1\leqslant x\leqslant a$.

解 当 $1\leqslant x\leqslant a$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln x=f(x),$$

并有

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)|&=|n(x^{\frac{1}{n}}-1)-n\ln[1+(x^{\frac{1}{n}}-1)]|\\&=\left|n(x^{\frac{1}{n}}-1)-n(x^{\frac{1}{n}}-1)+\frac{n}{2}(x^{\frac{1}{n}}-1)^2\right.\\&\quad\left.+nO((x^{\frac{1}{n}}-1)^3)\right|\\&=\frac{1}{2n}\left(\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)^2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)<\frac{(\ln a)^2}{n}+A\cdot\frac{1}{n^2},\end{aligned}$$

其中$A>0$为常数，上述不等式可在适当大的N_1取定后当$n>N_1$时成立. 显然对任给的$\varepsilon>0$，存在N_2，使当$n>N_2$时，$\frac{(\ln a)^2}{n}+A\cdot\frac{1}{n^2}<\varepsilon$，于是，取$N=\max(N_1,N_2)$，则当$n>N$时，对于$[1,a]$上的一切$x$值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$[1,a]$上一致收敛.

2762. $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$；$0\leqslant x\leqslant 2$.

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(1)当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sqrt[n]{1+x^n}-1\right|$$

$<\frac{2}{N}\leqslant x$. 于是，$f_n(x)=0$. 因此，

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x).$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<1$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{n^2}$，

就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)-f\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|=n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上收敛而不一致收敛.

2764. 设 $f(x)$ 为定义于区间 (a,b) 内的任意函数，且

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}\ (n=1,2,\cdots).$$

证明，当 $n\to\infty$ 时，

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\ (a<x<b).$$

证　由于

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n}\left|[nf(x)]-nf(x)\right|\leqslant\frac{1}{n},$$

故对任给的 $\varepsilon>0$，若取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，

对于一切 $x\in(a,b)$，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛于 $f(x)$.

2765. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a,b) 内有连续的导函数 $f'(x)$，

且

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

证明：在闭区间 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上（其中 $a<\alpha<\beta<b$），

$$f_n(x)\rightrightarrows f'(x).$$

证 考虑$[\alpha',\beta']$，其中$a<\alpha'<\alpha<\beta<\beta'<b$. 由于$f_n(x)$($n$充分大)在$[\alpha',\beta']$上有连续的导函数，故由微分学中值公式，得

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=nf'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)\ (0<\theta<1).$$

又因$f'(x)$在$[\alpha',\beta']$上连续，所以$f'(x)$在$[\alpha',\beta']$上一致连续，即对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对于$[\alpha',\beta']$上的任意点$x'$及$x''$，只要当$|x'-x''|<\delta$时，就有$|f'(x')-f'(x'')|<\varepsilon$. 今取$N=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1=N(\varepsilon)$，

则当$n>N$时，有$\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\delta$.

于是，对$[\alpha,\beta]$上的一切x值，只要N足够大，就可保证x与$x+\frac{\theta}{n}$均属于$[\alpha',\beta']$. 于是，对于$[\alpha,\beta]$上的一切值x，均有

$$|f_n(x)-f'(x)|=|f'(x+\frac{\theta}{n})-f'(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛于$f(x)$.

2766. 设$f_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}\right)$，其中$f(x)$为连续函数. 证明叙列$f_n(x)$在任何有穷闭区间$[a,b]$上一致收敛.

证 记$f_n(x)$的极限函数为$F(x)$，则

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} f(t)dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}\right)$$

$$(0 < \theta_i < 1; i = 0, 1, \cdots, n-1).$$

由于 $f(x)$在$[a,b+1]$上连续,故它在$[a,b+1]$上一致连续,即对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使对于$[a,b+1]$上的任意点 x' 及 x'',只要当$|x'-x''|<\delta$ 时,就有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 今取 $N=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1$,则当 $n>N$,$a\leqslant x\leqslant b$ 时,有$\left|\left(x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n}\right)-\left(x+\frac{i}{n}\right)\right|<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\delta$ 且 $x+\frac{i}{n}\in[a,b+1]$,$x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n}\in[a,b+1]$($i=0,1,\cdots,n-1$).

于是

$$|F(x)-f_n(x)|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left|f\left(x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n}\right)-f\left(x+\frac{i}{n}\right)\right|$$

$$< \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \varepsilon = \frac{1}{n} \cdot n\varepsilon = \varepsilon.$$

因此,$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$.

研究下列级数的收敛性:

2767. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; (a)在区间$|x|<q$ 内,此处 $q<1$,(б)在区间$|x|<1$内.

解 (a)由于$|x^n|<q^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 收敛($0<q<1$),故由

外耳什特拉斯判别法知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $|x|<q<1$ 内绝对并一致收敛.

(6) $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. 当 $|x|<1$ 时，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{1-x}.$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$，就有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)-S\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}}{1-\sqrt[n+1]{2}}\right|>\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $|x|<1$ 内收敛而不一致收敛.

2768. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$；在闭区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上.

解 由于 $\left|\frac{x^n}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由外耳什特拉斯判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 在 $[-1,1]$ 上绝对并一致收敛.

2769. $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$；在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上.

解 $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(1-x)x^k$

$$=(1-x)\sum_{k=0}^{n}x^k=1-x^{n+1}.$$

于是，

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}1, 若\ 0\leqslant x<1;\\0, 若\ x=1.\end{cases}$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$，就有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)-S\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}-1\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛而不一致收敛.

2770. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$；$-1\leqslant x\leqslant 1$.

解 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^k}{k}-\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)=x-\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=x,$$

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

于是对任给的 $\varepsilon>0$，若取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $[-1,1]$ 上的一切 x 值，均有

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛.

2771. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$；$0<x<+\infty$.

解 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)x+1}-\frac{1}{kx+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{nx+1}.$$

当 $0<x<+\infty$ 时，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=1.$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{n}$，就有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{n}\right)-S\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$ 在 $(0,+\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2772. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$；$0<x<+\infty$.

解 由于 $\left|\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right|<\frac{1}{n^2}(x>0)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由外耳什特拉斯判别法知，原级数在 $(0,+\infty)$ 上绝对并一致收敛.

2773. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$；

(a) $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$，其中 $\varepsilon>0$；(б) $\varepsilon\leqslant x\leqslant+\infty$.

解 当 $x=0$ 时，显然级数收敛于零.

当 $x>0$ 时，令

$$u_n(x)=\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)},$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{1+(n+1)x}\right)=0<1,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛($x\geqslant 0$). 易见，此时

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{kx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+kx)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(1+x)\cdots(1+(k-1)x)}-\frac{1}{(1+x)\cdots(1+kx)}\right]$$

$$=1-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\to 1$$

(当 $n\to\infty$),

因此有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)\begin{cases}0, & 若\ x=0;\\ 1, & 若\ x>0.\end{cases}$$

(a)当 $x>0$ 时，有

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}.$$

取 $0<\varepsilon_0<1$. 对于任意大(但固定的)n，由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}=1,$$

故可取 $0<x_0<\varepsilon$，使

$$\frac{1}{(1+x_0)(1+2x_0)\cdots(1+nx_0)}>\varepsilon_0,$$

即

$$|S_n(x_0)-S(x_0)|>\varepsilon_0.$$

由此可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$ 上不一致收敛.

(6)当 $x\geqslant\varepsilon$ 及 $n\geqslant 3$ 时，由于

$$|u_n(x)|=\left|\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\right|$$

$$<\frac{nx}{(1+x)^n}$$

$$=\frac{nx}{1+nx+\frac{1}{2!}n(n-1)x^2+\cdots+x^n}$$

$$<\frac{nx}{\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)x^3}$$

$$=\frac{6}{(n-1)(n-2)x^2}<\frac{6}{(n-2)^2\varepsilon^2},$$

且级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{6}{(n-2)^2\varepsilon^2}$ 收敛，故由外耳什特拉斯判别法知，原级数在$[\varepsilon,+\infty)$上绝对并一致收敛.

2774. 利用外耳什特拉斯判别法，证明下列函数项级数在所指区间内的一致收敛性：

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty<x<+\infty$;

(б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $-2<x<+\infty$;

(в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $0\leqslant x\leqslant+\infty$;

(г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, $|x|<+\infty$;

(д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$, $\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant2$;

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, $|x|<a$, a 为任意正数；

(ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $|x|<+\infty$;

(з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, $|x|<+\infty$;

(и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $|x|<+\infty$;

(к) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$, $|x|<a$;

(л) $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$, $0\leqslant x<+\infty$;

(м) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{x^2+n^3}$, $|x|<+\infty$.

解 (а)由于$\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(б)考虑 $n\geqslant2$，有$\left|\frac{(-1)^n}{x+2^n}\right|<\frac{1}{2^n-2}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$ $(x>-2)$. 但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$在$(-2,+\infty)$上一致收敛.

(в)当 $x=0$ 时，级数显然收敛于零. 当 $x>0$ 时，$1+n^4x^2\geqslant2n^2x$，于是$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2n^2}$. 又因$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

(г)当 $|x|<+\infty$ 时，$1+n^5x^2\geqslant2n^{\frac{5}{2}}x$，于是，$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. 又因$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}$

一致收敛. 从而，原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$当$|x|<a$时一致收敛.

(ж) 当$|x|<+\infty$时，$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|\leqslant\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$当$|x|<+\infty$时一致收敛.

(з) 当$|x|<+\infty$时，$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$当$|x|<+\infty$时一致收敛.

(и) 当$|x|<+\infty$时，$\left|\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}\right|\leqslant\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$当$|x|<+\infty$时一致收敛.

(к) 当n充分大(即$n\geqslant n_0$)时，对于$|x|<a$，有

$$\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)=\frac{x}{n\ln^2 n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

但当$|x|<a$时，$\left|\frac{x}{n\ln^2 n}\right|\leqslant\frac{a}{n\ln^2 n}$，而$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{a}{n\ln^2 n}$收敛*)以及$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$也收敛，故级数$\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1+\frac{x}{n\ln^2 n})$当$|x|<a$时，一致收敛.

*)利用2619题的结果.

(л)当$x>0$时，$e^{nx}>1+nx+\frac{n^2x^2}{2}>\frac{n^2x^2}{2}$，故$e^{-nx}<\frac{2}{n^2x^2}$. 于是，$|x^2e^{-nx}|<\frac{2}{n^2}$，此式对$x=0$也成

立. 又因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ 当 $0\leqslant x<+\infty$ 时一致收敛.

(м)由于 $x^2+n^3\geqslant 2n^{\frac{3}{2}}|x|$，故 $\left|\frac{x}{x^2+n^3}\right|\leqslant\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$.

当 n 充分大($n\geqslant n_0$)时，对于 $|x|<+\infty$，有

$$\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{x^2+n^3}\right|=\left|\frac{2x}{x^2+n^3}+O\left(\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)^2\right)\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

又因 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 及 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 均收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x^2+n^3}$ 当 $|x|<+\infty$ 时一致收敛.

研究下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性：

2775. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$；(a)在闭区间 $\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon$ 上，其中 $\varepsilon>0$；(б)在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上.

解 (a)当 $\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon$ 时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}},$$

又 $\frac{1}{n}$ 趋于零并且不依赖于 x，故由迪里黑里判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在$[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$上一致收敛.

(б)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在$[0,2\pi]$上条件收敛*). 但它不一致收敛，这可用反证法获证。设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$[0,2\pi]$上

一致收敛，其中 $u_n(x)=\frac{\sin nx}{n}(n=1,2,\cdots)$，

则应有：任给 $\epsilon>0$，例如取 $\epsilon=\frac{1}{4}$，必存在 $N_1=N_1(\epsilon)$（它与 x 无关），使当 $n\geqslant N_1$ 时，对于 $[0,2\pi]$ 上的一切 x 值，均有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\epsilon,$$

其中 p 为任意自然数. 取 $N_2\geqslant 2N_1$，记 $n_0=\max\left(\left[\frac{N_2}{2}\right],\left[\frac{N_2+1}{2}\right]\right)$，则 $n_0\geqslant N_1$，又取 p 使 $n_0+p=N_2+1$，则应有

$$\left|u_{n_0+1}(x)+u_{n_0+2}(x)+\cdots+u_{n_0+p}(x)\right|<\epsilon,$$

也即有

$$\left|\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2}u_n(x)\right|<\epsilon=\frac{1}{4}(x\in[0,2\pi]). \qquad (1)$$

今取 $x_0=\frac{1}{N_2+2}\cdot\frac{\pi}{2}$，当然上式(1)也应成立.

但是另一方面，由于当 $\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2$ 时，显然有 $0<nx_0<\frac{\pi}{2}$，故有 $\sin nx_0\geqslant nx_0\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{n}{N_2+2}$.

于是，$u_n(x_0)=\frac{\sin nx_0}{n}\geqslant\frac{1}{N_2+2}$，从而有

$$\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2}u_n(x_0)\geqslant\frac{1}{N_2+2}\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2}1$$

$$\geqslant\frac{1}{N_2+2}\cdot\frac{1}{2}(N_2+2)=\frac{1}{2},$$

它与(1)中当 $x=x_0$ 时相矛盾. 这就证明了级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在$[0,2\pi]$上条件收敛而不一致收敛的结论.

*)利用 2698 题的结果.

2776. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$; $0<x<+\infty$.

解 记 $u_n(x)=2^n\sin\frac{1}{3^n x}(n=1,2\cdots)$,当 $0<x<+\infty$ 时,由于

$$|u_n(x)|\leqslant 2^n\cdot\frac{1}{3^n x}=\frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛,故原级数绝对收敛,从而收敛.

但它在$(0,+\infty)$内并不一致收敛.如若不然,即设它一致收敛,则对任给 $\varepsilon>0$,例如取 $\varepsilon=1$,必存在 $N=N(\varepsilon)$(它与 x 无关),使当 $n\geqslant N$ 时,对于$(0,+\infty)$内的一切 x 值,均有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

其中 p 为任意自然数.今取 $p=1,n=N$,则对于一切 $x\in(0,+\infty)$,应有

$$|u_{N+1}(x)|<\varepsilon=1.$$

又取 $x_0=\frac{2}{3^{N+1}\pi}\in(0,+\infty)$,则也应有 $|u_{N+1}(x_0)|<1$.但事实上却有

$$u_{N+1}(x_0)=2^{N+1}\sin\frac{1}{3^{N+1}x_0}=2^{N+1}\sin\frac{\pi}{2}$$
$$=2^{N+1}>1,$$

这与 $|u_{N+1}(x_0)|<1$ 矛盾.证毕.

2777. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$;$0<x<+\infty$.

解 $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 1$. 当 $0<x<+\infty$ 时，$\frac{1}{n+x}<\frac{1}{n}$，它单调一致地趋于零. 因此，由迪里黑里判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ 当 $0<x<+\infty$ 时一致收敛.

2778. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$；$0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时，显然 $\frac{1}{n+\sin x}$ 对于 n 单调递减，同时由于 $0<\frac{1}{n+\sin x}<\frac{1}{n-1}$，故当 $n\to\infty$ 时，

$\frac{1}{n+\sin x}$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上一致地趋于零. 又由于

$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 1$，故原级数在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛.

2779. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$；$|x|\leqslant 10$.

解 $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\right|\leqslant 2$，记 $b_n(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$，由于

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}>\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2+e^x}},$$

故 $b_n(x)$ 单调下降. 又由于

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\to 0\quad(|x|\leqslant 10),$$

故 $b_n(x)$ 单调一致地趋于零. 因此，由迪里黑里判别法知，级数在 $[-10,10]$ 上一致收敛.

2780. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$; $-\infty<x<+\infty$.

解 $\left|\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{2n\pi}{3}\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi}{3}\right|}=\frac{2}{\sqrt{3}}$. 又$\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$对于每一个 $x\in(-\infty,+\infty)$都是单调递减的，且由于 $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\leqslant\frac{1}{n}$，故对每一个 x 一致地趋于零. 因此，由迪里黑里判别法知，级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

2781. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$; $0\leqslant x<+\infty$.

解 当 $x=2m\pi(m=0,1,2\cdots)$ 时，

$$\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx=0.$$

当 $x\neq 2m\pi(m=0,1,2,\cdots)$ 时，

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right|&=|\sin x|\cdot\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\\&\leqslant|\sin x|\cdot\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\\&=2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\leqslant 2\end{aligned}$$

于是，对于一切 $x\in[0,+\infty]$，均有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right|\leqslant 2.$$

又$\frac{1}{\sqrt{n+x}}$对于每一个 $x\in[0,+\infty)$关于 n 都是单调递减的，且由$\frac{1}{\sqrt{n+x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$知，当 $n\to\infty$时，$\frac{1}{\sqrt{n+x}}$关于 x

在 $0 \leqslant x < +\infty$ 上一致地趋于零. 因此，由迪里黑里判别法知，级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

2782. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$; $0 \leqslant x < +\infty$.

解 $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}} = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$. 由于

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛*)，且与 x 无关，故它对 x 而言是一致收敛的.

另一方面，$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$ 对于每一个 $x \in [0, +\infty)$ 都是单调递增的且有界：$\left| \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}} \right| \leqslant 1$.

因此，由亚伯耳判别法知，原级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

*)利用 2672 题的结果.

2783. 不连续函数的叙列可否一致收敛于连续函数?

解 可以. 例如，函数叙列

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(x) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

其中 $$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \text{若 } x \text{ 为无理数;} \\ 1, \text{若 } x \text{ 为有理数.} \end{cases}$$

显然，$f_n(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上每一点均不连续，但由于

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots; -\infty < x < +\infty),$$

故当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上一致趋于零. 而 $f(x)\equiv0(-\infty<x<+\infty)$ 显然是连续函数. 此例说明，不连续函数的叙列仍然可以一致收敛于连续函数.

2784. 证明：若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛.

证 由哥西准则及题设知：对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，对于 $[a,b]$ 上的一切 x 值，均有

$$|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

其中 p 为任意自然数. 由于

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|\leqslant|f_{n+1}(x)|$$
$$+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

故根据一致收敛的哥西准则知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛.

