

# ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, СТАТИСТИКА ТА ЙМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ

## Лекція 4.

Розора Ірина Василівна

Київ, 2022

# Зміст I

- 1 Аксиоматика теорії ймовірності
- 2 Основні властивості ймовірності
- 3 Умовні ймовірності
  - Формула добутку
  - Формула повної ймовірності
  - Формула Байєса

# Зміст

- 1 Аксиоматика теорії ймовірності
- 2 Основні властивості ймовірності
- 3 Умовні ймовірності
  - Формула добутку
  - Формула повної ймовірності
  - Формула Байєса

- (F1, нормованість)  $\Omega \in F$
- (F2, доповнення)  $A \in F \Rightarrow \bar{A} \in F$
- (F3, зліч. об'єднання)  $\forall n \geq 1 A_n \in F, \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$
- (P1, невід'ємність)  $\forall A \in F P(A) \geq 0$ ;
- (P2, нормованість)  $P(\Omega) = 1$ ;
- (P3,  $\sigma$ -адитивність)  $\forall n \geq 1 A_n \in F : A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j,$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

# Зміст

- 1 Аксиоматика теорії ймовірності
- 2 Основні властивості ймовірності
- 3 Умовні ймовірності
  - Формула добутку
  - Формула повної ймовірності
  - Формула Байєса

- ❶ Ймовірність доповнення. Нехай  $A \in F$ , тоді

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

- ❷ Ймовірність неможливої події

$$P(\emptyset) = 0.$$

- ❸ Ймовірність вкладеної різниці

$$A, B \in F \quad A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

- ❹ Монотонність ймовірності

$$A, B \in F, \quad A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$$

5 Множина значень ймовірності

$$\{P(A), A \in F\} \subset [0, 1].$$

6 Йм. об'єднання двох подій

$$A, B \in F \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

7 Формула включення-виключення. Нехай  $A_k, k = \overline{1, n}$  — випадкові події, тоді

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

## 8. Напіваадитивність ймовірності

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k), \quad A_k \in F$$

Позначимо

$$B_1 = A_1, \dots, B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right).$$

Тоді

- $\{B_k, k = \overline{1, n}\}$  — попарно несумісні події.
- $B_k \subset A_k$
- $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n B_k$ .

За адитивністю та монотон. ймовірності маємо:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=1}^n P(B_k) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k).$$



## 8. Напіваадитивність ймовірності

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k), \quad A_k \in \mathcal{F}$$

Позначимо

$$B_1 = A_1, \dots, B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right).$$

Тоді

- $\{B_k, k = \overline{1, n}\}$  — попарно несумісні події.
- $B_k \subset A_k$
- $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n B_k$ .

За адитивністю та монотон. ймовірності маємо:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=1}^n P(B_k) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

## 8. Напіваадитивність ймовірності

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k), \quad A_k \in F$$

Позначимо

$$B_1 = A_1, \dots, B_k = A_k \setminus (\cup_{i=1}^{k-1} A_i).$$

Тоді

- $\{B_k, k = \overline{1, n}\}$  — попарно несумісні події.
- $B_k \subset A_k$
- $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n B_k$ .

За адитивністю та монотон. ймовірності маємо:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=1}^n P(B_k) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

## 8. Напіваадитивність ймовірності

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k), \quad A_k \in \mathcal{F}$$

Позначимо

$$B_1 = A_1, \dots, B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right).$$

Тоді

- $\{B_k, k = \overline{1, n}\}$  — попарно несумісні події.
- $B_k \subset A_k$
- $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n B_k$ .

