КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Іванов Є.О., Ченцов О.І., Шевченко В. П.

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

РОБОЧИЙ ЗОШИТ

з українсько-англійським тематичним словником

МНОЖИНИ

КИЇВ-2012

Іванов Є.О., Ченцов О.І., Шевченко В. П.

Дискретна математика. Робочий зошит з українсько-англійським тематичним словником. Множини. – К., 2012. – 78 с.

У книзі подано матеріали для вивчення першого модулю «Множини» курсу дискретної математики студентами 1 курсу факультету кібернетики напрямків підготовки *«Інформатика»* та *«Програмна інженерія»*.

Робочий зошит призначено для ведення у ньому конспекту з дискретної математики, для полегшення і прискорення конспектування тут наведені всі слайди лекцій, що позбавляє студента необхідності перемальовувати формули і рисунки, записувати з голосу означення і формулювання. Крім того у зошиті подані плани семінарських занять (теоретичні питання, умови аудиторних, домашніх і додаткових завдань), література до відповідного модулю курсу, українсько-англійський тематичний словник, який полегшить користування іноземною літературою з дискретної математики.

Всі матеріали зошиту можна знайти в електронній бібліотеці факультету кібернетики за адресою: http://www.unicyb.kiev.ua/Library/DM .

Рецензенти:

О.А.Летичевський, академік НАН України, д-р фіз.-мат. наук;

А.Ю.Дорошенко, д-р фіз.-мат. наук,

П.О.Бех, канд.філол.наук

Затверджено Радою факультету кібернетики
28 травня 2012 року, протокол № 9.

Друкується за авторською редакцією.

ЗМІСТ

ВСТУП

Шановний першокурснику!

Дискретна математика є підґрунтям для більшості комп'ютерних дисциплін, які вивчаються на факультеті, тому від засвоєння понять, методів та алгоритмів цього курсу залежить успішність роботи в галузі інформаційних технологій після закінчення університету. На відміну від інших математичних дисциплін сьогоднішні випускники середніх шкіл майже не знайомі з конструкціями дискретної математики, ось чому головна мета даного посібника – звільнивши студента від механічної роботи по простому переписуванню тієї чи іншої інформації, дати йому можливість творчого сприйняття матеріалу.

Курс дискретної математики складається з вступу і 7 модулів (тематичних частин): множини, комбінаторика, алгоритми, булеві функції, графи, автомати, теорія кодування. Відповідно, кожний посібник з даної серії містить розділи, присвячені окремому модулю. Посібник названо робочим зошитом через те, що його треба не лише читати, а й писати у ньому. Кожний основний розділ складається з 5 частин: лекційний матеріал, завдання практичних занять, література, історична довідка.

В лекційній частині зошита розміщені зображення, які будуть демонструватися з комп'ютера на екран під час лекцій. Ці зображення займатимуть лише частину сторінки, інша її частина призначається для запису слів викладача, коментарів, пояснень, прикладів, які не відображаються під час лекції. Тим самим студент звільняється від необхідності „перемальовувати" інформацію з екрана, а викладач - від необхідності надиктовувати формулювання означень, лем, теорем.

Практичні завдання з кожного заняття поділяються на 3 частини: класні, домашні і додаткові, які з них треба розв'язувати, визначає викладач. Слід, однак, зазначити, що лише вміння розв'язувати <u>всі</u> завдання гарантуватиме успіх на іспиті.

Зауваження і пропозиції щодо змісту даного посібника можна надсилати на електронну адресу: vpsh@unicyb.kiev.ua .

Загальний опис курсу

Дискретна математика є базовою нормативною дисципліною напрямків підготовки „Інформатика” та „Комп’ютерні науки”, що читається в I та II семестрі в обсязі 4 кредитів (міжнародна одиниця виміру обсягу засвоєного матеріалу).

Для студентів напрямку підготовки „комп’ютерні науки” дана дицfull диципліна поділена на 2 курси „Основи дискретної математики” та „Додаткові розділи дискретної математики”, які читаються за тим же планом, що й для напрямку „інформатика”. Враховуючи тотожність навчальних матеріалів цих двох курсів з курсом „Дискретна математика”, даний посібник є спільним для обох напрямків підготовки, а всі вказані курси називаються однаково – дискретна математика.

Метою і завданням навчальної дисципліни „Дискретна математика” є опанування основними моделями та алгоритмами дискретної математики, а також методами розв’язання задач щодо визначення властивостей та перетворень розглянутих моделей.

Предмет навчальної дисципліни „Дискретна математика” включає в себе розгляд основних дискретних моделей інформатики та їх математичний опис, класифікації моделей та їх властивостей, основи побудови та оцінювання ефективних алгоритмів для розглянутих моделей. Розглянуті моделі та алгоритми виникають у програмуванні, теорії ймовірностей, алгебрі, економіці та інших областях.

Студент повинен знати для вивчення курсу „Дискретна математика” шкільний курс математики (арифметика, алгебра, основи аналізу, геометрія).

Студент повинен вміти виконувати арифметичні дії над числами, зокрема, знаходити залишок від ділення, спільні дільники та кратні, перевіряти простоту натурального числа, робити тотожні перетворення алгебраїчних виразів, розв’язувати системи лінійних рівнянь з параметрами, знаходити границі послідовностей та функцій, визначати взаємне розташування фігур на площині та у просторі.

Місце в структурно-логічній схемі спеціальності. Нормативна навчальна дисципліна „Дискретна математика” є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр”, є базовою для вивчення таких спеціальних дисциплін як „Програмування”, „Дослідження операцій”, „Теорія ймовірностей”, „Бази даних та знань”.

Система контролю знань та умови складання іспиту

Контроль і оцінювання знань студентів здійснюється за модульно-рейтинговою системою. Матеріал кожного семестру поділяється на кілька змістовних модулів. Кількість балів за кожний модуль обчислюється як сума оцінок за модульні контрольні роботи та оцінок за роботу на заняттях (відповіді на запитання, розв'язання вправ, виконання додаткових завдань).

Перелік змістовних модулів курсу «Дискретна математика»:

1-й семестр	**2-й семестр**
Множини	Булеві функції
Комбінаторика	Теорія графів
Теорія алгоритмів	Теорія автоматів
	Теорія кодування

Базова підсумкова оцінка за кожний семестр становить 100 балів:

	Вид робіт	***Бали за 1 семестр***	***Бали за 2 семестр***
1-й модуль	Робота на заняттях	10	10
	Модульна контрольна робота	20	15
2-й модуль	Робота на заняттях	10	10
	Модульна контрольна робота	20	15
3-й модуль	Робота на заняттях	10	10
4-й модуль	Робота на заняттях		10
	Іспит	30	30
Всього		**100**	**100**

В разі отримання за роботу у семестрі належної кількості балів:

Бали (максимум - 70)	***Оцінка***
64 і більше	Відмінно
52-63	Добре

студент, за його бажанням, може звільнятися від складання іспиту, а семестрова оцінка виставляється за підсумками роботи в семестрі.

Підсумкова оцінка з дисципліни за семестр з урахуванням іспиту у балах (100 – бальна шкала) переводиться у чотирибальну (національну шкалу):

100-бальна шкала	***Оцінка за національною шкалою***	
91 і більше	5	відмінно
84-90	4	добре
60-74	3	задовільно

Модуль 1. Множини

Слайди лекцій

Теорія множин

Множини, їх властивості,
операції над множинами

Поняття множини

Первісні поняття:

- Множина
- Елемент множини
- Бути елементом множини

$$a \in A \quad b \notin B$$

Перелік $\{a, b, c, g\}$

Опис $\{k \in Z \mid \exists i \in Z\ k = 2 \bullet i\}$

2

Множини

$\varnothing$ - порожня множина -
множина, яка не містить жодного елементу

Ω - універсальна множина - множина,
яка містить всі можливі(допустимі) елементи

N - множина натуральних чисел
Z - множина цілих чисел
R - множина раціональних чисел
D, $\mathfrak{R}$ - множина дійсних чисел

3

Співвідношення між множинами

$$A \subset B \, (A \subseteq B)$$

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$$

А є підмножиною В,
якщо кожен елемент множини А
є також елементом множини В

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B, B \subset A$$

Множина А є власною підмножиною множини В,
якщо $A \subset B \quad та \quad A \neq B$

4

Рівність множин

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B, B \subset A$$

Множина A дорівнює множині B,
якщо кожен елемент множини A
є елементом множини B,
і кожен елемент множини B є елементом множини A

5

Відмінність понять “включення” і “бути елементом”

$A \in B,\ B \in C \Rightarrow A \in C$ так / ні

$1 \in \{1\},\ \{1\} \in \{\{1\},\{2\}\}$,
але $1 \notin \{\{1\},\{2\}\}$

$$A \subset B,\ B \in C \to \begin{cases} A \in C \\ A \subset C \end{cases}$$

$\{a\} \subset \{a;b\},\ \{a;b\} \in \{\{a;b\};\{c;d\}\}$

$\{a\} \notin \{\{a;b\};\{c;d\}\}$

$\{a\} \not\subset \{\{a;b\};\{c;d\}\}$

$1 \in \{1\}$ $\varnothing \in \{\varnothing\}$ $\varnothing \subset \{\varnothing\}$

$\varnothing \subset A$ $\varnothing \in A$, якщо $A = \{\varnothing\} \cup B$.
Наприклад $A = \{\varnothing; \{1\}; \{\{2\}\}\}$

6

Булеан множини

Булеаном множини А будемо називати **систему <u>всіх</u> підмножин** множини А, включаючи **порожню** і саму **множину А**. Булеан множини А будемо позначати **B**(A)

$\mathbf{B}(\varnothing)=\{\varnothing\}$

$\mathbf{B}(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$\mathbf{B}(\{1;2\})=\{\varnothing,\{1\};\{2\};\{1;2\}\}$

7

Операції над множинами

$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$ - об'єднання

$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$ - перетин

$A\backslash B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$ - різниця

$A\div B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\vee x\in B\wedge x\notin A\}$ - симетрична різниця

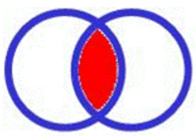
$\overline{A}=\{x\in\Omega|x\notin A\}$ - доповнення

$A\times B=\{(x,y)|x\in A,y\in B\}$ - декартовий добуток

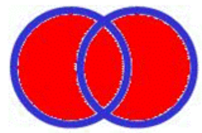
8

Кола Ейлера

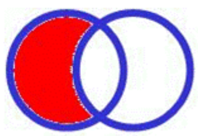
Перетин



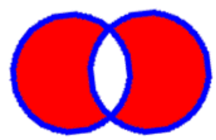
Об’єднання

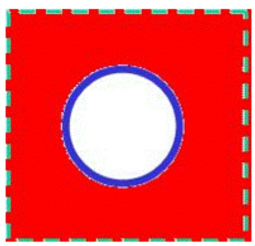


Різниця



Симетрична різниця





Доповнення

Основні співвідношення для операцій над множинами

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

комутативність

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

асоціативність

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

дистрибутивність

Основні співвідношення

продовження

$$A \cup A = A,$$

$$A \cap A = A$$

ідемпотентність

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

де Моргана

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

виключеного третього

11

Основні співвідношення

продовження

$$\overline{\overline{A}} = A, \ \overline{\Omega} = \varnothing, \ \overline{\varnothing} = \Omega$$

$$A \cup \Omega = \Omega, \ A \cap \Omega = A$$

$$A \cup \varnothing = A, \ A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \setminus B = A \cap \overline{B},$$

$$A \div B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

12

Доведення співвідношень

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

<ліва частина> ⊂ <права частина>

$$(x,y)\in A\times(B\cup C)\Rightarrow x\in A, y\in B\cup C$$

$$x\in A, y\in B\Rightarrow(x,y)\in A\times B\Rightarrow(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$x\in A, y\in C\Rightarrow(x,y)\in A\times C\Rightarrow(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$$

Доведення співвідношень

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

<права частина> ⊂ <ліва частина>

$$(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(x,y)\in A\times B\Rightarrow(1)$$

$$(x,y)\in A\times C\Rightarrow(2)$$

$$(1)\Rightarrow x\in A, y\in B\Rightarrow x\in A, y\in B\cup C\Rightarrow(x,y)\in A\times(B\cup C)$$

$$(2)\Rightarrow x\in A, y\in C\Rightarrow x\in A, y\in B\cup C\Rightarrow(x,y)\in A\times(B\cup C)$$

