M2 Варіант 1

1. Дослідити систему на спостережуваність в залежності від значення параметрів ***a, p***.

$$\begin{cases} \ddot{x} = a^2 x, \\ y_1(t) = px(t) + \dot{x}(t), \\ y_2(t) = -x(t) + \dot{x}(t). \end{cases}$$

2. Дослідити систему на спостережуваність в залежності від значення праметра ***a.*** Зафіксівавши будь-яке конкретне значення параметра, яке підходить, відновити вектор фазових координат

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -n \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y(t) = nx_1 + ax_2 + 3x_3,$$

$$n = \begin{cases} 1, & \textit{прізвище студента починається з } А - Д; \\ 2, & \textit{прізвище студента починається з } Е - К; \\ 3, & \textit{прізвище студента починається з } Л - П; \\ 4, & \textit{прізвище студента починається з } Р - Ф; \\ 5, & \textit{прізвище студента починається з } Х - Я. \end{cases}$$

3. Використовуючи критерій Рауса-Гурвіца дослідити при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок системи асимптотично стійкий (+ *зобразити графічно*)

$$y^{\mathrm{IV}} + ay''' + 4y'' + by' + y = 0.$$

4. Знайти всі положення рівноваги та дослідити на стійкість за допомогою першого методу Ляпунова. Вказати тип точок спокою. (Графіки не зображати).

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x, \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2. \end{cases}$$

5. Шукаючи керування у вигляді $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, розв'язати задачу аналітичного

конструювання регуляторів для системи $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

6. Записати крайову задачу принципу максимуму (вільні кінці траєкторії)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_2) - \cos(x_1) - u_1, \\ \dot{x}_2 = 3\cos(-4x_2) + 4u_2 \end{cases}$$

$$J = \int_0^1 (\sin^2(x_1) + u_2{}^4)dt + \cos^4(2x_2(1)) \to \min;$$

7. Використовуючи МДП знайти оптимальні керування та траєкторію, на яких функціонал

$$Q = \sum_{i=0}^{2} (x_1(i) + x_2(i) - u(i)) + x_1(3) + x_2(3)$$

досягає свого мінімального значення для дискретної системи керування

$$\begin{cases} x_1(i+1) = 2x_1(i) - x_2(i) + u(i), \\ x_2(i+1) = x_1(i) - u(i) \end{cases}$$

з початковими умовами $x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = \{-1,0,1\}$

і обмеженнями на керування $|u(0)| \le 1, \quad |u(1)| \le 2, \quad |u(2)| \le 3$, керування в початковий момент часу не додатнє.

Модульна контрольна робота №2

Варіант - 1

1. $\begin{cases} \ddot{x} = a^2 x \\ y_1(t) = p x(t) + \dot{x}(t) \\ y_2(t) = -x(t) + \dot{x}(t) \end{cases}$

$\begin{cases} x = x_1 \\ \dot{x} = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a^2 x_1 \end{cases}$

Тоді $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad y_1(t) = p x_1(t) + x_2(t)$

$y_2(t) = -x_1(t) + x_2(t)$

$y = G^T(t) \cdot x(t)$ $\quad G_1^T = G^T(t) = \begin{bmatrix} p & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$G_2^T = G_1^T A = \begin{bmatrix} a^2 & p \\ a^2 & -1 \end{bmatrix}$

$\tilde{S}_n(t) = (G_1(t), G_2(t)) = \begin{bmatrix} p & 1 & a^2 & p \\ -1 & 1 & a^2 & -1 \end{bmatrix}$.

rank $\tilde{S}_n = 2$ при $p \neq 1$ та $a \neq \pm 1$.

тобто система спостережувана при $p \neq 1$ та $a \neq \pm 1$

2. $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad y(t) = (3x_1 + a x_2 + 3x_3)$

$(n = 3)$.

Маємо $q^T = (3; a; 3)$ $\quad A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$A^T q = (15 + 4a; -9 + 3a; -a)^T$

$(A^T)^2 q = A^T A^T q = (42a + 69; 2a - 57; -18a - 36)$.

