Основні формули

теорії ймовірностей

Початкові визначення

Статистичне визначення ймовірності – граничне значення частоти:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} h_n(A).$$

Ймовірність в скінченній схемі:

$$\forall A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\} \subseteq \Omega \quad P(A) = \sum_{j=1}^{k} p_{i_j} \text{ , та } P(\varnothing) = 0.$$

Ймовірність в зліченній схемі:

$$\forall A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\} \subseteq \Omega \quad P(A) = \sum_{j=1}^{k} p_{i_j} \quad (k \le \infty), \; P(\varnothing) = 0$$

Класичне визначення ймовірності (коли всі елементарні наслідки рівноможливі):

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Геометричне визначення ймовірності:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Елементи комбінаторики

Основні позначення

Кількість сполук (k -елементних підмножин n -елементної множини):

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Кількість перестановок (n -елементної множини):

$$P_n = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n = n!$$

Кількість розміщень (k-елементних підмножин n-елементної множини):

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Кількість перестановок з повтореннями (“слів” довжини n, які можна побудувати, маючи k_1 “букв” a_1, k_2 “букв” a_2, … , k_m “букв” a_m , де $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$):

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Кількість сполук з повтореннями (множин, що містять n елементів, кожен з яких належить одному з m типів):

$$f_m^n = C_{m+n-1}^n.$$

Основні властивості біноміальних коефіцієнтів

1. $C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$
2. $C_n^k = \frac{k}{n} C_{n-1}^{k-1}$
3. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$
4. $C_n^k = C_n^{n-k}$
5. $C_r^m C_k^r = C_k^m C_{k-m}^{k-r}$
6. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

Аксіоматика

Аксіоми

Якщо $\mathscr{F}$ є сигма-алгеброю подій, то мають місце:

1) *Аксіома невід'ємності*: $\forall A \in \mathscr{F} \quad P(A) \geq 0$.

2) *Аксіома нормованості*: $P(\Omega) = 1$.

3) *Аксіома σ-адитивності*: Якщо $A_k \in \mathscr{F}\ (k \geq 1)$ та $A_i \cap A_j = \varnothing\ (i \neq j)$, то

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Наслідки з аксіом

1) $A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

2) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$. Зокрема $0 \leq P(A) \leq 1$.

3) ***Теорема суми***: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

4) ***Теорема заперечення*** (доповнення): $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

5) $P(\varnothing) = 0$, але не кожна подія нульової ймовірності є неможливою.

Умовна ймовірність

Визначення та властивості

Визначення умовної ймовірності:

$$P(A \mid B) \overset{def}{=} \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Теорема добутку:

1. Для двох подій: $P\left(AB\right) = P(A \mid B)P(B)$ (для $P(B) \neq 0$).

2. Загальний варіант: $P\left(A_1 A_2 \ldots A_n\right) = P\left(A_1 \mid A_2 \ldots A_n\right) P\left(A_2 \mid A_3 \ldots A_n\right) \ldots P\left(A_{n-1} \mid A_n\right) P\left(A_n\right)$ для $P\left(A_2 \ldots A_n\right) \neq 0$.

Незалежність подій

Основне визначення двох незалежних подій А та В:

$$\begin{cases} P(A \mid B) = P(A) \\ P(B \mid A) = P(B) \end{cases}$$

Еквівалентне визначення двох незалежних подій А та В:

$$P\left(AB\right) = P(A)P(B).$$

Події $A_1, \ldots, A_n$ називаються **незалежними у сукупності**, якщо $\forall k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq n$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{k_i}\right) = \prod_{i=1}^{r} P\left(A_{k_i}\right).$$

Якщо ж серед подій $A_1, \ldots, A_n$ довільні дві є незалежними, то кажуть, що події $A_1, \ldots, A_n$ **попарно незалежні**.

Спадковість незалежності: якщо А та В незалежні, то незалежними також є такі пари:

а) $\overline{\text{A}}$ та В, б) $\overline{\text{B}}$ та А, в) $\overline{\text{A}}$ та $\overline{\text{B}}$.

