1. <u>Матриця лінійного перетворення</u>

Припустимо $\mathcal{A}$ – лін. перетв. скінч. вим. пр. V над п. F, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – деякий фікс. базис пр. V. Тоді вектори $\mathcal{A}(a_1), \mathcal{A}(a_2), \dots, \mathcal{A}(a_n)$ лінійно виражаються через базис $\Rightarrow$

$$\mathcal{A}(a_1) = \alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + \dots + \alpha_{n1} a_n,$$
$$\mathcal{A}(a_2) = \alpha_{12} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \dots + \alpha_{n2} a_n,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\mathcal{A}(a_n) = \alpha_{1n} a_1 + \alpha_{2n} a_2 + \dots + \alpha_{nn} a_n.$$

Складемо матрицю A, яка наз. матрицею лін. перетворення $\mathcal{A}$ в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$, таким чином:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб виписати матрицю лін. перетв. в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$:

1) знаходимо образи базисних векторів $\mathcal{A}(a_1), \mathcal{A}(a_2), \dots, \mathcal{A}(a_n)$, тобто їх координати в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$;
2) ці координати виписуємо в стовпчики матриці:
в 1-ий стовпчик – координати образу першого базисного вектора,
в 2-ий стовпчик – координати образу 2-го базисного вектора,
– – – – – – – – і т.д.

<u>Властивості матриці лін. перетворення.</u>

1) Лінійні перетв. $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ скінч. вим. век. пр. V рівні $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ в деякому базисі їм відповідають однакові матриці.
2) Нехай V – скінч. вим. век. пр. над полем F, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – деякий базис V, $C = (\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ – деяка кв. матр. з елементами з поля F.
Тоді $\exists!$ лін. перетв. $\mathcal{A}$ век. пр. V, якому в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ відповідає матриця C.

<u>Заув.</u> Припустимо V – скінч. вим. пр. над полем F, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – деякий базис V. Позначимо $\mathcal{B}$ – множина всіх лінійних перетв. пр. V, T – множина всіх кв. матр. порядку n з елементами $\in F$. Тоді при фікс. базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ між множинами $\mathcal{B}$ і T існує взаємно однозначна відповідність.

3) Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ – базис век. пр. V над полем F,

3) Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ – базис ...

$\mathcal{A}: V \to V$ – лін. перетв., якому в цьому базисі відповідає матр. $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$.

Припустимо, вектори $a_1, a_2, \dots, a_n$ і $\mathcal{A}(a_1), \mathcal{A}(a_2), \dots, \mathcal{A}(a_n)$ задані координатами в деякому іншому базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$ простору V, тобто

$a_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{n1})$, $\quad \mathcal{A}(a_1) = (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \dots, \gamma_{n1})$,

$a_2 = (\lambda_{12}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{n2})$, $\quad \mathcal{A}(a_2) = (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{n2})$,

$\dots$

$a_n = (\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \dots, \lambda_{nn})$; $\quad \mathcal{A}(a_n) = (\gamma_{1n}, \gamma_{2n}, \dots, \gamma_{nn})$.

Складемо матриці

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(a_1) & \mathcal{A}(a_2) & \dots & \mathcal{A}(a_n) \end{pmatrix}.$$

Тоді $C = B \cdot A$.

2. Ортогональні оператори на прямій

Нехай V^1 – евклідів простір розмірності 1. Будемо називати його прямою. e_1 – базисний вектор V^1, $\mathcal{A}$ – ортогональний оператор на V^1.

Тоді $\mathcal{A}(e_1) = \alpha e_1$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Оскільки ортогональний оператор зберігає довжину векторів, то

$$|e_1| = |\mathcal{A}(e_1)| = |\alpha e_1| = \sqrt{(\alpha e_1, \alpha e_1)} = \sqrt{\alpha^2 (e_1, e_1)} = |\alpha| \sqrt{(e_1, e_1)} = |\alpha| |e_1|.$$

Таким чином, $|\alpha| = 1$, $\alpha = \pm 1$.