$\det \tilde{S}_3 = \begin{vmatrix} 3 & 15+4a & 42a+69 \\ a & -9+3a & 2a-57 \\ 3 & -a & -18a-36 \end{vmatrix} = 15 \cdot (2a^3 - 11a^2 + 30a + 18)$.

ст. 1.

Система спостерегувана при $\det \tilde{\tilde{S}}_3 \neq 0$.

$$2a^3 - 11a^2 + 30a + 18 = 0$$
$$(2a+1)(a^2 - 6a + 18) = 0$$
$$\underline{a_1 = -\frac{1}{2}} \qquad a^2 - 6a + 18 = 0$$
$$(a-3)^2 = -9$$
$$a_2 = 3 + 3i$$
$$\underline{a_3 = 3 - 3i}$$

Тобто система є спостерегуваною при $a \notin \{-\frac{1}{2}; 3+3i; 3-3i\}$

Оберемо значення $a = 0$, при якому система спостерегувана, та відновимо вектор фазових координат.

$$\tilde{\tilde{S}}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 69 \\ 0 & -9 & -57 \\ 3 & 0 & -36 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left(\tilde{\tilde{S}}_3^T\right)^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = 3x_1(t) + 0 \cdot x_2(t) + 3 \cdot x_3(t)$$
$$\dot{y}(t) = 15x_1(t) - 9x_2(t) + 0 \cdot x_3(t)$$
$$\ddot{y}(t) = 69x_1(t) - 57x_2(t) - 36 \cdot x_3(t).$$

$$\left(\tilde{\tilde{S}}_3^T\right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 69 & -57 & -36 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 69 & -57 & -36 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{78}{23} & \frac{180}{23} & 0 & 1 & -\frac{5}{23} \\ 0 & \frac{57}{23} & \frac{105}{23} & 1 & 0 & -\frac{1}{23} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 69 & -57 & -36 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{78}{23} & \frac{180}{23} & 0 & 1 & \frac{-5}{23} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{15} & \frac{19}{30} & -\frac{1}{10} \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{-19}{30} & \frac{1}{10} \\ 2 & -\frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{13}{15} & \frac{19}{30} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Формула відновлення фазових координат:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{-19}{30} & \frac{1}{10} \\ 2 & -\frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{13}{15} & \frac{19}{30} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x_1 + 3x_3 \\ 15x_1 - 9x_2 \\ 69x_1 - 57x_2 - 36x_3 \end{pmatrix}$$

3. $y^{IV} + ay''' + 4y'' + by' + y = 0$

$\lambda^4 + a\lambda^3 + 4\lambda^2 + b\lambda + 1 = 0$

$a_0 = 1, \ a_1 = a, \ a_2 = 4, \ a_3 = b, \ a_4 = 1. \qquad n = 4.$

$$G = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 4 & a & 1 \\ 0 & 1 & b & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

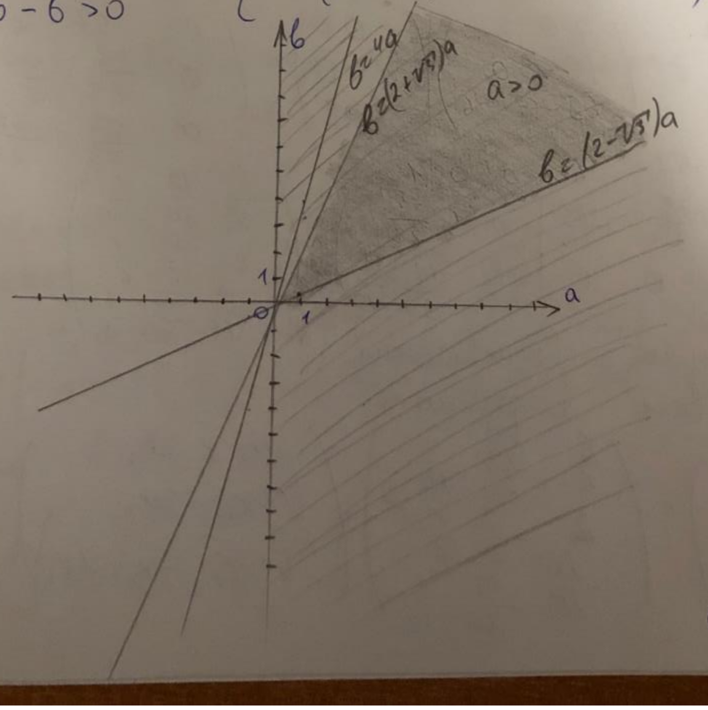
$\Delta_1 = a > 0.$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 4 \end{vmatrix} = 4a - b > 0.$