За адитивністю та монотон. ймовірності маємо:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=1}^n P(B_k) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

## 9. Неперевність ймовірності

Якщо  $A_n$ —монотон. послідовність, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n).$$

- Якщо  $A_n \in F$ — зростаюча послідовність  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ ,  
 $A_n \uparrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A).$$

- Якщо  $B_n$ — спадна послідовність  $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ ,  
 $B_n \downarrow B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P(B).$$

## 9. Неперевність ймовірності

Якщо  $A_n$ —монотон. послідовність, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n).$$

- Якщо  $A_n \in F$ — зростаюча послідовність  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ ,  
 $A_n \uparrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A).$$

- Якщо  $B_n$ — спадна послідовність  $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ ,  
 $B_n \downarrow B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P(B).$$

## Доведення 9. I

а) Розглянемо нову посл.  $C_n, n \geq 1$  :

$$C_1 = A_1, \quad C_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, C_n = A_n \setminus A_{n-1}, \quad n > 1,$$

для якої виконуються власт.

- $C_n, n \geq 1$ , попарно несумісні;
- 

$$A_n = \bigcup_{k=1}^n C_k;$$

## Доведення 9. II



$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Тоді за власт.  $P3$  маємо

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(C_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n C_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \end{aligned}$$

## Доведення 9. III

б) Для доведення використаємо тв. а). Якщо

$$B_1 \supset B_2 \supset \dots, \quad B_n \downarrow B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n,$$

то

$$\overline{B_1} \subset \overline{B_2} \subset \dots, \quad \overline{B_n} \uparrow \overline{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}.$$

Тоді з а) випливає, що

$$P(\overline{B_n}) = 1 - P(B_n) \uparrow P(\overline{B}) = 1 - P(B).$$



## 10. Зліченна напівадитивність

$$\forall A_n \in F \quad P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Дане твердження випливає із напівадитивності та неперервності

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \end{aligned}$$

## 10. Зліченна напівадитивність

$$\forall A_n \in F \quad P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Дане твердження випливає із напівадитивності та неперервності

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(A_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \end{aligned}$$

## 11. Еквівалентність неперервності нулі та сигма-адитивності для адитивної міри

### Означення

Будемо говорити, що йм.  $P$  на класі подій  $F$  неперервна в нулі, якщо

$$\forall A_n \in F : A_n \downarrow \emptyset \quad (A_1 \supset A_2 \supset \dots, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset)$$

має місце збіжність

$$P(A_n) \rightarrow 0.$$

### Теорема

*Адитивна ймовірність  $P$  на сигма-аглегрії  $F$  буде  $\sigma$ -адитивною  $\Leftrightarrow$  ймовірність  $P$  неперервна в 0.*

## 11. Еквівалентність неперервності нулі та сигма-адитивності для адитивної міри

### Означення

Будемо говорити, що йм.  $P$  на класі подій  $F$  неперервна в нулі, якщо

$$\forall A_n \in F : A_n \downarrow \emptyset \quad (A_1 \supset A_2 \supset \dots, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset)$$

має місце збіжність

$$P(A_n) \rightarrow 0.$$

### Теорема

*Адитивна ймовірність  $P$  на сигма-аглегрії  $F$  буде  $\sigma$ -адитивною  $\Leftrightarrow$  ймовірність  $P$  неперервна в 0.*

## Доведення. I

$\Rightarrow$  (Необхідність). Випливає з власт. 9 неперервності ймовірності.

$\Leftarrow$  (Достатність). Нехай  $P$ - адитивна ймовірність та вик. неперервність в 0, т.б.

$$B_n \downarrow \emptyset \Rightarrow P(B_n) \rightarrow 0.$$

Доведемо  $\sigma$ -адитивність  $P$ , т.б.