Розглянемо 2 випадки:

1) $\alpha = 1 \Rightarrow \mathcal{A}(e_1) = e_1$.

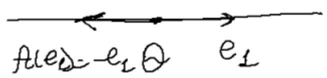
Беремо $x \in V^1$. Тоді $x = \beta e_1$ для деякого $\beta \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\beta e_1) = \beta \mathcal{A}(e_1) = \beta e_1 = x \Rightarrow$

$\mathcal{A}$ – тотожний оператор.

2) $\alpha = -1 \Rightarrow \mathcal{A}(e_1) = -e_1$

і для $x = \beta e_1 \in V^1$: $\mathcal{A}(x) = \beta \mathcal{A}(e_1) = -\beta e_1 = -x$



Таким чином, оператор $\mathcal{A}$ діє як дзеркальне відображення прямої відносно Θ-вектора.

Можна зробити висновок: на прямій $\exists$ лише 2 ортогональні оператори: 1 – тотожній, 2 – дзеркальне відображення прямої відносно Θ-вектора.

Ортогональні оператори на площині

Нехай V^2 – евкл. пр. розмірності 2. Будемо називати його площиною. e_1, e_2 – ортонормований базис, $\mathcal{A}$ – ортогональний оператор на V^2.

Припустимо в базисі e_1, e_2 оператору $\mathcal{A}$ відпов. матр. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Оск. опер. ортогональний, а базис ортонормований, то матр. A – ортогональна $\Rightarrow \det A = \pm 1$.

Розглянемо 2 випадки:

1) $\det A = -1$. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -1$.

Випишемо хар. многочлен опер. $\mathcal{A}$:

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{vmatrix} = (a-t)(d-t) - bc = t^2 - (a+d)t + ad - bc =$$
$$= t^2 - (a+d)t - 1.$$

Знайдемо корені хар. мног.:

$t^2 - (a+d)t - 1 = 0$

$D = (a+d)^2 + 4 > 0$

$\Rightarrow$ Хар. мног. має 2 різні дійсні корені $t_1 = 1, t_2 = -1$ (бо $|t_1| = |t_2| = 1$).

Виберемо відповідні власні вектори одиничної довжини.

Нех. вл. ч. $t_1 = 1$ відпов. вл. вектор a_1, а вл. ч. $t_2 = -1$ відпов. вл. вектор a_2, причому $|a_1| = |a_2| = 1$.

Власні век. a_1, a_2 – ортогональні, як вл. век., що відпов. різним власним числам.

Тому a_1, a_2 утвор. ортонормований базис V^2.

$A(a_1) = 1\cdot a_1 + 0\cdot a_2$

$A(a_2) = 0\cdot a_1 + (-1) a_2$.

Тобто в базисі a_1, a_2 оператору A відпов. матр. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Припустимо $x \in V^2$ – дов. вектор, який в б. a_1, a_2 має коорд. $x = (\alpha_1, \alpha_2)$. Тоді $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, $A(x) = \alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2$, тобто вектор $A(x)$ в б. a_1, a_2 має коорд. $A(x) = (\alpha_1, -\alpha_2)$.

Таким чином, опер. A є відбиттям площини відносно прямої, що проходить через нуль-вектор, спрямовуючим вектором прямої є век. a_1.

2) $\det A = 1$

Оск. A – ортогональна матр., то $A^T = A^{-1}$

$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\Rightarrow d = a$, $b = -c$ і $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$

При цьому $\det A = a^2 + c^2 = 1$. Можна вважати, що $a = \cos\varphi$, $c = \sin\varphi$ для деякого кута φ, тобто

$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ – матриця повороту.

Ортогональний лін. опер. на площині є оператором одного з двох типів: 1) відбиття площини відносно деякої прямої, що проходить через O;
2) поворот площини на деякий кут.

