1. <u>Лінійні оператори простої структури.</u>

Будемо вважати, що всі опер. діють на скінч. вимірному вект. пр. V над полем F, $\dim V = n$.

<u>Озн.</u> Лін. опер. $\mathcal{A}$ на вект. пр. V наз. оператором простої структури, якщо простір є прямою сумою підпросторів розмірності 1, інваріантних відносно оператора $\mathcal{A}$.

$$V = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n, \quad \dim M_i = 1, \ i = \overline{1,n}.$$

<u>Озн.</u> Квадратна матриця
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

наз. діагональною, якщо $\alpha_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $i,j = \overline{1,n}$.

Іншими словами, всі ненульові елементи діагональної матриці стоять на головній діагоналі.

<u>Теорема.</u> Для оператора $\mathcal{A}$ на скінч. вим. вект. пр. V наступні умови еквівалентні:

1) Оператор $\mathcal{A}$ є оператором простої структури
2) В просторі $\exists$ базис, який складається з власних векторів оператора $\mathcal{A}$
3) В просторі $\exists$ базис, в якому оператору $\mathcal{A}$ відповідає діагональна матриця.

<u>Достатня умова оператора простої структури.</u>

<u>Теор.</u> Нехай $\mathcal{A}$ – лін. опер. на скінч. вим. вект. пр. V над п. F, всі корені його характеристичного многочлена $\chi(t)$ різні і належать основному полю F. Тоді оператор $\mathcal{A}$ є оператором простої структури.

<u>Заув.</u> Ця теорема дає лише достатню умову оператора простої структури.

<u>Критерій оператора простої структури</u>

Теор 1 (Критерій 1) Лін. опер. A на вект. пр. V над полем F є оператором простої структури $\Leftrightarrow$

1) всі корені його хар. многочлена $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ належать основному полю F;
2) розмірність кожного підпр. L_{λ_i}, $i = \overline{1,s}$ дорівнює кратності відповідного власного числа λ_i як кореня хар. многочлена.

Теор 2 (Критерій 2). Лін. опер. A на вект. пр. V над полем F є оператором простої структури $\Leftrightarrow$

1) всі корені його хар. мног. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ належать основному полю F;
2) простір $V = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus L_{\lambda_s}$.

2. Закон інерції квадратичних форм.

Нехай $f(x)$ — кв. функція на скінч. вим. вект. пр. V над полем $\mathbb{R}$. Тоді в $\forall$ базисі простору вона задається деякою кв. формою. Кв. функцію можна звести до канонічного вигляду. Це означає вибір базису, в якому $f(x)$ задається канонічною кв. формою. Але цей базис можна знайти різними способами. Тому для даної кв. функції $\exists$ багато таких базисів і багато канонічних кв. форм. Але для відповідних форм виконується закон інерції кв. форм.

Теорема (закон інерції) Незалежно від способу зведення кв. функції на скінч. вим. вект. пр. до канонічного вигляду у відповідних канонічних кв. формах число додатніх коефіцієнтів, число від'ємних коефіцієнтів, а тому і число ненульових коефіцієнтів є величинами сталими.

Доведення (закону інерції)

Нехай $f(x)$ кв. функція на скінч. вим. дій. пр. V,

$Б_1: a_1, a_2, \dots, a_n$, $Б_2: b_1, b_2, \dots, b_n$ – базиси простору, в яких функція $f(x)$ задається канонічними кв. формами.

Припустимо в базисі $Б_1$ функції $f(x)$ відповідає кв. форма

$$f(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_k x_k^2 - \lambda_{k+1} x_{k+1}^2 - \lambda_{k+2} x_{k+2}^2 - \dots - \lambda_{k+s} x_{k+s}^2 +$$
$$+ 0 \cdot x_{k+s+1}^2 + \dots + 0 \cdot x_n^2, \quad \lambda_i > 0, \ i = \overline{1, k+s}.$$

В базисі $Б_2$ функції $f(x)$ відповідає кв. форма

$$f(x) = \gamma_1 y_1^2 + \gamma_2 y_2^2 + \dots + \gamma_m y_m^2 - \gamma_{m+1} y_{m+1}^2 - \gamma_{m+2} y_{m+2}^2 - \dots - \gamma_{m+p} y_{m+p}^2 +$$
$$+ 0 y_{m+p+1}^2 + \dots + 0 \cdot y_n^2, \quad \gamma_j > 0, \quad j = \overline{1, m+p}.$$

Треба показати, що $k = m$ і $s = p$.

Покажемо спочатку, що $k+s = m+p$. Оскільки в б. $Б_1$ кв. функція $f(x)$ задається канонічною кв. формою, то в цьому базисі матриця кв. функції діагональна. На діагоналі матриці стоять коефіцієнти при квадратах змінних кв. форми. Тобто ранг цієї матриці $= k+s$.