$\forall n \geq 1 A_n \in F : A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j,$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

## Доведення. II

Позначимо

$$B_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad B_1 = \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k, \dots \quad B_{n+1} = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \dots$$

Очевидні власт.



$$B_1 \supset B_2 \supset \dots,$$



$B_n \downarrow \emptyset$ , а, отже, за припущенням  $P(B_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ,



$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^n A_k \cup B_n.$$

## Доведення. III



$$B_n \cap A_i = \emptyset, i = \overline{1, n}$$

Тоді

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + P(B_n) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k) + P(B_n) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отже, виконується  $\sigma$ -адитивність

## Продовження неперервної йм. на $\sigma$ -алгебру

### Теорема (Каратеодорі)

Нехай  $P$ —  $\sigma$ -адитивна ймов. міра на алгебрі  $F_0$ . Тоді  $\exists!$   
 $\sigma$ -адитивна ймов. міра  $Q(\cdot)$ , яка визначена на найменшій  
 $\sigma$ -алгебрі  $F = \sigma[F_0]$ , і є продовженням міри  $P$ , т.б.  
 $\forall A \in F_0 \ P(A) = Q(A)$ .



## 12. Продовження неперервної йм. на $\sigma$ -алгебру

Для того, щоб адитивна ймовірність  $P$  на алгебрі подій  $F_0$  мала продовження до  $\sigma$ -адитивної йм. міри на породженій  $\sigma$ -алгебрі  $F = \sigma[F_0] \Leftrightarrow$  вона була неперервною в 0 на алгебрі  $F_0$ .

Доведення.

$\Rightarrow$  випливає з властивості 9. неперервності йм.

$\Leftarrow$  випливає з властивості 11. та Т. Каратеодорі. □

## Вправи

Доведіть, що мають місце такі нерівності:

1

$$\forall A, B \in F \quad P(A \cup B)P(A \cap B) \leq P(A)P(B).$$

2

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^n P(\overline{A}_k).$$

3

$$P^2(A \cap B) + P^2(\overline{A} \cap B) + P^2(A \cap \overline{B}) + P^2(\overline{A} \cap \overline{B}) \geq \frac{1}{4}.$$

4

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{k=1}^n P(A_k) - (n-1).$$

# Зміст

- 1 Аксіоматика теорії ймовірності
- 2 Основні властивості ймовірності
- 3 Умовні ймовірності**
  - Формула добутку
  - Формула повної ймовірності
  - Формула Байєса

Умовні йм. використовують у випадку коли в ході стох. експерименту стає відомо певна інформація про його результати.

### Приклад

Двічі підкидаємо симетр. кубик.  $B = \{\text{сума} < 4\}$ ,  
 $A = \{\text{перший раз з'явилась '1'}\}$ . Відомо, що відбулась подія  $B$ .  
Яка йм. події  $A$ ?

1

$$B = \{(1, 1); (1, 2); (2, 1)\}, \quad A = \{(1, i), i = \overline{1, 6}\}$$

$$P(A|B) = \frac{2}{3}.$$

2

$$A \cap B = \{(1, 1); (1, 2)\}, \quad P(B) = \frac{3}{36}, \quad P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3}.$$

Нехай  $(\Omega, F, P)$  — деякий йм. простір.  $B \in F, P(B) > 0$ .

### Означення

Умовною ймовірністю події  $A$  за умови, що відбулась подія  $B$ , називається

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (1)$$

Для умовної йм. виконуються власт.

- (невід'ємність)  $P(A|B) \geq 0$ ,
- (нормованість)  $P(\Omega|B) = 1$ ,
- (нормованість)  $P(B|B) = 1$ ,
- ( $\sigma$ -адитивність) Якщо  $A_i$  — послідовність попарно несутісних подій, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$$

Якщо  $F_B$  —  $\sigma$ -алгебра всіх множин виду  $A \cap B$ ,  $A \in F$ , то трійку  $(B, F_B, P(\cdot|B))$  можна також розглядати як імов. простір. Тому для умовної йм. справедливі властивості, що і для йм. міри.

З (1) випливає, що

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B), \quad P(B) > 0.$$

### Теорема (Формула добутку)

Якщо  $P(B) > 0$ ,  $P(A) > 0$ , то

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B). \quad (2)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A).$$

Формулу (2) допускає узагальнення.