2785. 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上绝对并一致收敛，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$$

在 $[a,b]$ 上是否必定一致收敛？

解 未必. 例如，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$$

在$[0,1]$上绝对并一致收敛，但其绝对值级数不一致收敛. 事实上，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n| = \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$$

在$[0,1]$上收敛而不一致收敛*). 因此，我们只要证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在$[0,1]$上一致收敛就可以了. 首先，当 $x=0$ 及 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(1-x)x^n$ 显然收敛. 当 $0<x<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^n$ 是交错级数且满足莱布尼兹条件，故也收敛. 要证其一致收敛，只要证其余式 $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k(1-x)x^k$ 一致趋于零(对 $0\leqslant x\leqslant 1$) 即可. 按满足莱布尼兹条件的交错级数的余式估计，有

$$|R_n(x)|\leqslant(1-x)x^{n+1}\ (0\leqslant x\leqslant 1). \quad (1)$$

令 $f(x)=(1-x)x^{n+1}$，通过求导数易知此函数在 $x=\frac{n+1}{n+2}$ 时达到其在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的最大值，故当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，恒有

$$0\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}<\frac{1}{n+2}.$$

于是，由(1)式知

$$R_{N,p}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{N+1}\sin^2(2^{N+2}\pi x), & \\ \qquad\qquad \text{当 } x\in(2^{-(N+2)},2^{-(N+1)}), & \\ \dfrac{1}{N+2}\sin^2(2^{N+3}\pi x), & \\ \qquad\qquad \text{当 } x\in(2^{-(N+3)},2^{-(N+2)}); & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{1}{N+p}\sin^2(2^{N+p+1}\pi x), & \\ \qquad\qquad \text{当 } x\in(2^{-(N+p+1)},2^{-(N+p)}); & \\ 0, \qquad \text{其它点 } x & \end{cases}$$

因此，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，恒有

$$|R_{N,p}(x)|<\frac{1}{N}.$$

由此即知：对于任给的 $\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于[0,1]上的一切 x 值，均有 $|R_{N,p}(x)|<\varepsilon$，其中 p 为任意自然数. 由哥西准则知，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在[0,1]上绝对收敛且一致收敛. 下面证明：不可能用某正项收敛数项级数作为其强级数。采用反证法，假设有某收敛的强级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，其中 $a_n\geqslant 0$ 是常数，即在[0,1]上有

$$|f_n(x)|\leqslant a_n(n=1,2,\cdots), \tag{1}$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，以下将说明由此引出矛盾. 事实上，据(1)式对一切 $x\in[0,1]$ 均成立. 今取 $x_n=\frac{3}{2}2^{-(n+1)}$，显然

有

$$2^{-(n+1)}<x_n<2^{-n}.$$

因此得

$$a_n\geqslant|f_n(x_n)|=\frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x_n)=\frac{1}{n}>0.$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 也应收敛，这与众所周知的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的发散结论相抵触. 证毕.

2787. 证明：若各项是单调函数的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$$

在闭区间[a，b]的端点绝对收敛，则此级数在闭区间[a，b]上绝对并一致收敛.

证 按题设，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(a)|$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(b)|$ 均收敛. 令 $a_n=\max(|\varphi_n(a)|,|\varphi_n(b)|)$，由于 $0\leqslant a_n\leqslant|\varphi_n(a)|+|\varphi_n(b)|$，故知

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

收敛. 由于 $\varphi_n(x)$ 在[a，b]上是单调的，故

$$|\varphi_n(x)|\leqslant a_n(a\leqslant x\leqslant b;n=1,2,\cdots).$$

由外耳什特拉斯判别法知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$$

在[a，b]上绝对并一致收敛.

2788. 证明：幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在全部位于其收敛区间内的任何闭区间上一致收敛.

证 设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

的收敛区间为$(-R,R)(R>0)$,$[a,b]\subset(-R,R)$. 令

$$r=\max(|a|,|b|),$$

则当$x\in[a,b]$时,有

$$|a_n x^n|\leqslant|a_n|\cdot|r|^n=|a_n r^n|.$$

由题设知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n r^n|$收敛,故原幂级数在$[a,b]$上绝对并一致收敛. 由$[a,b]$的任意性,本题获证.

2789. 设$a_n\to\infty$且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|$收敛. 证明:级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x-a_n}$$

在不包含点$a_n(n=1,2,\cdots)$的任何有界闭集合上绝对并一致收敛.

证 设E是任一不包含点$a_n(n=1,2,\cdots)$的有界闭集,则存在常数$M>0$,当$x\in E$时有

$$|x|\leqslant M \text{ 且 } \left|\frac{x}{a_n}\right|\neq1(n=1,2,\cdots).$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|$收敛,故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|}=0$. 因此,存在$N$,使当$n>N$,$x\in E$时,

$$\left|\frac{x}{a_n}\right|<\frac{1}{2}$$

于是，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{1}{x-a_n}\right|=\frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{x}{a_n}\right|}\leqslant\frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{x}{a_n}\right|}$$

$$\leqslant\frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{|a_n|}.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{|a_n|}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{x-a_n}\right|$ 在 E 上绝对并一致收敛.

2790. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则迪里黑里级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛.

证　$0<\frac{1}{n^x}\leqslant 1$，且 $\frac{1}{n^x}$ 对每一个 $x\geqslant 0$ 是单调的. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛，故由亚伯耳判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛.

2791. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}$$

在域 $x\geqslant 0$ 内一致收敛.

证　$0<e^{-nx}\leqslant 1$，且 e^{-nx} 对每一个 $x\geqslant 0$ 是单调的. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛，故由亚伯耳判别法知，级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ 当 $x \geqslant 0$ 时一致收敛.

2792. 证明:函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

在域 $-\infty < x < +\infty$ 内连续并有连续的导函数.

证　首先证明 $f(x)$ 连续. 事实上,由 $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^3}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的收敛性即知,原级数当 $-\infty < x < +\infty$ 时一致收敛. 又由于 $\frac{\sin nx}{n^3}$ 在域 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 的和 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

其次再证明 $f'(x)$ 连续. 由于 $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right) = \frac{\cos nx}{n^2}$ 连续,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 当 $-\infty < x < +\infty$ 时一致收敛,故再次根据函数项级数一致收敛的性质,即知上述级数的和在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,且有 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

2793. 证明:函数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

(a) 除 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 外,在一切的点有定义并且是连续的;(б) 为周期函数,其周期等于 1.

证 考虑级数(1) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 及(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(-n-x)^2}$.

显然，当 $x\neq k(k=0,1,2\cdots)$ 时，级数(1)收敛；当 $x\neq -l(l=1,2,\cdots\cdots)$ 时，级数(2)收敛. 因此，当 $x\neq 0$, ± 1, $\pm 2,\cdots$ 时，级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 收敛.

(a) 因而在除 $x=0$, ± 1, $\pm 2,\cdots$ 外的一切点上 $f(x)$ 有定义. 下面为了证明 $f(x)$ 在任一点 $x=x_0(x_0\neq k, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 处 $f(x)$ 连续，我们可以在 $([x_0],[x_0]+1)$ 内考虑一个包含 x_0 的区间$[a,b]$：

$$[x_0]<a<x_0<b<[x_0]+1.$$

记 $p=\max(|a|,|b|)$. 在$[a,b]$ 上考虑级数(1)及(2). 当 n 适当大时(例如 $n\geqslant n_0$)，由于

$$\left|\frac{1}{(n-x)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(n-|x|^2}\leqslant\frac{1}{(n-p)^2},$$

$$\left|\frac{1}{(-n-x)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(n-|x|)^2}\leqslant\frac{1}{(n-p)^2},$$

且 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n-p)^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 及 $\sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{1}{(-n-x)^2}$ 在$[a,b]$ 上一致收敛. 从而，级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n-x)^2}$ 在$[a,b]$ 上一致收敛，也即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 在$[a,b]$ 上一致收敛. 于是，其和函数 $f(x)$ 在$[a,b)$ 上连续，因而 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

(6) 当 $x\neq 0$, ± 1, $\pm 2,\cdots$ 时，有 $f(x+1)=$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{[n-(x+1)]^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{[(n-1)-x]^2},$$作指标变换 $m=n-1$,则当 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时有 $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 因而得

$$f(x+1)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m-x)^2}=f(x),$$

上式表明,当 $x\neq0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时,$f(x)$ 是一个以 1 为周期的周期函数. 证毕.

2794. 证明:级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}]$$

在闭区间 $0\leqslant x\leqslant1$ 上收敛但不一致收敛,而它的和在此线段上是连续函数.

证　考虑部分和

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}[kxe^{-kx}-(k-1)xe^{-(k-1)x}]$$
$$=nxe^{-nx},$$

显然,在[0,1]上其极限函数 $S(x)$存在(即级数的和)且连续:

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0.$$

但此级数在[0,1]上不一致收敛. 用反证法. 若不然,即若一致收敛,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在数 $N=N(\varepsilon)$,使当 $n\geqslant N$ 时,对于[0,1]上的一切 x 值,均有 $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$. 今取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}e^{-1}$,应有

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{2}e^{-1}.$$

取 $x=x_0=\frac{1}{n}$，则也应有 $|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{2}e^{-1}$. 但另一方面，却有

$$|S_n(x_0)-S(x_0)|=S_n(x_0)=e^{-1}>\varepsilon_0,$$

矛盾. 证毕.

2795. 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的连续性，设：

(a) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$；

(б) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}$；

(в) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$.

解 (a) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(x+\frac{1}{n})^n\right|}=|x|$，故当 $|x|<1$ 时，级数绝对收敛；而当 $|x|>1$ 时，级数发散. 当 $|x|=1$ 时，通项不趋于零，因而级数也发散. 于是，$f(x)$ 的存在域为 $(-1,1)$. 下面证明 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续. 设 $0<\delta<1$，则当 $|x|\leqslant 1-\delta$ 时，有

$$\left|(x+\frac{1}{n})^n\right|\leqslant(1-\delta+\frac{1}{n})^n.$$

上面已证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\delta+\frac{1}{n})^n$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$ 在 $[-1+\delta,1-\delta]$ 上一致收敛，从而 $f(x)$ 在该区间上连续. 由于 δ 可以任意的小，故知 $f(x)$ 在开区间 $(-1,1)$ 内连续.

(б) $\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}=\frac{x}{x^2+n^2}+(-1)^n\frac{n}{x^2+n^2}$.

由迪里黑里判别法易知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{x^2+n^2}$在整个数轴上一致收敛，故其和函数在整个数轴上连续. 又对于任意的 $M>0$，当 $x\in[-M,M]$ 时，由于 $\left|\dfrac{x}{x^2+n^2}\right|\leqslant\dfrac{M}{n^2}$ 及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{M}{n^2}$收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{x^2+n^2}$在$[-M,M]$上一致收敛，从而其和函数在$[-M,M]$上连续. 由 M 的任意性知上述和函数在整个数轴上连续.

于是，作为这两个级数的和 $f(x)$在整个数轴上有定义且是连续的.

(в)由于当$-\infty<x<+\infty$且 $x\neq0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|}{(1+x^2)^n}}=\frac{1}{1+x^2}<1,$$

故此时级数绝对收敛. 显然当 $x=0$ 时级数收敛于零. 于是，$f(x)$的存在域为$(-\infty,+\infty)$.

注意在任一点 $x_0\neq0$ 上，例如 $x_0>0$ 时，我们可选 a,b 使 $0<a<x_0<b$. 考虑 $x\in[a,b]$，显然有

$$\left|\frac{x}{(1+x^2)^n}\right|\leqslant\frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b}{(1+a^2)^n}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{(1+x^2)^n}$在$[a,b]$上一致收敛. 注意每一个$\dfrac{x}{(1+x^2)^n}$连续，因而和函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续. 于是，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续(对于$x_0<0$的情况可同理证明)，而且易得

$$f(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}=\frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1, x \neq x_0$ 上一致收敛. 另外，对于每个固定的 k，由于 $x_0 \neq r_k$，故当 x 与 x_0 充分近时，$(x - r_k)$ 必与 $(x_0 - r_k)$ 同号，由此易知

$$\lim_{x\to x_0} v_k(x) = \frac{1}{3^k}\operatorname{sgn}(x_0 - r_k) \quad (k = 1, 2\cdots).$$

从而，当 $x \to x_0$ 时，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ 可逐项求极限，再根据 (1) 式即得

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}\operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

由此可知，$f(x)$ 在点 x_0 可微且

$$f'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}\operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

现设 x_0 是〔0,1〕中一个有理点，于是 $x_0 = r_m$，m 为某正整数. 这时，(1) 式为：当 $x \neq x_0$ 时，

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = v_m(x) + \sum_{k \neq m} v_k(x), \qquad (2)$$

其中 $v_m(x) = \dfrac{|x - r_m| - |x_0 - r_m|}{3^m(x - x_0)} = \dfrac{|x - x_0|}{3^m(x - x_0)}$

$$= \frac{1}{3^m}\operatorname{sgn}(x - x_0).$$

仿前段之证，可知：当 $x \to x_0$ 时，级数 $\sum_{k\neq m} v_k(x)$ 可逐项取极限，得

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{k\neq m} v_k(x) = \sum_{k\neq m} \lim_{x\to x_0} v_k(x) \cdot$$

$$= \sum_{k \neq m} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

由于显然 $\lim\limits_{x\to x_0+0} v_m(x)=\frac{1}{3^m}$，$\lim\limits_{x\to x_0-0} v_m(x)=-\frac{1}{3^m}$，故极限 $\lim\limits_{x\to x_0} v_m(x)$ 不存在. 于是，根据 (2) 式即知极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 不存在，故 $f(x)$ 在点 x_0 不可微. 证毕.

2797. 证明：黎曼 ζ 函数

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

在域 $x>1$ 内是连续的并且在此域内有各阶的连续导函数.

证 显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 当 $x>1$ 时收敛. 各项求导数所得级数为 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$. 下证它在 $1<a\leqslant x<+\infty$ 上一致收敛（a 为大于一的任何数）. 事实上，当 $a\leqslant x<+\infty$ 时，有

$$0<\frac{\ln n}{n^x}\leqslant\frac{\ln n}{n^a},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^a}$ 收敛（这是由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^a}\Big/\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{a-1}{2}}}=0,$$

而 $\frac{a+1}{2}>1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$ 收敛），故知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上一致收敛. 再注意到每项 $\frac{\ln n}{n^x}$ 都是 x 的连续函

数，即知：在 $a \leqslant x < +\infty$ 上可逐项求导数，得

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}, \tag{1}$$

并且 $\zeta'(x)$ 在 $a \leqslant x < +\infty$ 上连续. 再由 $a > 1$ 的任意性即知(1) 式对一切 $1 < x < +\infty$ 成立，并且 $\zeta'(x)$ 在 $1 < x < +\infty$ 上连续. 当然 $\zeta(x)$ 更在 $1 < x < +\infty$ 上连续.

利用数学归纳法，并注意到对任何正整数 k，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^a} (a > 1)$ 都收敛，仿照上述，可证：对任何正整数 k，$\zeta^{(k)}(x)$ 在 $1 < x < +\infty$ 上都存在且连续，并且可由原级数逐项求导数 k 次而得：

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x} (1 < x < +\infty).$$

2798. 证明：θ 函数

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

当 $x > 0$ 时有定义并可微分无穷次.

证 首先，我们证明 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有定义且可微.

在级数 $\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x)$ 中，$u_n(x) = e^{-\pi n^2 x}$. 显然有 $u_{-n}(x) = u_n(x)$，故只要考虑级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} (x > 0)$$

即可. 对于每一个 $x > 0$ 及充分大的 n，有

$$0 < e^{-\pi n^2 x} < \frac{1}{n^2 x},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2x}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e^{-\pi n^2x}$ 收敛. 对此级数逐项求导后，得级数

$$-\sum_{n=1}^{+\infty}\pi n^2e^{-\pi n^2x},$$

它在〔ε, $+\infty$) 内是一致收敛的(ε 为任意正数). 事实上，当 n 充分大时，对一切 $\varepsilon\leqslant x<+\infty$，均有

$$0<\pi n^2e^{-\pi n^2x}\leqslant\pi n^2e^{-\pi n^2\varepsilon}<\frac{1}{n^2\varepsilon}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\varepsilon}$ 收敛，故级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\pi n^2e^{-\pi n^2x}$$

在 $\varepsilon\leqslant x<+\infty$ 上一致收敛. 再注意到各项都是连续函数，即知级数

$$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2x}$$

在〔ε, $+\infty$)内连续可微，且可逐项求导数. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性知 $\theta(x)$在$(0,+\infty)$上连续可微且可逐项求导数.

其次，仿照前段可证明 $\theta'(x)$的可微性.

再次，利用数学归纳法，并注意到当 n 充分大时，对于一切 $x\in$〔ε, $+\infty$)，均有

$$0<(\pi n^2)^ke^{-\pi n^2x}<\frac{1}{n^2\varepsilon},$$

仿照前段可证明 $\theta(x)$在$(0,+\infty)$内可微分 k 次，其中 k 为任意自然数，从而 $\theta(x)$当 $x>0$ 时可微分无穷次.

2799. 确定函数 $f(x)$的存在域并研究它们的可微分性，设：

$$(a) f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x};(б) f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}.$$

解 (a)易知当 $x\neq -k(k=1,2,\cdots,)$时,级数是莱布尼兹型,因而收敛.任取 $x=x_0,x_0\neq -k(k=1,2,\cdots)$.

