Варіант 25

1. Чому дорівнює відносна похибка в разі обчислення об'єму правильної чотирикутної піраміди, якщо висота піраміди виміряна з точністю $0,5\%$, а сторона основи дорівнює 25 см $\pm$ 1 см?

2. Знайти апріорну оцінку кількості кроків при знаходженні найбільшиого кореня нелінійного рівняння $x^3 - x - 1 = 0$ методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 0,001$. Намалювати геометричну інтерпретацію розбіжного процесу простої ітерації (спіраллю).

3. Знайти визначник методом квадратних коренів $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

4. Проробити три ітерації степеневого методу для знаходження максимального власного значення матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ із точністю $\varepsilon = 10^{-5}$. Записати умову закінчення ітераційного процесу.

5. За допомогою інтерполяції знайти наближений розв‘язок нелінійного рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$ – функція, задана таблично: $x_0 = -1$; $y_0 = 3/4$; $x_1 = 0$; $y_1 = -1/4$; $x_2 = 1$; $y_2 = 3/4$.

Модульна контрольна робота
з предмету Чисельні методи
студента групи ІПС-33
Авраменка Владислава Володимировича
Варіант № 25

Під час виконання роботи зобов'язуюсь дотримуватися правил академічної доброчесності

№1 $\delta(h^*) = 0{,}5\% = 0{,}005$

$\Delta(a^*) = 1 \qquad a^* = 25$

Згідно з формулою об'єму:

$V = \frac{1}{3} h a^2$

Тоді згідно з формулою похибки добутку $\delta(c^*) +$

$\delta(V^*) = \cancel{\delta\left(\frac{1^*}{3}\right)}\ \delta(h^*) + \delta(a^*) + \delta(a^*)$

~~Відносна похибка $\frac{1}{3} = 0$, тому додуваємо~~

Нехай $c^* = \frac{1}{3} = 0{,}33$, тоді

$\Delta(c^*) = 0{,}333333 - 0{,}33 \approx 0{,}00333$

$\delta(c^*) = \frac{0{,}00333}{0{,}33} \approx 0{,}01$

$\delta(V^*) = 0{,}01 + 0{,}005 + \delta(a^*) \cdot 2$

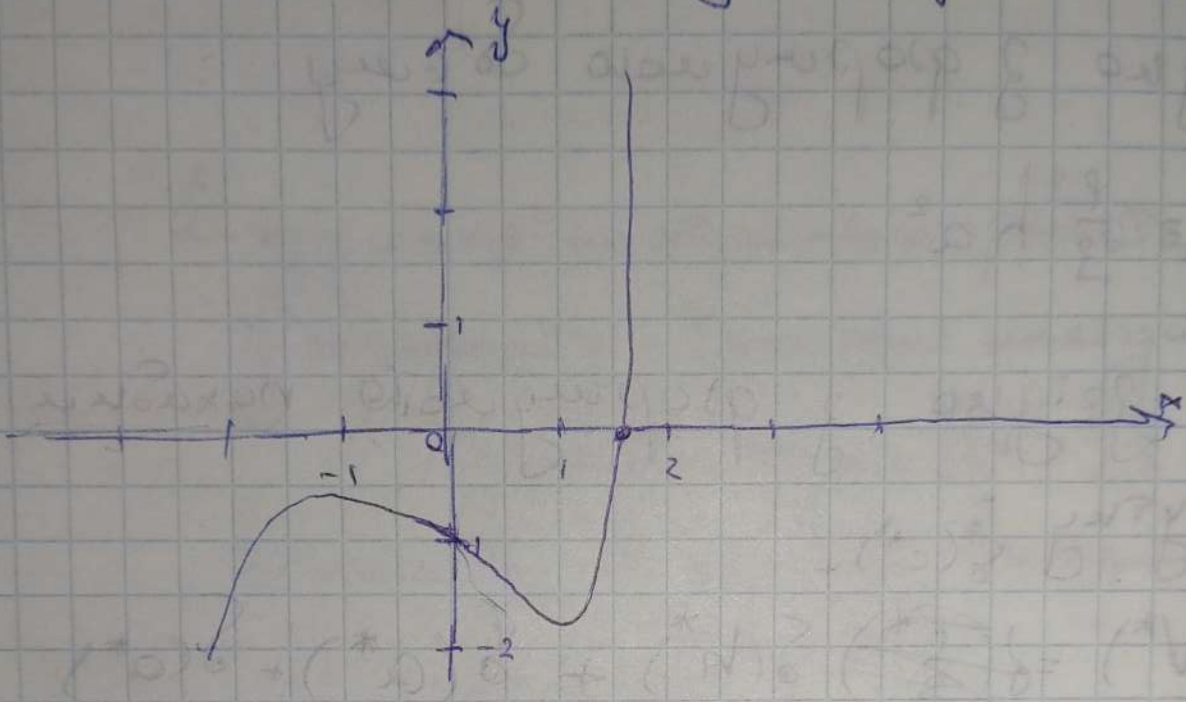
$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{a^*} = \frac{1}{25} = 0{,}04$