### Теорема (Узагальнена формула добутку)

Нехай  $A_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  — випадкові події, для яких  $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$ ,  
тоді

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i). \quad (3)$$



## Доведення I

Покажемо спочатку  $\forall k = \overline{1, n-1} P(\bigcap_{i=1}^k A_i)$ . Дійсно, оскільки

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \subset \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i \subset \dots \subset A_1,$$

то за монотон. йм.

$$0 < P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \leq P(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i) \leq \dots \leq P(A_1).$$

Отже, маємо право розглядати йм.  $P(A_k | \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i)$ .

ММІ.

## Доведення II

- ❶ Для  $n = 2$  рівність (3) виконується ( $\Leftarrow$  (2))
- ❷ Припустимо, що (3) вик. для  $n$  подій.
- ❸ Доведемо для  $n + 1$ .

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= P\left(A_{n+1} \cap \left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)\right) = P\left(A_{n+1} \mid \left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)\right) P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \\
 &= P(A_1) P(A_2 | A_1) \cdots P(A_{n+1} | \bigcap_{i=1}^n A_i).
 \end{aligned}$$

## Приклад

Припустимо, що страхова компанія має два типи угод  $A_1$  та  $A_2$ , кількість яких дорівнює відповідно  $n$  та  $m$ . Всі страхові випадки однаково ймовірні. Нехай  $C_i$  — подія, яка полягає в тому, що  $i$ -ий позов до компанії належить типу  $A_1$ . Знайти ймовірність того, що перші три позови будуть за угодами типу  $A_1$ .

$$\begin{aligned} P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) &= P(C_1)P(C_2|C_1)P(C_3|C_1 \cap C_2) = \\ &= \frac{n}{n+m} \cdot \frac{n-1}{n+m-1} \cdot \frac{n-2}{n+m-2}. \end{aligned}$$

## Приклад

Припустимо, що страхова компанія має два типи угод  $A_1$  та  $A_2$ , кількість яких дорівнює відповідно  $n$  та  $m$ . Всі страхові випадки однаково ймовірні. Нехай  $C_i$  — подія, яка полягає в тому, що  $i$ -ий позов до компанії належить типу  $A_1$ . Знайти ймовірність того, що перші три позови будуть за угодами типу  $A_1$ .

$$\begin{aligned} P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) &= P(C_1)P(C_2|C_1)P(C_3|C_1 \cap C_2) = \\ &= \frac{n}{n+m} \cdot \frac{n-1}{n+m-1} \cdot \frac{n-2}{n+m-2}. \end{aligned}$$

У деякому ймовірнісному просторі  $(\Omega, F, P)$  розглянемо події  $H_1, H_2, \dots, H_n (n \geq 2)$ , які мають такі властивості:

- а) події  $H_1, H_2, \dots, H_n$  несумісні, тобто жодні дві з них не можуть здійснитися одночасно;
- б) одна з подій  $H_1, H_2, \dots, H_n$  обов'язково відбудеться, тобто  $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$ , причому  $P(H_i) > 0, i = 1, \dots, n$ .

### Означення

Якщо події  $H_1, H_2, \dots, H_n$  мають властивості а) та б), то кажуть, що вони утворюють повну групу подій (ПГП).

### Теорема (Формула повної ймовірності)

Нехай  $A$  – деяка подія, а події  $H_1, H_2, \dots, H_n$  утворюють ПГП.  
Тоді має місце рівність

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A|H_k)P(H_k). \quad (4)$$

Доведення.

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left( \bigcup_{i=1}^n H_k \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap H_k).$$

Події  $A \cap H_k$  попарно несумісні.