1°当 $x_0\geq 0$,取 $\beta>x_0$,则 $x_0\in[-\frac{1}{2},\beta]$.在区间$[-\frac{1}{2},\beta]$上,注意 $u_n(x)=\frac{(-1)^n x}{n+x}$,有

$$u'_n(x)=\frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}(n=1,2,\cdots)$$

且连续.$\frac{n}{(n+x)^2}$随 n 单调下降且一致趋于零,事实上,当 $x\in[-\frac{1}{2},\beta]$,$n>1$ 时,有

$$\left|\frac{n}{(n+x)^2}\right|\leqslant\frac{n}{(n-1)^2}\to 0(n\to\infty);$$

显然 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$ 有界(小于或等于 1).因此,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$ 在$[0,\beta]$上一致收敛.从而

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在$[0,\beta]$上可微,当然它在 $x=x_0$ 点可微.

2°当 $x_0<0$ 时,必有 k_0,使

$$-(k_0+1)<x_0<-k_0.$$

今选取 α,β,使

$$-(k_0+1)<\alpha<x_0<\beta<-k_0.$$

在区间$[\alpha,\beta]$上,$u'_n(x)=\frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}$连续且随 n 单调下

降，并且一致趋于零(考虑充分大的 n)：

$$\left|\frac{n}{(n+x)^2}\right|=\frac{n}{n^2+2nx+x^2}\leqslant\frac{n}{n^2-2n|x|}$$

$$\leqslant\frac{n}{n^2-2n|\alpha|}=\frac{1}{n-2|\alpha|}$$

$$\longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty).$$

又显然知 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k$ 有界，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. 因而

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在$[\alpha,\beta]$ 上可微，当然它在 $x=x_0$ 点可微.

总之，函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 $x\neq -k(k=1,2,\cdots)$ 上有定义且可微.

(6)当 $x=0$ 时，级数显然收敛.

当 $x\neq 0$ 时，由于

$$\frac{\dfrac{|x|}{n^2+x^2}}{\dfrac{1}{n^2}}=\frac{n^2}{n^2+x^2}|x|\longrightarrow|x| \qquad (n\to\infty),$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|}{n^2+x^2}$ 当 $x\neq 0$ 时也收敛. 从而可知 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|}{n^2+x^2}$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上收敛. 令

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2},$$

显然它在$(-\infty,+\infty)$上收敛，故可记 $f(x)=|x|$

$\cdot\varphi(x)$. 任取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，则有 $l>0$ 使 $-l<x_0<l$. 当 $x\in[-l,l]$时，由于

$$\left|\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'\right|=\left|\frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}\right|\leqslant\frac{2l}{n^4}$$

$$(n=1,2,\cdots),$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n^4}$ 收敛. 因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'$ 在$[-l,l]$上一致收敛. 从而知 $\varphi(x)$在$[-l,l]$上可微，当然它在 $x=x_0$ 点可微. 又因 $|x|$在 $x\neq0$ 点可微，而在 $x=0$ 点不可微，再注意到恒有 $\varphi(x)>0$，即知 $f(x)=|x|\varphi(x)$在 $x\neq0$ 点可微，而在 $x=0$ 点不可微.

2800. 证明：叙列

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\operatorname{arctg}x^n\quad(n=1,2,\cdots)$$

在区间$(-\infty,+\infty)$内一致收敛，但

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'_{x=1}\neq\lim_{n\to\infty}f'_n(1).$$

证 由于当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，

$$|\operatorname{arctg}x^n|\leqslant\frac{\pi}{2}\quad(n=1,2,\cdots),$$

故有

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{\pi}{2n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

易见 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$. 任给 $\varepsilon>0$，选取 $N=\left[\frac{\pi}{2\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于一切的 $x\in(-\infty,+\infty)$，均有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{\pi}{2n}\leqslant\frac{\pi}{2(N+1)}<\frac{\pi}{2\cdot\frac{\pi}{2\varepsilon}}=\varepsilon.$$

于是，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛于零. 但

$$f'_n(x)=\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}},$$

易见

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'_{x=1}=f'(x)|_{x=1}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}f'_n(1)=\frac{1}{2}\neq 0.$$

因此，两个极限不相等.值得注意的是，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛于零，但$f'_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内却不一致收敛于其极限函数：

$$\lim_{n\to\infty}f'_n(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\neq 1;\\ \frac{1}{2}, & \text{当 } x=1.\end{cases}$$

2801. 证明：叙列

$$f_n(x)=x^2+\frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

在区间$(-\infty,+\infty)$内一致收敛，但

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'\neq\lim_{n\to\infty}f'_n(x).$$

证 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=x^2=f(x)$. 由于当$x\in(-\infty,+\infty)$时

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n},$$

故对任给$\varepsilon>0$，只要取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，对于一切$x\in(-\infty,+\infty)$，就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛.

其次，由于

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'=(x^2)'=2x,$$

而 $f'_n(x)=2x+\cos n(x+\frac{\pi}{2})$ 当 $n\to\infty$ 时极限不存在，当然有

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'\neq\lim_{n\to\infty}f'_n(x).$$

2802. 当参数 α 取甚么值：(a)叙列

$$f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx}\ (n=1,2,\cdots) \tag{1}$$

在闭区间[0,1]上收敛；(б)叙列(1)在[0,1]上一致收敛；(в) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ 可在积分号下取极限？

解 (a)当 $x=0$ 时，对于任意 α，均有 $f_n(x)=0$；当 $x\neq0$ 且 $x\in(0,1]$ 时，对于任意 α，均有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}n^\alpha xe^{-nx}=0.$$

因此，对于任意的 α，$f_n(x)$ 在[0,1]上收敛于函数 $f(x)=0$.

(б)由于 $f'_n(x)=n^\alpha e^{-nx}(1-nx)$，故当 $x=\frac{1}{n}$ 时，$f'_n(x)=0$. 又由于当 $x<\frac{1}{n}$ 时，$f'_n(x)>0$；当 $x>\frac{1}{n}$ 时，$f'_n(x)<0$，故 $x=\frac{1}{n}$ 为 $f_n(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant1$ 上的最大值点. 因此，

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant f_n(\frac{1}{n})=n^{\alpha-1}e^{-1}\quad(0\leqslant x\leqslant1).$$

当 $\alpha<1$ 且 $n\to\infty$ 时，$n^{\alpha-1}e^{-1}\to0$. 于是，当 $\alpha<1$ 时，对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 N，使当 $n>N$ 时，对于一切的 $x\in[0,1]$，均有

$$|f_n(x)-0|<\varepsilon,$$

即当 $\alpha<1$ 时，$f_n(x)$ 在[0,1]上一致收敛于零. 当 $\alpha\geqslant1$

注意到

$$\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0,$$

本题获证.

2804. 证明:叙列

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad (n=1,2,\cdots)$$

在闭区间$[0,1]$上收敛而不一致收敛,但

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx.$$

证 先证 $f_n(x)$ 在$[0,1]$上收敛. 事实上,当 $x=0$ 及 $x=1$时,对任意的 n,均有 $f_n(x)=0$;而当 $0<x<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} nx(1-x)^n = 0$. 因此,$f_n(x)$在$[0,1]$上收敛于零.

下证 $f_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛. 为此,取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2e}$,不论 n 多么大,只要取 $x_n=\frac{1}{n+1}$,就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)-0\right| = n\cdot\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \longrightarrow e^{-1} \quad (n\to\infty).$$

那末取适当大的 n_0,当 $n>n_0$ 时,就有

$$|f_n(x_n)| > \frac{1}{2e} > \varepsilon_0.$$

因此,$f_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛.

最后证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)]dx$.
注意到

$$\int_0^1[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]dx=\int_0^1 0\cdot dx=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x)^n dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n(1-y)y^n dy$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}y^{n+1}-\frac{n}{n+2}y^{n+2}\right)\Big|_0^1$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}=0,$$

故得证.

2805. 于下式中

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^4}dx$$

在积分符号下取极限合理否?

解 由于

$$\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^4}\right)dx=\int_0^1 0\cdot dx=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^4}dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\text{arc tg}\,nx^2\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4},$$

故在积分号下取极限不合理.

一般说来,若叙列 $f_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛,则是保证在积分号下取极限为合理的一个充分条件,但当它不一致收敛时,则就不一定能保证可以在积分号下取极限了,本题就是其中一例. 事实上,取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$,不论 n 多么大,只要取 $x=\frac{1}{n}$,就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-0\right|=\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^4}}>\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}>\varepsilon_0,$$

故此处的 $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^4}$ 在$[0,1]$上并不一致收敛.

求出：

2806. $\lim\limits_{x\to1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$.

解 由于 $x\to1-0$，故可设 $0\leqslant x\leqslant1$. 此时，由于 $\frac{x^n}{x^n+1}$ 小于 1，且当 n 增加时单调下降，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

在$[0,1]$上一致收敛，故根据亚伯耳判别法知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}\tag{1}$$

在$[0,1]$上一致收敛. 又因 $\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$ 在$[0,1]$上连续，且

$$\lim_{x\to1-0}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\qquad(n=1,2,\cdots),$$

故当 $x\to1-0$ 时，级数(1)可以逐项取极限，其结果为

$$\lim_{x\to1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{x\to1-0}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2}\ln 2^{*)}.$$

*) 利用 2661 题的结果.

2807. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$.

解 由于 $x\to 1-0$,故可设 $0\leqslant x<1$. 在此区间上,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x) = \frac{x(1-x)}{1-x} = x$,故

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1}) = \lim_{x\to 1-0} x = 1.$$

2808. $\lim\limits_{x\to +0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$.

解 由于$\frac{1}{n^x}$在$[0,l]$ $(l>0)$上单调下降且小于或等于1,而数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 在$[0,l]$ 上一致收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$ 在$[0,l]$上一致收敛. 又因$\frac{1}{2^n n^x}$在$[0,l]$上连续,且

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{2^n n^x} = \frac{1}{2^n},$$

故当 $x\to +0$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$ 可以逐项取极限,其结果为

$$\lim_{x\to +0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to +0}\frac{1}{2^n n^x}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1.$$

2809. 逐项微分级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{n^2}$ 合理否?

解 由于当 $-\infty<x<+\infty$ 时,

$$\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{n^2}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{n^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{n^2}{n^4+x^2}\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,故逐项微分后所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right)'_x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+x^2}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛,再由 $\left|\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{|x|}{n^2}$ 知原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{n^2}$ 收敛;因此,原级数和的导数用逐项微分级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{n^2}$ 来计算是合理的.

2810. 在闭区间 $[0,1]$ 上逐项积分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$$

合理否?

解 令 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x^{\frac{1}{2k+1}}-x^{\frac{1}{2k-1}}\right)$,则当 $x=0,1$ 时,$S_n(x)=0$;当 $0<x<1$ 时,$S_n(x)=x^{\frac{1}{2n+1}}-x$. 因此,

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0,1;\\ 1-x, & \text{当 } 0<x<1.\end{cases}$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\dfrac{1}{2}$,不论 n 多么大,只要取 $x_n=\dfrac{1}{2^{2n+1}}$ 就有

$$|S_n(x_n) - S(x_n)| = \frac{1}{2} > \varepsilon_0.$$

因此，$S_n(x)$ 在$[0,1]$上不一致收敛.

注意，对于不一致收敛的级数而言，一般地讲逐项积分级数不一定合理. 但对于本题来说，由于

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)\right]dx = \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2} - \frac{2n-1}{2n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2n+2}\right) - \left(1-\frac{1}{2n}\right)\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2},$$

故本题所给出的级数在$[0,1]$上作逐项积分计算还是对的.

由此题说明，级数在$[a,b]$上一致收敛仅是可以逐项积分的一个充分条件，并不是必要条件.

2811. 设$f(x)(-\infty < x < +\infty)$是可微分任何次的函数，且其导函数$f^{(n)}(x)(n=1,2,\cdots)$的叙列在每一个有穷区间$(a,b)$内一致收敛于函数$\varphi(x)$. 证明$\varphi(x) = Ce^x$，其中$C$为常数.

证 由于$f(x)$可微分任意次，故$f^{(n)}(x)$在(a,b)内连续且可微$(n=1,2,\cdots)$. 又按题设$f^{(n)}(x)$在(a,b)内一致收敛于$\varphi(x)$，且其导函数叙列$f^{(n+1)}(x)(n=1,2,\cdots)$在$(a,b)$内也一致收敛于$\varphi(x)$，故$\varphi(x)$在$(a,b)$内可微，并且

$$\varphi'(x) = [\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)]' = \lim_{n\to\infty}[f^{(n)}(x)]'$$
$$= \lim_{n\to\infty} f^{(n+1)}(x) = \varphi(x).$$

积分之，即得

$$\ln\varphi(x) = x + C_1,$$

也即

$$\varphi(x) = Ce^x,$$

其中 $C = e^{C_1}$ 为常数.

§5. 幂级数

1° 收敛区间 对于每一个幂级数

$a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$

都存在有收敛区间：$|x-a|\leqslant R$，已知的级数在其内收敛，而在其外发散. 收敛半径 R 可按哥西—哈达玛公式

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$$

来确定.

收敛半径 R 也可按公式

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

来计算(若此极限存在).

2° 亚伯耳定理 若幂级数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ (|x|<R)$ 在收敛区间的端点 $x=R$ 处收敛，则

$$S(R) = \lim_{x\to R-0} S(x).$$

3° 台劳级数 在 a 点的解析函数可展为幂级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

此级数的余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

可以写成下形

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}(0<\theta<1)$$

(拉格朗日形式)或

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta_1(x-a)]}{n!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1}$$

$$(0<\theta_1<1)$$

(哥西形式).

必须记住下列五个基本的展开式：

Ⅰ. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅱ. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$

$(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅲ. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$

$(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅳ. $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$

$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$

$(-1<x<1)$.

Ⅴ. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$

$+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots(-1<x\leqslant1)$.

4° 幂级数的运算　在公共的收敛区间$|x-a|<R$内有：

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-a)^n$;

(б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$，

式中 $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$；

(в) $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right]'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-a)^n$；

(Г) $\int\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right]dx=C+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$.

5° 在复数域内的幂级数　研究级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n.$$

式中　$c_n=a_n+ib_n$，$a=\alpha+i\beta$，$z=x+iy$，$i=\sqrt{-1}$. 对于每一个如像这样的级数都有一收敛圆 $|z-a|\leqslant R$，原来的级数在其内收敛(并且是绝对地)，而在其外发散．收敛半径 R 等于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$$

在实数域内的收敛半径．

求下列幂级数的收敛半径和收敛区间并研究其在收敛区间端点的性质：

2812. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$.

解　记 $a_n=\frac{1}{n^p}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=1，$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=-1$ 时，若 $p>1$，则幂级数为绝对收敛；若 $0<p\leqslant1$，则为条件收敛；当 $p\leqslant0$ 时，则为发散．

当 $x=1$ 时，若 $p>1$，则为绝对收敛；若 $p\leqslant1$ 则为发散．

$(x+1)^n$ 条件收敛.

当 $x=-\frac{2}{3}$ 时，幂级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}.$$

由于上式右端第一个级数发散，第二个级数收敛，故原级数发散.

2814. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

解 记 $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=4,$$

故收敛半径 $R=4$；收敛区间为 $(-4,4)$.

当 $x=-4$ 时，利用斯特林格公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}(1+o(1))$$

得

$$\left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n\right|=\frac{(\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n})^2+o(1)}{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}+o(1)}\cdot 4^n$$

$$=\sqrt{n\pi}(1+o(1))\to+\infty(n\to\infty),$$

因此，当 $x=-4$ 时级数发散.

当 $x=4$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2n+2}\right)=-\frac{1}{2}<1,$$

故由拉阿伯判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散．

2815. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{n^2}\cdot x^n(0<a<1)$.

解 记$a_n=a^{n^2}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{2n+1}}=+\infty,$$

故收敛半径$R=+\infty$；收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

2816. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$.

解 记$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}\right]^n\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{e},$$

故收敛半径$R=\frac{1}{e}$；收敛区间为$\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

当$|x|=\frac{1}{e}$时，由于

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{e}\right)^n\cdot(\pm1)^n\right|\to1\neq0(n\to\infty),$$

故级数发散．

2817. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^n(a>1)$.

解 记 $a_n=\frac{n!}{a^{n^2}}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n+1}}{n+1}=+\infty,$$

故收敛半径 $R=+\infty$；收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

2818. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right]^p\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

解 记 $a_n=\left[\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right]^p\cdot\frac{1}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p=2,$$

故收敛半径 $R=2$；收敛区间为 $(-2+1,2+1)$，即 $(-1,3)$.

当 $x=-1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right]^p,$$

由 2689 题的结果知：若 $p>2$，为绝对收敛；若 $0<p\leqslant 2$，为条件收敛；若 $p\leqslant 0$，为发散.

当 $x=3$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right]^p.$$

若 $p>2$，为绝对收敛；若 $p\leqslant 2$，为发散.

2819. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^n$.

解 记 $a_n=(-1)^n\left[\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^p=2^p,$$

故收敛半径 $R=2^p$；收敛区间为 $(-2^p,2^p)$.
当 $x=-2^p$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

由于

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^p=\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^p$$

$$=1+\frac{p}{2n+2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1+\frac{p}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

故由高斯判别法知：当 $\frac{p}{2}>1$（即 $p>2$）时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛（由于是正项级数，故也是绝对收敛）；当 $\frac{p}{2}\leqslant 1$（即 $p\leqslant 2$）时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

当 $x=2^p$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\right]^p, \tag{1}$$

由前段知，当 $p>2$ 时，为绝对收敛；当 $0<p\leqslant 2$ 时，由于

$$\left|(-1)^n\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p\right|$$

$$\sim\left[\frac{4^n\cdot 2n\pi\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}}{\sqrt{(4n+2)\pi}\cdot(2n+1)^{2n+1}e^{-(2n+1)}}\right]^p$$

$$=\left[\frac{4^n\cdot 2\pi e}{\sqrt{(4n+2)\pi}\cdot 2^{2n+1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1}}\right]^p\to 0$$

$$(n\to\infty),$$

且

$$\frac{\left[\frac{4^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+3)!}\right]^p}{\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p}=\left(\frac{2n+2}{2n+3}\right)^p<1,$$

故级数(1)逐项下降，根据莱布尼兹判别法知级数(1)收敛，但由于由其绝对值组成的级数发散．因此，当$0<p\leqslant 2$时，级数(1)条件收敛．当 $p=0$ 时，通项为$(-1)^n$，故级数为发散；当 $p<0$ 时，通项趋于无穷，因而级数也发散．

2820. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$.

