1.

1.18. Поняття ядра та образу лінійного перетворення.

Нехай $\mathscr{A}$ – лінійне перетворення векторного простору V над полем F.

Ядром $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ лінійного перетворення $\mathscr{A}$ називається множина

$$\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \{x \in V \mid \mathscr{A}(x) = \theta\}.$$

Ядро лінійного перетворення є підпростором.

Дефектом $def\ (\mathscr{A})$ лінійного перетворення $\mathscr{A}$ скінченновимірного простору називається розмірність його ядра:

$$def\ (\mathscr{A}) = \dim \operatorname{Ker}\mathscr{A}.$$

Лінійне перетворення $\mathscr{A}$ називається ***невиродженим***, якщо

$$\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \{\theta\}.$$

Образом $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ лінійного перетворення $\mathscr{A}$ називається множина

$$\operatorname{Im}\mathscr{A} = \{\mathscr{A}(x) \mid x \in V\}.$$

Образ лінійного перетворення є підпростором.

Рангом лінійного перетворення $\mathscr{A}$ скінченновимірного простору V називається розмірність образу лінійного перетворення:

$$r(\mathscr{A}) = \dim \operatorname{Im}\mathscr{A}.$$

Теорема (про розмірність ядра та образу лінійного перетворення).

Нехай $\mathscr{A}$ – лінійне перетворення векторного простору V, $\dim V = n$, тоді $\dim \operatorname{Ker}\mathscr{A} + \dim \operatorname{Im}\mathscr{A} = n$.

З цієї теореми та наведених вище означень випливає, що

$$def\ (\mathscr{A}) + r(\mathscr{A}) = \dim V = n.$$

2.

Лінійні функції та лінійні форми

Нехай V – векторний простір над полем F.

Відображення $f: V \to F$ наз. лінійною функцією на просторі V, якщо виконуються умови:

1. $\forall a, b \in V: \ f(a+b) = f(a) + f(b)$
2. $\forall a \in V\ \forall \alpha \in F: \ f(\alpha a) = \alpha f(a)$

або

$$\forall a, b \in V\ \forall \alpha, \beta \in F: \ f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b).$$

Припустимо V – скінченновимірний простір, $a_1, a_2, .., a_n$ – деякий фіксований базис V, $x \in V$ – довільний вектор, який

в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ має координати $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, тобто
$x = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n$.

Тоді $f(x) = f(x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n) = f(a_1)x_1 + f(a_2)x_2 + \dots + f(a_n)x_n$.

Позначимо $\alpha_1 = f(a_1)$, $\alpha_2 = f(a_2), \dots, \alpha_n = f(a_n)$.

Тоді $f(x) = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n$.

Сума такого вигляду називається лінійною формою від змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Таким чином, $\forall$ лінійна функція на скінченновимірному векторному просторі при фіксованому базисі задається деякою лінійною формою. Замість розглядати часто поняття лінійної функції застосовують поняття лінійної форми. При цьому, оскільки при різних фіксованих базисах лінійна функція задається різними лінійними формами, то кажуть про вигляд лінійної форми в тому чи іншому базисі.

Розглянемо множину всіх лінійних функцій на даному векторному просторі V над полем F. З означення лінійної функції випливає, що для даних лінійних функцій f_1, f_2 їх сума f_1+f_2 також є лінійною функцією на просторі V. Аналогічно, якщо f - лінійна функція, $\alpha \in F$, то αf є також лінійною функцією.

Таким чином, на множині всіх лінійних функцій на просторі V введено 2 операції:
1) додавання функцій;
2) множення функцій на скаляри з поля F.

Ці операції задовольняють аксіомам векторного простору над полем F.

Таким чином, множина всіх лінійних функцій на векторному просторі V над полем F утворює векторний простір над полем F. Цей простір називається спряженим до простору V і позначається V^*.

Припустимо тепер, що V скінченновимірний простір, $\dim V = n$. В просторі V фіксуємо деякий базис $a_1, a_2, \dots, a_n$. Беремо довільний вектор, який в даному базисі має координати $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$.

Покладемо $f_1(x) = x_1$, $f_2(x) = x_2$, ..., $f_n(x) = x_n$.

Функції $f_1, f_2, \dots, f_n$ є лінійними функціями на просторі V, вони утворюють базис спряженого простору V^*, і розмірність $\dim V^* = n$.

Таким чином, якщо V — скінченновимірний простір, то простір V^* теж скінченновимірний і розмірності цих просторів рівні $\dim V = \dim V^*$.

Користуючись даним фіксованим базисом $a_1, a_2, \dots, a_n$ простору V, ми побудували базис $f_1, f_2, \dots, f_n$ простору V^*. Цей базис називають спряженим до базису $a_1, a_2, \dots, a_n$.

3. $A_g = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & 1 \\ -1 & -3-\lambda & 0 \\ -2 & -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} + (-3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (-7-5\lambda) + (-\lambda-3)(-2+\lambda^2) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3$. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1 \in \mathbb{R}$.

$(A+E) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $x_2 = x_3$, $x_1 = -2x_2$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
-2	1	1

$a_1 = (-2; 1; 1)$. Оскільки кількість власних векторів менше за кратність власного числа, тоді для даного перетворення не існує базису простору, складеного з власних векторів перетворення.

4. $x = (14; -3; -6; -7)$ $a_1 = (-3; 0; 7; 6)$, $a_2 = (1; 4; 3; 2)$, $a_3 = (2; 2; -2; -2)$

$L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. $x = y + z$, $y \in L$, $z \in L^{\perp}$

$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & -2 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a_1, a_2 - базис L.

$y = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$.

$\begin{cases} (x, a_1) = \alpha_1 (a_1, a_1) + \alpha_2 (a_1, a_2) \\ (x, a_2) = \alpha_1 (a_2, a_1) + \alpha_2 (a_2, a_2) \end{cases}$

$(x, a_1) = -42 + 0 - 42 - 42 = -126$

$(x, a_2) = 14 - 12 - 18 - 14 = -30$

$(a_1, a_1) = 94$

$(a_1, a_2) = 30$

$(a_2, a_2) = 30$

$\begin{cases} 94\alpha_1 + 30\alpha_2 = -126 \\ 30\alpha_1 + 30\alpha_2 = -30 \end{cases}$

$\alpha_1 = -\alpha_2 - 1$ $\quad -94 - 94\alpha_2 + 30\alpha_2 = -126$

$-64\alpha_2 = -32$

$\alpha_2 = \frac{1}{2}$

$\alpha_1 = -\frac{3}{2}$.

$y = -\frac{3}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2 = \left(\frac{9}{2}; 0; -\frac{21}{2}; -9\right) + \left(\frac{1}{2}; 2; \frac{3}{2}; 1\right) =$

$= (5; 2; -9; -8)$

$x = y + z \Rightarrow z = x - y = (14; -3; -6; -7) - (5; 2; -9; -8) =$

$= (9; -5; 3; 1)$