Формула повної ймовірності:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P\left(B \mid H_k\right) P\left(H_k\right),$$

де $\left\{H_k\right\}$ – **повна група подій**, тобто: 1) $A_i \cap A_j = \varnothing$ ($i \neq j$); 2) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

Формула Байєса:

$$P\left(H_j \mid B\right) = \frac{P\left(B \mid H_j\right) P\left(H_j\right)}{P(B)} = \frac{P\left(B \mid H_j\right) P\left(H_j\right)}{\sum_{k=1}^{n} P\left(B \mid H_k\right) P\left(H_k\right)}.$$

Схема незалежних випробувань Бернуллі

Основна формула

$$P_n(k) \equiv P\{\xi(\omega)=k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=0,\dots,n.$$

Граничні теореми в СНВБ

Теорема (Пуассона) Якщо в СНВБ ймовірність успіху $p_n \in (0, 1)$, $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$, то

$$\text{при } n\to\infty \quad P_n(k) \equiv P\{\mu_n = k\} \to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Теорема (локальна теорема Муавра-Лапласа) В СНВБ із ймовірністю успіху $p\in(0, 1)$ $\forall k\in \mathrm{N}$

$$\text{при } n\to\infty \quad P_n(k) \equiv P\{\mu_n = k\} \sim \frac{1}{\sqrt{npq}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \quad \left(x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Теорема (інтегральна теорема Муавра-Лапласа) В СНВБ із ймовірністю успіху $p\in(0, 1)$

$$\forall a\le b \quad \text{при } n\to\infty \quad P\left\{a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$ – функція Лапласа (табульована).

Дискретні розподіли

- ***Бернулієвський розподіл***. $\xi \sim Be(p)$, $P\{\xi=1\}=p$, $P\{\xi=0\}=1-p=q$, $M\xi=p$, $D\xi = pq$.
- ***Біноміальний розподіл.*** $\xi \sim Bi(n,p)$, $P\{\xi(\omega)=k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$, $(k=0,\dots,n)$, $q=1-p$, $M\xi = np$, $D\xi = npq$.
- ***Гіпергеометричний розподіл.*** $\xi \sim GG(N,M,n)$, $P\{\xi=m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, де

$m = \overline{m_0, m_1}$, $m_o = \max\{0, n-(N-M)\}$, $m_1 = \min\{M, n\}$;

$M\xi = \frac{nM}{N}$, $D\xi = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$.

- ***Пуассонівський розподіл***. $\xi \sim \Pi(\lambda)$, $P\{\xi = m\} = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, $m = 0, 1, \ldots$; $M\xi = D\xi = \lambda$.

- ***Геометричний розподіл.*** $\xi \sim G(p)$, $P\{\xi = m\} = q^m p$, $m = 0, 1, \ldots$; $M\xi = \frac{q}{p}$, $D\xi = \frac{q}{p^2}$.

  (інколи розглядають ще такий варіант: $P\{\xi = m\} = q^{m-1}p$, $m = 1, 2, \ldots$ – тоді $M\xi = \frac{1}{p}$, $D\xi = \frac{q}{p^2}$).

Математичне сподівання та дисперсія

Визначення: $M\xi = \int_\Omega \xi(\omega)dP(\omega)$, $D\xi = M\left(\xi - M\xi\right)^2$.

Основні властивості $M\xi$:

- $M\chi_A(\omega) = P(A)$.
- $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$.
- $\forall c \in R \quad Mc = c$ та $Mc\xi = cM\xi$.
- Якщо $\xi \geq \eta$, то $M\xi \geq M\eta$.
- Якщо $\xi \geq 0$ і $M\xi = 0$ то $P\{\xi = 0\} = 1$.
- Якщо ξ дискретна, то $M\xi = \sum_k x_k p_k$.
- Якщо ξ має абсолютно неперервний розподіл, то $M\xi = \int_R x f_\xi(x)dx$.
- Якщо $\xi_1, \ldots, \xi_n$ незалежні, то $M\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n = M\xi_1 \cdot \ldots \cdot M\xi_n$.

Основні властивості $D\xi$:

- $D\xi = M\xi^2 - M^2\xi$
- $D\xi \geq 0$, причому $D\xi = 0 \Leftrightarrow P\{\xi = M\xi\} = 1$.
- $\forall c \in R$

  а) $Dc\xi = c^2 D\xi$,

  б) $D(\xi + c) = D\xi$,

  в) $Dc = 0$.