解 记 $a_n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$．由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为$(-1,1)$．

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n},$$

利用 2700 题的结果，即知：当 $m\geqslant 0$ 时，绝对收敛；当 $-1<m<0$时，条件收敛；当 $m\leqslant -1$ 时，发散．

当 $x=-1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{m}{n},$$

显见当 $m\geqslant 0$ 时为绝对收敛；当 $m<0$ 时：若 m 为负整

数，设为$-k$（k为正整数），则通项为

$$\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(k+n-1)}{(k-1)!}\to+\infty$$
$$(n\to\infty),$$

故级数发散；若m不为负整数，由于通项为正，并且总可以大于$\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}$，其中$-m>k$，故级数也发散．因此，当$m<0$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{m}{n}$发散．

2821．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n(a>0,b>0)$．

解 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n\text{ 及}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n,$$

容易求得它们的收敛半径分别为$R_1=\frac{1}{a}$及$R_2=\frac{1}{b}$，故原级数的收敛半径$R=\min(R_1,R_2)=\min\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$；收敛区间为$(-R,R)$．

当$x=-R$时，若$a<b$，则级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{b}\right)^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2},\qquad(1)$$

对于上式右端的第一个级数，利用达朗伯耳判别法有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n}\cdot\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}{n}}\right|=\frac{a}{b}<1,$$

故知其为绝对收敛，而第二个级数显然为绝对收敛．因此，当 $a<b$ 时，级数(1)绝对收敛．当 $a\geqslant b$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n, \qquad (2)$$

上式右端的第一个级数条件收敛，第二个级数绝对收敛$(b<a)$或条件收敛$(b=a)$，故当 $a\geqslant b$ 时，级数(2)条件收敛．

当 $x=R$ 时，若 $a<b$，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{b}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

由前段知其为绝对收敛；若 $a\geqslant b$，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

它是一个发散级数与收敛级数的和，故为发散级数．

2822. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}(a>0,b>0)$.

解 记 $a_n=\frac{1}{a^n+b^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\max(a,b)\cdot\frac{1+\theta^{n+1}}{1+\theta^n}=\max(a,b),$$

其中 $\theta=\dfrac{\min(a,b)}{\max(a,b)}$，$0<\theta\leqslant1$，故收敛半径 $R=\max(a,b)$；收敛区间为 $(-R,R)$.

当 $|x|=R$ 时，由于 $\dfrac{R^n}{a^n+b^n}\to1\neq0$，故级数发散.

2823. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}\ (a>0)$.

解 记 $a_n=\dfrac{1}{a^{\sqrt{n}}}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}}=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}.$$

由于

$$n\left(\frac{a^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}}{a^{-\frac{1}{\sqrt{n+1}}}}-1\right)=\frac{a^{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}-1}{\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}\cdot\frac{n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},$$

且上式右端第一个因式当 $n\to\infty$ 时趋于 $\ln a$，故当 $a>1$ 时，上式趋于 $+\infty$，因而级数收敛；当 $a<1$ 时，上式趋于 $-\infty$，因而级数发散；而当 $a=1$ 时，由于通项为 1，故级数也发散.

当 $x=-1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}.$$

当 $a>1$ 时，级数绝对收敛；当 $a\leqslant 1$ 时，由于通项不趋于零，故级数发散．

总之，当 $|x|=1$ 时，若 $a>1$，则级数绝对收敛；若 $a\leqslant 1$，则级数发散．

2824. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

解 记 $a_n=\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}. \tag{1}$$

由于

$$0<\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}<\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛 $^{*)}$，故级数(1)收敛．

当 $x=-1$ 时，级数绝对收敛．

总之，当 $|x|=1$ 时，级数绝对收敛．

*) 利用 2823 题的结果．

2825. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$.

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{n}>0$$

且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故级数(1)发散．

当$x=1$时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{2}$$

由于

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n=0$. 又由于

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1\quad(n=1,2,\cdots),$$

故$|a_n|>|a_{n+1}|$. 因此，级数(2)收敛．但由于级数(1)发散，故级数(2)条件收敛．

2827. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

解 记$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1,$$

故收敛半径$R=1$；收敛区间为$(-1,1)$.

当$|x|=1$时，由于$a_n\to+\infty(n\to\infty)$，故级数发散．

2828. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$.

解 记$a_n=\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}$. 由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=4,$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{4}$；收敛区间为 $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

当 $x=\frac{1}{4}$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n\cdot 4^n}. \tag{1}$$

将它拆成两部分，一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$，一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$. 前一级数显然发散；而对于后一级数，利用哥西判别法或达朗伯耳判别法易知其为收敛. 因此，级数(1) 发散.

当 $x=-\frac{1}{4}$，同法可证，原级数可拆成一个发散级数与一个收敛级数. 因此，它也是发散的.

2829. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}x^n$.

解 记 $a_n=\frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}$. 由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=3,$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{3}$；收敛区间为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

当 $|x|=\frac{1}{3}$ 时，对于 $n=8k$，由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+2\cos 2k\pi)^{8k}}{\ln 8k}\cdot\frac{1}{3^{8k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln k+\ln 8}$$

及

$$\frac{1}{\ln k+\ln 8}>\frac{1}{k+\ln 8}>0,$$

且$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+\ln 8}$发散，故级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln k+\ln 8}$发散.

不难证明：当$n=8k+1,8k+2,\cdots,8k+7$ $(k=1,2,\cdots)$时，级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n}\left(\pm\frac{1}{3}\right)^n \tag{1}$$

收敛. 事实上，$\frac{1}{\ln n}$单调趋于零，且

$$\sum_{n=2}^{m}\left|\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n\right|\cdot\frac{1}{3^n}$$

$$\leqslant\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n<\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n$$

$$<\frac{1+\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{2}}{3}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}<5,$$

根据迪里黑里判别法可知级数(1)收敛.

于是，当$|x|=\frac{1}{3}$时，原级数是由一个发散级数与诸收敛级数依次相加而成的. 因此，它是发散的.

2830. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$.

解 记 $a_n = \frac{1}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \text{ 及} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $|x| = 1$ 时，由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(\pm 1)^{n^2}}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

收敛，故原级数绝对收敛．

2831. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$（普林斯格木级数）.

解 记 $a_n = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x = 1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n]}}{n},$$

它是条件收敛的 *).

当 $x = -1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

记 $A_l = \{n \mid [\sqrt{n}] = l\}$ $(l = 1,2,\cdots)$. 显然 A_l 内的元素可写成 $n = l^2 + s$，而 $s = 0,1,2,\cdots,2l$.

考虑

$$u_l = \sum_{n\in A_l} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n} = \sum_{s=0}^{2l} \frac{(-1)^{l^2+l+s}}{l^2+s}$$

$$= \sum_{s=0}^{2l} \frac{(-1)^s}{l^2+s}$$

$$= \frac{1}{l^2} - \left(\frac{1}{l^2+1} - \frac{1}{l^2+2}\right) - \cdots$$

$$- \left(\frac{1}{l^2+2l-1} - \frac{1}{l^2+2l}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{l^2} (l = 1, 2, \cdots).$$

由于$\sum\limits_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$收敛，故$\sum\limits_{l=1}^{\infty} u_l$收敛．注意$A_i \cap A_j = 0$ $(i \neq j)$，且$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$就是全体自然数．易证$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$与$\sum\limits_{l=1}^{\infty} u_l$同时收敛或同时发散．由此可见，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，因而显然是条件收敛的．

*） 利用2672题的结果．

2832．求超越几何级数

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} x^n$$

$$+ \cdots$$

的收敛域．

解 记a_n

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = 1,$$

故收敛半径$R=1$；收敛区间为$(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$$
$$+\cdots.$$

由于

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}(|\theta_n|\leqslant L),$$

故当 $\gamma-\alpha-\beta+1>1$ 即 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时，级数收敛且也是绝对收敛的；当 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ 时，级数发散．

当 $x=-1$ 时．由上可知，

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2},$$

当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时，级数绝对收敛；当 $\gamma-\alpha-\beta<-1$ 时，从某项开始，将有

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|<1 \quad \text{即}\,|a_n|<|a_{n+1}|,$$

a_n 不趋于零，级数发散；当 $-1<\gamma-\alpha-\beta$ 时，在弃去若干个开始项以后，就变成每项的绝对值单调递减的交错级数了，并在这里，把求通项（绝对值）的极限化成下列无穷乘积

$$\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}$$

的值更为方便．由于

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta'_n}{n^2}\right)$$

$$=-\infty \qquad (|\theta'_n|\leqslant M),$$

故上述无穷乘积的值为零，即 $a_n\to 0(n\to\infty)$. 因此，级数收敛. 当 $\gamma-\alpha-\beta=-1$ 时，由于 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\theta'_n}{n^2}$，故无穷乘积的值异于零，因而 $a_n\nrightarrow 0$，级数发散.

综上所述，现将超越几何级数的敛散情况列表如下：

$\lvert x\rvert<1$		绝对收敛
$\lvert x\rvert>1$		发　散
$x=1$	$\gamma-\alpha-\beta>0$	绝对收敛
	$\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$	发　散
$x=-1$	$\gamma-\alpha-\beta>0$	绝对收敛
	$-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$	条件收敛
	$\gamma-\alpha-\beta\leqslant -1$	发　散

求下列广义的幂级数的收敛域：

2833. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

解　记 $a_n=\frac{1}{2n+1}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1,$$

故当 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$ （即 $x>0$）时，级数绝对收敛；当 $x<0$ 时，级数发散；当 $x=0$ 时，级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1},$$

显然发散. 于是，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

的收敛域为$(0,+\infty)$.

2834. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$.

解 记$a_n=\sin\frac{\pi}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=2,$$

故当$\left|\frac{1}{x}\right|<2$即当$|x|>\frac{1}{2}$时,级数绝对收敛;当$|x|<\frac{1}{2}$时,级数发散;当$|x|=\frac{1}{2}$时,由于

$$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\pi}{2^n}=\pi\neq0,$$

故级数发散. 于是,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$$

的收敛域为$(-\infty,-\frac{1}{2})$及$(\frac{1}{2},+\infty)$,即满足不等式$|x|>\frac{1}{2}$的一切x值所成的集合.

2835. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$.

解 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\frac{x^n}{2^{n^2}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}\cdot\frac{1}{x^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}.$

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$$

的收敛域为$(-\infty,+\infty)$*). 而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}\cdot\frac{1}{x^n}$$

的收敛域为$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$. 因此,级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2^{n^2}}x^n$$

的收敛域为$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$,即满足不等式$0<|x|<+\infty$的一切x值所成的集合.

*) 利用2815题的结果.

2836. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$.

解 记$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$,则原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(e^{-x})^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1},$$

故当$|e^{-x}|<\frac{1}{e^{-1}}=e$即当$1+x>0$或$x>-1$时,级数绝对收敛;当$x<-1$时,级数发散;当$x=-1$时,由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^n=1\neq0,$$

解 方法一：

$$f(x)=[(x+1)-1]^3$$
$$=(x+1)^3-3(x+1)^2+3(x+1)-1.$$

方法二：

$$f(-1)=-1, f'(-1)=3, f''(-1)=-6,$$
$$f'''(-1)=6, f^{(4)}(-1)=f^{(5)}(-1)=\cdots=0.$$

于是，

$$f(x)=-1+3(x+1)-\frac{6}{2!}(x+1)^2+\frac{6}{3!}(x+1)^3$$
$$=-1+3(x+1)-3(x+1)^2+(x+1)^3.$$

2839. 把函数

$$f(x)=\frac{1}{a+x}(a\neq 0)$$

按以下的方式展为幂级数：(a)依 x 的乘幂展开；(6)依二项式 $x-b$ 的乘幂展开，此处 $b\neq a$；(в)依 $\frac{1}{x}$ 的乘幂展开．求出对应的收敛域．

解 (a) $f(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a}}=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}},$$

收敛域为 $|x|<|a|$.

(6) $f(x)=\frac{1}{a-b-(x-b)}$

$$=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-b}{a-b}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}},$$

收敛域为 $|x-b| < |a-b|$.

(в) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{a}{x} - 1} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{x}}$

$$= -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{x}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}},$$

收敛域为 $|x| > |a|$.

2840. 把函数 $f(x) = \ln x$ 按差 $x-1$ 的正整数幂来展开，并说明展开式的收敛区间．求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的和．

解 $f(x) = \ln[1 + (x-1)]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}. \qquad (1)$$

收敛区间为

$|x-1| < 1$ 或 $0 < x < 2$.

当 $x - 1 = 1$ 即当 $x = 2$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

显然收敛，故当 $0 < x \leqslant 2$ 时，级数(1) 收敛．

由于 $\ln x$ 在 $x = 2$ 连续，故当 $x = 2$ 时，(1) 式也成立，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

写出下列函数按变数 x 的正整数幂的展开式，并求出对应的收敛区间：

2841. $f(x) = \operatorname{sh} x$.

解 $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n\,!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{n}}{n\,!}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!},$$

收敛区间为 $|x|<+\infty$ 或$(-\infty,+\infty)$.

2842. $f(x)=\operatorname{ch}x$.

解 $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)\,!}$,

收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

2843. $f(x)=\sin^2 x$.

解 $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)\,!}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)\,!},$$

收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

2844. $f(x)=a^{x}(a>0)$.

解 $f(x)=e^{x\ln a}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^{n}a}{n\,!}x^{n}$. 由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{\ln^{n}a}{n\,!}\right|}=|\ln a|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n\,!}}=0,$$

故收敛半径 $R=+\infty$,收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

2845. $f(x)=\sin(u\arcsin x)$.

解 $\arcsin x=\displaystyle\int_{0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^{2}}}$

$$=\int_0^x\left(1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4+\cdots\right)dt$$

$$=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\cdots$$

$$(|x|<1),$$

$$f(x)=u\arcsin x-\frac{u^3}{3\,!}(\arcsin x)^3+\frac{u^5}{5\,!}(\arcsin x)^5-\cdots$$

$$=ux+\frac{u(1^2-u^2)}{3\,!}x^3+\frac{u(1^2-u^2)(3^2-u^2)}{5\,!}x^5+\cdots,$$

收敛区间为$(-1,1)$.

2846. $f(x)=\cos(u\arcsin x)$.

解 $f(x)=1-\dfrac{u^2}{2\,!}(\arcsin x)^2+\dfrac{u^4}{4\,!}(\arcsin x)^4-\cdots$

$$=1-\frac{u^2}{2\,!}x^2-\frac{u^2(2^2-u^2)}{u\,!}x^4-\cdots.$$

收敛区间为$(-1,1)$.

2847. 写出函数 $f(x)=x^x$ 按差 $x-1$ 的正整数幂展开式的前三项.

解 $f(x)=x^x, f(1)=1;$

$f'(x)=x^x(1+\ln x), f'(1)=1;$

$f''(x)=x^x(1+\ln x)^2+x^{x-1}, f''(1)=2;$

$$f'''(x)=x^x(1+\ln x)^3+2x^{x-1}+x^{x-1}\left(\ln x+\frac{x-1}{x}\right),$$

$f'''(1)=3.$

于是，展式的前三项为

$$1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+\cdots,$$

收敛区间为$|x-1|<1$，即 $0<x<2$.

2848. 写出函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x\neq 0)$和 $f(0)=e$ 按变数 x 的正整数幂展开式的前三项.

解 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}, f(0)=e;$

$$f'(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right]$$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)+\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right]$$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right] \quad (x\neq 0).$$

由微分学中值定理知

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi),$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间，从而

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}f'(\xi)$$

$$=\lim_{\xi\to 0}f'(\xi)=-\frac{e}{2};$$

$$f''(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]^2+\frac{2}{x^3}\ln(1+x)-\frac{1}{x^2(1+x)}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1+x)^2}\right\}$$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]^2+\frac{2}{3}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}+o_1(x)\right\}$$

$(x\neq 0)$.

仿上可得

$$f''(0)=\frac{11}{12}e;$$

$$f'''(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right)^3\right.$$
$$+3\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right)$$
$$\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}+o_1(x)\right)$$
$$+\left(-\frac{6}{x^4}\ln(1+x)+\frac{2}{x^3(1+x)}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{(1+x)^3}\right)\right\}$$
$(x\neq 0)$.

同理可得

$$f'''(0)=-\frac{21}{8}e.$$

于是，展式的前三项为

$$e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\cdots\right),$$

收敛区间为$(-1,1)$.

2849. 把函数 $\sin(x+h)$ 和 $\cos(x+h)$ 按变数 h 的正整数幂展开.

解 $\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h$

$$=\sin x\cdot\left(1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}-\cdots\right)$$
$$+\cos x\cdot\left(h-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\cdots\right)$$
$$=\sin x+h\cos x-\frac{h^2}{2!}\sin x-\frac{h^3}{3!}\cos x+\cdots,$$

同法可求得

$$\cos(x+h)=\cos x-h\sin x-\frac{h^2}{2!}\cos x$$

$$+\frac{h^3}{3!}\sin x+\cdots,$$

它们的收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

2850. 不进行实际的展开工作而求函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$ 的幂级数展开式的收敛区间：(a)依 x 的乘幂展开；(6)依二项式 $x-5$ 的乘幂展开.

解 (a)由于

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{-2}{x-2}+\frac{3}{x-3}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{1-\frac{x}{3}},$$

及等式右端第一项的展开式的收敛区间为$(-2,2)$，而第二项的展开式的收敛区间为$(-3,3)$，故取其公共部分即得函数 $f(x)$展为关于 x 的乘幂的幂级数的收敛区间$(-2,2)$.

(6)
$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{3}{(x-5)+2}-\frac{2}{(x-5)+3}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{2}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{3}}.$$

上式右端第一项的展开式的收敛区间为$|x-5|<2$，而第二项展开式的收敛区间为$|x-5|<3$，取其公共部分，即得函数 $f(x)$展为关于 $x-5$ 乘幂的幂级数的收敛区间为$|x-5|<2$ 或$(3,7)$.