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (A \cap H_k)\right) = \sum_{k=1}^n P(A \cap H_k) =$$

за Т.добутку  $P(A \cap H_k) = P(A|H_k)P(H_k)$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{P(A \cap H_k)}{P(H_k)} P(H_k) = \sum_{k=1}^n P(A|H_k)P(H_k).$$



## Приклад

Серед  $N$  екзаменаційних білетів є  $n$  “щасливих”. За білетами студенти підходять один за одним. У кого більша ймовірність узяти щасливий білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

$H_1 = \{1\text{-ий взяв щасливий білет}\}, \quad H_2 = \{1\text{-ий взяв нещасливий білет}\}$

$\{H_1, H_2\}$ — ПГП.

$$P(H_1) = \frac{n}{N}, \quad P(H_2) = \frac{N - n}{N}.$$

$A = \{2\text{-ий взяв щасливий білет}\}.$



## Приклад

Серед  $N$  екзаменаційних білетів є  $n$  “щасливих”. За білетами студенти підходять один за одним. У кого більша ймовірність узяти щасливий білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

$H_1 = \{1\text{-ий взяв щасливий білет}\}, \quad H_2 = \{1\text{-ий взяв нещасливий білет}\}$

$\{H_1, H_2\}$ — ПГП.

$$P(H_1) = \frac{n}{N}, \quad P(H_2) = \frac{N - n}{N}.$$

$A = \{2\text{-ий взяв щасливий білет}\}.$

## Приклад

Серед  $N$  екзаменаційних білетів є  $n$  “щасливих”. За білетами студенти підходять один за одним. У кого більша ймовірність узяти щасливий білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

$H_1 = \{1\text{-ий взяв щасливий білет}\}, \quad H_2 = \{1\text{-ий взяв нещасливий білет}\}$   
 $\{H_1, H_2\}$ — ПГП.

$$P(H_1) = \frac{n}{N}, \quad P(H_2) = \frac{N - n}{N}.$$

$A = \{2\text{-ий взяв щасливий білет}\}.$

$$P(A|H_1) = \frac{n-1}{N-1}, \quad P(A|H_2) = \frac{n}{N-1}.$$

За формулою повної ймов.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{n}{N} \frac{n-1}{N-1} + \frac{N-n}{N} \frac{n}{N-1} = \\ &= \frac{n}{N} \end{aligned}$$

$$P(A|H_1) = \frac{n-1}{N-1}, \quad P(A|H_2) = \frac{n}{N-1}.$$

За формулою повної ймов.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{n}{N} \frac{n-1}{N-1} + \frac{N-n}{N} \frac{n}{N-1} = \\ &= \frac{n}{N} \end{aligned}$$

$$P(A|H_1) = \frac{n-1}{N-1}, \quad P(A|H_2) = \frac{n}{N-1}.$$

За формулою повної ймов.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{n}{N} \frac{n-1}{N-1} + \frac{N-n}{N} \frac{n}{N-1} = \\ &= \frac{n}{N} \end{aligned}$$

### Теорема (Формула Баєса)

Нехай  $A$  – деяка подія, яка має додатну ймовірність,  $P(A) > 0$ , а події  $H_1, H_2, \dots, H_n$  утворюють повну групу. Тоді має місце рівність

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{P(A)} = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|H_i)P(H_i)}. \quad (5)$$

## Доведення.

Безпосередньо застосовуючи визначення умовної ймовірності і теорему добутку

$$P(H_k|A) = \frac{P(A \cap H_k)}{P(A)}, \quad P(A \cap H_k) = P(A|H_k)P(H_k)$$

та формулу повної ймовірності (4), отримуємо твердження теореми. □

Значення  $P(H_k)$  називають апіорними ймовірностями, а умовні ймовірності  $P(H_k|A)$  називають апостеріорними ймовірностями. Формула Баєса дозволяє уточнити уявлення про ймовірність кожної з подій, що утворюють повну групу, враховуючи інформацію про здійснення події  $A$ .