Бінарні відношення

Декартовий добуток

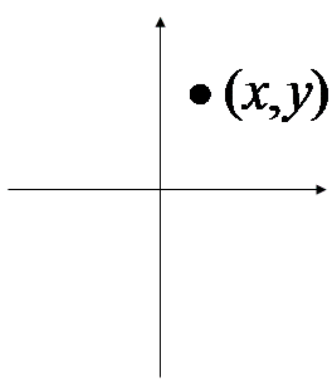
$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

$$\{\text{чоловіки}\} \times \{\text{жінки}\} = \{\text{сімейні пари}\}$$

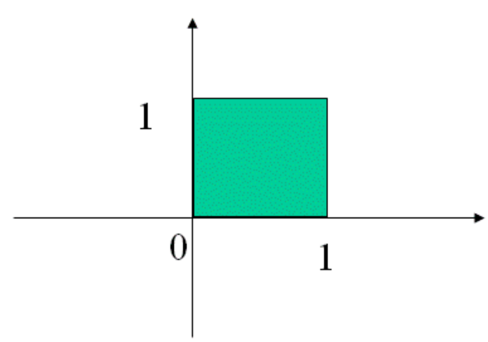
15

Приклади декартових добутків

$D \times D$



$[0,1] \times [0,1]$



16

Проекція множини

Нехай H - підмножина декартового добутку множин A та B: $H \subset A \times B$

Першою проекцією множини $H \subset A \times B$ називається множина тих елементів $x \in A$ для яких існує $y \in B$, такий що $(x,y) \in H$

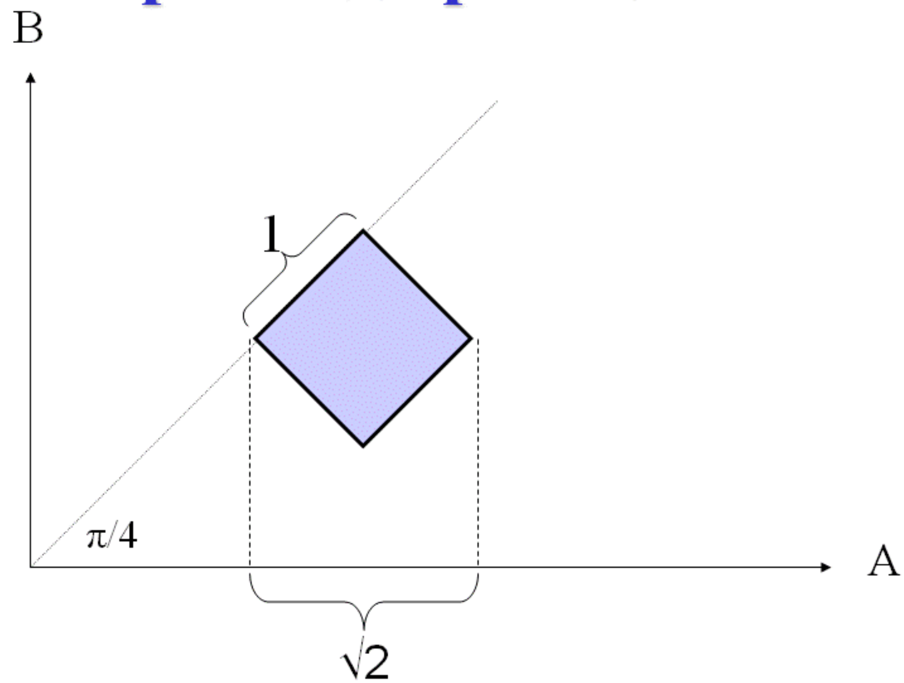
$$Pr_1 H = \{x \in A \mid \exists\, y \in B\ (x,y) \in H\}$$

Другою проекцією множини $H \subset A \times B$ називається множина тих елементів $y \in B$ для яких існує $x \in A$, такий що $(x,y) \in H$

$$Pr_2 H = \{y \in B \mid \exists\, x \in A\ (x,y) \in H\}$$

17

Приклад проекції множини



18

Проекція множини

Нехай H - підмножина декартового добутку множин $A_1, A_2, \ldots A_n$: $H \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

k-тою проекцією множини $H \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ називається множина тих елементів $x_k \in A_k$ для яких існують $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, $x_{k-1} \in A_{k-1}$, $x_{k+1} \in A_{k+1}$, $\ldots . x_n \in A_n$ такі що $(x_1, x_2, \ldots .. x_n) \in H$

$$Pr_k H = \{x_k \in A_k \mid \exists\ x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ x_{k-1} \in A_{k-1},\ x_{k+1} \in A_{k+1}, \ldots \ldots\ x_n \in A_n\ (x_1, x_2, \ldots .. x_n) \in H\}$$

19

Бінарні відношення

На множині A задано бінарне відношення, якщо задана множина $R \subset A \times A$.

Бінарне відношення позначається R, так само, як і множина, яка його задає.

x та ***y*** з множини ***A*** знаходяться у відношенні ***R,*** якщо $(x,y) \in$ ***R .***

Те, що ***x*** знаходиться у відношенні ***R з y*** скорочено позначається ***xRy .***

20

Приклади бінарних відношень

$I_A=\{ (x,x) \mid x \in A \}$ – **відношення рівності на множині А**

x знаходиться у відношенні I_A з y або $x\ I_A\ y$ або $x = y$ або x *рівне* y

$R_{\leq}=\{ (x,y) \mid x \leq y;\ x,y \in D \}$ – відношення нестрогої нерівності

x знаходиться у відношенні $R_{\leq}$ з y або $x\ R_{\leq}\ y$ або
$x \leq y$ або x *менше або рівне* y

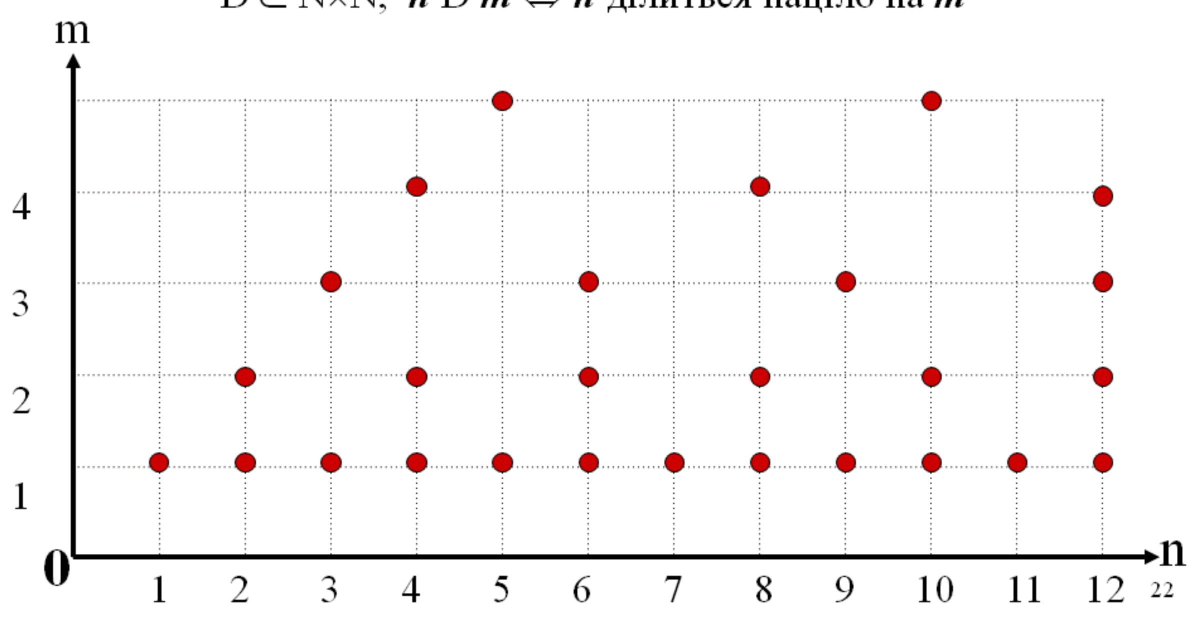
$D=\{(n,m) \mid n$ *ділиться націло на* $m;\ n,m \in N\}$
– відношення ділитися націло

n ділиться націло на m або $n \mid m$

Графік відношення

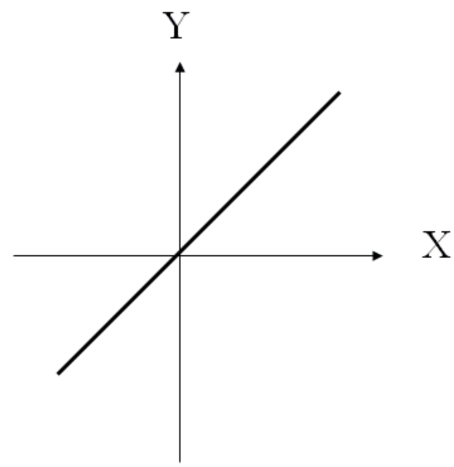
Графіком бінарного відношення $R \subset A \times A$ будемо називати графічне зображення множини R.

$D \subset N \times N$, $n\ D\ m \Leftrightarrow n$ ділиться націло на m



Графік відношення рівності

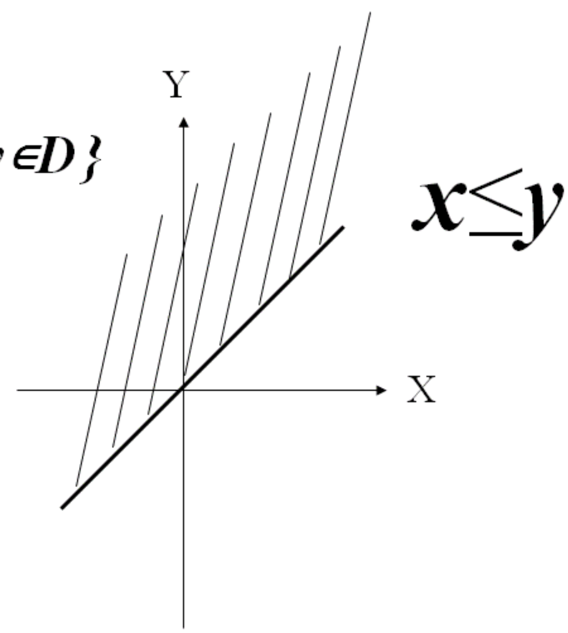
$I_A=\{\,(x,x) \mid x \in D\,\}$



23

Графік відношення нерівності

$R_{\leq}=\{\,(x,y) \mid x\leq y;\ x,y \in D\,\}$



24

Операції над відношеннями

Добуток (композиція) відношень

$$(x, y) \in R \circ Q \Leftrightarrow \exists z\,(x, z) \in R, (z, y) \in Q$$

$$xR \circ Qy \Leftrightarrow \exists z\; xRz, zQy$$

25

Операції над відношеннями

Обернення відношення

$$(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$$

$$xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx$$

26

Співвідношення для операцій над відношеннями

$$1.\ I_A \circ R = R \circ I_A = R$$

$$2.\ (R^{-1})^{-1} = R$$

$$3.\ (R \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ R^{-1}$$

27

Доведення $I_A \circ R = R$

$$(x, y) \in I_A \circ R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists z (x, z) \in I_A, (z, y) \in R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = z, (z, y) \in R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in R$$

28

Доведення $(R^{-1})^{-1} = R$

$$(x, y) \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x, y) \in R$$

Доведення $(R \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ R^{-1}$

$$(x, y) \in (R \circ Q)^{-1} \Rightarrow (y, x) \in R \circ Q \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists z (y, z) \in R, (z, x) \in Q \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (z, y) \in R^{-1}, (x, z) \in Q^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x, y) \in Q^{-1} \circ R^{-1}$$

Бінарні відношення

Q бінарне відношення на ***A*** та ***B***

$$Q \subset A \times B$$

$x \in A$ та $y \in B$

знаходяться у відношенні ***Q,***

якщо $(x,y) \in Q$

x знаходиться у відношенні ***Q*** ***з*** ***y*** $\Leftrightarrow$ ***xQy***

$A = \{\text{жінки}\}$ $B = \{\text{чоловіки}\}$

$Q_{\text{шлюб}} \subset \{\text{жінки}\} \times \{\text{чоловіки}\}$

31

Тернарні відношення

T тернарне відношення на ***A,B,C***

$$T \subset A \times B \times C$$

$x \in A$, $y \in B$, $z \in C$

знаходяться у відношенні ***T,***

якщо $(x,y,z) \in T$

$A = \{\text{жінки}\}$ $B = \{\text{чоловіки}\}$ $C = \{\text{діти}\}$

$T_{\text{бути матір'ю і батьком дитини}} \subset \{\text{жінки}\} \times \{\text{чоловіки}\} \times \{\text{діти}\}$

32

n-арні відношення

$\boldsymbol{S}$ *n*-арне відношення на $\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2},\ldots\boldsymbol{A_n}$

$$\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{A_1} \times \boldsymbol{A_2} \times \ldots \times \boldsymbol{A_n}$$

$$x_1 \in \boldsymbol{A_1},\ x_2 \in \boldsymbol{A_2}, \ldots x_n \in \boldsymbol{A_n}$$

знаходяться у відношенні **S**,

якщо $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \boldsymbol{S}$

$$\boldsymbol{S}_{\text{пропорція}} \subset \Re \times \Re \times \Re \times \Re$$

$$(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \boldsymbol{S}_{\text{пропорція}} \Leftrightarrow a_1/a_2 = a_3/a_4$$