利用 I － V 基本展开式，写出下列函数关于 x 的幂级

数展开式：

2851. e^{-x^2}.

解 $$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\quad(|x|<+\infty)$$

2852. $\cos^2 x$.

解 $$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$$

$$(|x|<+\infty).$$

2853. $\sin^3 x$.

解 $$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$$

$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$(|x|<+\infty).$$

2854. $\dfrac{x^{10}}{1-x}$.

解 $$\frac{x^{10}}{1-x}=x^{10}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=10}^{\infty}x^n(|x|<1).$$

2855. $\frac{1}{(1-x)^2}$.

解 $\frac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}$

$$=1+(-2)(-x)+\frac{(-2)(-2-1)}{2\,!}(-x)^2+\cdots$$

$$+\frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n\,!}(-x)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n(|x|<1).$$

2856. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

解 $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}=x(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$

$$=x\Bigg[1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2\,!}(-2x)^2$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3\,!}(-2x)^3+\cdots\Bigg]$$

$$=x+x^2+\frac{1\cdot 3}{2\,!}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\,!}x^4+\cdots$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n\,!}x^{n+1}\qquad\left(|x|<\frac{1}{2}\right).$$

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时,上式右端为一交错级数

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

利用 2689 题的结果,即知它是收敛的.

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right]x^n \quad (|x|<1).$$

2860. $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

解 $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\,{}^{*)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)-\frac{1+(-1)^n}{2}\right]x^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n \quad (|x|<1).$$

*) 利用 2855 题的结果.

2861. $\dfrac{1}{1-x-x^2}$.

解 $\dfrac{1}{1-x-x^2}=\dfrac{1}{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}-1}x\right)^{-1}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\sqrt{5}+1}\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}+1}x\right)^{-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1}\right.$$

$$+(-1)^n\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1}\Big]x^n$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}$$

$$+(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\Big]x^n$$

$$\left(|x|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

2862. $\frac{1}{1+x+x^2}$.

解 $$\frac{1}{1+x+x^2}$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{x+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\Big(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1}$$

$$-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1}\Big)$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}x^n$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}x^n\Big)$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

$$-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\Big]x^n.$$

由于

$$(-1)^n\left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$=(-1)^n\left[\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right.$$

$$\left.-\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$=(-1)^n\left[\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi+i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)\right.$$

$$\left.-\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi-i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)\right]$$

$$=(-1)^n\cdot 2i\sin\frac{n+1}{3}\pi$$

$$=2i\cdot(-1)^n\sin\left[(n+1)\pi-\frac{2(n+1)}{3}\pi\right]$$

$$=2i\cdot(-1)^n\cdot\left[-\cos(n+1)\pi\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi\right]$$

$$=2i\cdot(-1)^n\cdot(-1)\cdot(-1)^{n+1}\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi$$

$$=2i\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi,$$

故得

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi,$$

其中$|x|<\min\left(\frac{2}{|1+i\sqrt{3}|},\frac{2}{|1-i\sqrt{3}|}\right)=1$，

即$|x|<1$.

2863. $\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

解 $\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$

$$=-1-\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{x-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\right.$$

$$+\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{x-(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\Big]$$

$$=-1+\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{1-x(\cos\alpha-i\sin\alpha)}$$

$$+\frac{1}{1-x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\Big]$$

$$=-1+\frac{1}{2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^n(\cos n\alpha-i\sin n\alpha+\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha,$$

其中$|x|<\min\left(\frac{1}{|\cos\alpha+i\sin\alpha|},\frac{1}{|\cos\alpha-i\sin\alpha|}\right)=1$.

2864. $\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ *).

解 $\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$

$$=\frac{ix}{2}\Big[\frac{1}{x-(\cos\alpha-i\sin\alpha)}$$

$$-\frac{1}{x-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\Big]$$

$$=\frac{ix}{2}\Big[-\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}$$

$$+\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{1-x(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\Big]$$

$$=\frac{ix}{2}\Big[-\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{n+1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha - i\sin\alpha)^{n+1}]$$

$$=\frac{ix}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x^n[-\cos(n+1)\alpha - i\sin(n+1)\alpha$$

$$+\cos(n+1)\alpha - i\sin(n+1)\alpha]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\sin(n+1)\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin n\alpha,$$

其中$|x|<1$.

*) 译本误为$\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

2865. $\frac{x\operatorname{sh}\alpha}{1-2x\operatorname{ch}\alpha+x^2}$.

解 $$\frac{x\operatorname{sh}\alpha}{1-2x\operatorname{ch}\alpha+x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{sh}\alpha}{x-(\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{sh}\alpha)}-\frac{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{sh}\alpha}{x-(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{sh}\alpha)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^\alpha}{x-e^\alpha}-\frac{e^{-\alpha}}{x-e^{-\alpha}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1-xe^{-\alpha}}+\frac{1}{1-xe^{\alpha}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}x^ne^{-n\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}x^ne^{n\alpha}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\operatorname{sh}n\alpha,$$

其中 $|x|<\min(e^{-\alpha},e^{\alpha})=e^{-|\alpha|}$.

2866. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解 $$\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}(|x|<1).$$

2867. $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

解 $\ln(1+x+x^2+x^3)$

$$=\ln[(1+x)(1+x^2)]=\ln(1+x)+\ln(1+x^2)$$

但

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}(-1<x\leqslant 1),$$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

故当 $-1<x\leqslant 1$ 时,有

$$\ln(1+x+x^2+x^3)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{\left(\frac{m}{2}\right)-1}(1+(-1)^m)\frac{x^m}{m}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}+(-1)^{\left(\frac{m}{2}\right)-1}(1+(-1)^m)}{m}x^m.$$

2868. $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.

解 首先注意到

$$e^{x\cos\alpha+ix\sin\alpha}=e^{x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=e^{xe^{i\alpha}}$$

的实部就是 $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$. 为此,先求 $e^{xe^{i\alpha}}$:

$$e^{xe^{i\alpha}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(xe^{i\alpha})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}e^{in\alpha}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(\cos n\alpha+i\sin n\alpha).$$

比较上式两端的实部，即得

$$e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n!}x^n$$
$$(|x|<+\infty).$$

比较虚部，还可得到

$$e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n!}x^n$$
$$(|x|<+\infty).$$

首先展开导函数，然后用逐项积分的方法以求下列函数的幂级数展开式.

2869. $f(x)=\operatorname{arctg}x$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 的和.

解 $\operatorname{arctg}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

这里逐项积分的条件是满足的. 事实上，当 $t\in[0,x]$ 且 $|x|<1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$ 是一致收敛的，并且各项均连续. 以下各题类似，不再一一说明. 上述级数的收敛区间为 $|x|<1$，当 $|x|=1$ 时，为交错级数，且满足莱布尼兹判别法的条件，故在端点 $x=\pm1$ 处，级数均收敛. 因此，级数的收敛域为 $|x|\leqslant1$，在其上展式成立.

令 $x=1$，即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$$=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

2870. $f(x)=\arcsin x$.

解 $\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$$=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]dt$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

收敛区间为$|x|<1$. 当$|x|=1$时，利用2604题的结果，由于$\frac{p}{2}+q=\frac{1}{2}+1>1$，故级数收敛. 因此，级数的收敛域为$|x|\leqslant1$，在其上展式成立.

2871. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

$$=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]dt$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

收敛区间为$|x|<1$. 当$|x|=1$时，级数为绝对收敛. 因此，级数的收敛域为$|x|\leqslant1$，在其上展式成立.

2872. $f(x)=\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)$.

解 $\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)=\int_0^x\frac{2t-2\cos\alpha}{1-2t\cos\alpha+t^2}dt$

$$=-2\int_0^x\frac{1}{t}\cdot\frac{t\cos\alpha-t^2}{1-2t\cos\alpha+t^2}dt$$

$$=-2\int_0^x\left(\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}t^n\cos n\alpha\right)dt^{*)}$$

$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}x^n.$$

收敛区间为$|x|<1$. 当$|x|=1$时，由 2698 题知，对于$0<\alpha<\pi$，级数收敛. 因此，当$0<\alpha<\pi$时，级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$. 但当$\alpha=0$且$x=1$时，级数发散；当$\alpha=0$且$x=-1$时，级数条件收敛；当$\alpha=\pi$且$x=1$时，级数条件收敛；当$\alpha=\pi$且$x=-1$时，级数发散.

*) 利用 2863 题的结果.

2873. 利用各种方法，求下列函数展为幂级数的展开式：

(а)$f(x)=(1+x)\ln(1+x)$；

(б)$f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$；

(в)$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$；

(г)$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}$；

(д)$f(x)=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$；

(е)$f(x)=\arccos(1-2x^2)$；

(ж)$f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$；

(з)$f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

解 (а)$f(x)=(1+x)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\ (|x|<1),$$

当$|x|=1$时，级数收敛. 因此，级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$.

$$=\int_0^x\left[\left(1+\frac{t^2}{2}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t^4}{4}\right)^n\right]dt$$

$$=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{t^{2n}}{2^n}\right]dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}(|x|<\sqrt{2}).$$

当$|x|=\sqrt{2}$时，级数为

$$\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{2n+1}$$

及 $$-\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{2n+1},$$

它们均由两收敛级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n+1}\text{ 及 }\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n+3}$$

逐项相加并分别乘以常数$\sqrt{2}$及$-\sqrt{2}$而得，故它们收敛. 因此，原级数的收敛域为$|x|\leqslant\sqrt{2}$.

$$(\text{д})f(x)=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}{}^{*)}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n-1}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$$

$$(|x|<1).$$

当 $|x|=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n-1)}$ 收敛. 因此，级数的收敛域为 $|x|\leqslant 1$.

*）利用 2869 题的结果.

（е）由于

$$f'(x)=[\arccos(1-2x^2)]'=\frac{2\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

及 $f(0)=0$，故

$$\arccos(1-2x^2)=2\operatorname{sgn}x\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=2\operatorname{sgn}x\cdot\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]dt$$

$$=2\operatorname{sgn}x\cdot\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]$$

$$=2|x|\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n+1}\right]$$

$$(|x|<1). \qquad (1)$$

当 $|x|=1$ 时，级数为

$$2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}\right].$$

对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

应用拉阿伯判别法：

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2}>1,$$

即知它是收敛的. 因此，级数(1)的收敛域为 $|x|\leqslant 1$.

$$(\text{ж})f(x)=x\cdot\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]^{*)}$$

$$+\left[1-\frac{x^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{2n+2}\right]$$

$$=1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$$

$$(|x|<1).$$

当 $|x|=1$ 时，对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

应用拉阿伯判别法：

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2+11n}{(2n+1)^2}=\frac{5}{2}>1,$$

即知它是收敛的. 因此，原级数的收敛域为 $|x|\leqslant 1$.

*）利用 2870 题的结果.

$$(з)f(x)=x\cdot\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]^{*)}-\left[1+\frac{1}{2}x^2\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{2n+2}\right]$$

$$=-1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

$$\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1}\quad(|x|\leqslant 1).$$

*） 利用 2871 题的结果.

2874. 利用展开式

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots$$

的唯一性，求下列函数的 n 阶导函数：

(a) $f(x)=e^{x^2}$；　　(6)$^+$ $f(x)=e^{\frac{a}{x}}$；

(в)$^{+}$ $f(x)=\operatorname{arctg}x$.

解 (a) $f(x+h)-f(x)=e^{(x+h)^2}-e^{x^2}$

$$=e^{x^2}(e^{2xh+h^2}-1)$$

$$=e^{x^2}\Big[(2xh+h^2)+\frac{1}{2!}(2xh+h^2)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(2xh+h^2)^n+\cdots\Big],$$

其中 h^n 的系数为

$$e^{x^2}\Big[\frac{1}{n!}(2x)^n+\frac{1}{(n-1)!}C_{n-1}^1(2x)^{n-2}$$

$$+\frac{1}{(n-2)!}C_{n-2}^2(2x)^{n-4}+\cdots\Big]$$

$$=\frac{e^{x^2}}{n!}\Big[(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\cdots\Big].$$

将 $f(x+h)-f(x)$ 的展开式中 h^n 的系数 $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ 与之比较，即得

$$(e^{x^2})^{(n)}=e^{x^2}\Big[(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\cdots\Big].$$

(б) $f(x+h)-f(x)=e^{\frac{a}{x+h}}-e^{\frac{a}{x}}$

$$=e^{\frac{a}{x}}\left(e^{-\frac{ah}{x(x+h)}}-1\right)=e^{\frac{a}{x}}\left(e^{\frac{-a\frac{h}{x^2}}{1+\frac{h}{x}}}-1\right)$$

$$=e^{\frac{a}{x}}\Big[e^{-\frac{ah}{x^2}+\frac{ah^2}{x^3}-\frac{ah^3}{x^4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}}+\cdots}-1\Big]$$

$$=e^{\frac{a}{x}}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}}\Big]^m\right\}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m!x^m} \sum_{k_1=0}^{\infty} (-1)^{k_1+1}\left(\frac{h}{x}\right)^{k_1+1}$$

$$\cdot \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{k_2+1}\left(\frac{h}{x}\right)^{k_2+1} \cdots$$

$$\cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} (-1)^{k_m+1}\left(\frac{h}{x}\right)^{k_m+1}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m!x^m}$$

$$\cdot \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_m=s} (-1)^{k_1+\cdots+k_m+m}$$

$$\cdot \left(\frac{h}{x}\right)^{k_1+\cdots+k_m+m}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m a^m}{m!x^m}\left(\frac{h}{x}\right)^m\right.$$

$$\left.\cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s} 1\right) (-1)^s \left(\frac{h}{x}\right)^s\right]$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m a^m}{m!x^m}\left(\frac{h}{x}\right)^m\right.$$

$$\left.\cdot \sum_{s=0}^{\infty} C_{s+m-1}^{s} (-1)^s \left(\frac{h}{x}\right)^s\right]^{*)}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+s} a^m}{m!x^m}\left(\frac{h}{x}\right)^{m+s} C_{s+m-1}^{s}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{s+m=n \\ s\geq 0, m\geq 1}} \frac{(-1)^n a^m}{m!x^m}\left(\frac{h}{x}\right)^n C_{n-1}^{s}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n}\left(\frac{h}{x}\right)^n \sum_{\substack{s+m=n \\ s\geq 0, m\geq 1}} C_{n-1}^{s} x^{n-m} \frac{a^m}{m!}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n}} h^n \sum_{s=0}^{n-1} C_{n-1}^{s} \frac{x^s a^{n-s}}{(n-s)!}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n h^n,$$

其中

$$A_n = \frac{(-1)^n}{x^{2n}} \sum_{s=0}^{n-1} s! C_n^s C_{n-1}^s a^{n-s} x^s.$$

于是，比较 h^n 的系数，即得

$$(e^{\frac{a}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^l}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}} \sum_{s=0}^{n-1} s! C_n^s C_{n-1}^s a^{n-s} x^s$$

$$= \frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}} \Big[a^n + \frac{n(n-1)}{1!} a^{n-1} x + \frac{n(n-1) \cdot (n-1)(n-2)}{2!} a^{n-2} x^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2) \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{3!} a^{n-3} x^3 + \cdots \Big].$$

*）其中 $\displaystyle\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s \\ k_1\geqslant 0,\cdots,k_m\geqslant 0}} 1 = C_{s+m-1}^{s}$ 推导如下：

令 $|t| < 1$，一方面由 $\displaystyle\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$ 得

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^m = \sum_{k_1=0}^{\infty} t^{k_1} \sum_{t^{k_2}=0}^{\infty} k_2 \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} t^{k_m}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_m=s} t^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \Big(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s} 1 \Big) t^s$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} P_s t^s,$$

其中 $P_s=\sum\limits_{k_1+\cdots+k_m=s}1$. 另一方面，又由

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^m=(1-t)^{-m}$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-s+1)}{s!}$$

$$(-1)^s t^s$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{2s}\frac{m(m+1)\cdots(m+s-1)}{s!}t^s$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}C_{m+s-1}^{s}t^s,$$

由幂级数展开的唯一性，即知 $P_s=C_{m+s-1}^{s}$.

(B)根据

$$\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy},$$

令 $y=\dfrac{\dfrac{h}{1+x^2}}{1+\dfrac{x}{1+x^2}h}$，就有$\dfrac{x+y}{1-xy}=x+h$. 于是

$$f(x+h)-f(x)=\operatorname{arc\,tg}(x+h)-\operatorname{arc\,tg}x$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}-\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}y$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{h}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x}{1+x^2}h}\right].$$

由 2869 题的结果知，当 $|y|\leqslant 1$ 时，有

$$\operatorname{arc\,tg}y=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{y^{2m+1}}{2m+1}.$$

而当 h 很小(且 $|x|\leqslant 1$) 时，有

$$y=\frac{h}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x}{1+x^2}h}$$

$$=\frac{h}{1+x^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{1+x^2}h\right)^k.$$

于是

$$f(x+h)-f(x)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\Big[\frac{h}{1+x^2}$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{1+x^2}h\right)^k\Big]^m$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^m$$

$$\cdot\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=0}^{\infty}(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$$

$$\cdot\left(\frac{xh}{1+x^2}\right)^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^m$$

$$\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\Big(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}1\Big)(-1)^s\left(\frac{xh}{1+x^2}\right)^s$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^{m+s}x^s$$

$$\cdot(-1)^sC_{m+s-1}^s$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{m+s=n\\ m\geqslant1,s\geqslant0}}(-1)^{m+s}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^{m+s}$$

$$\cdot\frac{x^s}{2m+1}C_{m+s-1}^s$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^n A_n,$$

其中

$$A_n = \sum_{\substack{m+s=n \\ m\geqslant 1, s\geqslant 0}} \frac{x^s}{2m+1} C_{n-1}^s$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{2(n-s)+1} C_{n-1}^s (n = 1, 2, \cdots).$$

因此，比较 h^n 的系数，即得

$$(\operatorname{arc\,tg} x)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} A_n$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{2(n-s)+1} C_{n-1}^s$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \left[\frac{1}{3} x^{n-1} + \frac{1}{5}(n-1)x^{n-2} + \cdots \right].$$

2875. 把函数

$$f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$$

依二项式 $x+1$ 的正整数乘幂展开.