$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 4 & a & 1 \\ 0 & 1 & b & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 4ab - b^2 > 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 4 & a \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = -a^2 + 4ab - b^2 > 0$

$$\begin{cases} a > 0 \\ 4a - b > 0 \\ -a^2 + 4ab - b^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a(2-\sqrt{3}) < b < a(2+\sqrt{3}) \end{cases}$$



4. $\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x \\ \dot{y} = \sqrt{3x+y^2} - 2 \end{cases}$ Прирівнюємо похідні до нуля:

$$\begin{cases} e^x = e^y \\ \sqrt{3x+y^2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Маємо 2 точки рівноваги: $(-4;-4)$ та $(1;1)$

1) Заміна: $z_1 = x+4$, $z_2 = y+4$.

$\dot{z}_1 = e^{z_1-4} + e^{z_2-4} \approx \frac{z_1}{e^4} + \frac{z_2}{e^4}$; $\dot{z}_2 = \sqrt{3\cdot(z_1-4)+(z_2-4)^2} \approx z_2$.

$M_1 = \begin{pmatrix} e^{-4} & e^{-4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Характеристичне рівняння:

$\lambda^2 - e^{-4}\lambda - \lambda + e^{-4}$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = e^{-4}$

Власні числа $\in \mathbb{R}$, одного знаку та >0, тому тип точки спокою: не стійкий вузол.

2) Заміна: $z_1 = x-1$, $z_2 = y-1$

$\dot{z}_1 = e^{z_1+1} + e^{z_2+1} \approx e\cdot z_1 + e z_2$; $\dot{z}_2 = \sqrt{3(z_1+1)+(z_2+1)^2} \approx z_2$.

$M_2 = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Характеристичне рівняння:

$\lambda^2 - e\lambda - \lambda + e = 0$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = e$

Власні числа $\in \mathbb{R}$, одного знаку, >0, тому тип точки спокою: не стійкий вузол.

5. $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

Знайдемо $A+BC$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3c_1 & -2 \\ 2 & 2+c_2 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A+BC-\lambda E) = \begin{vmatrix} 5+3c_1-\lambda & -2 \\ 2 & 2+c_2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 +$$

$$+\lambda(-3c_1-c_2-7)+((5+3c_1)(2+c_2)+4)=0.$$

Матриця Гурвіца:

$$G = \begin{bmatrix} -3c_1-c_2-7 & 1 \\ 0 & (5+3c_1)(2+c_2)+4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = -3c_1-c_2-7>0 \\ \Delta_2 = (-3c_1-c_2-7)\cdot((5+3c_1)(2+c_2)+4)>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3c_1-c_2>7 \\ (5+3c_1)(2+c_2)>-4 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_2)-\cos(x_1)-u_1 \\ \dot{x}_2 = 3\cos(-4x_2)+4u_2 \end{cases}$$

$$J = \int_0^1 (\sin^2(x_1)+u_2^4)\,dt + \cos^4(2x_2(1)) \to \min.$$

1) Функція Гамільтона:

$$H(x,u,t,\psi,\psi_0) = \psi_0(\sin^2(x_1)+u_2^4)+\psi_1(\sin(x_2)-\cos(x_1)-u_1)+$$
$$+\psi_2(3\cos(-4x_2)+4u_2).$$

2) $\psi_0=-1$, тоді $H(x,u,t,\psi,\psi_0) = -(\sin^2(x_1)+u_2^4)+$
$$+\psi_1(\sin(x_2)-\cos(x_1)-u_1)+\psi_2(3\cos(-4x_2)+4u_2).$$

$H'_{u_1} = -\psi_1(t)=0 \Rightarrow u_1(t)$ – довільна.

$H'_{u_2} = -4u_2^3(t)+4\psi_2(t)=0 \Rightarrow u_2(t)=\sqrt[3]{\psi_2(t)}.$

u_1 та u_2 дають максимум H, бо H – опукла вниз функція.