33

Область визначення та область значень відношення

Областю визначення бінарного відношення $R \subset A \times B$ називається множина тих елементів $x \in A$, для яких існує $y \in B$, такий що $(x,y) \in R$

$$\delta_R = \{x \in A \mid \exists\ y \in B\ (x,y) \in R\} = Pr_1 R$$

Областю значень бінарного відношення $R \subset A \times B$ називається множина тих елементів $y \in B$, для яких існує $x \in A$, такий що $(x,y) \in R$

$$\rho_R = \{y \in B \mid \exists\ x \in A\ (x,y) \in R\} = Pr_2 R$$

34

Область визначення та область значень відношення

$Q_{шлюб} \subset \{жінки\} \times \{чоловіки\}$

$\delta_Q = \{заміжні\ жінки\}$ $\rho_Q = \{одружені\ чоловіки\}$

H⊂N×N

$(n,m) \in H \Leftrightarrow 1 <$ найбільший спільний дільник n та m $< \min(n,m)$

n та ***m*** мають нетривіальний спільний дільник

$\delta_H = \rho_H = \{непрості\ натуральні\ числа\}$

35

Функціональні відношення

$F \subset A \times B$ - функціональне відношення

$$(x,y_1),(x,y_2) \in F \Rightarrow y_1 = y_2$$

Для будь-якого $x \in A$
існує не більше одного $y \in B$,
що $(x,y) \in F$

y однозначно визначається по F та x

$y=F(x)$

36

Функціональні відношення і функції

$F \subset A \times B$ - функціональне відношення

F для довільного x однозначно визначає y, такий що $(x,y) \in F$

$$x \xrightarrow{F} y$$

Цей **y** позначається **F(x)**

Оскільки це робиться для довільного $x \in A$, можна записати

$$A \xrightarrow{F} B, \text{ або } F : A \to B$$

Залежність між y та x, яка визначається функціональним відношенням F називається **функцією (відображенням)** F

37

Функціональні відношення і функції

- **Функціональне відношення** для довільної пари $x \in A$, $y \in B$ визначає, чи *належить* ця пара даному відношенню (**так, true**), чи *не належить* (**ні, false**).
- **Функція** по $x \in A$ визначає (**обчислює**) $y \in B$

38

Області відправлення та прибуття

$$F: A \rightarrow B$$

Область відправлення
Може не співпадати
з областю визначення

Область прибуття
Може не співпадати
з областю значень

39

Образи та прообрази

Нехай $F \subset A \times B$ - функ.відношення

$$F: A \rightarrow B \quad A \xrightarrow{F} B$$

$$(x, y) \in F \Leftrightarrow y = F(x)$$

образ x

прообраз y

40

Образи та прообрази

Нехай $F \subset A \times B$ - функціональне відношення

Образом множини $C \subset A$
будемо називати множину
всіх образів елементів множини C
$F(C)=\{y \in B | \exists c \in C\ F(c)=y\}$

Прообразом множини $D \subset B$
будемо називати множину
всіх прообразів елементів множини D
$F^{-1}(D)=\{x \in A | \exists d \in D\ F(x)=d\}$

41

Приклади образів та прообразів

$$f : (-\infty,+\infty) \xrightarrow{x^2} (-\infty;+\infty)$$

$$f([-1,+1]) = [0,1],\ f((-1,+1)) = [0,1)$$

$$f^{-1}(\{1\}) = \{-1,+1\},\ f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$$

42

Обернена функція

$F \subset A \times B$ - функціональне відношення
($F: A \rightarrow B$ – функція)

Якщо обернене відношення $F^{-1} \subset B \times A$ також є функціональним відношенням, то це відношення визначає деяку функцію, яку будемо називати оберненою до F функцією і позначати $F^{-1}: B \rightarrow A$

43

Обернена функція

Розглянемо деякі відомі функції дійсного аргументу і обернені до них

$$y = x^3 \leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

$$y = 10^x \leftrightarrow x = \lg y$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \sin x \end{array} \right\} \text{не мають обернених}$$

44

Лема про добуток функціональних відношень

Добуток функціональних відношень є функціональним відношенням,

Якщо $F \subset A \times B$ та $G \subset B \times C$ – функц. відношення, то $F \circ G \subset A \times C$ – також функц. відношення

$$F:A \rightarrow B,\ G:B \rightarrow C \quad \text{»»»} \quad F \circ G:A \rightarrow C$$

45

Доведення леми

$F \subset A \times B$, $G \subset B \times C$, $F \circ G \subset A \times C$

$(x,z) \in F \circ G \Leftrightarrow \exists y \in B\ (x,y) \in F,\ (y,z) \in G$

$(x,z_1),(x,z_2) \in F \circ G \Rightarrow$

$\exists y_1\ (x,y_1) \in F,\ (y_1,z_1) \in G;\ \exists y_2\ (x,y_2) \in F,\ (y_2,z_2) \in G \Rightarrow$

$(x,y_1) \in F,\ (x,y_2) \in F;\ (y_1,z_1) \in G,\ (y_2,z_2) \in G \Rightarrow$

$\Downarrow$ в силу функціональності F

$y_1 = y_2,\ (y_1,z_1) \in G,\ (y_2,z_2) \in G \Rightarrow$

$(y_1,z_1) \in G,\ (y_1,z_2) \in G \Rightarrow$

$z_1 = z_2$ в силу функціональності G

46

Добуток функціональних відношень і суперпозиція функцій

$F \subset A \times B$, $G \subset B \times C$, $F \circ G \subset A \times C$ – функц. відношення,
$F: A \to B$, $G: B \to C$, $F \circ G: A \to C$
$F: x \in A \to y \in B$, $G: y \in B \to z \in C$, $F \circ G: x \in A \to z \in C$
$y=F(x)$, $z=G(y)$
$z=G(F(x))$

$F \circ G: A \to C$ »»» $z=G(F(x))$

Функцію, що відповідає добутку функціональних відношень $F \circ G$, будемо називати суперпозицією відповідних функцій $z=G(F(x))$

47

Класифікація відображень $F: A \to B$

Ін'єкція «відображення в» $\quad F(a) = F(a') \Rightarrow a = a'$

Сюр'єкція «відображення на» $\quad F(A) = B$

Бієкція «взаємно однозначне відображення» $\quad \delta_F = A$ та ін'єкція і сюр'єкція одночасно

48

Співвідношення для відображень

$$f\colon X\to Y,\ A,B\subset X,\ C,D\subset Y$$

$f: X \to Y,\ A,B \subset X,\ C,D \subset Y$

і існує обернена функція $f^{-1}: Y \to X$

1. $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

2. $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

3. $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

4. $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

5. $f^{-1}(\overline{C})=\overline{f^{-1}(C)}$ 6. $A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$

49

Доведення 1

$$y\in f(A\cap B)\Rightarrow y=f(x), x\in A\cap B\Rightarrow$$

$$y=f(x), x\in A, x\in B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\in f(A), y\in f(B)\Rightarrow$$

$$y\in f(A)\cap f(B)$$

50

Чи можна обернути доведення 1

$$y\in f(A\cap B)\Leftarrow y=f(x),x\in A\cap B\Leftarrow$$

$$y=f(x),x\in A,x\in B$$ не можна

$$\Leftarrow y\in f(A),y\in f(B)\Leftarrow$$

$$y\in f(A)\cap f(B)$$

51

Приклад до п.1

$$x^2: D\to D,\ A=(0,1),\ B=(-1,0)$$

$$A\cap B=\varnothing,\ f(A\cap B)=\varnothing$$

$$f(A)=(0,1),\ f(B)=(0,1)$$

$$f(A)\cap f(B)=(0,1)$$

52

Доведення 3

$$x \in f^{-1}(C \cup D) \Rightarrow y = f(x), y \in C \cup D \Rightarrow$$

$$y = f(x), y \in C \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \Rightarrow$$

$$y = f(x), y \in D \Rightarrow x \in f^{-1}(D) \Rightarrow$$

$$\longrightarrow \; x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$\longrightarrow \; x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

53

Доведення 3

$$x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \Rightarrow$$

$$x \in f^{-1}(C) \Rightarrow y = f(x), y \in C \Rightarrow$$

$$x \in f^{-1}(D) \Rightarrow y = f(x), y \in D \Rightarrow$$

$$\longrightarrow y = f(x), y \in C \cup D \Rightarrow x \in f^{-1}(C \cup D)$$

$$\longrightarrow y = f(x), y \in C \cup D \Rightarrow x \in f^{-1}(C \cup D)$$

54

Доведення 5

$$x \in f^{-1}(\overline{C}) \Rightarrow y = f(x), y \in \overline{C}$$

$\longrightarrow$ $\boxed{x \in f^{-1}(C)} \Rightarrow y' = f(x), y' \in C \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = y, y \in \overline{C}, y' \in C \Rightarrow y \in \varnothing$$

$\longrightarrow$ $\boxed{x \notin f^{-1}(C)} \Rightarrow x \in \overline{f^{-1}(C)}$

55

Доведення 5

$$x \in \overline{f^{-1}(C)} \Rightarrow x \notin f^{-1}(C) \Rightarrow y = f(x), y \notin C$$

$\longrightarrow$ $\boxed{x \in f^{-1}(\overline{C})}$

$\longrightarrow$ $\boxed{x \notin f^{-1}(\overline{C})}, y = f(x), y \notin \overline{C} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y \notin \overline{C}, y \notin C \Rightarrow y \in \varnothing$$

$y \in f(A) \Rightarrow y = f(x),\ x \in A \Rightarrow y = f(x),\ x \in B \Rightarrow y \in f(B)$

56

Доведення 6

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

$$y \in f(A) \Rightarrow y = f(x),\ x \in A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = f(x),\ x \in B \Rightarrow y \in f(B)$$

57

Зауваження до твердження 1

Якщо f – ін'єкція, то

$$\mathbf{f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)}$$

$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ – вже доведено

Доведемо, що <пр.част.>⊂<лів.част.>

$\mathbf{y \in f(A) \cap f(B)} \Rightarrow y = f(x_1), x_1 \in A,\ y = f(x_2), x_2 \in B \Rightarrow$

в силу ін'єктивності $x_1 = x_2 \Rightarrow$

$y = f(x_1), x_1 \in A,\ x_1 \in B \Rightarrow y = f(x_1), x_1 \in A \cap B \Rightarrow \mathbf{y \in f(A \cap B)}$

58

Якщо f ін'єкція, то $f(A\backslash B)=f(A)\backslash f(B)$

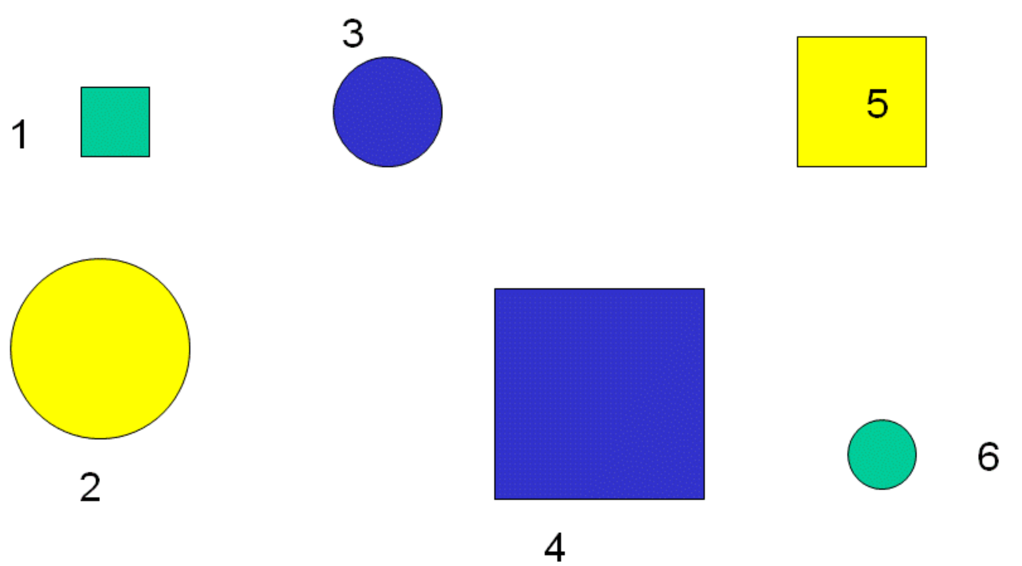
$\mathbf{y\in f(A\backslash B)}\Rightarrow y=f(x),\ y=f(x), x\in A,\ x\notin B\Rightarrow$
а) $\mathbf{y\in f(B)}$, $x\notin B,\ \Rightarrow x\notin B,\ y=f(x),\ y\in f(x'), x'\in B\Rightarrow$ в силу ін'єктивності $\Rightarrow x=x'\ \Rightarrow x\notin B,\ x\in B\Rightarrow$ <u>неможливо</u>

б) $\mathbf{y\notin f(B)}$, $y=f(x),\ x\in A,\ \Rightarrow y\in f(A),\ y\notin f(B)\Rightarrow \mathbf{y\in f(A)\backslash f(B)}$