解 $f(x) = -\ln[1+(x+1)^2]$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (x+1)^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{n},$$

收敛域为 $|x+1| \leqslant 1$ 或 $-2 \leqslant x \leqslant 0$.

2876. 把函数

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

按变数 x 的负乘幂展开成幂级数.

$$\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(-\frac{x}{1+x}\right)^{n}\right]$$

$$=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1},$$

当 $\left|\frac{x}{1+x}\right|<1$ 即当 $x>-\frac{1}{2}$ 时，级数收敛. 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，由2689题的结果知，它条件收敛. 因此，级数的收敛域为 $x\geqslant-\frac{1}{2}$.

2879. 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!},$$

直接证明

$$f(x)f(y)=f(x+y).$$

证 $f(x)f(y)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{x^{n_1}}{(n_1)!}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{y^{n_2}}{(n_2)!}$

$$=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{1}{(n_1)!(n_2)!}x^{n_1}y^{n_2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1+n_2=n}\frac{1}{(n_1)!(n_2)!}x^{n_1}y^{n_2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{n_1+n_2=n}\frac{n!}{(n_1)!(n_2)!}x^{n_1}y^{n_2}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{n_1=0}^{\infty}C_n^{n_1}x^{n_1}y^{n-n_1}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^{n}=f(x+y).$$

上述级数在 $|x|<+\infty$ 及 $|y|<+\infty$ 上绝对收敛，故

重新组合是允许的.

事实上，$f(x)=e^x$，等式

$$f(x)f(y)=f(x+y)$$

即为指数函数的特征.

2880. 假如我们定义

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

及

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

证明：(a)$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$；

(б)$\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

证 由于 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的幂级数展开式在 $|x|<+\infty$ 内绝对收敛，故级数相乘或相加、减均仍绝对收敛，且可重新组合. 因此，以下的级数运算都是合理的.

(a) $\sin x\cos x$

$$=\sum_{n_1=0}^{\infty}(-1)^{n_1}\frac{x^{2n_1+1}}{(2n_1+1)!}\cdot\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_2}\frac{x^{2n_2}}{(2n_2)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant0,n_2\geqslant0}}(-1)^{n_1+n_2}\cdot\frac{x^{2n_1+2n_2+1}}{(2n_1+1)!(2n_2)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{(-1)^n x^{2n+1}$$

$$\cdot \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1\geqslant 0, n_2\geqslant 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!}\Big]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_n x^{2n+1},$$

其中

$$A_n = \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1\geqslant 0, n_2\geqslant 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!}$$

$$= \sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2)=2n+1 \\ n_1\geqslant 0, n_2\geqslant 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{\substack{k_1+k_2=2n+1 \\ k_1\text{—奇数} \\ k_2\text{—偶数}}} \frac{(2n+1)!}{(k_1)!(k_2)!}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{2}\Big(\sum_{k_1\text{奇}, k_2\text{偶}} + \sum_{k_1\text{偶}, k_2\text{奇}}\Big)$$

$$= \frac{1}{(2n+1)}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}2^{2n+1}.$$

从而得

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x.$$

(6) $\sin^2 x + \cos^2 x$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_1+n_2}\frac{x^{2(n_1+n_2)+2}}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}$$

$$+\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}(-1)^{k_1+k_2}\frac{x^{2(k_1+k_2)}}{(2k_1)!(2k_2)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(-1)^n x^{2n+2}$$

$$\cdot\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}\Big]$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\Big[(-1)^m x^{2m}$$

$$\cdot\sum_{\substack{k_1+k_2=m\\ k_1\geqslant 0,k_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!}\Big]$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}+\sum_{n=0}^{\infty}$$

$$=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+2}A_n,$$

其中

$$A_n=\sum_{\substack{k_1+k_2=n+1\\ k_1\geqslant 0,k_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!}$$

$$-\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}$$

$$\cdot\Big[\sum_{\substack{2k_1+2k_2=2n+2\\ k_1\geqslant 0,k_2\geqslant 0}}\frac{(2n+2)!}{(2k_1)!(2k_2)!}$$

$$-\sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2+1)=2n+2\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}$$

$$\left.\frac{(2n+2)!}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\left[\sum_{k'=0,2,\cdots,2n+2} C_{2n+2}^{k'}\right.$$

$$\left.-\sum_{l'=1,3,\cdots,2n+1} C_{2n+2}^{l'}\right]$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\left[\sum_{s=0,2,\cdots,2n+2}(-1)^s C_{2n+2}^s\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1,3,\cdots,2n+1}(-1)^s C_{2n+2}^s\right]$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\sum_{s=0}^{2n+2}(-1)^s C_{2n+2}^s$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}[1+(-1)]^{2n+2}$$

$$=0\ (n=0,1,2,\cdots).$$

因而得

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1(|x|<+\infty).$$

2881. 写出函数 $f(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right]^{-1}$ 展为幂级数的展开式中之若干项.

解 $f(x)=\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots\right)^{-1}$

$$=1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots\right)^2$$

$$-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)^3+\cdots$$

$$=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{24}-\cdots(|x|<1).$$

对于幂级数进行相应的运算以求下列函数展成幂级数

的展开式：

2882. $f(x)=(1+x)e^{-x}$.

解 $$f(x)=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right]x^n$$

$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n(|x|<+\infty).$$

2883. $f(x)=(1-x)^2\operatorname{ch}\sqrt{x}$.

解 当 $x\geqslant0$ 时，$\operatorname{ch}\sqrt{x}=\dfrac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right]x^{\frac{n}{2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!};$$

当 $x<0$ 时，易知 $\operatorname{ch}\sqrt{x}=\cos\sqrt{|x|}$，

从而

$$\operatorname{ch}\sqrt{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{|x|})^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}.$$

故 $$\operatorname{ch}\sqrt{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}(|x|<+\infty).$$

从而

$$f(x)=(1-2x+x^2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$$

$$=1-\frac{3}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)!}-\frac{2}{(2n-2)!}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(2n-4)!}\right]x^n(|x|<+\infty).$$

2884. $f(x)=\ln^2(1-x)$.

解 $f(x)=\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)^2$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{3(n-2)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}\Big]x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}\right)\frac{1}{n+1}+\cdots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{1}\right)\frac{1}{n+1}\Big]x^{n+1}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad(|x|<1).$$

当 $x=-1$ 时，级数为

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

由于

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}>\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n+2}\quad(n=2,3,\cdots),$$

并且有

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}=\frac{C+\ln n+\varepsilon_n{}^{*)}}{n+1}\to 0\quad(n\to\infty),$$

故它是收敛的.

当 $x=1$ 时,由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n+1}$ 发散且原级数为正项级数,故 $2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}$ 也发散.

因此,级数

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

的收敛域为 $-1 \leqslant x < 1$.

*) 利用 146 题的结果.

2885. $f(x)=(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x$.

解 $f(x)=(1+x^2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ *)

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)x^{2n+1}$$

$$=x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$$

$(|x| \leqslant 1)$.

*) 利用 2869 题的结果.

2886. $f(x)=e^x\cos x$.

解 $e^x\cos x$ 为 $e^x(\cos x+i\sin x)$ 的实部. 由于

$$e^x(\cos x+i\sin x)=e^x\cdot e^{ix}=e^{(1+i)x}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(1+i)x]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(1+i)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

比较上式两端的实部，即得

$$e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\quad(|x|<+\infty).$$

2887. $f(x)=e^x\sin x.$

解 利用 2886 题的等式，并比较此等式两端的虚部，即得

$$e^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\quad(|x|<+\infty).$$

2888. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}.$

解 $$f(x)=\sum_{n_1=0}^{\infty}(-1)^{n_1}x^{n_1}\cdot\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_2}\frac{x^{n_2+1}}{n_2+1}$$

$$=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_1+n_2}\frac{x^{n_1+n_2+1}}{n_2+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(-1)^n x^{n+1}\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geq 0,n_2\geq 0}}\frac{1}{n_2+1}\Big]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(-1)^{n-1}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\Big)x^n\Big]$$

$$(|x|<1).$$

当 $|x|=1$ 时，通项的绝对值 ≥ 1，显然发散. 因此，级数的收敛域为 $|x|<1$.

2889. $f(x)=(\text{arc tg }x)^2.$

解 $$f(x)=\Big(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\Big)^{2*)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Big(\frac{1}{(2n-1)\cdot 1}+\frac{1}{(2n-3)\cdot 3}$$

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n=2$$

或 $$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n^2a_nx^n=2,$$

也即

$$2a_2+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-n^2a_n]x^n=2$$

$$(-1<x<1).$$

比较上式 x 的同次幂的系数，得

$$a_2=1, a_3=0,$$

$$a_{n+2}=\frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n \quad (n\geqslant 2).$$

从而可得

$$a_{2k+1}=0,$$

$$a_{2k+2}=\frac{2[(2k)!!]^2}{(2k+2)!}=\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}$$

$$(k=0,1,2,\cdots).$$

于是

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}x^{2k+2}(-1<x<1).$$

从而得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}x^{2k}(-1<x<1).$$

显然右端的幂级数当 $x=\pm1$ 时均收敛，而左端的函数当 $x=\pm1$ 时连续，故由幂级数的亚伯耳定理知，上述展式当 $x=1$ 及 $x=-1$ 时也成立.

写出下列函数按变数 x 的正乘幂展开成幂级数的展开式(异于零)的前三项：

2891. $f(x)=\operatorname{tg}x$.

解 方法一：

直接应用台劳公式，先求导数，有

$f(x)=\operatorname{tg}x$, $\qquad f(0)=0$;

$f'(x)=\sec x$, $\qquad f'(0)=1$;

$f''(x)=2\sec^2 x\operatorname{tg}x$, $f''(0)=0$;

$f'''(x)=2\sec^4 x+4\sec^2 x\operatorname{tg}^2 x$, $f'''(0)=2$;

$$f^{(4)}(x)=8\sec^4 x\operatorname{tg}x+8\sec^2 x\operatorname{tg}^3 x$$
$$+8\sec^4 x\operatorname{tg}x,$$

$f^{(4)}(0)=0$;

$$f^{(5)}(x)=32\sec^4 x\operatorname{tg}^2 x+8\sec^6 x$$
$$+16\sec^2 x\operatorname{tg}^4 x+24\sec^4 x\operatorname{tg}^2 x$$
$$+32\sec^4 x\operatorname{tg}^2 x+8\sec^6 x,$$

$f^{(5)}(0)=16$;

……

于是，

$$f(x)=x+\frac{2}{3!}x^3+\frac{16}{5!}x^5+\cdots$$
$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots \qquad \left(|x|<\frac{\pi}{2}\right).$$

方法二：

当 $|x|<\frac{\pi}{2}$ 时，记 $\xi=1-\cos x$，则 $|\xi|<1$，有

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x\cdot\frac{1}{1-\xi}$$
$$=\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}\frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}\xi^m$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}\frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} + \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}$$

$$\frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\Big]^{m}$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}$$

$$\frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=1}^{\infty}(-1)^{k_1+\cdots+k_m+m}$$

$$\cdot\frac{x^{2(k_1+\cdots+k_m)}}{(2k_1)!\cdots(2k_m)!}$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=m}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}(-1)^{s+l+m-1}$$

$$\cdot\frac{x^{2s+2l-1}}{(2l-1)!(2k_1)!\cdots(2k_m)!}$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty}$$

$$(-1)^{n-1}x^{2n-1}\cdot\sum_{\substack{l+s=n\\ l\geqslant 1}}\ \sum_{1\leqslant m\leqslant s}\ \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}}$$

$$(-1)^{m}\frac{1}{(2l-1)!(2k_1)!\cdots(2k_m)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}A_n x^{2n-1},$$

其中 $A_1 = 1$，而当 $n \geqslant 2$ 时，有

$$A_n = (-1)^{n-1}\Big[\frac{1}{(2n-1)!}$$

$$+\sum_{\substack{l+s=n\\ l\geqslant 1}}\sum_{1\leqslant m\leqslant s}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}}$$

$$\left.\frac{(-1)^m}{(2l-1)!(2k_1)!\cdots(2k_m)!}\right\}.$$

例如，当 $n=2(l=1,s=1,m=1,k_1=1)$时，

得 $A_2=\frac{1}{3}$；当 $n=3(l=2,s=1,m=1,k_1=1;$

$l=1,s=2,m=1,k_1=2;l=1,s=2,m=2,$

$k_1=1,k_2=1)$时，得 $A_3=\frac{1}{5!}+(-1)\frac{1}{3!\ 2!}$

$+(-1)\frac{1}{4!}+\frac{1}{2!\ 2!}=\frac{2}{15}$，等等．于是有

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots\qquad\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right).$$

2892. $f(x)=\operatorname{th}x$.

解 运用幂级数展开式的唯一性定理，为求展开式可以考虑在 $x=0$ 点附近作幂级数展开．注意当$|x|$很小，且幂级数中常数项为零时，其收敛的和是很小的．于是，以下的写法是可以的，取其前三项，有

$$f(x)=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots}{1+\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)}$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)$$

$$\cdot\left[1-\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2-\cdots\right]$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)$$

$$\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^4}{24}+\cdots\right)$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right).$$

如果详细一些，可进一步叙述如下：

首先，可有一特殊的幂级数

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots.$$

如若 $|x|<\rho$ 且 $\dfrac{\frac{\rho}{2}}{1-\frac{\rho}{3}}=1$，例如取 $\rho=\frac{6}{5}=1.2$ 时，

有 $\frac{\rho}{2!}+\frac{\rho^2}{3!}+\cdots\leqslant 1$，此时得

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\cdots$$

$$(|x|<1.2).$$

易见 $A_3=0, A_5=0, A_7=0, \cdots$. 于是，上式可改写为

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+B_1\cdot\frac{x^2}{2!}-B_2\cdot\frac{x^4}{4!}$$

$$+B_3\cdot\frac{x^6}{6!}-\cdots, \tag{1}$$

其中 $B_1, B_2, B_3, \cdots$ 为伯努里(Bernoulli)常数 *)，有

$$B_1=\frac{1}{6}, B_2=\frac{1}{30}, B_3=\frac{1}{42},$$

$$B_4=\frac{1}{30}, B_5=\frac{5}{66}, \cdots.$$

由

$$x\operatorname{cth}\frac{x}{2}=x\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{2x}{e^x-1}+x$$

及(1)式，即得

$$\frac{x}{2}\operatorname{cth}\frac{x}{2}=1+B_1\frac{x^2}{2!}-B_2\frac{x^4}{4!}+B_3\frac{x^6}{6!}-\cdots.$$

于是

$$x\operatorname{cth}x=1+B_1\frac{2^2x^2}{2!}-B_2\frac{2^4x^4}{4!}+B_3\frac{2^6x^6}{6!}-\cdots.$$

若 $x\neq 0$，则

$$\operatorname{cth}x=\frac{1}{x}+B_1\frac{2^2x}{2!}-B_2\frac{2^4x^3}{4!}+B_3\frac{2^6x^5}{6!}-\cdots. \tag{2}$$

注意到

$$\operatorname{th}x=2\operatorname{cth}2x-\operatorname{cth}x$$

及当 $x=0$ 时，$\operatorname{th}x=0$，由(2)式即有

$$\begin{aligned}\operatorname{th}x&=\frac{B_1}{2\,!}(2^4-2^2)x-\frac{B_2}{4\,!}(2^8-2^4)x^3+\frac{B_3}{6\,!}(2^{12}-2^6)x^5-\cdots\\&=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\cdots.\end{aligned} \tag{3}$$

还可指出的是，它的系数与 $\operatorname{tg}x$ 展开式相应项的系数的绝对值是相同的，两者相应各系数只是符号上有交错变异而已(可参看本题解末加注的 Bromwich 所著一书的相应章节)，而 $\operatorname{tg}x$ 的幂级数展开式当 $|x|<\frac{\pi}{2}$ 时收敛，故上述的级数(3)当 $|x|<\frac{\pi}{2}$ 时收敛.

*)参看 Bromwich 著 An introduction to the theory of infinite series 一书第十一章 100 款.

2893. $f(x)=\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}$.