## Приклад

Авто експлуатується двома особами: чоловіком та жінкою по черзі. Ймовірність дорожньо-транспортної пригоди при керуванні авто чоловіком є  $0,1$ , а ймовірність дорожньо-транспортної пригоди при керуванні авто жінкою є  $0,03$ . Чоловік користується транспортним засобом удвічі більше ніж жінка.

- а) Підрахувати ймовірність дорожньо-транспортної пригоди для даного авто;
- б) Відомо, що сталася дорожня пригода. Підрахувати ймовірність того, що за кермом був чоловік.



Нехай  $A, H_1, H_2$  є наступними подіями:

$A$  — сталася дорожня пригода,

$H_1$  — за кермом був чоловік,

$H_2$  — за кермом була жінка.

Використовуючи умову задачі, можемо записати, що

$$P(A|H_1) = 0,1, \quad P(A|H_2) = 0,03.$$

$$P(H_1) = \frac{2}{3}, \quad P(H_2) = \frac{1}{3}.$$

Отже, потрібно знайти  $P(A), P(H_1|A)$ .

За формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = 0,1 \cdot \frac{2}{3} + 0,03 \cdot \frac{1}{3} = \frac{23}{300}.$$

За формулою Байєса

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{0,1 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{23}{300}} = \frac{20}{23}.$$

## Відсоток виробництва бракованої продукції

### Приклад

На ринку представлено певну продукцію двох заводів. Перший виробляє 10 000 од. на рік, другий — 80 000 од. Перший завод має 2% бракованої продукції, другий — 0,5%. Навмання обраний товар виявився бракованим. Який з виробників є для нього більш ймовірним?

$A = \{\text{товар бракований}\}$ ,  $H_i = \{\text{товар з } i\text{-ого заводу}\}$ ,  $i = 1, 2$ .  
За умовою

$$P(H_1) = \frac{1}{9}, \quad P(H_2) = \frac{8}{9},$$

$$P(A|H_1) = 0,02, \quad P(A|H_2) = 0,005.$$

## Відсоток виробництва бракованої продукції

### Приклад

На ринку представлено певну продукцію двох заводів. Перший виробляє 10 000 од. на рік, другий — 80 000 од. Перший завод має 2% бракованої продукції, другий — 0,5%. Навмання обраний товар виявився бракованим. Який з виробників є для нього більш ймовірним?

$A = \{\text{товар бракований}\}$ ,  $H_i = \{\text{товар з } i\text{-ого заводу}\}$ ,  $i = 1, 2$ .  
За умовою

$$P(H_1) = \frac{1}{9}, \quad P(H_2) = \frac{8}{9},$$

$$P(A|H_1) = 0,02, \quad P(A|H_2) = 0,005.$$

Формула повної ймов.

$$P(A) = \frac{1}{9} \cdot 0,02 + \frac{8}{9} \cdot 0,005 = \frac{6}{900}.$$

За формулою Байєса

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{0,02 \cdot \frac{1}{9}}{\frac{6}{900}} = \frac{1}{3}.$$

$$P(H_2|A) = 1 - P(H_1|A) = \frac{2}{3}$$

## Приклад

10 % договорів із портфеля страхової компанії є договори з високим рівнем ризику, а 90%— з низьким рівнем ризику. Число страхових випадків за одним договором протягом року розподілено за законом Пуассона з середнім  $\lambda$  ( $p_n(\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ ,  $n \geq 0$ ). Для договорів з високим рівнем ризику  $\lambda = 0,6$ , з низьким— $\lambda = 0,1$ . Скільки в середньому можна очікувати страхових випадків за договором, який у минулому році привів до одного страхового випадку?