$\mathbf{y\in f(A)\backslash f(B)}\Rightarrow y\in f(A),\ y\notin f(B)\Rightarrow y=f(x), x\in A,\ y\notin f(B)$
а) $x\in B$, $y=f(x), x\in A,\ y\notin f(B)\Rightarrow y\in f(B),\ y\notin f(B)\Rightarrow$ <u>неможливо</u>
б) $x\notin B$, $y=f(x), x\in A,\ \Rightarrow y=f(x), x\in A\backslash B\Rightarrow\ \mathbf{y\in f(A\backslash B)}$

59

Спеціальні класи бінарних відношень



60

Властивості відношень

1.Рефлексивність	$x \in A \Rightarrow xRx$
	$\forall x \in A \;\; xRx$
2.Іррефлексивність	$x \in A \Rightarrow \overline{xRx}$
	$\neg\exists x \in A \; xRx$
3.Симетричність	$xRy \Rightarrow yRx$
	$\forall x \forall y \; xRy \Rightarrow yRx$
4.Антисиметричність	$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
5.Транзитивність	$xRy, yRz \Rightarrow xRz$
6.Порівняльність	$x, y \in A \Rightarrow xRy \vee yRx$

61

Теорема про властивості

Властивості бінарних відношень 1-6 еквівалентні наступним включенням та рівностям:

1. $I_A \subset R$	4. $R \cap R^{-1} \subset I_A$
2. $R \cap I_A = \varnothing$	5. $R \circ R \subset R$
3. $R \subset R^{-1}$	6. $R \cup R^{-1} = A^2$

62

Доведення п.5

R – транзитивне ⇒ $R^2 \subset R$

$$(x,y)\in R^2 \Rightarrow xR\circ Ry \Rightarrow \exists z\, xRz, zRy \Rightarrow$$
$$\textit{за транзитивністю} \Rightarrow xRy \Rightarrow (x,y)\in R$$

63

Доведення п.5

$R^2 \subset R$ ⇒ R-транзитивне

$$xRy,\ yRz \Rightarrow xR\circ Rz \Rightarrow (x,z)\in R\circ R \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x,z)\in R \Rightarrow xRz$$

64

Відношення еквівалентності

Відношенням еквівалентності на множині A будемо називати рефлексивне, симетричне та транзитивне бінарне відношення на множині A.

1. Рефлексивне
   $x \in A \Rightarrow xRx$
2. Симетричне
   $xRy \Rightarrow yRx$
3. Транзитивне
   $xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$

65

Приклади відношень еквівалентності

Паралельність прямих

Однакова остача при діленні на 2

Бути родичами

$$xRy \Leftrightarrow x \equiv y \bmod 5$$

$$2 \equiv 7, \quad 7 \equiv 32, \quad 2 \equiv 32$$

66

Класи еквівалентності.

Класом еквівалентності елемента **x** по відношенню еквівалентності $\mathbf{R \subset A \times A}$ будемо називати множину $[x]_R$ елементів $\mathbf{y} \in \mathbf{A}$, що знаходяться у відношенні еквівалентності **R** з **x** (включаючи сам **x**)

$$[x]_R=\{y \in A|(x,y) \in R\}$$

Фактор-множиною множини A по відношенню еквівалентності R, будемо називати множину всіх класів еквівалентності множини A по відношенню еквівалентності R.

$$A/R=\{x \in A|[x]_R\}$$

67

Приклади класів еквівалентності

Еквівалентність	*Класи*
Паралельність прямих	Напрямок
Однакова остача при діленні на 2	{парні},{непарні}
Бути родичами	Сім’я
$x \equiv y \bmod 5$	{1,6,..},{2,7,..}, {3,8,..},{4,9,..}, {5,10,..}

68

Розбиття

$\{A_\alpha\}$ - розбиття A

$$1.\ \alpha \neq \beta \Rightarrow A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$$

$$2.\ \mathrm{U}\, A_\alpha = A$$

Теорема про зв'язок еквівалентності та розбиття

Довільне відношення еквівалентності ***R*** на множині ***A*** породжує розбиття ***A*** на класи еквівалентності.

І навпаки кожне розбиття $\{A_\alpha\}$ множини ***A*** задає на множині ***A*** відношення еквівалентності ***R***, таке що

$$xRy \Leftrightarrow \exists\alpha \quad x, y \in A_\alpha$$

еквівалентність=>розбиття

$$1.[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing \Rightarrow z \in [x], z \in [y] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow xRz, yRz \Rightarrow \textit{симетричність} \Rightarrow xRz, zRy \Rightarrow$$
$$\textit{транзитивність} \Rightarrow xRy$$

Доведемо, що в цьому разі $[x]=[y]$

$$w \in [x] \Rightarrow xRw, xRy \Rightarrow \textit{симетричність} \Rightarrow yRx, xRw \Rightarrow$$
$$\textit{транзитивність} \Rightarrow yRw \Rightarrow w \in [y]$$

В зворотному напрямку аналогічно

$$2.\ A = \cup[z]$$

$$x \in A \Rightarrow xRx \Rightarrow x \in [x] \Rightarrow x \in \bigcup [z]$$

71

розбиття=>еквівалентність

$$xRy \Leftrightarrow \exists\, \alpha\ x, y \in A_\alpha$$

$$1.\ \textit{рефлексивність}\ x \in A \Rightarrow x \in \bigcup_\alpha A_\alpha \Rightarrow x \in A_{\alpha_0} \Rightarrow xRx$$

$$2.\ \textit{симетрічність}\ xRy \Rightarrow x, y \in A_{\alpha_0} \Rightarrow y, x \in A_{\alpha_0} \Rightarrow yRx$$

$$3.\ \textit{транзитивність}\ xRy, yRz \Rightarrow x, y \in A_{\alpha_1}, y, z \in A_{\alpha_2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y \in A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x, y, z \in A_{\alpha_1} \Rightarrow xRz$$

72

Відношення часткового порядку

Відношенням часткового порядку на множині А будемо називати рефлексивне, антисиметричне та транзитивне бінарне відношення на множині А.

1. Рефлексивне
   $x \in A \Rightarrow xRx$
2. Антисиметричне
   $xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$
3. Транзитивне
   $xRy, yRz \Rightarrow xRz$

73

Приклади відношень часткового порядку

$$x, y \in \Re \quad xRy \Leftrightarrow x \leq y$$

менше або дорівнює
на множині дійсних чисел

Бути нащадком

$A,B \subset \Omega$, $A\boldsymbol{R}B \Leftrightarrow A \subset B$
включення множин

Будемо позначати відношення часткового порядку $\leq$

74

Приклад часткового порядку

n R ***m*** ⇔ ***n*** ділиться націло на ***m*** ⇔ ***n*** | ***m***

$$1.\ \textit{рефлексивність}\ nRn \Leftrightarrow n|n$$

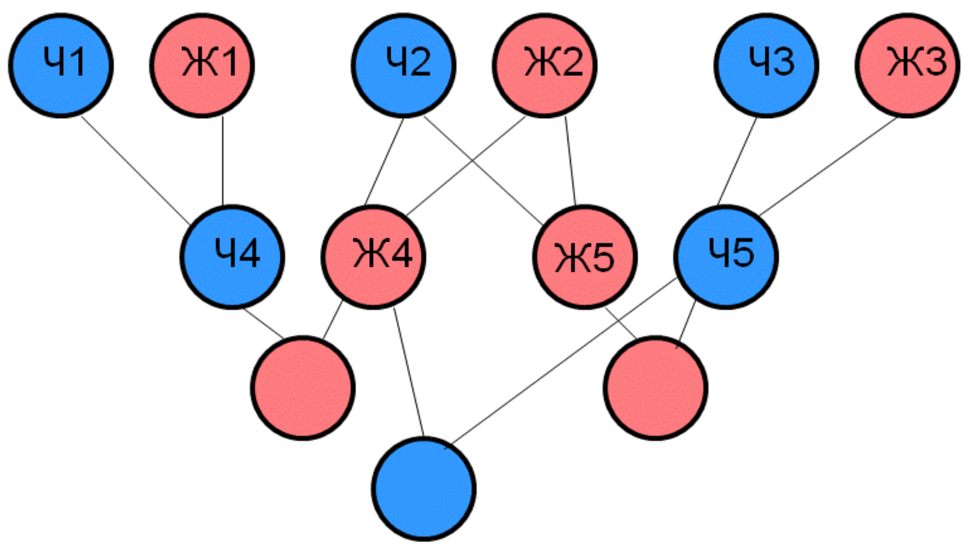
$$2.\ \textit{антисиметричність}\ nRm, mRn \Rightarrow n|m, m|n \Rightarrow n = m$$

$$3.\ \textit{транзитивність}\ nRm, mRq \Rightarrow n|m, m|q \Rightarrow n|q$$

$$6R2, 9R3, \overline{9R2}, \overline{2R9}, \overline{3R9}$$

75

Приклад часткового порядку



76

Означення

Множина називається частково впорядкованою, якщо на ній задано відношення часткового порядку

77

Мінімальні та максимальні елементи

Нехай A – частково впорядкована множина з відношенням часткового порядку $\leq$

x – **мінімальний** елемент, якщо в A не існує меншого за нього елемента крім самого x

$$y \leq x \Rightarrow x = y$$

x – **максимальний** елемент, якщо в A не існує більшого за нього елемента крім самого x

$$x \leq y \Rightarrow x = y$$

78

Найменші та найбільші елементи

Нехай A – частково впорядкована множина з відношенням часткового порядку $\leq$

x – **найменший** елемент, якщо він менший будь-якого елемента з A

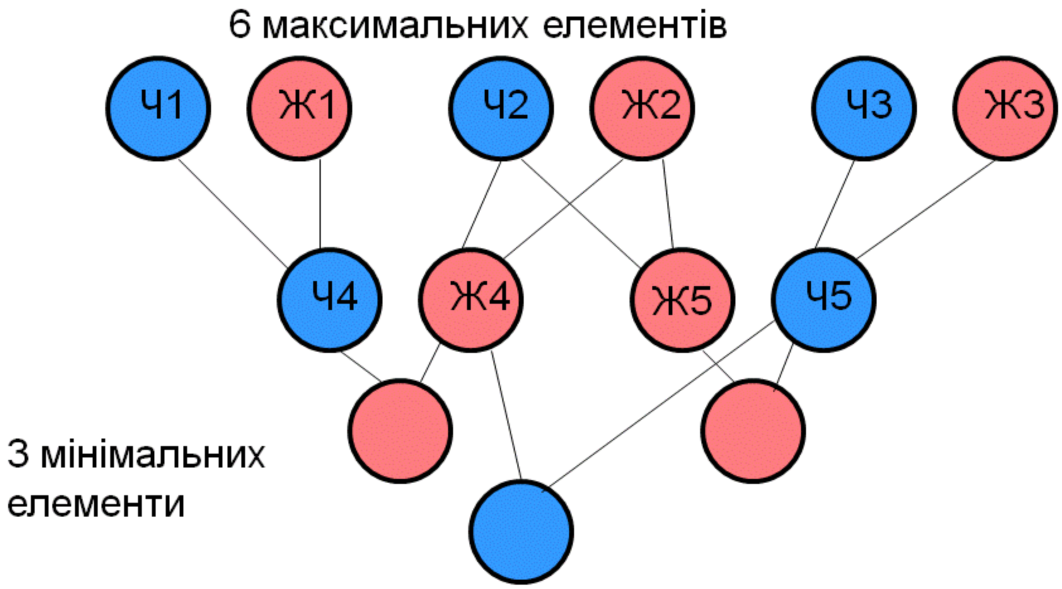
$$y \in A \Rightarrow x \leq y$$

x – **найбільший** елемент, якщо він більший будь-якого елемента з A

$$y \in A \Rightarrow y \leq x$$

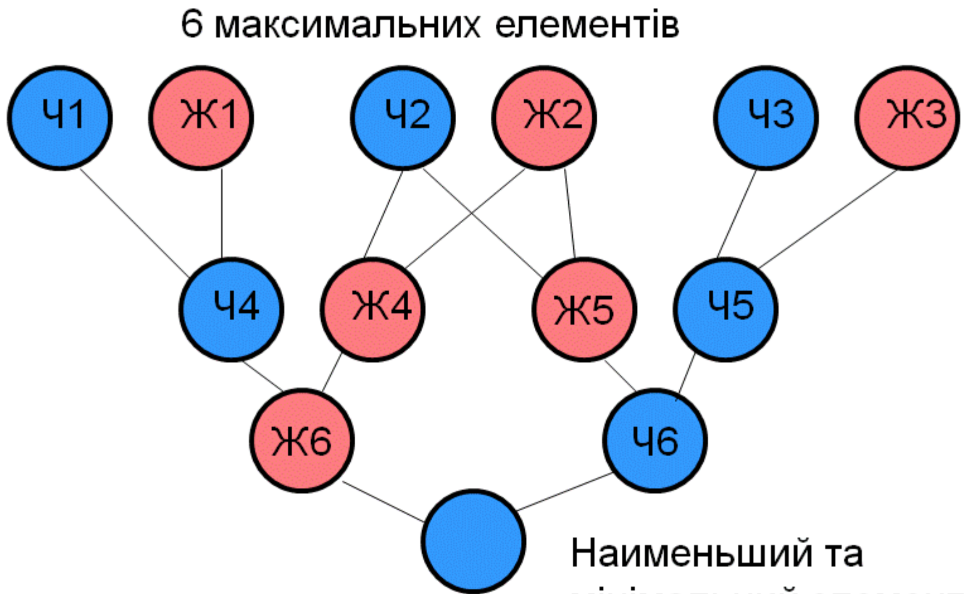
79

Приклад мін., макс., най...



