Універсальні функції
S-m-n теорема

F^n: клас всіх функцій з F фіксованої арності n.

Ф-я $u(y, x_1, \dots, x_n)$ – <u>універсальна</u> для класу F^n, якщо
- $\forall m$: $u(m, x_1, \dots, x_n) \in F^n$,
- $\forall f \in F^n$ $\exists m$: $f(x_1, \dots, x_n) = u(m, x_1, \dots, x_n)$ для всіх значень $x_1 \dots x_n$

<u>Теорема 1</u>. Нехай T – клас всюди визначених n-арних функцій на N, що містить $\mathbf{O}$, $\mathbf{S}$, I_m^n та замкнений відносно суперпозиції.
Тоді, якщо u – універсальна ф-я для T^n, то $u \notin T$.

Наслідок 1. Функція, універсальна для класу n-арних РФ, не $\in$ ЧРФ.

Наслідок 2. Функція, універсальна для класу n-арних ПРФ, не $\in$ ПРФ.

Теорема 2. Існує РФ, універсальна для n-арних ПРФ.

Наслідок. Існує РФ не ПРФ.

Теорема 3. Існує ЧРФ, універсальна для класу n-арних ЧРФ:

$$u(y, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_y^n(x_1, \ldots, x_n).$$

МНР-програма, що обчислює універсальну ЧРФ — універсальна МНР-програма. Вона декодує число y в програму P_y і моделює її роботу: u — це функція φ_k^{n+1}.

Аналогічно для МТ: універсальну МТ теж можна задати явно.

Для кожного фіксованого значення $a_1, \dots, a_m$ аргументів $x_1, \dots, x_m$ $(m+n)$-арна ЧРФ $\varphi_z^{m+n}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ стає n-арною ЧРФ $\varphi_k^n(y_1, \dots, y_n)$.
Її індекс k ефективно знаходиться за z та $a_1, \dots, a_m$ — через $(m+1)$-арну РФ.

S-m-n-теорема

$\forall m, n \geq 1$ існує $(m+1)$-арна РФ $S_m^n(z, x_1, \dots, x_m)$ така, що $\forall z, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$

$$\varphi_z^{m+n}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = \varphi^n_{S_m^n(x_1, \dots, x_m)}(y_1, \dots, y_n).$$

Залежність S_m^n від n можна знять, якщо задавати ЧРФ через МТ.

Строгена S-m-n

Для кожної ЧРФ $f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ існує РФ $S(x_1, \dots, x_m)$ така: $\forall x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$

$$f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = \varphi^n_{S(x_1, \dots, x_m)}(y_1, \dots, y_n).$$

Суперстроцена S-m-n (при $m=n=1$)

$\forall$ ЧРФ $f(x,y)$ $\exists$ РФ $s(x)$: $f(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}$.