Модульна контрольна робота
із дисципліни "Чисельні методи"
студентки групи ІПС-33
Петрик Юлії Олександрівни
Варіант 38

Під час виконання завдань обіцяю дотримуватися правил академічної доброчесності

1. $a = 35,29 \pm 0,005$

$b = 51,18 \pm 0,001$

$\alpha = 26^\circ (37 \pm 1)'$

Площа паралелограма: $S = ab \cdot \sin\alpha$

Абсолютна похибка:

$$\Delta(f^*) = \sum_{j=1}^{3} \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, x_3^*)}{\partial x_j} \right| \Delta(x_j^*)$$

$$\Delta(f^*) = |b \cdot \sin(\alpha)| \cdot \Delta(a^*) + |a \cdot \sin(\alpha)| \cdot \Delta(b^*) + |a \cdot b \cdot \cos(\alpha)| \cdot \Delta(\alpha^*) = |51,18 \cdot \sin(26^\circ_{(37')})| \cdot 0,005 + |35,29 \cdot \sin(26^\circ_{(37')})| \cdot 0,001 + |35,29 \cdot 51,18 \cdot \cos(26^\circ_{(37')})| \cdot 0^\circ_{(1')} =$$

$$= 0,115 + 0,0158 + 0,469 = 0,5998$$

$f(a^*, b^*, \alpha^*) = 35,29 \cdot 51,18 \cdot \sin(26°(37')) =$

$= 809,19$

Тоді відносна похибка:

$\delta(f^*) = \frac{0,5998}{809,19} = 0,0007$

2. $f(x) = x^2 + 4\sin x$

$f'(x) = 2x + 4\cos x$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Візьмемо $x_0 = \frac{\pi}{2}$

~~$x_1 = 0 - \frac{\pi}{2} - 4\sin$~~

$x_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\pi^2}{4} + 4}{\pi} = -0,488$

Перевіряємо умову зупинки:

$|x_1 - x_0| < \varepsilon$

$|-0,488 - 1,57| = 2,058 \geq \varepsilon$

Умова не виконується, тому продовжуємо

$x_2 = -0,488 - \frac{-1,64}{2,56} = 0,152$

Перевіряємо умову зупинки:

$|x_2 - x_1| < \varepsilon$

$|0,152 + 0,488| = 0,64 > \varepsilon$.

Отже, алгоритм треба продовжити, поки

не буде $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, тобто
$|x_{n+1} - x_n| < 0,001$.

3. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Використовуємо метод Гаусса з вибором головного елемента по рядках.

$$\bar{A}_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \boxed{2} & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$P_1 \bar{A}_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = M_1 \cdot P_1 \bar{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \boxed{1/2} & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = E$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = M_2 P_2 \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}\, A = (-1)^{e} a_{11}^{(0)} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)}$$

$\mathrm{Det}\, A = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$ – визначник матриці

4. $\begin{cases} xy - y^2 = 1 \\ x^2y + y = 5 \end{cases}$

~~$\varepsilon = 10^{-4}$~~

$\varepsilon = 0{,}01$

$f_1(x, y) = xy - y^2 - 1$

$f_2(x, y) = x^2y + y - 5$

$$A = F'(x, y) = \begin{pmatrix} y & x - 2y \\ 2xy & x^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Візьмемо:

$x^0 = (1, 1)^T$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{F_0 = \frac{f_1(x^0, y^0)}{f_2(x^0, y^0)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}}$$

$$F_0 = \begin{pmatrix} f_1(x^0, y^0) \\ f_2(x^0, y^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$A_0 \overline{z^0} = \overline{F^0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$z_1^0 = -\frac{5}{4}$

$z_2^0 = -\frac{1}{4}$

$\|\bar{z}^0\| = \frac{5}{4} > \varepsilon$

Тому переходимо до наступного кроку.

$\bar{x_1} = \bar{x^0} - \bar{z^0} = (1,1)^T - \left(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right) =$

$= (2,25;\ 1,25) \qquad x_1 = (2,25; 1,25)^T$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1,25 & -0,25 \\ 5,625 & 6,06 \end{pmatrix}$$

$$\bar{F_0} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 2,58 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1,25 & -0,25 \\ 5,625 & 6,06 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 2,58 \end{pmatrix}$$

$z_1^1 = \frac{576}{2395} = 0,24$

$z_2^1 = \frac{97}{479} = 0,2$

$\|\bar{z}^1\| = 0,24 > \varepsilon$

Оскільки умова припинення ітераційного процесу не виконалася, то продовжуємо, поки не буде $\|\bar{z}^n\| \leq \varepsilon$, тобто $\|\bar{z}^n\| \leq 0,01$.

5. $f(x) = e^x \qquad [-1, 0] \qquad \varepsilon = 10^{-4}$

Оскільки в нас чебишовські вузли, то

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \leq \varepsilon$$

$a = -1$

$b = 0$

$$M_{n+1} = \max_{x \in [-1,0]} |f^{(n+1)}(x)|$$

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

....

$f^{(n)}(x) = e^x$

$$M_{n+1} = \max_{x \in [-1,0]} |e^x| = 1$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \frac{(0+1)^{n+1}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{(n+1)! \, 2^{2n+1}} \leq \varepsilon$$

Методом підбору розв'язуємо:

$$\frac{1}{(n+1)! \cdot 2^{2n+1}} \leq 0{,}0001$$

$n = 3 \Rightarrow |f(x) - L_3(x)| = 0{,}0003 > \varepsilon$

$n = 4 \Rightarrow |f(x) - L_4(x)| = 1{,}63 \cdot 10^{-5} < \varepsilon$

Отже, потрібна кількість чебишових вузлів $n+1 = 4+1 = 5$.