80

Приклад мін., макс., най...



81

Приклади мін., макс., най...

$A, B \subset \Omega, A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$

$\varnothing$ - найменший

та мінімальний

Ω - найбільший

та максимальний

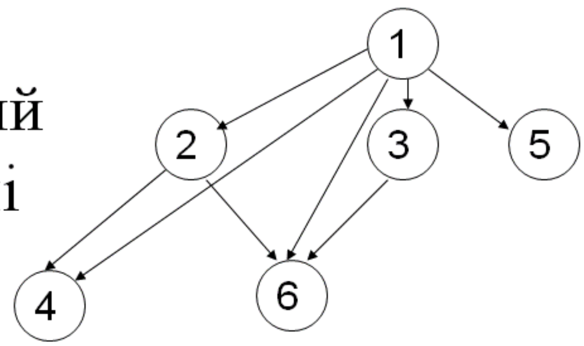
82

Приклади мін., макс., най...

A={1,2,3,4,5,6} **x** $\leq$ **y** $\Leftrightarrow$ **x** ділиться на **y**
$\Leftrightarrow$ **y** ділить **x**

- 1 – найбільший
  та максимальний
- 4,5,6 – мінімальні

найменшого немає



83

Приклади мін., макс., най...

A={1,2,3,4,5,6, ...}

x $\leq$ **y** $\Leftrightarrow$ x ділиться на **y**

- 1 – найбільший та максимальний
- найменшого та мінімальних немає

84

Приклади мін., макс., най...

A={2,3,4,5,6, ...}

x $\leq$ **y** $\Leftrightarrow$ **x** ділиться на **y**

•найбільшого немає

•2,3,5,7,… - прості числа - максимальні

•мінімальних та найменшого немає

85

Леми про най... елементи

Лема 1

В довільній частково впорядкованій множині існує не більше одного найбільшого (найменшого) елемента

Припустимо, що існує 2 найменших x_1 та x_2:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - \textit{наймен} \Rightarrow x_1 \leq x_2 \\ x_2 - \textit{наймен} \Rightarrow x_2 \leq x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{антисим} \Rightarrow x_1 = x_2$$

86

Леми про най... елементи

Лема 2

В частково впорядкованій множині найменший (найбільший) елемент є єдиним мінімальним (максимальним)

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \text{ - наймен } \Rightarrow x_1 \le x_2 \\ x_2 \text{ - мінімал.} \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 - \textit{мінім} \Rightarrow x_1 = x_2$$

87

Відношення лінійного порядку

Відношенням лінійного порядку

на множині A будемо називати рефлексивне, антисиметричне, транзитивне та порівняльне бінарне відношення на множині A.

1. Рефлексивне
   $x \in A \Rightarrow xRx$
2. Антисиметричне
   $xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$
3. Транзитивне
   $xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$
4. Порівняльне
   $x,y \in A \Rightarrow xRy \vee yRx$

88

Означення

Множина називається лінійно впорядкованою, якщо на ній задано відношення лінійного порядку

89

Лема 3

В лінійно впорядкованій множині мінімальний (максимальний) елемент є найменшим (найбільшим)

x_0 – мінімальний, $x \in A \Rightarrow$ в силу порівняльності

$\rightarrow x \leq x_0 \rightarrow$оскільки x_0 мінімальний $\rightarrow x_0 \leq x$

$\rightarrow x_0 \leq x$

В обох випадках $x_0 \leq x$

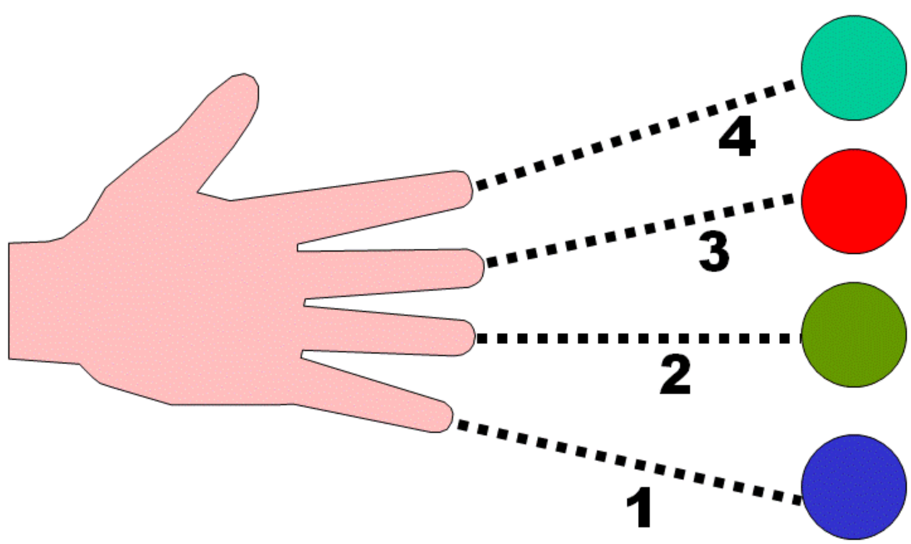
90

Потужність множин

Еквівалентні множини

91

Як ми рахуємо....



92

Еквівалентні множини

множина A еквівалентна множині $B \Leftrightarrow A \xleftrightarrow{\text{бієкція}} B$

$$\{1,2,3,\ldots\} \leftrightarrow \{0,1,-1,2,-2,\ldots.\}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{matrix} \qquad m = (-1)^n \cdot \left[\frac{n}{2}\right]$$

$(0;1)\leftrightarrow(0,2)$ $y=2\cdot x$

$$(0,1) \leftrightarrow \left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) y = \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4}$$

$(0,1)\leftrightarrow\Re$

$y = tg(\pi x - \pi/2)$

93

Скінченні, зліченні, континуальні

A – скінченна $\Leftrightarrow \exists n\ A\leftrightarrow\{1,2,3,\ldots,n\}$

A – нескінченна ⇔ A не є скінченною

A – злічення$\Leftrightarrow A\leftrightarrow N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}\Leftrightarrow$

$A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots..\}$

A – не більш ніж злічення ⇔ A – злічення або A - скінченна

A – континуальна $\Leftrightarrow A\leftrightarrow\Re=(-\infty;+\infty)$

94

Лема. Об'єднання зліченної та не більш ніж зліченної множин – є множина злічення

$$A \leftrightarrow N \Leftrightarrow A \leftrightarrow \{1,2,3,\dots\} \Leftrightarrow A=\{a_1,a_2,a_3,..\}$$

$$B \leftrightarrow N \Leftrightarrow B \leftrightarrow \{1,2,3,\dots\} \Leftrightarrow B=\{b_1,b_2,b_3,..\}$$

$$C \leftrightarrow \{1,2,3,\dots .n\} \Leftrightarrow C=\{c_1,c_2,\dots c_n\}$$

$$A \cup C=\{c_1,c_2,\dots c_n,a_1,a_2,a_3,..\}$$

$$A \cup B= \{a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,..\}$$

$$2 \cdot i-1 \leftrightarrow a_i \qquad 2 \cdot i \leftrightarrow b_i$$

95

Лема: Декартов квадрат зліченної множини є множина злічення

$$N \leftrightarrow N \times N$$

$$N=\{1,2,3,\dots ..,n,\dots\}$$

$N \times N=\{(1,1);(2,1);(1,2);(3,1);(2,2);(1,3);\dots .\}$

$$\begin{array}{ccc} (1,1)^1 & (1,2)^3 & (1,3)^6 \\ (2,1)^2 & (2,2)^5 & (2,3) \\ (3,1)^4 & (3,2) & (3,3) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (1,1)^1 & (1,2)^4 & (1,3)^5 \\ (2,1)^2 & (2,2)^3 & (2,3)^6 \\ (3,1)^9 & (3,2)^8 & (3,3)^7 \end{array}$$

$N \times N=\{(1,1);(2,1);(2,2);(1,2);(1,3);(2,3);(3,3);(3,2);(3,1);\dots .\}$

96

Лема про зліченну підмножину

З нескінченної множини можна виділити зліченну підмножину

$A \neq \varnothing \Rightarrow \exists a_1 \in A$

$A \setminus \{a_1\} \neq \varnothing \Rightarrow \exists a_2 \in A \setminus \{a_1\}$

....

$A \setminus \{a_1, a_2, \ldots a_k\} \neq \varnothing \Rightarrow \exists a_{k+1} \in A \setminus \{a_1, a_2, \ldots a_k\}$

97

Лема про нескінченну підмножину

Нескінченна підмножина зліченної множини - зліченна

$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,..\}$

$B \subset A \quad B=\{a_{k_1},a_{k_2}, a_{k_3}, a_{k_4},..\} \quad k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq \ldots..$

$B \leftrightarrow N \qquad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots\ldots$

$B \neq \varnothing \Rightarrow \exists k_1 = \min k_j \mid a_{k_j} \in B \Rightarrow 1 \leftrightarrow k_1$

....

B – нескінч.$\Rightarrow B \setminus \{a_{k_1},a_{k_2},\ldots, a_{k_{i-1}}\} \neq \varnothing \Rightarrow$

$\exists k_i = \min k_j \mid a_{k_j} \in B \setminus \{a_{k_1},a_{k_2},\ldots, a_{k_{i-1}}\} \Rightarrow i \leftrightarrow k_j$

98

Лема про раціональні числа

Множина раціональних чисел *R* зліченна

$r = n/m \leftrightarrow (n,m) \in Z \times N,\ n \in Z, m \in N$

Z, N – зліченні $\Rightarrow Z \times N$ - зліченне

$2/5 = 4/10 = 6/15$

$R \subset Z \times N$, R – нескінченна

R - зліченна

99

Лема про об'єднання

A – нескінченна, *B* – не більш ніж зліченна

тоді $A \cup B \leftrightarrow A$, об'єднання *A* та *B* еквівалентно *A*

Виділимо зліченну множину $A_1 \subset A$

тоді $A_1 \cup B$ також зліченна множина

зліченні множини еквівалентні між собою $A_1 \leftrightarrow A_1 \cup B$

$$\begin{array}{rcccl} A & = (A \setminus A_1) \cup & & A_1 & \\ & \| & & \updownarrow & \text{як зліченні множини} \\ A \cup B & = (A \setminus A_1) \cup & & (A_1 \cup B) & \end{array}$$

Тоді $A \leftrightarrow A \cup B$

100

Наслідки леми про об'єднання

$[0,1] \leftrightarrow (0,1) \quad [0,1] = (0,1) \cup \{0,1\}$

Множина дійсних чисел еквівалентна множині всіх нескінчених ***цифрових*** послідовностей

$$\Re \leftrightarrow \{(d_1, d_2, d_3, \ldots)\}$$

$$\Re \leftrightarrow (0,1) \quad (0,1) \subset \{(d_1, d_2, d_3, \ldots)\} = \{(0, d_1 d_2 d_3 \ldots)\}$$

$$0{,}5(0) = 0{,}4(9) \quad \{0, d_1 d_2 d_3 \ldots (9)\} = R^*$$

R^* – *нескінч. підмножина злічен. множини рац. чисел*

$$\Re \leftrightarrow (0,1) \leftrightarrow \textit{лема про об'єднання} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (0,1) \cup R^* \leftrightarrow \{(d_1, d_2, d_3, \ldots)\}$$

101

Теорема про дійсні числа

Множина дійсних чисел не є зліченною

$$\Re = \{r_i\}_{i \in N} \quad r_i = (d_1^i, d_2^i, \ldots)$$

$$\begin{array}{lll} r_1 & = & (d_1^1, d_2^1, d_3^1, \ldots) \\ r_2 & = & (d_1^2, d_2^2, d_3^2, \ldots) \\ \text{----} & \text{----} & \text{-----------------} \\ r_k & = & (d_1^k, d_2^k, d_3^k, \ldots) \\ \text{----} & \text{----} & \text{-----------------} \end{array}$$

$$b = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{якщо} \quad d_k^k \neq 0 \\ 1 & \text{якщо} \quad d_k^k = 0 \end{cases}$$

$$\forall k \; b_k \neq d_k^k$$

102

Властивості континуальних множин

A, B – континуальні

$A \cup B, A \times B, A^n$ – континуальні

$A \leftrightarrow (0;1)$, $B \leftrightarrow (0;1) \leftrightarrow (1;2)$
$A \cup B \leftrightarrow (0;1) \cup (1;2) \leftrightarrow$ лема про об єднання $\leftrightarrow$
$\leftrightarrow (0;1) \cup \{1\} \cup (1;2) \leftrightarrow (0;2) \leftrightarrow (0;1)$

$$A \times B = \{(a, b)\}$$
$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$
$$b = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$
$$(a, b) \to (a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots)$$