$H_1 = \{\text{договір має високий рівень ризику}\},$

$H_2 = \{\text{договір має низький рівень ризику}\},$

$A = \{\text{договір привів до одного страхового випадку у минулому році.}\}$

## Приклад

10 % договорів із портфеля страхової компанії є договори з високим рівнем ризику, а 90%— з низьким рівнем ризику. Число страхових випадків за одним договором протягом року розподілено за законом Пуассона з середнім  $\lambda$  ( $p_n(\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ ,  $n \geq 0$ ). Для договорів з високим рівнем ризику  $\lambda = 0,6$ , з низьким— $\lambda = 0,1$ . Скільки в середньому можна очікувати страхових випадків за договором, який у минулому році привів до одного страхового випадку?

$$H_1 = \{\text{договір має високий рівень ризику}\},$$

$$H_2 = \{\text{договір має низький рівень ризику}\},$$

$$A = \{\text{договір привів до одного страхового випадку у минулому році.}\}$$

## Приклад

10 % договорів із портфеля страхової компанії є договори з високим рівнем ризику, а 90%— з низьким рівнем ризику. Число страхових випадків за одним договором протягом року розподілено за законом Пуассона з середнім  $\lambda$  ( $p_n(\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ ,  $n \geq 0$ ). Для договорів з високим рівнем ризику  $\lambda = 0,6$ , з низьким— $\lambda = 0,1$ . Скільки в середньому можна очікувати страхових випадків за договором, який у минулому році привів до одного страхового випадку?

$$H_1 = \{\text{договір має високий рівень ризику}\},$$

$$H_2 = \{\text{договір має низький рівень ризику}\},$$

$$A = \{\text{договір привів до одного страхового випадку у минулому році.}\}$$



За умовою  $P(H_1) = 0.1$ ,  $P(H_2) = 0.9$ .

$$P(A|H_1) = p_1(0.6) = 0.6e^{-0.6}, \quad P(A|H_2) = p_1(0.1) = 0.1e^{-0.1}.$$

Використовуючи формулу Байєса, обчислимо апостеріорну ймовірність того, що договір має високий ступінь ризику:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} =$$
$$\frac{0.1e^{-0.6}0.6}{0.1e^{-0.6}0.6 + 0.9e^{-0.1}0.1} \approx 0.29.$$

За умови, що договір має високий рівень ризику, очікуване (середнє) число страхових випадків у наступному році дорівнює 0.6.

За умовою  $P(H_1) = 0.1$ ,  $P(H_2) = 0.9$ .

$$P(A|H_1) = p_1(0.6) = 0.6e^{-0.6}, \quad P(A|H_2) = p_1(0.1) = 0.1e^{-0.1}.$$

Використовуючи формулу Байєса, обчислимо апостеріорну ймовірність того, що договір має високий ступінь ризику:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} =$$
$$\frac{0.1e^{-0.6}0.6}{0.1e^{-0.6}0.6 + 0.9e^{-0.1}0.1} \approx 0.29.$$

За умови, що договір має високий рівень ризику, очікуване (середнє) число страхових випадків у наступному році дорівнює 0.6.

За умовою  $P(H_1) = 0.1$ ,  $P(H_2) = 0.9$ .

$$P(A|H_1) = p_1(0.6) = 0.6e^{-0.6}, \quad P(A|H_2) = p_1(0.1) = 0.1e^{-0.1}.$$

Використовуючи формулу Байєса, обчислимо апостеріорну ймовірність того, що договір має високий ступінь ризику:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} =$$
$$\frac{0.1e^{-0.6}0.6}{0.1e^{-0.6}0.6 + 0.9e^{-0.1}0.1} \approx 0.29.$$

За умови, що договір має високий рівень ризику, очікуване (середнє) число страхових випадків у наступному році дорівнює 0.6.

Відповідна апостеріорна ймовірність того, що договір має низький ризик:

$$P(H_2|A) = 1 - P(H_1|A) \approx 1 - 0.29 = 0.71,$$

і тоді середнє число стр. випадків у наступному році дорівнює 0.1. Тому очікуване число страхових випадків за договором, який у минулому році привів до одного страхового випадку, становить

$$0.6 \cdot 0.29 + 0.1 \cdot 0.71 = 0.245.$$

ПИТАННЯ?