$\delta(V^*) = 0{,}01 + 0{,}005 + 0{,}08 = \underline{0{,}095}$

Відповідь: $\delta(V^*) = 0{,}095$

№2 $x^3 - x - 1 = 0$, $\varepsilon = 0,001$

Намалюємо приблизний графік ф-ії



Це нам дає змогу зрозуміти, що корінь - один і знаходиться на проміжку $[1, 2]$

$f(1) = -1$

$f(2) = 5$

$f(1) \cdot f(2) < 0$

Перейдемо до вигляду $x = \varphi(x)$

Нехай $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1}$

Перевіряємо умова збіжності

Візьмемо $x_0 = 1,5$

$\varphi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

$\left.\begin{array}{l} |x-1,5| \le \delta \\ x \in [1,2] \end{array}\right\} \Rightarrow \delta = 0,5$

1) $\max\limits_{x\in[1,2]} |\varphi'(x)| = \frac{1}{3(2+1)^{2/3}} < 1$ ~~$\left|\sqrt{2+1}\right| = \sqrt{3} > 1$~~

Отже $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1}$ підходить

~~Нехай $\varphi(x) = \sqrt{\frac{1}{x}+1}$~~

$\max\limits_{x\in[1,2]} |\varphi'(x)| =$ Інші умови не перевіряємо, бо в завданні не просять, тобто

~~2) $|\varphi(x_0) - x_0| =$~~

Таким чином ми отримали:

$q = \max\limits_{x\in[1,2]} |\varphi'(x)| = \frac{1}{3 \cdot 3^{2/3}} \approx 0,16$

Апріорна оцінка:

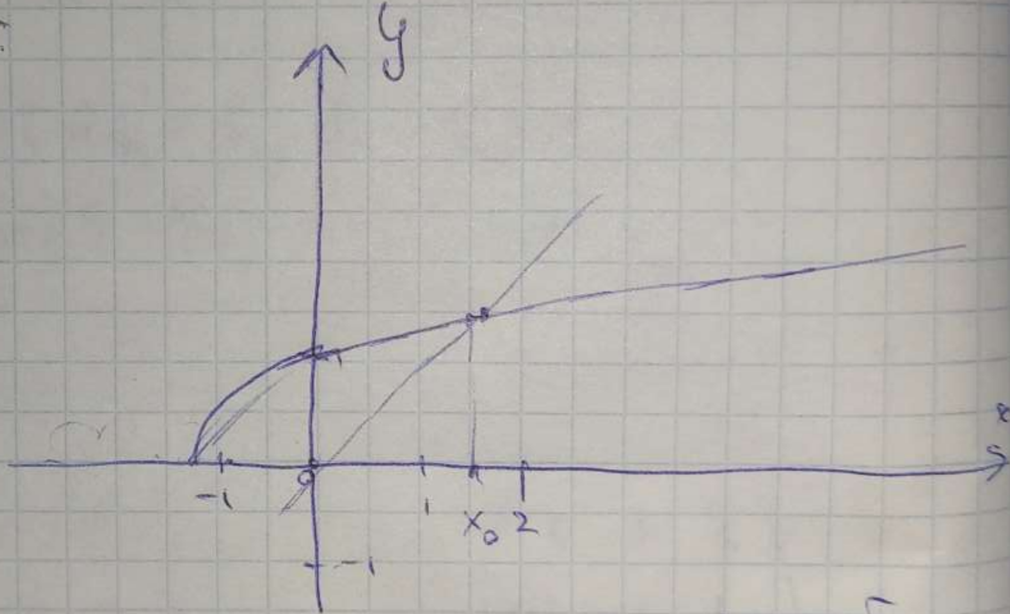
$$n \ge \left[\frac{\ln \frac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1-q)\varepsilon}}{\ln(1/q)} \right] + 1$$

$$n \geq \left[\frac{\ln \frac{0,143}{0,2008}}{\ln 6,25}\right]+1 = \left[\frac{5,186}{1,834}\right]+1 = 2+1 = 3$$