103

Потужність множин

$$A \to |A|$$

$|A| = |B| \Leftrightarrow A \leftrightarrow B$; $|\varnothing| = 0$; $|\{1, 2, \ldots .n\}| = n$

Потужність множини A менша або дорівнює потужності множини B

$$|A| \preccurlyeq |B| \Leftrightarrow A \leftrightarrow B_1 \subset B$$

Потужність множини A строго менша потужності множини B

$$|A| \prec |B| \Leftrightarrow A \leftrightarrow B_1 \subset B, A \not\leftrightarrow B$$

104

Теорема Кантора

Потужність множини A строго менша за потужність множини(системи) всіх підмножин множини A

$$|A| \prec |\mathbf{B}(A)|$$

$A \leftrightarrow \{\{a\}\}$- множині всіх одноелементних підмножин A

$\{a\} \subset A$, тому $\{\{a\}\}_{a \in A} \subset \mathbf{B}(A)$,

$A \leftrightarrow \{\{a\}\}_{a \in A} \subset \mathbf{B}(A)$,

значить $|A| \preccurlyeq |\mathbf{B}(A)|$

105

Доведення теореми Кантора

Припустимо, що $A \leftrightarrow \mathbf{B}(A)$

$$\varphi : a \xrightarrow{\text{бієкція}} \varphi(a) \subset A$$

$$M = \{a \in A \mid a \notin \varphi(a)\}$$

$$M \subset A \Rightarrow \varphi^{-1}(M) = a_0$$

$$M = \varphi(a_0), a_0 \in A$$

$$\textit{Можливі 2 випадки} : a_0 \in M \ \textit{або} \ a_0 \notin M$$

$$a_0 \in M = \varphi(a_0) \Rightarrow a_0 \notin M$$

$$a_0 \notin M = \varphi(a_0) \Rightarrow a_0 \in M$$

106

Теорема Кантора-Бернштейна

Якщо
множина A еквівалентна підмножині B_1 множини B,
а множина B еквівалентна підмножині A_1 множини A, то
множини A та B еквівалентні між собою.

$$A \leftrightarrow B_1 \subset B,\ B \leftrightarrow A_1 \subset A \Rightarrow A \leftrightarrow B$$

$$|A| \preccurlyeq |B|,\ |B| \preccurlyeq |A| \Rightarrow |A| = |B|$$

107

Доведення теореми Кантора-Бернштейна

Нехай $f: A \to B_1$ та $g: B \to A_1$ – бієкції між відповідними множинами

Позначимо $g(f(A)) = g(B_1) = A_2$,

тоді $B_1 \subset B \Rightarrow g(B_1) \subset g(B) \Rightarrow A_2 \subset A_1$

Позначимо $g(f(A_1)) = A_3$,

тоді $A_1 \subset A \Rightarrow f(A_1) \subset f(A) \Rightarrow g(f(A_1)) \subset g(f(A)) \Rightarrow A_3 \subset A_2$

Позначимо $g(f(A_k)) = A_{k+2}$ Тоді $A_{n+1} \subset A_n$.

Доведення за індукцією:

Базис: $A_2 \subset A_1$, $A_3 \subset A_2$

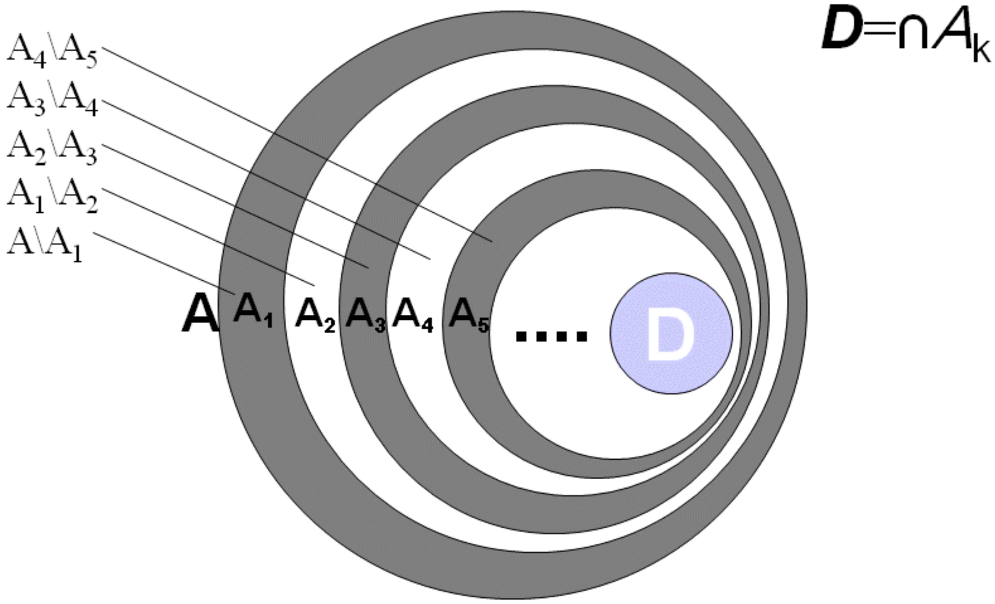
Нехай за припущенням індукції $A_{n-1} \subset A_{n-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow g(f(A_{n-1})) = g(f(A_{n-2})) \Rightarrow A_{n+1} \subset A_n$

108

Продовження теореми Кантора-Бернштейна

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots\ldots \supset A_k \supset A_{2+1} \supset \ldots..$$



109

Продовження теореми Кантора-Бернштейна

Розглянемо кільця $A_{2k+2} \backslash A_{2k+3}$:

$A_{2k+2} \backslash A_{2k+3} = g(f(A_{2k})) \setminus g(f(A_{2k+1}))$ =

оскільки g та f ін'єкції $= g(f(A_{2k} \setminus A_{2k+1}))$

Оскільки f та g – бієкції, з цього випливає:

$A_{2k+2} \backslash A_{2k+3} \leftrightarrow A_{2k} \setminus A_{2k+1}$

Треба довести, що $A \leftrightarrow B$, але $B \leftrightarrow A_1$,

Тому будемо доводити, що $A \leftrightarrow A_1$

110

Закінчення теореми Кантора-Бернштейна

$$A = D \cup (A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup \ldots$$

$$A_1 = D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots$$

$$A = D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots$$

$$(A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots$$

$$A_1 = D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots$$

$$(A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \ldots$$

111

Наслідок теореми Кантора-Бернштейна

Відношення "менше або дорівнює" $\preccurlyeq$ для потужностей є відношенням часткового порядку

1. Рефлективність $|A| \preccurlyeq |A|$ $\quad A \leftrightarrow A \subset A$
2. Антисиметричність $|A| \preccurlyeq |B|,\ |B| \preccurlyeq |A| \Rightarrow |A| = |B|$
   випливає з теореми Кантора-Бернштейна
3. Транзитивність $|A| \preccurlyeq |B|$ $|B| \preccurlyeq |C| \Rightarrow |A| \preccurlyeq |C|$

$|A| \preccurlyeq |B| \Rightarrow A \leftrightarrow B_1 \subset B$

$$\Rightarrow A \leftrightarrow C_2 \subset C_1 \subset C \Rightarrow |A| \preccurlyeq |C|$$

$|B| \preccurlyeq |C| \Rightarrow B \leftrightarrow C_1 \subset C$

112

Континуум гіпотеза

Г. Кантор: «Чи вірно, що якою б не була нескінчена множина дійсних чисел, завжди можна встановити взаємно однозначне відображення або між елементами цієї множини і послідовністю цілих чисел, або між елементами цієї множини і усіма дійсними числами?»

113

Континуум гіпотеза

A – нескінченна множина, $A \subset \Re$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$|N| \preccurlyeq |A| \qquad |A| \preccurlyeq |\Re|$$

Тому завжди $|N| \preccurlyeq |A| \preccurlyeq |\Re|$

А чи може бути: $|N| \prec |A| \prec |\Re|$

114

Континуум гіпотеза

К. Гьодель у 1939 довів, що континуум-гіпотеза не може бути доведена на основі аксіом арифметики й теорії множин.

П.Д.Коен у 1966 встановив, що континуум-гіпотеза не може бути спростована, виходячи з тих же аксіом арифметики й теорії множин.

115

Практичні заняття

ТЕМА 1: МНОЖИНИ, ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ.

Мета: Нагадати пройдені у школі основні поняття теорії множин, операції, співвідношення. Продемонструвати способи доведення включень та рівностей, розв'язання рівнянь з множинами.

Теоретичні питання: Визначення множини, елемента множини, включення множин. Основні операції над множинами (об'єднання, перетин, різниця, доповнення, симетрична різниця, декартовий добуток).

<u>Аудиторне завдання:</u>

1. Довести $a)\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

   $b)\ A-(B-C) = (A-B) \cup (A \cap C)$

2. Розв'язати систему $\left\{ \begin{array}{l} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{array} \right.$ при $B \subset A \subset C$ [6- 1.27]

3. Знайти умови при яких $a)\ (A \cup B) - B = A$

   $b)\ (A - B) \cup B = A$

4. Довести

$a)\ A \cup B \subset C \Leftrightarrow A \subset C, B \subset C \qquad [6-1.13.a]$

$b)\ A \cap B \subset C \Leftrightarrow A \subset \overline{B} \cup C \qquad [6-1.13.б]$

Домашнє завдання:

1. Знайти умови при яких A÷B=A-B
2. Довести, що

$a)\ A \cap B \subset C \Leftrightarrow A \subset \overline{B} \cup C$ [6 – 1.13 .в]

$b)\ A \subset B \cup C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \subset C$ [6 – 1.13 .г]

3. Розв'язати систему рівнянь

$\begin{cases} A - X = B \\ X - A = C \end{cases}$, де $B \subset A$, $A \cap C = \varnothing$ [6- 1.28]

$\begin{cases} A - X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$, де $B \subset A \subset C$ [6- 1.30]

Додаткове завдання:

1. Чи буде твердження вірним для довільних A, B, C:

a) $A \neq B$ та $B \neq C \Rightarrow A \neq C$;

b) $A \subseteq B$ та $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

c) $A_0=A$, $A_i=\{A_{i-1}\}$. Який знак ($\in$ чи $\subset$) і коли можна поставити між A_n та A_m?

2. Довести:

a) $A \triangleright B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$;

b) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cup B = A \triangleright B$. Чи можна стверджувати, що вірно і навпаки ($\Leftarrow$).

3. A, B, C – довільні множини. Довести:

$(A - B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

4. Чи існують такі множини A, B, C, що

$A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$?

5. Довести еквівалентність наступних тверджень:

$a)\ A \cup B = \Omega;$

$b)\ \overline{A} \subset B;$

$c)\ \overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing.$

ТЕМА 2: ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЙ НАД МНОЖИНАМИ.

Мета: Навчити перетворювати вирази в алгебрі множин, доводити тотожності, встановлювати закономірності між операціями над множинами.

Теоретичні питання: Визначення декартового добутку, операцій над множинами, основні співвідношення між операціями.

Аудиторне завдання:

1.Визначити операції $\cup$ та - через операції $\cap$ та ÷. [6- 1.17.a]

2.Знайти всі підмножини множин $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, {x}, {1,2}. [6- 1.20]

3.Довести, що існують множини A та B такі що $A \times B \neq B \times A$. Коли $A \times B = B \times A$? [6- 2.1.a]

4.Довести, що $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$. [6- 2.4.a]

Домашнє завдання:

1.Визначити операції $\cap$ та - через операції $\cup$ та $\div$. [6- 1.17.б]

2.Визначити операції $\cup$ та $\cap$ через операції - та $\div$. [6- 1.17.в]

3.Довести, що не можна виразити - через $\cap$ та $\cup$. [6- 1.18.а]

4.Довести, що не можна виразити $\cup$ через $\cap$ та -. [6- 1.18.б]

5.Довести, що якщо $A\neq\varnothing$ та $C\neq\varnothing$,
то $A\subset B, C\subset D \Leftrightarrow A\times C\subset B\times D$. [6- 2.3.а]

6.Довести, що $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$. [6- 2.6.г]

Додаткове завдання:

1. Довести шляхом перетворень:
   a) $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)=A\cup B$;
   b) $(A\cap B)\cup(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C\cap D)=A\cap B$.

2. Довести, що умови:
   a) $A\subseteq B$,
   b) $A\cap B=A$,
   c) $A\cup B=B$
   еквівалентні між собою.

3. Довести, що $B(A\cap C) = B(A) \cap B(C)$, де $B(X)$ - булеан множини X.

4. Довести, якщо $A\subset B$, то $B(A)\subset B(B)$,
де $B(X)$ - булеан множини X.