Аналогічно в б. $Б_2$ кв. функції $f(x)$ відповідає діагональна матриця, ранг якої $= m+p$. Ранг матриці білінійної функції не залежить від вибору базису, тому $k+s = m+p$.

Покажемо тепер, що $k = m$. Доведемо це від супротивного. Припустимо $k \neq m$ і для визначеності вважаємо $k > m$.

Означимо підпростори $L = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$, $M = \langle b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_n \rangle$.

Тоді $\dim(L \cap M) = \dim L + \dim M - \dim(L + M)$.

Але $\dim L + \dim M = k + n - m = n + (k-m) > n$,

$\dim(L+M) \leq n$, тому $\dim(L \cap M) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ ненульовий вектор $a \in L \cap M$, $a \neq \theta$.

Оскільки $a \in L$, то $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$,

тобто в базисі пр. $Б_1$ вектор a має координати $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0)$.

$f(a) = \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 + \dots + \lambda_k \alpha_k^2$. Оскільки $a \neq \theta$, то серед координат $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ є ненульові, і враховуючи $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, k}$, отримаємо $\overline{f(a) > 0}$.

Оскільки $a \in M$, то $a = \beta_{m+1} b_{m+1} + \beta_{m+2} b_{m+2} + \dots + \beta_n b_n$.

Тобто в б. $Б_2$ вектор a має координати $a = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m}, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \dots, \beta_n)$.

Тоді $\underline{f(a)} = -\gamma_{m+1} \beta_{m+1}^2 - \gamma_{m+2} \beta_{m+2}^2 - \dots - \gamma_{m+p} \beta_{m+p}^2 + 0 \cdot \beta_{m+p+1}^2 + \dots + 0 \cdot \beta_n^2 \underline{\leq 0}$,

оскільки $\gamma_j > 0$, $j = \overline{m+1, m+p}$.

Прийшли до суперечності: $f(a) > 0$ і $f(a) \leq 0$.

$\Rightarrow k = m$ і оскільки, як доведено, $k+s = m+p$, то $s = p$. $\square$

3. $\begin{pmatrix} 6 & -7 & 9 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (a_1|a_2|a_3)$ $\quad a_1 = (6;2;1)$ $\quad b_1 = (-2;9;11)$

$a_2 = (-7;-1;-1)$ $\quad b_2 = (0;4;5)$

$a_3 = (9;1;1)$ $\quad b_3 = (-4;-36;-46)$

$$\begin{pmatrix} 6 & -7 & 9 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank} = 3$$

Отже, $\{a_1, a_2, a_3\}$ – базис простору, тоді, за лемою, $\exists!$ лінійне перетворення $\varphi(a_i) = b_i$, $i = \overline{1,3}$.

$$T_{e\to a} = (a_1|a_2|a_3) = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 9 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad T_{a\to e} = T_{e\to a}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -7 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -7 & 9 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -4 \end{array}\right)$$

$e_1 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3$

$e_2 = a_1 + \frac{3}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3$

$e_3 = -a_1 - 6a_2 - 4a_3$

$\varphi(e_1) = \varphi\left(\frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3\right) = \frac{1}{2}\varphi(a_2) + \frac{1}{2}\varphi(a_3) = \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3 =$

$= \frac{1}{2}\cdot(0;4;5) + \frac{1}{2}(-4;-36;-46) = (0;2;2{,}5) + (-2;-18;-23) = (-2;-16;-20{,}5)$

$\varphi(e_2) = b_1 + \frac{3}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3 = (-2;9;11) + \frac{3}{2}\cdot(0;4;5) + \frac{1}{2}(-4;-36;-46) = (-2;9;11) +$

$+ (0;6;7{,}5) + (-2;-18;-23) = (-4;-3;-4{,}5)$

$\varphi(e_3) = -b_1 - 6b_2 - 4b_3 = (2;-9;-11) + (0;-24;-30) + (16;144;184) =$

$= (18;111;143)$

$$[\varphi_e] = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 18 \\ -16 & -3 & 111 \\ -20{,}5 & -4{,}5 & 143 \end{pmatrix}$$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+5) - (2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 4.$

Для: $\lambda_1 = 1$ $(A-E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $x_2 = x_3$, $x_1 = -x_2$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
-1	1	1

$a_1 = (-1; 1; 1)$

Для $\lambda_2 = 2$: $(A-2E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $x_2 = 0$, $x_1 = x_3$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
1	0	1

$a_2 = (1; 0; 1)$

Для $\lambda_3 = 4$: $(A-4E) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$x_2 = -2x_3$
$x_1 = -x_3$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
1	2	-1

$a_3 = (1; 2; -1)$

$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1; 1; 1)$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; 0; 1)$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1; 2; -1)$

$Q = (b_1 | b_2 | b_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ $B = Q^{-1}AQ$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$