Модульна контрольна робота

з дисципліни „Чисельні методи"

студентки групи ЗПС-33

Постернак Таїсії Вадимівни

Варіант 40

Під час виконання зобов'язуюсь дотримуватися принципів академічної доброчесності

(5) $f(x) = e^{1+x}, \quad x \in [0, 1], \quad \varepsilon = 10^{-4}$

Відомо, що $|f(x) - L_1(x)| \le \frac{M_2 h^2}{8} < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow h \le \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M^2}}$

$f''(x) = e^{1+x}$

$f''(0) = e \qquad f''(1) = e^2$

$(f''(x))' = e^{1+x} \ne 0$ при $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ екстр. немає

$M_2 = e^2$

$$h \le \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-4}}{e^2}} \approx 0{,}0104$$

$h = 0{,}01$, тоді $n = \frac{b-a}{h} = 100$ проміжків

В-дь: 101 вузол.

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - 2x_3$

$\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right|}$, за умовою, маємо одну знач. цифру, тоді візьмемо $\varepsilon = 0{,}01$

$c_1 = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| = 1 \quad c_2 = \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| = 1 \quad c_3 \left|\frac{\partial f}{\partial x_3}\right| = |-2| = 2$

$x_1^* = 1{,}23$
$x_2^* = 1{,}07$
$x_3^* = 2{,}31$

Вважаємо похибки рівними, макс. можливими, тоді

$$\delta = \frac{\varepsilon}{c_1 + c_2 + c_3} = \frac{0{,}01}{4} = \underline{0{,}0025}$$

(2) $3x^2 - \cos^2 \pi x = 0$ $\quad \varepsilon = 0{,}001$

$f(x) = 3x^2 - \cos^2 \pi x$

$f'(x) = 6x + \pi \sin 2\pi x$

$f(x)$	-1	0	1
x	+	–	+

– ф-ція має 2 нулі, найбільший на $[0, 1]$

Нехай $x_0 = \frac{1}{2}$; $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3$

За мод. м. Ньютона $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)}$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3/4}{3} = \frac{1}{4}$$

$$|x_1 - x_0| = 0{,}25 > \varepsilon$$

$$x_2 = \frac{1}{4} - \frac{-5/16}{3} = \frac{17}{48} \approx 0{,}3542$$

$$|x_2 - x_0| \approx 0{,}104(6) > \varepsilon$$

За 2 ітер бажаної точності не досягли, тому повторюємо алгоритм поки не виконується умова $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$.

(3)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$A = A^T$ – можна викор. МКК

$$d_{11} = \operatorname{sgn} 1 = 1$$

$$s_{11} = \sqrt{|a_{11}|} = 1$$

$$s_{12} = \frac{a_{12}}{d_{11} s_{11}} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

$$s_{13} = \frac{2}{1 \cdot 1} = 2$$

$$d_{22} = \operatorname{sgn}(a_{22} - s_{12}^2 d_{11}) = \operatorname{sgn}(0 - 1) = -1$$

$$s_{22} = \sqrt{|a_{22} - s_{12}^2 d_{11}|} = \sqrt{|0 - 1|} = 1$$

$$s_{23} = \frac{a_{23} - s_{12} d_{11} s_{13}}{d_{22} s_{22}} = \frac{1 - 1 \cdot 1 \cdot 2}{-1 \cdot 1} = 1$$

$$d_{33} = \operatorname{sgn}(a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}) = \operatorname{sgn}(4 - 4 \cdot 1 + 1) = 1$$

$$s_{33} = \sqrt{|a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}|} = \sqrt{|4 - 4 \cdot 1 + 1|} = 1$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$SD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = 2 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = -1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

В-дь: $(2,\ 2,\ -1)$

4)

$$\begin{cases} \sin x + 2y = 1{,}6 \\ \cos(y-1) - x = 1 \end{cases} \qquad \varepsilon = 0{,}01$$

Ф-ла н+1-го кроку:

$\bar{x}^0 = (0,\ 0)^T$

$$\bar{x}^{n+1} = \bar{x}^n - A_0^{-1}\bar{F}(\bar{x}^n)$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & 2 \\ -1 & -\sin(y-1) \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & \sin 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0{,}84 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}7 \\ 0{,}35 & 0{,}35 \end{pmatrix}$$

$$\bar{F}^0 = \begin{pmatrix} -1{,}6 \\ -0{,}46 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}^1 = \bar{x}^0 - A_0^{-1}\bar{F}(\bar{x}_0) =$$

...

Умова зупинки: на n-ому кроці $\|\bar{x}^n - \bar{x}^{n-1}\| \le \varepsilon$