5. Знайти множини:
   a) $\varnothing\cap\{\varnothing\}$;
   b) $\{\varnothing\}\cap\{\varnothing\}$;
   c) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$;
   d) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$;
   e) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$.

6. Довести, що $A\cap B = A\cup B \Leftrightarrow A=B$.

ТЕМА 3: БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ.

Мета: Навчити діям з бінарними відношеннями, доводити тотожності, встановлювати закономірності між операціями над бінарними відношеннями.

Теоретичні питання: Визначення бінарного відношення, операцій над бінарними відношеннями.

Аудиторне завдання:

1.Довести, що $(R_1\cap R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cap R_2^{-1}$. [6- 2.12.г]

2. Довести, що.

а) $R_1\subset R_2 \Rightarrow R_1^{-1}\subset R_2^{-1}$. [6- 2.18.в]

б) $R_1\subset R_2 \Rightarrow Q\circ R_1\subset Q\circ R_2$, для будь-якого відношення Q. [6- 2.18.а]

3. Довести, що $R=I_A \Leftrightarrow R\circ Q=Q\circ R=Q$, для будь-якого Q.

4.Знайти область визначення та область значень відношення R, а також R^{-1}, $R \bullet R$, $R \bullet R^{-1}$, $R^{-1} \bullet R$, де
$R = \{(x, y) | x, y \in N, x \text{ ділить } y\}$. [6- 2.8.а]

Домашнє завдання:

1.Довести, що $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$. [6- 2.12.в]

2.Довести, що $R_1 \subset R_2 \Rightarrow R_1 \circ Q \subset R_2 \circ Q$, для будь-якого відношення Q. [6- 2.18.б]

3.Знайти область визначення та область значень відношення R, а також R^{-1}, $R \bullet R$, $R \bullet R^{-1}$, $R^{-1} \bullet R$, де

а) $R = \{(x, y) | x, y \in D, x + y \leq 0\}$ [6- 2.8.в]

б) $R = \{(x, y) | x, y \in D, 2x \geq 3y\}$ [6- 2.8.г]

4.Для яких бінарних відношень $R^{-1} = \overline{R}$. [6- 2.13]

Додаткове завдання:

1. Показати що:
  - **a)** для R, Q – відношень еквівалентності, $R^\circ Q$ – не завжди відношення еквівалентності;
  - **b)** для R, Q – відношень еквівалентності, $R \cup Q$ – не завжди відношення еквівалентності;
  - **c)** для R, Q – іррефлексивних відношень, $R^\circ Q$ – не завжди іррефлексивне відношення;
  - **d)** для R, Q – транзитивних відношень, $R \cap Q$ –транзитивне відношення.

2. Довести, що для довільних рефлексивних відношень R_1 та R_2 виконується $R_1 \cup R_2 \subseteq R_1{}^\circ R_2$.

3. Довести, що композиція $R_1{}^\circ R_2$ транзитивних відношень R_1 та R_2 є транзитивним відношенням тоді і тільки тоді, коли $R_1{}^\circ R_2 = R_2{}^\circ R_1$.

4. Довести, що для рефлексивного і транзитивного відношення R виконується $R^\circ R = R$. Чи має місце обернене твердження?

ТЕМА 4: ФУНКЦІОНАЛЬНІ ВІДНОШЕННЯ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ.

Мета: Показати, що відображення - це частковий випадок відношень. Навчити класифікувати відображення, знаходити образи та прообрази множин, доводити твердження про прямі та обернені відображення.

Теоретичні питання: Визначення функціонального відношення. Області відправлення та прибуття. Класифікація відображень. Обернене відображення. Образ та прообраз множини.

Аудиторне завдання:

1. Нехай f - функціональне відношення. За яких умов f^{-1} також буде функціональним відношенням. [6- 2.23.а]
2. Нехай f, g - бієкції, такі що $f: A \longrightarrow B$, $g: A_1 \longrightarrow B_1$. Побудувати бієкцію $A \times A_1 \longrightarrow B \times B_1$. [6- 2.24.а]

3. Нехай f, g - відображення, такі що $f{:}A \longrightarrow B$, $g{:}A \longrightarrow B$, а також δ_f=A, δ_g=A. Довести що об'єднання (перетин) цих відображень буде відображенням тоді і тільки тоді, коли f=g. [6- 2.30]
4. Довести, що для будь-якого відображення f $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$. [6- 2.36]
5. Довести, що для будь-якого відображення f $f(A) = \varnothing \Leftrightarrow A \cap \delta_f = \varnothing$, де δ_f - область визначення відображення f. [6- 2.37]

<u>*Домашнє завдання:*</u>

1. Як треба змінити область відправлення та область прибуття, щоб відображення $x^2{:}D \to D$ стало ін'єкцією, сюр'єкцією, бієкцією?
2. Знайти при цьому відображенні образи множин [-1,+1], (0,+1).
3. Знайти при цьому відображенні прообрази множин $(-1,+1],[-2,-1)$.
4. Нехай f, g - функціональні відношення $f{:}A \to B$, $g{:}B \to C$. За яких умов $f \bullet g$ буде бієкцією. [6- 2.23.б]
5. Нехай f, g - бієкції, такі що $f{:}A \longrightarrow B$, $g{:}A_1 \longrightarrow B_1$. Побудувати бієкцію $A \cup A_1 \longrightarrow B \cup B_1$, якщо $A \cap A_1 = \varnothing, B \cap B_1 = \varnothing$. [6- 2.24.в]
6. Довести, що можна побудувати бієкцією $A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$. [6- 2.25.б]
7. Довести, що f задовольняє умові $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ для будь-яких множин A, B, тоді і тільки тоді, коли f є ін'єкцією. [6- 2.33]
8. Довести, що $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$ для будь-якого відображення f. [6- 2.34]
9. Довести, що для будь-якого відображення f $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. [6- 2.39]
10. Довести, що для будь-якого відображення f $f^{-1}(A) = \varnothing \Leftrightarrow A \cap \rho_f = \varnothing$, де ρ_f - область значень відображення f. [6- 2.40]

<u>*Додаткове завдання:*</u>

1. Побудувати функцію f: A $\to$ A, де A = {0,1}, що немає оберненої.
2. Нехай f: A $\to$ B, g: B $\to$ C відображення. Довести, що:
a) якщо f та g ін`єктивні то f ° g - ін`єктивне;
b) якщо f та g сюр`єктивні то f ° g - сюр`єктивне.
3. Нехай A - скінченна множина та B $\subset$ A. Показати, що якщо *f*: A $\to$ B - бієкція, то A = B.

ТЕМА 5: СПЕЦІАЛЬНІ КЛАСИ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ: ВІДНОШЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ.

Мета: Навчити визначати відношення еквівалентності, будувати класи еквівалентності, розбиття на класи еквівалентності по відношенню еквівалентності і навпаки.

Теоретичні питання: Визначення відношення еквівалентності та його властивостей, розбиття, класи еквівалентності. Теорема про зв'язок еквівалентності та розбиття.

Аудиторне завдання:

1.Побудувати рефлексивне, симетричне, не транзитивне бінарне відношення на множині A з мінімальною кількістю елементів. [6- 3.6.а]

2.Чи буде перпендикулярність відношенням еквівалентності на множині прямих площини. [6- 3.11.б]

3.Довести, що якщо R відношення еквівалентності, то й R^{-1} також відношення еквівалентності. [6- 3.14]

4.Довести, що перетин довільної системи еквівалентностей є еквівалентність. [6- 3.20]

5.Чи буде Q відношенням еквівалентності на множині пар дійсних чисел $((a;b);(c;d))\in Q \Leftrightarrow a+d=b+c$. [6- 3.10.б]

6.Побудувати відношення еквівалентності R_1, R_2 на множині $\{1,2,3\}$, такі, що $R_1 \cup R_2$ не є відношенням еквівалентності. [8-8.14]

7.Побудувати всі можливі розбиття множини $\{1,2,3\}$ та вказати відповідні відношення еквівалентності. [8- 8.27]

8.Довести, що для будь-якого відношення еквівалентності R $xRy \Rightarrow [x]_R=[y]_R$

9.Побудувати відношення еквівалентності на множині $\Re$ дійсних чисел по розбиттю $\{[n;n+1)\}_{n\in Z}$.

10.Побудувати класи еквівалентності на множині Z цілих чисел для відношення $(x,y)\in R \Leftrightarrow x \equiv y \mod 7$.

Домашнє завдання:

1.Довести, що добуток $R_1 \circ R_2$ симетричних відношень R_1, R_2 буде симетричним тоді і тільки тоді, коли $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. [6- 3.4]

2.Побудувати бінарне відношення:

а. рефлексивне, антисиметричне, але не транзитивне;

б. рефлексивне, транзитивне, але не симетричне;

в. антисиметричне, транзитивне, але не рефлексивне. [6- 3.6.б,в,г]

3.Довести, що будь-яке відношення R симетричне та антисиметричне одночасно, буде також і транзитивним. [6- 3.8]

4.Довести, що S є відношенням еквівалентності

$$((a,b),(c,d))\in S \Leftrightarrow \begin{cases} a\times d = b\times c, & \text{якщо } b\neq 0, d\neq 0 \\ a=c, & \text{якщо } b=0, d=0 \end{cases}.$$ [6- 3.10.в]

5.Довести, що R є відношенням еквівалентності на множині дійсних чисел $(a,b)\in R \Leftrightarrow$ (a-b)-раціональне число. [6- 3.12]

6.Довести, що якщо R еквівалентність на A, то $R\circ R = A^2 \Leftrightarrow R = A^2$. [6- 3.16.а]

7.Побудувати відношення еквівалентності на множині дійсних чисел по розбиттю $\{[n^2,(n+1)^2)\}_{n\in\{0\}\cup N}$.

8.*Довести, що об'єднання $R_1 \cup R_2$ еквівалентностей R_1, R_2 є еквівалентністю тоді і тільки тоді коли $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$. [6- 3.21]

9.*Довести, що добуток $R_1 \circ R_2$ еквівалентностей R_1, R_2 є еквівалентністю тоді і тільки тоді коли $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. [6- 3.22]

Додаткове завдання:

1. R – довільне бінарне відношення на скінченній множині A. Сформулювати алгоритм, який дозволяє побудувати найменше відношення еквівалентності Q на A, таке що $R \subseteq Q$. Застосувати алгоритм до конкретного прикладу.

2. Довести, що існує взаємно однозначна відповідність між усіма можливими еквівалентностями на множині A та всіма розбиттями множини A.

3. A - скінченна множина. Які відношення еквівалентності дають найбільшу й найменшу кількість класів еквівалентності?

4. Довести, що довільне відношення еквівалентності породжує таке розбиття, що для довільних x, y $\in$ A або $[x] = [y]$, або $[x] \cap [y] = \varnothing$.

5. Якщо $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ - розбиття A та A - скінченна множина, показати що $|A| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$.

6. Нехай R - відношення на A. Показати, що існує таке тільки одне відношення R_e, що:

1) $R \subseteq R_e$,

2) R_e - відношення еквівалентності на A,

3) Якщо R' - деяке відношення еквівалентності на A та $R \subseteq R_e$, то $R_e \subseteq R'$.

R_e називають найменшим відношенням еквівалентності, що містить R.

ТЕМА 6: СПЕЦІАЛЬНІ КЛАСИ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ: ВІДНОШЕННЯ ЧАСТКОВОГО ТА ЛІНІЙНОГО ПОРЯДКУ.

Мета: Навчити визначати відношення часткового та лінійного порядку, шукати мінімальні, максимальні, найменші, найбільші елементи впорядкованих множин. Усвідомити різницю між найменшим (найбільшим) та мінімальним (максимальним) елементами. Будувати впорядковані множини з заданими властивостями, а також будувати на заданій множині відношення порядку. Користуватись графічним зображенням частково впорядкованих множин.

Теоретичні питання: Визначення відношення часткового та лінійного порядку, мінімального, максимального, найменшого, найбільшого елементів. Леми про зв'язок між мінімальними (максимальними) та найменшими (найбільшими) елементами.

Аудиторне завдання:

1. Чи буде $\subset$ відношенням часткового порядку на множині всіх підмножин Ω. Чи буде воно відношенням лінійного порядку. [6- 3.26]
2. Довести, що якщо R - відношення часткового порядку, то й R^{-1} - частковий порядок. [6- 3.31]
3. Чи вірно попереднє твердження для лінійного порядку.
4. Довести, що якщо деяке відношення S іррефлексивне та транзитивне, то відношення $R : xRy \Leftrightarrow xSy$ *або* $x = y$ є відношенням часткового порядку. [6- 3.37]

5. Побудувати частково впорядковану множину з 2 мінімальними та 3 максимальними елементами. (Спробуйте скористуватись відношенням ділити націло).
6. Графічно зобразити частково впорядковану множину з попереднього прикладу.
7. Довести, що будь-яка впорядкована множина з n (n>0) елементів, має хоча б один мінімальний і хоча б один максимальний елементи. [6- 3.41.а]
8. Побудувати відношення лінійного порядку на множині N^2.