解 与2892题的想法一样，可以考虑 $x\neq 0$ 且 $|x|$ 很小的情形．于是有

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)\right.$$

$$\cdot\left[1+\left(\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}-\cdots\right)\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}-\cdots\right)^2+\cdots\right]-1\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)\right.$$

$$\cdot\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4\right.$$

$$\left.\left.+\frac{31}{15120}x^6+\cdots\right)-1\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4-\frac{2}{945}x^6-\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5-\cdots$$

$$(0<|x|<\pi).$$

一般说来，为求通项可作如下进一步的讨论：

考虑当 $x\neq 0$ 时，$g(x)=xf(x)=x\operatorname{ctg}x-1$，而当 $|x|<\pi$ 时，有

$$g(x)=x\operatorname{ctg}x-1=\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}-1=\frac{\cos x}{1-\xi}-1,$$

其中

$$\xi=1-\frac{\sin x}{x},$$

注意到$|\sin x|<|x|$,故$|\xi|<1$. 因而

$$\begin{aligned}
g(x) &= \cos x\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\xi^m-1\\
&=\Big[1+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}\Big]\Big(1+\sum_{m=1}^{\infty}\xi^m\Big)-1\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\xi^m+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}\\
&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}\xi^m.
\end{aligned}$$

由于

$$\xi=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{(2k+1)!},$$

故有

$$\begin{aligned}
\xi^m &= \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=1}^{\infty}(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m+m}\\
&\quad\cdot\frac{x^{2(k_1+k_2+\cdots+k_m)}}{(2k_1+1)!(2k_2+1)!\cdots(2k_m+1)!}\\
&=\sum_{s=m}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}(-1)^{s+m}\\
&\quad\cdot\frac{x^{2s}}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}\xi^m=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{1\leqslant m\leqslant s}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant1,\cdots,k_m\geqslant1}}(-1)^{s+m}\\
\cdot\frac{x^{2s}}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s A_s x^{2s},$$

其中

$$A_s = \sum_{1\leqslant m\leqslant s}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}} \frac{(-1)^m}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}$$

$$(s = 1,2,\cdots).$$

又有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!}\xi^m$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s=m}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}}(-1)^{s+m+l}$$

$$\cdot \frac{x^{2s+2l}}{(2l)!(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n B_n x^{2n},$$

其中

$$B_n = \sum_{\substack{s+l=n\\ s\geqslant 1,l\geqslant 1}}\sum_{1\leqslant m\leqslant s}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}}$$

$$\frac{(-1)^m}{(2l)!(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!} \quad (n = 2,3,\cdots)$$

于是,

$$g(x) = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s A_s x^{2s} + \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n B_n x^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^{2n},$$

$$
\begin{aligned}
1 &= \cos x \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s+k=n} (-1)^k x^{2(k+s)} \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\sum_{s+k=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \Big] x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{2n}.
\end{aligned}
$$

根据幂级数展开式的唯一性，就有 $A_0 = E_0 = 1$，而 $A_n = 0(n = 1,2,\cdots)$ 其中

$$
\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k+s=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!},
\end{aligned}
$$

故得递推关系

$$
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!} = 0(n = 1,2,\cdots)
$$

例如已知 E_0，由上式令 $n=1$，即得 $E_1 - E_0 = 0$，从而 $E_1 = E_0 = 1$. 由 E_0, E_1，令 $n=2$，又可推出 $E_2,\cdots$，等等．一般说来，由 $E_0, E_1, E_2, \cdots, E_{n-1}$，从上式可推出 E_n.

2895. 将函数

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} \qquad (|x|<1)
$$

展开成幂级数．

解　只要 $x^2+2|tx|<1$，函数 $f(x)$ 就有展开的可能性．记 x^n 的系数为 $P_n(t)$，则

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}=1+P_1(t)x+P_2(t)x^2$$
$$+\cdots+P_n(t)x^n+\cdots. \qquad (1)$$

下面我们只要确定 $P_n(t)$ 即可．为此，对(1)式两端同时对 x 求导数，得

$$\frac{t-x}{(1-2tx+x^2)^{\frac{3}{2}}}=P_1(t)+2P_2(t)x+\cdots$$
$$+nP_n(t)x^{n-1}+\cdots.$$

把上式与(1)式比较，易得

$$(1-2tx+x^2)(P_1+2P_2x+\cdots+nP_nx^{n-1})$$
$$=(t-x)(1+P_1x+P_2x^2+\cdots+P_nx^n).$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数，得

$$P_1(t)=t,$$
$$2P_2(t)-2tP_1(t)=tP_1(t)-1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)P_{n+1}(t)-2ntP_n(t)+(n-1)P_{n-1}(t)$$
$$=tP_n(t)-P_{n-1}(t).$$

由此得

$$P_1(t)=t,$$
$$P_2(t)=\frac{3t^2-1}{2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_{n+1}(t)=\frac{2n+1}{n+1}tP_n(t)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(t). \qquad (2)$$

例如，取 $n=2$，则由 $P_1(t)$ 及 $P_2(t)$ 可推得

$$P_3(t)=\frac{5}{3}t\cdot\frac{3t^2-1}{2}-\frac{2}{3}t$$
$$=\frac{5\cdot 3}{3\cdot 2}t^3-\frac{3}{2}t$$

$$=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}\left\{t^3-\frac{3\cdot 2}{2(2\cdot 3-1)}t\right\}.$$

一般说来，由(2)式用数学归纳法可递推得

$$P_n(t)=\frac{(2n-1)!!}{n!}\left\{t^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}t^{n-2}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}t^{n-4}-\cdots\right\}$$

($n\geqslant 1$，勒襄德多项式).

2896. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 写出函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{1-x}$ 的展开式.

解 $$F(x)=\sum_{n_1=0}^{\infty}a_{n_1}x^{n_1}\cdot\sum_{n_2=0}^{\infty}x^{n_2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}a_{n_1}\Big)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_k\Big)x^n\quad(|x|<1).$$

2897. 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 有收敛半径 R_1，而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 有收敛半径 R_2，则级数

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$； (6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$

的收敛半径 R 是怎样的？

解 (a)记 $A_n=a_n+b_n$，则有

$$\sqrt[n]{|A_n|}=\sqrt[n]{|a_n+b_n|}\leqslant\sqrt[n]{|a_n|+|b_n|}$$

$$\leqslant\sqrt[n]{2\max(|a_n|,|b_n|)}$$

$$=\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{\max(|a_n|,|b_n|)}$$

$$=\sqrt[n]{2}\cdot\max(\sqrt[n]{|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|}).$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，故有

$$\frac{1}{R}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|A_n|}$$

$$\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left\{\sqrt[n]{2}\cdot\max(\sqrt[n]{(|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|})\right\}$$

$$=\varlimsup_{n\to\infty}\{\max(\sqrt[n]{|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|})\}$$

$$=\max\{\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|},\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}\}$$

$$=\max\left(\frac{1}{R_1},\frac{1}{R_2}\right),$$

从而得

$$R\geqslant\frac{1}{\max\left(\frac{1}{R_1},\frac{1}{R_2}\right)}=\min(R_1,R_2).$$

(6)记 $B_n=a_nb_n$，则有

$$\sqrt[n]{|B_n|}=\sqrt[n]{|a_nb_n|}=\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\sqrt[n]{|b_n|}.$$

于是

$$\frac{1}{R}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|B_n|}=\varlimsup_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\sqrt[n]{|b_n|}\}$$

$$\leqslant\{\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\}\cdot\{\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}\}$$

$$=\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R_1R_2},$$

故得

$$R\geqslant R_1R_2.$$

2898. 设

$$l=\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{和} L=\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

证明幂级数的收敛半径 R 满足下述不等式

$$l\leqslant R\leqslant L.$$

证 记 $l_1=\frac{1}{l}, L_1=\frac{1}{L}$. 注意 $l\geqslant 0, L\geqslant 0$. 若 $l=0$，则记 $l_1=+\infty$；若 $l=+\infty$，则记 $l_1=0$. 对 L 与 L_1 也作同样规定. 易见 $L_1\leqslant l_1$. 任给 $\varepsilon>0$，总可选 $\delta_1>0, \delta_2>0$，使

$$\frac{1}{1+\delta_1}=1-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{1-\delta_2}=1+\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意对 δ_1, δ_2 而言，存在自然数 m，使当 $n>m$ 时，有

$$l\cdot(1-\delta_2)<\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|<L\cdot(1+\delta_1)$$

或

$$\frac{1}{L}\cdot\frac{1}{1+\delta_1}<\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{1-\delta_2},$$

即当 $n>m$ 时，有

$$L_1\cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<l_1\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

易见当 $n>m$ 时，有

$$\frac{|a_n|}{|a_m|}=\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\cdot\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdots\frac{|a_{m+1}|}{|a_m|}$$
$$<\left[l_1\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^{n-m}$$

或

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1}<\left(\frac{|a_m|}{l_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{1}$$

同理可得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1}>\left(\frac{|a_m|}{L_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{2}$$

注意到若 $A>0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A}=1$，故存在充分大的 $n_0(>m)$，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\left(\frac{|a_m|}{l_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

及

$$\left(\frac{|a_m|}{L_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}>1-\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{3}$$

将(3)式代入(1)式及(2)式，即得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1}<1+\varepsilon \text{ 及 } \frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1}>1-\varepsilon.$$

于是有

$$L_1\cdot(1-\varepsilon)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}\leqslant l_1\cdot(1+\varepsilon).$$

从而得

$$\frac{1}{l_1(1+\varepsilon)}\leqslant R\leqslant\frac{1}{L_1(1-\varepsilon)}{}^{*)}.$$

即

$$\frac{l}{1+\varepsilon}\leqslant R\leqslant\frac{L}{1-\varepsilon}.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，即知

$$l\leqslant R\leqslant L.$$

*）若 $L_1=+\infty$，即 $L=0$，此时显然有 $R=0$（级数除 $x_0=0$ 点收敛以外，对任一点 $x\neq x_0$ 均发散），故可设 $L_1<+\infty$.

2899. 证明：若函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 且

$$|n!a_n| < M(n = 1,2,\cdots),$$

其中 M 是常数，则：1) $f(x)$ 在任一点 a 可微分无限多次；2) 下述展开式成立

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (|x| < +\infty).$$

证 1) 由于 $|n!a_n| < M$，故有

$$|a_n| < \frac{M}{n!}(n = 1,2,\cdots).$$

设 $[-N,N]$ 是包含 x_0 的任一有限区间．由于

$$|a_n(x-x_0)^n| < \frac{M}{n!}(2N)^n$$

及级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{M}{n!}(2N)^n$ 收敛，故由外耳什特拉斯判别法知，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

在包含 x_0 的任意有限区间上一致收敛，即其收敛半径 $R = +\infty$. 于是，此级数在任一点 $a \in (-\infty, +\infty)$ 可逐项微分任意多次．

2) 由 1) 段已证可知级数 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在任何点可逐项微分任意多次，故

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n(x-x_0)^{n-m}$$

$$(m = 1,2,\cdots).$$

今设 $|x-a| < R$(R 为任意固定的正数)，于是

$$|x-x_0| \leqslant |x-a| + |a-x_0|$$
$$< R + |a-x_0| = L,$$

故由假定知

$$|f^{(m)}(x)| \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!}|a_n| \cdot L^{n-m}$$
$$\leqslant \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{M}{n!} L^{n-m}$$
$$= M\sum_{s=0}^{\infty} \frac{L^s}{s!} = MP(m=1,2,\cdots),$$

其中$P = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{L^s}{s!} < +\infty$.

考虑余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

的拉格朗日形式

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$
$$(0<\theta<1).$$

于是,当 $|x-a|<R$ 时,有

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{MP}{(n+1)!}R^{n+1}(n=1,2,\cdots).$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$收敛,故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

由此可知,当 $|x-a|<R$ 时,展式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

成立．再由 $R > 0$ 的任意性即知，此展式对一切 $x(|x| < +\infty)$ 皆成立．证毕．

2900. 证明：若 1) $a_n \geqslant 0$ 及 2) 存在有

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S,$$

则
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

证　首先，如果级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

收敛，则根据亚伯耳定理可知，函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在点 $x = R$ 处左连续．因此，

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

其次，我们证明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

发散是不可能的．采用反证法，引出矛盾．事实上，根据 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = +\infty$ 知，对于任取的正整数 $A > S$，总存在正整数 N，使有

$$\sum_{n=0}^{N} a_n R^n > A > S.$$

由于

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{4n+1}}{4n+1} (|x| \leqslant 1).$$

2903. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

解 $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$

$$= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \right] dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} (|x| < +\infty).$$

2904. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$

解 $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \right] dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \quad (|x| \leqslant 1).$$

2905. $\int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)}$(写出四项).

解 令 $0 < |t| < 1$,注意

$$\frac{1}{t}\ln(1+t) = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}$$

$$= 1 - \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{t^m}{m+1}$$

$$= 1 - \xi,$$

其中 $\xi = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{t^m}{m+1}$. 容易判断交错级数

$$\xi = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{t^m}{m+1}$$

当 $|t| < 1$ 时是收敛的,且其和有性质 $|\xi| < 1$. 于是有

$$\frac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}=\frac{1}{1-\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n.$$

因而当 $|x|<1$ 时，得

$$\int_0^x \frac{tdt}{\ln(1+t)}=\int_0^x \frac{dt}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$$

$$=\int_0^x \frac{dt}{1-\xi}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n\right)dt.$$

为求四项近似，取到 t^3 为止足够，有

$$\xi^0=1,$$

$$\xi^1=\frac{t}{2}-\frac{t^2}{3}+\frac{t^3}{4}-\cdots,$$

$$\xi^2=\frac{t^2}{4}-\frac{t^3}{3}+\cdots,$$

$$\xi^3=\frac{t^3}{8}-\cdots,$$

…………

于是，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n=1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{12}+\frac{t^3}{24}-\cdots.$$

从而当 $|x|<1$ 时，得原积分的前四项为

$$\int_0^x \frac{tdt}{\ln(1+t)}$$

$$=\int_0^x\left(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{12}+\frac{t^3}{24}\right)dt+O(x^5)$$

$$=x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{36}+\frac{x^4}{96}+O(x^5).$$

运用逐项微分法计算下列级数的和：

2906. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots.$

解 设 $F(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$. 在收敛域 $|x|<1$ 内逐项微分之，得

$$F'(x)=1+x^2+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x^2}.$$

注意 $F(0)=0$，即得

$$F(x)=\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad(|x|<1).$$

于是，当 $|x|<1$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

2907. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$.

解 设 $F(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$. 在收敛域 $|x|\leqslant1$ 内逐项微分之，得

$$F'(x)=1-x^2+x^4-\cdots=\frac{1}{1+x^2}.$$

注意 $F(0)=0$，即得

$$F(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arc\,tg}x.$$

于是，当 $|x|\leqslant1$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\operatorname{arc\,tg}x.$$

2908. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$.

解 设 $F(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$. 在收敛域 $|x|<+\infty$ 内逐项微分之，得

$$F'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots.$$

于是有

$$F(x)-F'(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^{-x}, \qquad (1)$$

$$F(x)+F'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^{x}. \qquad (2)$$

将(1)式和(2)式相加，最后得

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{e^{3}+e^{-x}}{2}=\text{ch}x$$

$$(|x|<+\infty).$$

2909. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots$.

解 设 $F(x)=\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots$. 在收敛域 $|x|\leqslant 1$ 内逐项微分之，得

$$F'(x)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}+\cdots$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}[-\ln(1-x)]$$

$$(0<|x|<1).$$

注意 $F(0)=0$，即得

$$F(x)=\int_0^x F'(t)dt$$

$$=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x) \quad (0<|x|<1).$$

当 $x=0$ 时，级数收敛于零. 当 $x=1$ 时，级数收敛于 1. 当 $x=-1$ 时，级数收敛于 $1-2\ln 2$. 事实上，

$$-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$$

$$=-\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

$$=2\cdot\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots\right)+1$$

$$=1-2\ln 2.$$

于是，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$$

$$=\begin{cases}1+\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x), & \text{当 } 0<|x|<1;\\ 0, & \text{当 } x=0;\\ 1-2\ln 2, & \text{当 } x=-1;\\ 1, & \text{当 } x=1.\end{cases}$$

2910. $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots.$

解 设 $F(x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots.$

在收敛域内逐项微分之，得

$$F'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}2x+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}3x^2+\cdots.$$

以 $1-x$ 乘上式两端，得

$$(1-x)F'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}F(x),$$

即

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{1}{2(1-x)}.$$

积分得

$$\ln F(x)=\ln\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

或

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x}}(|x|<1).$$

当 $x=1$ 时，应用拉阿伯判别法：

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{n}{2n+1}\to\frac{1}{2}<1,$$

因此，级数是发散的．

当 $x=-1$ 时，利用2689题的结果知，级数条件收敛．于是，

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-x}}(-1\leqslant x<1).$$

运用逐项积分法计算下列级数的和：

2911．$x+2x^2+3x^3+\cdots$.

解 设 $F(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots$. 在收敛域内逐项积分之，得

$$\int_0^x F(t)dt=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)x^3+\left(1-\frac{1}{4}\right)x^4+\cdots$$

$$=(x^2+x^3+x^4+\cdots)-(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots)$$

$$=x(1+x+x^2+\cdots)-\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)$$

$$=\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)\quad(|x|<1).$$

于是，

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\left(\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)\right)'$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2} \qquad (|x|<1).$$

当 $|x|=1$ 时，由于级数的通项不趋于零，故它是发散的．

2912. $x-4x^2+9x^3-16x^4+\cdots$.

解 设 $F(x)=x-4x^2+9x^3-16x^4+\cdots$. 在收敛域内逐项积分之，得

$$\int_0^x F(t)dt=\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{9}{4}x^4-\frac{16}{5}x^5+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\left(1+\frac{1}{3}\right)x^3+\left(2+\frac{1}{4}\right)x^4$$

$$-(3+\frac{1}{5})x^5+\cdots$$

$$=x+(-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\cdots)$$

$$-x^3(1-2x+3x^2-\cdots)$$

$$=x-\ln(1+x)-x^3(x-x^2+x^3-\cdots)'$$

$$=x-\ln(1+x)-x^3\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)'$$

$$=x-\ln(1+x)-\frac{x^3}{(1+x)^2} \ (|x|<1).$$

于是，

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$$

$$=\left[x-\ln(1+x)-\frac{x^3}{(1+x)^2}\right]'$$

$$=\frac{x(1-x)}{(1+x)^3} \quad (|x|<1).$$

当 $|x|=1$ 时．级数显然发散．

2913. $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\cdots$.

解 设$F(x)=1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\cdots$. 在收敛域内逐项积分之，得

$$\int_0^x F(t)dt=x^2+2x^3+3x^4+\cdots$$

$$=x(x+2x^2+3x^3+\cdots)$$

$$=x\cdot\frac{x}{(1-x)^2}{}^{*)}=\frac{x^2}{(1-x)^2}(|x|<1).$$

于是，

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)x^n=\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)'$$

$$=\frac{2x}{(1-x)^3}\quad(|x|<1).$$

当 $|x|=1$ 时，级数显然发散.

*） 利用 2911 题的结果.

