Приклад 3. Чи існує РФ $s(x,y)$:

$$E_{s(x,y)} = \underbrace{(\mathcal{D}_{3x} \cap E_{2y}) \cup \{x,y\}}_{L}, \quad \forall x,y \in \mathbb{N}$$

Г

$$f(x,y,z) = \begin{cases} z, & \text{якщо } z \in L, \\ \perp, & \text{інакше} \end{cases} \quad \text{— ЧРФ!}$$

$\mathcal{D}_{s(x,y)} = E_{s(x,y)}$

Перевіримо: "$z \in L$" — ЧРП.

$$z \in L \Leftrightarrow (z \in \mathcal{D}_{3x} \underset{\text{ЧРП}}{\&} z \in E_{2y}) \vee (z = x \vee z = y)$$

$$\Leftrightarrow \Big(\underbrace{\exists k\, (\underbrace{P_{3x}(z)\downarrow \text{на кроці } k}_{\text{РП}})}_{\text{ЧРП}} \;\&$$

$$\& \underbrace{\exists a \exists l\, (\underbrace{P_{2y}(a)\downarrow_{\text{на кроці } l} = z}_{\text{РП}})}_{\text{ЧРП}}\Big)$$

$$\underbrace{\vee\, (\underbrace{z = x \vee z = y}_{\text{РП}})}_{\text{ЧРП}}$$

За s-m-n-Th $\exists$ РФ $s(x,y)$:

$$f(x,y,z) = \varphi_{s(x,y)}(z), \quad \forall x,y,z \in \mathbb{N}$$

Зафіксуємо x, y (аргументи s).

$$z \in L \Leftrightarrow f(x,y,z)\downarrow \Leftrightarrow \varphi_{s(x,y)}(z)\downarrow$$

$\Leftrightarrow z \in D_{s(x,y)}$, за побудовою

$D_{s(x,y)} = E_{s(x,y)}$, тому $z \in E_{s(x,y)}$.

$\lrcorner$

Приклад. Чи існує РФ $s(x,y)$:

$\mathcal{D}_{s(x,y)} = \underline{E_x \setminus \mathcal{D}_y}$, $\forall x,y \in \mathbb{N}$

$z \in E_x \,\&\, z \underline{\underline{\notin \mathcal{D}_y}}$

Візьмемо x, y такі, що:

$E_x = \mathbb{N}$

$\mathcal{D}_y = \mathcal{D}$

$\mathcal{D}_{s(x,y)} \,/\!\!/\, E_x \setminus \mathcal{D}_y = \mathbb{N} \setminus \mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}$ — не РПМ

| РПМ

Отже, такої РФ не існує.

$\mathcal{D}_x$, $\mathcal{D}_y$ — РПМ

Тоді існують

РФ $s(x,y)$ та $u(x,y)$: $\forall x, y \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y = \mathcal{D}_{s(x,y)}$$

$$\mathcal{D}_x \cup \mathcal{D}_y = \mathcal{D}_{u(x,y)}$$

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1, & z \in \mathcal{D}_x \cup \mathcal{D}_y \\ \uparrow, & \text{else} \end{cases}$$ — ЧРФ

$z \in \mathcal{D}_x \cup \mathcal{D}_y$ — ЧРП

Чи існує РФ $s(x, y)$:

$$\mathcal{D}_{s(x,y)} = (E_x \cap E_y) \setminus \{x\}, \quad \forall x, y \in N.$$

Чи існує РФ $s(x, y, z)$:

$$E_{s(x,y,z)} = (\mathcal{D}_x \cup \overline{E}_y) \cup \mathcal{D}_z, \quad \forall x, y, z.$$

$\mathcal{D}_x = \varnothing$

$\mathcal{D}_z = \varnothing$

$E_y = \mathcal{D}$

$$(\varnothing \cup \overline{\mathcal{D}}) \cup \varnothing = \overline{\mathcal{D}} \text{ — не РПМ}$$

$$\| \qquad E_{s(x,y,z)} \text{ — РПМ}$$

Отже, не існує.

Завдання на модуль

1. Показати, що ЧРП.

2аб. Чи існує РФ s.

"x є повним квадратом"

$\exists a\,(x=a^2)$

$$C(x,y)=\left[\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}\right]+x$$

$C^{-1}(A) \Leftrightarrow C(x,y)\in A$

$a\in C(D_x^2)$

$(b,c)\in D_x^2 \quad C(b,c)=a$

$\boxed{Д/З}$ Чи існує РФ $s(x,y)$:

1. $E_{s(x,y)}=(E_{2y}\cup D_{3y+x})\cap D_{y+3}$

2. $D_{s(x,y)}=E_{x+y}\setminus(D_x\cup E_y)$

3. Показати, що ЧРП:

"$\varphi_x^2(x,y)$ є повним квадратом"