Теорема про будову ортогонального оператора

Теор. Нехай A – ортогональний оператор на скінченновимірному евклідовому просторі V. Тоді для пр. V $\exists$ розклад в пряму суму підпросторів $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$ такий, що виконуються умови:

1) кожен підпростір L_i інваріантний відносно A;
2) розмірність кожного підпростору $\dim L_i = 1$ або 2;
3) якщо $\dim L_i = 1$, то опер. A діє на L_i як тотожній, або як дзеркальне відображення;

4) якщо $\dim L_i = 2$, то опер. $\mathcal{A}$ діє на L_i як поворот площини на деякий кут;

5) $\forall i = \overline{1,k}$: $L_i^{\perp} = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_{i-1} \oplus L_{i+1} \oplus \ldots \oplus L_k$.

Теорема про будову ортогональної матриці

Теорема. Для $\forall$ ортогональної матриці A $\exists$ ортогональна матриця F така, що $B = F^T A F$ має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{pmatrix},$$

де всі клітинки B_i порядку 1 або 2.

Якщо клітинка порядку 1, то вона має вигляд (1) або (-1).

Якщо B_i порядку 2, то $B_i = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ для деякого φ.

3. $a_1 = (2;3;4)$ $a_2 = (1;2;2)$ $a_3 = (-1;-1;-1)$

$b_1 = (-11;3;9)$ $b_2 = (1;1;-1)$ $b_3 = (18;-6;-14)$

$$(a_1|a_2|a_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{rank} = 3.$$

rank $= 3 \Rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$ – базис простору, тоді, за лемою, $\exists!$ лінійне перетворення $\varphi(a_i) = b_i$, $i = \overline{1,3}$.

$$T_{e \to a} = (a_1|a_2|a_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad T_{a \to e} = T^{-1}_{e \to a} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$T_{a \to e} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} e_1 &= -a_2 - 2a_3 \\ e_2 &= -a_1 + 2a_2 \\ e_3 &= a_1 - a_2 + a_3 \end{aligned}$$

$\varphi(e_1) = \varphi(-a_2 - 2a_3) = -\varphi(a_2) - 2\varphi(a_3) = -b_2 - 2b_3 =$

$= (-1;-1;1) + (-36;12;28) = (-37;11;29)$

$\varphi(e_2) = -b_1 + 2b_2 = (11;-3;-9) + (2;2;-2) = (13;-1;-11)$

$\varphi(e_3) = b_1 - b_2 + b_3 = (-11;3;9) + (-1;-1;1) + (18;-6;-14) = (6;-4;-4)$

$$[\varphi_e] = \begin{pmatrix} -37 & 13 & 6 \\ 11 & -1 & -4 \\ 29 & -11 & -4 \end{pmatrix}$$

4. $a_1 = (1;2;-1;1)$ $a_2 = (-5;-5;4;-2)$ $a_3 = (-3;6;2;0)$ $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

$b_1 = a_1 (1;2;-1;1)$

$b_2 = a_2 - \alpha_{21} b_1$ $\alpha_{21} = \frac{(a_2 b_1)}{(b_1 b_1)} = \frac{-5-10-4-2}{1+4+1+1} = -3.$ $b_2 = a_2 + 3b_1 =$

$= (-5;-5;4;-2) + (3;6;-3;3) = (-2;1;1;1)$

$b_3 = a_3 - \alpha_{31} b_1 - \alpha_{32} b_2$ $\alpha_{31} = \frac{(a_3 b_1)}{(b_1 b_1)} = \frac{-3+12-2+0}{7} = 1.$

$b_3 = a_3 - b_1 - 2b_2 =$ $\alpha_{32} = \frac{(a_3 b_2)}{(b_2 b_2)} = \frac{6+6+2+0}{4+1+1+1} = 2.$

$= (-3;6;2;0) - (1;2;-1;1) - (-4;2;2;2) = (0;2;1;-3).$ $B_{орт} = \{b_1, b_2, b_3\}.$