← апріорна оцінка

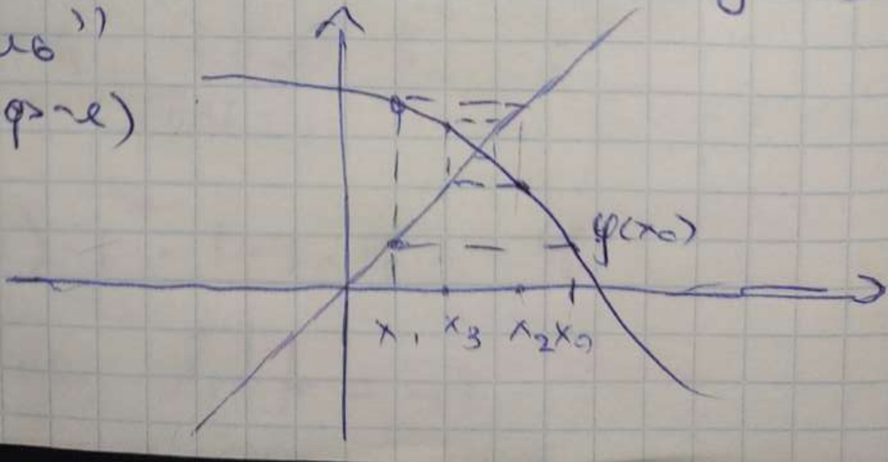
На жаль, через брану функцію $\varphi(x)$ геометрична інтерпретація має вигляд «сходи» а не «спіраль», я намалюю і ~~там~~ свою і «спіралі»

Маю:



(на жаль дуже маленький масштаб і нічого не видно)

«Спіраль»
(не мою ф-ю)



№ 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = 10^{-5}$$

Візьмемо начальне наближення

$$\overline{X}_0 = (1, 1, 1)^T$$

$$\overline{X}^{k+1} = A\overline{x}^k \qquad \lambda_1^{k+1} = \frac{X_m^{k+1}}{X_m^k}, \ \forall m : 1 \le m$$

Умова припинення $|\lambda_1^{k+1} - \lambda_1^k| < \varepsilon = 10$

$$\overline{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1^1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$\overline{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \boxed{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1^2 = \frac{2}{1} = 2$$

$$|\lambda_1^2 - \lambda_1^1| = 1 > \varepsilon$$

$$\overline{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \boxed{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ \boxed{3} \end{pmatrix}$$

$\lambda_1^3 = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$|\lambda_1^3 - \lambda_1^2| = 0{,}5 > \varepsilon$

Таким чином продовжуємо ітерації допоки $|\lambda_1^{n+1} - \lambda_1^{n}|$ не стане менше за 10^{-5}

№3 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 0 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

$\det A = 0$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = A$, отже матриця симетрична і ми можемо використати метод ~~найменших квадратів~~ квадратних коренів

Складемо матриці D та S

$d_{11} = \operatorname{sgn}(a_{11}) = \operatorname{sgn}(1) = 1$

$s_{11} = \sqrt{|a_{11}|} = \sqrt{1} = 1$

$$s_{12} = \frac{a_{12}}{d_{11} s_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$s_{13} = \frac{a_{13}}{d_{11} s_{11}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$d_{22} = \operatorname{sgn}(a_{22} - s_{12}^2 d_{11}) = \operatorname{sgn}(0-1) =$$

$$s_{23} = \frac{a_{23} - s_{12} d_{11} s_{13}}{d_{22} s_{22}} = \frac{1-2}{d_{22} s_{23}} = \frac{-1}{-1} =$$

$$s_{22} = \sqrt{|a_{22} - s_{12}^2 d_{11}|} = \sqrt{|0-1|} = 1$$

$$d_{33} = \operatorname{sgn}(a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}) =$$
$$= \operatorname{sgn}(4 - 4\cdot 1 + 1\cdot 1) = 1$$

$$s_{33} = \sqrt{|a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}|} = \sqrt{|4-4-1|} \;\cancel{\sqrt{4-4=0}} = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Тоді $\det A = \prod_{i=1}^{3} d_{ii} \cdot s_{ii}^2 =$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = -4$$

Відповідь: $\det A = -1$

№5 $\quad f(x)=0$

x	-1	0	1
y	$3/4$	$-1/4$	$3/4$

Знайдемо розділені різниці:

-1	$3/4$	$\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{0+1}=1$	$\dfrac{1+1}{2}=1$
0	$-1/4$	$\dfrac{-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{1-0}=-1$	
1	$3/4$		

Знайдемо поліном

$$P_2(x)=f(x_1)+f(x_1,x_2)\cdot(x-x_1)+f(x_1,x_2,x_3)\cdot(x-x_1)(x-x_2)$$

$$P_2(x)=3/4+1\cdot(x+1)+1\cdot(x+1)\cdot x=$$

$$=3/4+x+1+x^2+x=x^2+2x+7/4$$

$$x^2+2x+7/4=0$$

$D=4-7=-3<0$, отже дійсних коренів не існує

Тоді $f(x)=0$ не має значення такого