3) Спряжена система:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -H'_{x_1} = 2\sin x_1 \cos x_1 - \sin x_1 \psi_1$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -H'_{x_2} = -\cos x_2 \psi_1 + 12 \sin 4x_2$$

Підставимо керування $u_1(t)$, $u_2(t)$ в систему.
Оскільки $u_1(t)$ - довільне керування, накладемо $u_1(t)=0$.

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \sin(x_2) - \cos(x_1) \\ \dot{x}_2(t) = 3\cos(-4x_2) + 4\sqrt[3]{\psi_2(t)} \\ \dot{\psi}_1 = 2\sin x_1 \cos x_1 - \sin x_1 \psi_1 \\ \dot{\psi}_2 = -\cos x_2 \psi_1 + 12 \sin 4x_2 \end{cases} \\ \begin{cases} \psi_1(0) = 0 \\ \psi_2(0) = 0 \\ \psi_1(1) + 0 = 0 \\ \psi_2(1) - 8\sin(2x_2)\cos^3(2x_2(1)) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

(Умови трансверсальності)

7. $$Q = \sum_{i=0}^{2} \left(x_1(i) + x_2(i) - u(i)\right) + x_1(3) + x_2(3)$$

$$\begin{cases} x_1(i+1) = 2x_1(i) - x_2(i) + u(i) \\ x_2(i+1) = x_1(i) - u(i) \end{cases}$$

$x_1(0) = 2$, $x_2(0) = \{-1; 0; 1\}$

$|u(0)| \le 1$, $|u(1)| \le 2$, $|u(2)| \le 3$

1) Прямий хід:

1.1) $k=1$: $$S_2(x_1(2), x_2(2), 2) = \min_{|u(2)|\le 3} \{x_1(2) + x_2(2) - u(2) + x_1(3) + x_2(3)\}$$

$$= \min_{|u(2)|\le 3} \{x_1(2) + x_2(2) - u(2) + 2x_1(2) - x_2(2) + u(2) + x_1(2) - u(2)\} =$$

$$= 4x_1(2) - 3, \quad u^*(2) = 3.$$

1.2) $k=1$: $S_1(x_1(1), x_2(1), 1) = \min\limits_{|u(1)|\le 2} \{x_1(1)+x_2(1)-u(1)+4x_1(2)-3\} =$

$= \min\limits_{|u(1)|\le 2} \{\underline{x_1(1)} + \underline{\underline{x_2(1)}} - \underset{\sim}{u(1)} + \underline{8x_1(1)} - \underline{\underline{4x_2(1)}} + \underset{\sim}{4u(1)} - 3\} =$

$= \min\limits_{|u(1)|\le 2} \{9x_1(1) - 3x_2(1) + 3u(1) - 3\} = 9x_1(1) - 3x_2(1) - 9, \quad u^*(1) = -2$

1.3) $k=0$: $S_0(x_1(0), x_2(0), 0) = \min\limits_{|u(0)|\le 1} \{x_1(0) + x_2(0) - u(0) + 9x_1(1) -$

$- 3x_2(1) - 9\} = \min\limits_{|u(0)|\le 1} \{x_1(0) + x_2(0) - u(0) + 18x_1(0) - 9x_2(0) + 9u(0) -$

$- 3x_1(0) + 3u(0) - 9\} = \min\limits_{|u(0)|\le 1} \{16x_1(0) - 8x_2(0) + 11u(0) - 9\} =$

$= 16x_1(0) - 8x_2(0) - 20, \quad u^*(0) = -1.$

1.a) $\min\limits_{x_1(0)+x_2(0)-u(0)} S_0(x_1^0(0), x_2^0(0), 0) = 16\cdot 2 - 8\cdot 1 - 20 = 4.$

2) Зворотній хід.

t_k	x_1	x_2	u
0	2	1	-1
1	2	3	-2
2	-1	4	3
3	-3	-4	

При написанні цієї контрольної роботи зобов'язуюсь дотримуватись правил та принципів академічної доброчесності.

Початок роботи:
15:00, 05.12.2022

Кінець роботи:
16:10, 05.12.2022

Ukoff