<u>*Домашнє завдання:*</u>

1. Довести, що якщо S відношення часткового порядку, то відношення R: $xRy \Leftrightarrow xSy \;\wedge\; x \neq y$ є відношенням іррефлексивним та транзитивним. [6- 3.36]
2. Довести, що будь-яку множину з N елементами можна лінійно впорядкувати. [6- 3.43]
3. Побудувати частково впорядковану множину з рівно одним мінімальним елементом, але без найменшого елемента. [6- 3.30.в]
4. Побудувати частково впорядковану множину з N мінімальними та M максимальними елементами, $0 < N, M < \infty$.
5. Нехай частково впорядкована множина A має N елементів. Довести, що для довільного $a \in A$ знайдуться такі $b, c \in A$, що $a \leq b$, $c \leq a$ і b є максимальним, а c - мінімальним елементом. [6- 3.41.б]
6. Побудувати відношення лінійного порядку на множині $N \cup N^2 \cup N^3 \cup \ldots \cup N^n \cup \ldots$. [6- 3.42.б]
7. *Нехай R_1 та R_2 відношення лінійного порядку. Коли $R_1 \circ R_2$ також буде лінійним порядком. [6- 3.40]

<u>*Додаткове завдання:*</u>

1. Довести, що якщо R, Q – часткові порядки на множині A, то $R \cap Q$ – частковий порядок на множині A.

2. Показати, що довільний частковий порядок R на скінченній множині A можна продовжити до лінійного порядку $Q \supset R$ на множині A.

3. Довести, що якщо R – частковий (лінійний) порядок на X, та $A \subset X$, то $R \cap A^2$ - частковий порядок на множині A.

4. R_1, R_2 – часткові порядки на множині A. Чи буде:

a) $R_1 \circ R_2$ - частковим порядком?

b) $R_1 \cup R_2$ - частковим порядком?

5. Нехай $\leq$ і $<$ - це традиційні відношення порядку на N. Довести, що:

a) $< \circ < \neq <$;

b) $\leq \circ < = <$;

c) $\leq \circ \geq = N^2$.

6. Нехай A - довільна множина й R - відношення на множині $B(A) \times B(A)$ (B(A) - булеан множини A). Визначити чи є R відношенням часткового (лінійного) порядку, де R задано наступним чином:

a) (A;B) R (C;D) тоді й тільки тоді, коли $(A \div B) \subset (C \div D)$;

b) (A;B) R (C;D) тоді й тільки тоді, коли $A \subset C$ й $B \subset D$.

7. Чи буде відношення R на N^2 відношенням часткового порядку:

a) (a,b) R(c,d) тоді й тільки тоді, коли $a \le c$ й $b \le d$;

b) (a,b) R(c,d) тоді й тільки тоді, коли $a \le c$ й $b \ge d$.

8. Нехай відношення R визначено на множині додатніх раціональних чисел наступним чином: (a/b) R (c/d) тоді й тільки тоді, коли $a*d \le b*c$. Чи є R відношенням лінійного порядку?

ТЕМА 7: ПОТУЖНІСТЬ МНОЖИН. СКІНЧЕННІ ТА ЗЛІЧЕННІ МНОЖИНИ.

Мета: Засвоєння понять скінченних, нескінченних, зліченних множин та їх властивостей. Операції, що зберігають зліченність. Прийоми визначення зліченності, класичні зліченні множини.

Теоретичні питання: Еквівалентність множин. Скінченна, нескінченна та зліченна множина, кількість елементів. Операції над зліченними множинами. Зв'язок нескінченності і зліченності.

Аудиторне завдання:

1. Довести, що скінченні множини еквівалентні тоді і тільки тоді, коли кількість їх елементів співпадає. [6- 4.6.б]
2. Довести, що скінченна множина не еквівалентна ніякій своїй власній підмножині (власній надмножині). [6- 4.6.a]
3. Довести, що множина нескінченна тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна деякій своїй власній підмножині. [6- 4.8]
4. Довести, що якщо A та B зліченні, то $A \cup B$ та $A \times B$ - зліченні множини. [6- 4.12.a]
5. Довести, що множина всіх скінченних послідовностей, складених з елементів деякої зліченної множини, є множина зліченна. [6- 4.16]
6. Чи можна в попередньому прикладі замість скінченних послідовностей брати нескінченні.

Домашнє завдання:

1. Довести, що не порожня множина A є зліченною або скінченною тоді і тільки тоді, коли вона є множиною значень деякої функції $f: N \to A$. [6- 4.10.б]
2. Довести, що якщо із зліченної множини вилучити скінченну підмножину, то залишок буде зліченним. [6- 4.11]
3. Довести, що множина многочленів однієї змінної з цілими коефіцієнтами є зліченною. [6- 4.18]

4. Довести, що множина алгебраїчних чисел (коренів многочленів однієї змінної з цілими коефіцієнтами) є зліченною. [6- 4.19]
5. Довести, що довільна множина відкритих інтервалів, що не перетинаються, є не більш як зліченною. [6- 4.20]
6. Довести, що множина точок розриву визначеної на $\Re$ монотонної функції є не більш як зліченною. [6- 4.23]

Додаткове завдання:

1. Показати, що для скінченної множини A $|B(A)| = 2^{|A|}$.
2. Нехай область визначення функції є зліченною. Довести, що область значень цієї функції є зліченною або скінченною.

ТЕМА 8: КОНТИНУАЛЬНІ МНОЖИНИ, ПОРІВНЯННЯ ПОТУЖНОСТЕЙ.

Мета: Усвідомити що таке континуальні множини, які з ними можна виконувати операції, різноманітність континуальних множин. Застосування теореми Кантора-Бернштейна. Відсутність найбільшої потужност,і як наслідок теореми Кантора.

Теоретичні питання: Потужність множини дійсних чисел, операції, що зберігають континуальність. Теореми Кантора та Кантора-Бернштейна.

Аудиторне завдання:

1. Встановити бієкцію між квадратом та площиною. Записати цю відповідність в аналітичній формі. [6- 4.28]
2. Довести, що множини точок квадрату та відрізку еквівалентні. [6- 4.25]
3. Яка потужність множини ірраціональних чисел. [6- 4.30]
4. Яка потужність множини всіх неперервних функцій дійсного аргументу. [6- 4.36.б]
5. Довести, що об'єднання континуальної множини континуальних множин - континуальне.

Домашнє завдання:

1. Яка потужність множини всіх функцій дійсного аргументу з рівно однією точкою розриву.
2. Довести, що (0,1) еквівалентно [0,1]. Записати аналітично цю відповідність. [6- 4.24.а]
3. Довести існування неалгебраїчних (трансцендентних) чисел. [6- 4.31]
4. Яка потужність множини всіх нескінченних послідовностей дійсних чисел. [6- 4.36.а]
5. Яка потужність множини всіх монотонних функцій дійсного аргументу. [6-.4.36.в]
6. Довести, що потужність множини всіх функцій дійсного аргументу більша за континуум. [6- 4.39]

Додаткове завдання:

1. Нехай A - довільна, не обов`язково скінченна множина. Показати, що множини:
   - булеан A - B(A) та
   - {f | f - всюди визначена функція, що відображає A в {0, 1}}

   - рівнопотужні.
2. Довести або спростувати твердження:
   a) $A \subset B$, $C \subset D$, $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D \Rightarrow (B \setminus A) \leftrightarrow (D \setminus C)$;
   b) $A \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow D$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap D = \varnothing \Rightarrow (A \div C) \leftrightarrow (B \div D)$.

Література до модуля 1

ОСНОВНА

1. http://www.diskmat.kiev.ua
2. Дискретная математика. Учебное пособие. - К.:Изд-во Киевского университета, 1977. 57 с.
3. Калужнін Л.А., Королюк В.С. Алгоритми і математичні машини.- К.:«Радянська школа», 1964. – 280 с.
4. Калужнін Л.А., Суданський В.І. Елементи теорії множин та математичної логіки. - К.:«Вища школа», 1976. – 76 с.
5. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський А.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики. – К.:Наукова думка, 2002. - 579 с.
6. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. - М.: Наука, 1975.
7. Трохимчик Р.М. Множини і відношення: Навч.посібник.-Київ, 2001. – 37 с.
8. Трохимчук Р.М. Дискретна математика. – К.:МАУП, 2006. – 620 с.
9. Трохимчук Р.М. Збірник задач з теорії множин і відношень.- К.: РВЦ “Київський університет”, 2000. - 80 с.
10. Трохимчук Р.М. Основи дискретної математики:Практикум. – К.:МАУП, 2004. - 168 с.

ДОДАТКОВА

1. Андерсен Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика.- М.:Издательский дом «Вильямс», 2003. – 960 с.
2. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика. - М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

3. Капитонова Лекции по дискретной математике /Авторы: Ю.В.Капитонова, С.Л.Кривой, А.А.Летичевский, Г.М.Луцкий/ - СПб.:БХВ-Петербург, 2004. – 624 с.
4. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський А.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики: Підручник. Том 1.-Київ:Видавництво «ЛітСофт», 2000. – 380 с.
5. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський А.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики: Підручник. Том 2.-Київ:Видавництво «ЛітСофт», 2000. – 370 с.
6. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. - М.: Наука, 1990.
7. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. - СПб.: Питер, 2001.

Українсько-англійський тематичний словник з дискретної математики.

Розділ «Множини»

асоціативність	associativity
бієкція	bijection
булеан (множини)	power set
висловлення	proposition
віднімання	subtraction
відношення	relation
— антисиметричне	antisymmetric relation
— бінарне	binary relation
— графік	graph of a relation
— еквівалентності	equivalence relation
— ін'єктивне	injective relation
— обернене	converse relation, inverse relation, transpose relation, opposite relation
— область визначення	domain of a relation
— область значень	range of a relation
— одно однозначне	one-to-one relation
— рефлексивне	reflexive relation
— рівності	identity relation, diagonal (relation)
— симетричне	symmetric relation
— тернарне	ternary relation
— толерантності	tolerance relation
— тотальне	total relation
— функціональне	functional relation
— часткового порядку	partial order (relation)
відповідність	correspondence
— взаємно однозначна	one-to-one correspondence

включення	containment, inclusion
властивість	property
впорядкована пара	ordered pair
декартів добуток	Cartesian product
диз'юнкція	disjunction
дистрибутивність	distributivity
ділення	division
дільник	divisor, factor
добуток	product
доведення	proof
— від супротивного	proof by contradiction
— за індукцією	proof by induction
додавання	addition
доповнення	complement
еквівалентні множини	equinumerous sets
елемент	element, member
— максимальний	maximal element
— мінімальний	minimal element
— найбільший	greatest element
— найменший	least element
закон	law
— виключення третього	law of excluded middle
замикання	closure
заперечення	negation
ідемпотентність	idempotence
ізоморфізм	isomorphism
імплікація	implication
індуктивне припущення	induction hypothesis
ін'єкція	injection
квантор загальності	universal quantifier
— існування	existential quantifier
клас еквівалентності	equivalence class
композиція	composition

комутативність	commutativity
контрприклад	counterexample
кон'юнкція	conjunction
кортеж	tuple
кратне	multiple
лінійний порядок	total order, linear order
логічна зв'язка	propositional connective
математична індукція	mathematical induction
множення	multiplication
множина	set
— дійсних чисел	(set of) real numbers
— зліченна	countable set
— континуальна	set with cardinality of the continuum
— натуральних чисел	(set of) natural numbers
— нескінченна	infinite set
— одноелементна	singleton
— порожня	empty set
— раціональних чисел	(set of) rational numbers
— скінченна	finite set
— універсальна	universal set
— цілих чисел	(set of) integers
— частково впорядкована	partially ordered set (poset)
мультимножина	multiset
надмножина	superset
належати	to be a member of
належність	membership
не більше ніж зліченна	at most countable
об'єднання	union
образ	image
операція	operation
остача	remainder, residue
перетин	intersection
підмножина	subset

— власна	proper subset
— нетривіальна	nontrivial subset
подільність	divisibility
порівняльність	totality
послідовність	sequence
потужність (множини)	cardinality (of a set)
правила де Моргана	De Morgan's laws
правило	law
проекція (множини)	projection
прообраз	preimage, inverse image
просте число	prime (number)
рівнопотужність	equinumerosity
різниця	difference
розбиття	partition
симетрична різниця	symmetric difference
співвідношення для	property of
строгий порядок	strict order
сюр'єкція	surjection
точка розриву	discontinuity
— скінченного розриву	jump discontinuity, step discontinuity
умова достатня	sufficient condition
— необхідна	necessary condition
фактормножина	quotient set
функції звуження	restriction of a function
— область відправлення	domain of a function, set of departure of a function
— область прибуття	codomain of a function, set of destination of a function
функція	function, map, mapping
— всюди визначена	total function
— обернена	inverse (function)
— тотальна	total function
— часткова	partial function
цифра	numerical digit

частка	quotient
числення	calculus
— висловлювань	propositional calculus
— предикатів	predicate logic