2914. 证明：级数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

满足方程

$$y^{(4)}=y.$$

证 所给级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$. 在收敛域内逐项微分之，得

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!},\quad y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!},$$

$$y'''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!},\quad y^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}.$$

于是，

$$y^{(4)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=y.$$

2915. 证明：级数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$$

满足方程

$$xy''+y'-y=0.$$

证 所给级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$. 在收敛域内逐项微分之,得

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!(n+1)!}$$

$$y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!(n+1)!}.$$

于是,

$$xy''+y'$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)!(n+1)!}+\frac{1}{n!(n+1)!}\right]x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=y,$$

从而得

$$xy''+y'-y=0.$$

求在复数域内$(z=x+iy)$下列幂级数的收敛半径及收敛圆:

2916. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-i)^n}{n\cdot 2^n}$.

解 记$c_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=2,$$

故收敛半径$R=2$;收敛圆为

$$|z-1-i|<2 \quad 即 \quad (x-1)^2+(y-1)^2<2^2.$$

$$|z|<1 \quad \text{即}\ x^2+y^2<1.$$

2920. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(1-e^{i\alpha})^n}$.

解 记 $c_n=\dfrac{1}{n(1-e^{i\alpha})^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}(1-e^{i\alpha})\right|$$

$$=|1-(\cos\alpha+i\sin\alpha)|=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

$$=\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|,$$

故收敛半径 $R=\left|2\sin\dfrac{\alpha}{2}\right|$；收敛圆为

$$|z-e^{i\alpha}|<\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|,$$

即

$$(x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2<4\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

2921. 利用牛顿的二项公式，近似地计算 $\sqrt[3]{9}$，并且估计当只取展开式的头三项时的误差.

解 $\sqrt[3]{9}=2\left(1+\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$=2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{8^3}-\cdots\right).$$

当只取展开式的头三项时，误差

$$|R_3|<2\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{2\cdot5}{3^3}\cdot\frac{1}{8^3}=\frac{10}{3^4\cdot8^3}<0.001.$$

计算头三项，每一项取到小数点后四位，即得

$$\sqrt[3]{9}\doteq2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{2}{3^2}\cdot\frac{1}{8^2}\right)$$

$\doteq 2.080.$

2922. 近似地计算：(а) $\mathrm{arctg}1.2$；(б) ${}^{+}\sqrt[10]{1000}$；

(в) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$；(г) $\ln 1.25$，并估计对应的误差．

解 (а)利用

$$\mathrm{arctg}x+\mathrm{arctg}y=\mathrm{arctg}\,\frac{x+y}{1-xy},$$

并设 $x=1$，$\dfrac{x+y}{1-xy}=1.2$，即得 $y=\dfrac{1}{11}$．于是，

$$\mathrm{arctg}1.2=\mathrm{arctg}1+\mathrm{arctg}\,\frac{1}{11}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{11}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{11}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{11}\right)^5-\cdots.$$

若取头三项*)，则其误差

$$|R_3|<\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{11}\right)^5<10^{-5}.$$

计算头三项，每一项取到小数点后六位，即得

$$\mathrm{arctg}1.2\doteq 0.87606.$$

(б) $\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{1024-24}=2(1-0.024)^{\frac{1}{10}}$

$$=2\left[1-\frac{0.024}{10}+\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)}{2!}(0.024)^2-\cdots\right].$$

若取头三项，注意到上述级数的各项递减，故其误差

$$|R_3|<2\cdot\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)\left(\frac{1}{10}-2\right)}{3!}$$

$$\cdot(0.024)^3[1+0.024+(0.024)^2+\cdots]$$

$$<10^{-6}.$$

计算头三项，每一项取到小数点后七位，即得

$$\sqrt[10]{1000}\doteq 1.995263.$$

(в) $\frac{1}{\sqrt{e}}=e^{-\frac{1}{2}}$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^4}-\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{2^6}-\cdots.$$

若取头七项,则其误差

$$|R_7|<\frac{1}{7!\cdot 2^7}<10^{-5}.$$

计算头七项,每一项取到小数点后六位,即得

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\doteq 0.60653.$$

(г) $\ln 1.25=\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3}-\frac{1}{4\cdot 4^4}+\frac{1}{5\cdot 4^5}-\frac{1}{6\cdot 4^6}+\cdots.$$

若取头六项,则其误差

$$|R_6|<\frac{1}{7\cdot 4^7}<10^{-5}.$$

计算头六项,每一项取到小数点后六位,即得

$$\ln 1.25\doteq 0.22314.$$

*) 本题并未注明取多少项以估计误差,因此,我们可任意选取. 各小题均类似处理.

利用适当的展开式,计算下列函数准确到所指出的程度的值.

2923. $\sin 18^\circ$,准确到 10^{-5}.

解 $\sin 18^\circ=\sin\frac{\pi}{10}$

$$=\frac{\pi}{10}-\frac{\pi^3}{3!\,10^3}+\frac{\pi^5}{5!\,10^5}-\cdots.$$

上述级数为交错级数，若取头 n 项，则其误差

$$\Delta<\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}.$$

欲使 $\Delta<10^{-5}$，只要

$$\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}<10^{-5},$$

以 $n=3$ 代入上式即满足（$n=2$ 达不到要求的准确程度）. 计算头三项，每一项取到小数点后六位，即得

$$\sin 18^\circ \doteq 0.30902.$$

2924. $\cos 1^\circ$，准确到 10^{-5}.

解 $\cos 1^\circ=\cos\frac{\pi}{180}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^4-\cdots.$

取 $n=2$，即可保证 $\Delta<\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^4<10^{-6}$. 计算得

$$\cos 1^\circ \doteq 0.999848.$$

2925. $\operatorname{tg} 9^\circ$，准确到 10^{-3}.

解 $\operatorname{tg} 9^\circ=\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}$

$$=\frac{\pi}{20}+\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3+\frac{2}{15}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5+\cdots{}^{*)}.$$

若取头二项，考虑到上述级数的各项递减，则其误差

$$\Delta<\frac{2}{15}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5\left[1+\left(\frac{\pi}{20}\right)^2+\left(\frac{\pi}{20}\right)^4+\cdots\right]<10^{-3}.$$

取两项计算，每一项取到小数点后四位，计算得

$$\operatorname{tg} 9^\circ \doteq 0.158.$$

*）利用 2891 题的结果.

2926. e，准确到 10^{-6}.

解 $e=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}$.

若取 $1+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}$ 作为 e 的近似值，则其误差

$$\Delta=\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m!}=\frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdots m}$$

$$<\frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{m-n}}=\frac{1}{n!n}.$$

欲 $\Delta<10^{-6}$，只要 $\frac{1}{n!n}<10^{-6}$，也即只要

$$n!n>10^{6}.$$

取 $n=9$ 即可．于是，当每项取到小数点后七位，即得

$$e\doteq1+\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n!}\doteq2.718282.$$

2927. $\ln1.2$，准确到 10^{-4}.

解 $\ln1.2=\ln(1+0.2)$

$$=0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4+\cdots.$$

若取头 n 项，则其误差

$$\Delta<\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}.$$

欲 $\Delta<10^{-4}$，只要 $\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}<10^{-4}$．取 $n=4$ 即可保证

$$\Delta<\frac{1}{5}(0.2)^5<10^{-4}.$$

于是，当每项取到小数点后五位，即得

$$\ln1.2\doteq0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4$$

$$\doteq0.1823.$$

2928. 由等式

$$\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}$$

求数 π，准确到 10^{-4}.

解 $\pi=6\arcsin\frac{1}{2}$

$$=6\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\right.$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{9}$$

$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\cdot\frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\cdots\right].$$

若取头六项，考虑到上述级数的各项递减，则其误差

$$\Delta<6\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10.12}$$

$$\cdot\frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+\cdots\right]$$

$$<10^{-4}.$$

取头六项计算，每一项取到小数点后五位，即得

$$\pi\doteq3.1416.$$

2929. 利用恒等式

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$$

计算数 π，准确到 0.001.

解 按题设，有

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right).$$

注意到等式右端的两个级数都是莱布尼兹型的，所以在被加数与加数中，弃去了的未写出的项的校正数分别为

$$0<\Delta_1<\frac{4}{11\cdot 2^{11}}<0.0002,$$

$$0<\Delta_2<\frac{4}{9\cdot 3^9}<0.00002,$$

于是，总误差 $\Delta\leqslant\Delta_1+\Delta_2<0.001$. 计算保留下来的项近似到小数点后四位（末位由四舍五入而得），即可保证达到所需误差．列成下表（括号中的正、负号指示校正数的符号）：

正　项

$$\frac{4}{2}=2.0000$$

$$\frac{4}{5\cdot 2^5}=0.0250$$

$$\frac{4}{9\cdot 2^9}=0.0009(-)$$

$$\frac{4}{3}=1.3333(+)$$

$$+)\ \frac{4}{5\cdot 3^5}=0.0033(-)$$

$$3.3625$$

$$0.2209$$

$$3.1416$$

负　项

$$\frac{4}{3\cdot 2^3}=0.1667(-)$$

$$\frac{4}{7\cdot 2^7}=0.0045(-)$$

$$\frac{4}{3\cdot 3^3}=0.0494(-)$$

$$+)\ \frac{4}{7\cdot 3^7}=0.0003(-)$$

$$0.2209$$

于是，

$$3.1415<\pi<3.1420.$$

因此，取 $\pi\doteq 3.142$ 即可准确到 0.001.

2930. 利用恒等式

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$$

求数 π，准确到 10^{-9}.

解 在此，我们证明一下 2929 题及本题中的恒等式．如果，注意到反正切函数的加法公式

$$\begin{aligned}&\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}y\\&=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}\qquad\left(|x+y|<\frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

并选取任何两个满足关系式

$$\frac{x+y}{1-xy}=1\quad\text{或}\quad(1+x)(1+y)=2$$

的真分数作为 x，y，就有

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}y.$$

例如，令 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{3}$，即得

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}.$$

这就是 2929 题中所出现的恒等式．

如果令 $x=\frac{1}{5}$，$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}=\alpha$，则 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$，

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg}4\alpha=\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{120}{119}\doteq 1.$$

可见，$4\alpha\doteq\frac{\pi}{4}$.

令 $\beta=4\alpha-\frac{\pi}{4}$，则 $\mathrm{tg}\beta=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239}$.

于是，

$$\beta=\mathrm{arc\ tg}\ \frac{1}{239}.$$

由此，得

$$\frac{\pi}{4}=4\alpha-\beta=4\mathrm{arc\ tg}\ \frac{1}{5}-\mathrm{arc\ tg}\ \frac{1}{239}$$

或

$$\begin{aligned}\pi &=16\mathrm{arc\ tg}\ \frac{1}{5}-4\mathrm{arc\ tg}\ \frac{1}{239}\\ &=16\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9}-\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{5^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{5^{13}}-\cdots\right\}\\ &\quad-4\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3}+\cdots\right\}.\end{aligned}$$

这就是本题中所出现的恒等式，它就是著名的马信(J. Machin)公式．

我们要依靠此式计算 π，准确到 10^{-9}，只要上面已写出的那些项就够了．事实上，这两个级数都是莱布尼兹型的，所以在被减数与减数中，弃去了的未写出的项的校正数分别为

$$0<\Delta_1<\frac{16}{15\cdot 15^{15}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^9}$$

与

$$0<\Delta_2<\frac{4}{5\cdot 239^5}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^9}$$

于是，总误差

$$\Delta\leqslant\Delta 1+\Delta_2<\frac{1}{10^9}.$$

取 $\pi \doteq 3.141592653\cdots$ 所有写出的数字都是真确的。

2931. 利用公式

$$\ln(n+1)=\ln n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\cdots\right]$$

求 ln2 和 ln3，准确到 10^{-5}.

解 当 $n=1$ 时，

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\cdots\right).$$

如取已写出的那些项计算 ln2，即知

$$0<\Delta<2\left(\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\cdots\right)$$

$$<\frac{2}{11\cdot 3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}<\frac{2}{10^6}.$$

计算到小数点后六位，并作出下表：

$$\frac{2}{3}=0.666667(-)$$

$$\frac{2}{3\cdot 3^3}=0.024691(+)$$

$$\frac{2}{5\cdot 3^5}=0.001646(+)$$

$$\frac{2}{7\cdot 3^7}=0.000131(-)$$

$$+)\quad \frac{2}{9\cdot 3^9}=0.000011(+)$$

$$0.693146$$

$\therefore\quad 0.693146<\ln 2<0.693148.$

于是，$\ln 2=0.69314\cdots$，并且所有写出来的五位数字都是真确的．如果，将第六位四舍五入，即得 $\ln 2\doteq 0.69315$，准确到 10^{-5}.

令 $n=2$，即得

$$\ln 3=\ln 2+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{7\cdot 5^7}+\frac{1}{9\cdot 5^9}\right)+\cdots. \qquad (1)$$

与 ln2 一样，取写出的诸项，计算到小数点后六位，并作出下表：

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5}&=0.400000\\
\frac{2}{3\cdot 5^3}&=0.005333(+)\\
\frac{2}{5\cdot 5^5}&=0.000128\\
\frac{2}{7\cdot 5^7}&=0.000004(-)\\
+)\ \frac{2}{9\cdot 5^9}&=0.000000(+)\\
\hline
&\ \ 0.405465
\end{aligned}$$

于是，(1)式右端的级数的和为 0.40546…，并且写出来的五位数字都是真确的，如将第六位四舍五入，也得 0.40547.

最后，由(1)式得

$$\ln 3 \doteq 0.693146\cdots+0.405465\cdots=1.09861\cdots,$$

并且所有写出来的数字都是真确的·

如果将第六位四舍五入，即得

$$\ln 3 \doteq 0.69315+0.40546=1.09861,$$

它准确到 10^{-5}.

2932. 利用被积函数展成级数的展开式以计算下列积分之值，并准确到 0.001：

(a) $\int_0^1 e-x^2dx$； (б) $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx$；

(в) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$；　　(г) $\int_0^1 \cos x^2 dx$；

(д) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x}dx$；　　(е) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$；

(ж) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$；　　(з) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$；

(и) $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$；

(к) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}dx$；　　(л) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x}dx$；

(м) $\int_0^1 x^x dx$.

解　(a) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

$$=\int_0^1 \left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots\right)dx$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\cdots,$$

如取写出来的诸项，计算到小数点后四位，并作出下表：

$$\begin{array}{rr}
1 & =1.0000 \\
\dfrac{1}{5\cdot 2!} & =0.1000 \\
+)\quad \dfrac{1}{9\cdot 4!} & =0.0046(+) \\
\hline
 & 1.1046 \\
-) & 0.3571 \\
\hline
 & 0.7475
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
\dfrac{1}{3} & =0.3333(+) \\
+)\quad \dfrac{1}{7\cdot 3!} & =0.0238(+) \\
\hline
 & 0.3571
\end{array}$$

于是，

$$0.7473<\int_0^1 e^{-x^2}dx<0.7476,$$

即有$\int_0^1 e^{-x^2}dx \doteq 0.747$,,准确到 0.001,并且所有写出来的数字都是真确的.

(б)$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx$

$$=\int_2^4\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!\ x^2}+\frac{1}{3!\ x^3}+\frac{1}{4!\ x^2}+\cdots\right)dx$$

$$=2+\ln 2+\frac{1}{2!\ \cdot 4}+\frac{3}{3!\ \cdot 32}+\frac{7}{4!\ \cdot 192}+\cdots$$

$$=2+0.\overset{(+)}{6}931+0.1250+0.015\overset{(+)}{6}+0.001\overset{(+)}{5}+\cdots$$

$$\doteq 2.8352 \quad (0<\Delta<0.001).$$

于是，

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx \doteq 2.835,$$

准确到 0.001.

(в)$\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$

$$=\int_0^2 \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)dx$$

$$=2-\frac{2^3}{3\cdot 3!}+\frac{2^5}{5\cdot 5!}-\frac{2^7}{7\cdot 7!}+\cdots,$$

如取写出的诸项计算积分值，则其误差 $0<\Delta<\frac{2^9}{9\cdot 9!}<\frac{1}{10^3}$. 列下表::

$$2 \quad =2.0000$$

$$
\begin{array}{r}
+)\dfrac{2^5}{5\cdot 5!}=0.0533(+) \\
\hline
2.0533 \\
-)\quad 0.4480 \\
\hline
1.6053
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\dfrac{2^3}{3\cdot 3!}=0.4444(+) \\
+)\dfrac{2^7}{7\cdot 7!}=0.0036(+) \\
\hline
0.4480
\end{array}
$$

于是,

$$1.6051<\int_0^2\frac{\sin x}{x}dx<1.6054,$$

即

$$\int_0^2\frac{\sin x}{x}dx\doteq 1.605,$$

并且所有写出的数字都是真确的.

(r) $\int_0^1 \cos x^2 dx$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots\right)dx$$

$$=1-\frac{1}{5\cdot 2!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\cdots,$$

如取写出的诸项计算积分值,则其误差 $0<\Delta<\frac{1}{13\cdot 6!}<\frac{1}{10^3}$. 列下表:

$$
\begin{array}{r}
1\quad=1.0000 \\
+)\qquad \dfrac{1}{9.4}=0.0046(+) \\
\hline
1.0046 \\
-)\qquad 0.1000 \\
\hline
0.9046
\end{array}
$$

$$\frac{1}{5\cdot 2!}=0.1000$$

$$\frac{1}{5\cdot 2!}=0.1000$$

所以

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \doteq 0.9046.$$

于是，

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \doteq 0.905,$$

准确到 0.001.

(д) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx$

$$=\int_0^1 \frac{1}{x}\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)dx$$

$$=1+\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}+\cdots,$$

如取写出的诸项计算积分值，则其误差

$$0<\Delta<\frac{1}{7\cdot 7!}\left(1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^4}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{7\cdot 7!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7^2}}<10^{-3}.$$

列下表：

$$
\begin{array}{rr}
 & 1=1.0000 \\
 & \frac{1}{3\cdot 3!}=0.0556(-) \\
+) & \frac{1}{5\cdot 5!}=0.0017(+) \\
\hline
 & 1.0573
\end{array}
$$

于是，

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx \doteq 1.057,$$