- Якщо $\xi_1, \dots, \xi_n$ – незалежні дискретні в.в. та $\forall i \ M\xi_i^2 < \infty$, то $D\sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i$.

Незалежність випадкових величин

Дискретні в.в. $\xi_1, \dots, \xi_n$ називаються **незалежними в сукупності**, якщо для довільного набору їх значень $\left(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \dots, x_{j_n}^{(n)}\right)$ має місце рівність

$$P\left\{\xi_1 = x_{j_1}^{(1)}, \dots, \xi_n = x_{j_n}^{(n)}\right\} = \prod_{k=1}^{n} P\left(\xi_k = x_{j_k}^{(k)}\right).$$

Існує також *еквівалентне* визначення: дискретні в.в. $\xi_1, \dots, \xi_n$ називаються **незалежними в сукупності**, якщо для довільних числових множин $B_1, \dots, B_n$

$$P\{\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n\} = \prod_{k=1}^{n} P(\xi_k \in B_k).$$

В загальному випадку в.в. $\xi_1, ..., \xi_n$ називають **незалежними**, якщо $\forall B_1, ..., B_n \in \mathrm{B}_R$

$$P\{\xi_1 \in B_1, ..., \xi_n \in B_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i \in B_i\},$$

або що те саме, що

$$F_{\xi_1, ..., \xi_n}(x_1, ..., x_n) = F_{\xi_1}(x_1) ... F_{\xi_n}(x_n).$$

Якщо випадковий вектор $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)'$ має щільність, а його компоненти **незалежні**, то

$$f_{\xi_1, ..., \xi_n}(x_1, ..., x_n) = f_{\xi_1}(x_1) ... f_{\xi_n}(x_n).$$

Міри лінійної залежності

Коваріація $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$.

Властивості коваріації:

1) $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \operatorname{cov}(\eta,\xi)$,
2) $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta$,
3) $\operatorname{cov}(\xi,\xi) = D\xi$.

Коефіцієнтом кореляції $r = r(\xi,\eta) = \dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$.

Випадкові величини ξ та η називаються **некорельованими**, якщо $r(\xi,\eta) = 0$.

Властивості кореляції:

1) $|r| \le 1$.

2) Якщо $|r| = 1$, то $\xi = a\eta + b$ (з ймовірністю 1).

3) Якщо ξ та η незалежні, то вони некорельовані, а обернене твердження в загальному випадку невірне.

Генератриси

Генератриса цілочисельної випадкової величини $\Psi_\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$

Властивості генератрис:

1) $p_n = \dfrac{1}{n!}\Psi^{(n)}(0)$.

2) $M\xi^{[r]} = \Psi_\xi^{(r)}(1) \quad \forall r \in Z^+$, зокрема $M\xi = \Psi_\xi'(1)$, $D\xi = \Psi_\xi''(1) + \Psi_\xi'(1) - \left[\Psi_\xi'(1)\right]^2$, де

$$\xi^{[0]} = 1,\ \xi^{[r]} = \xi(\xi-1)...[\xi-(r-1)] \quad (r \ge 1)$$

Основні генератриси:

1) $\xi \sim Bi(n,p) \Rightarrow \Psi(s) = (ps + 1 - p)^n$.

2) $\xi \sim \Pi(\lambda) \Rightarrow \Psi(s) = e^{-\lambda(1-s)}$.

3) $\xi \sim G(p) \Rightarrow \Psi(s) = \dfrac{p}{1-(1-p)s}$.

Випадкові величини (загальний випадок)

Функція розподілу

$$F(x) = F_{\xi}(x) = P\{\xi \le x\}$$

Властивості ф.р.:

1) $P\{a < \xi \le b\} = F(b) - F(a)$

2) $P\{\xi < x\} = F(x-0)$

3) $P\{\xi = x\} = F(x) - F(x-0)$

4) $P\{a \le \xi \le b\} = F(b) - F(a-0)$

5) $P\{a < \xi < b\} = F(b-0) - F(a)$

6) $P\{a \le \xi < b\} = F(b-0) - F(a-0)$

7) Функція розподілу неспадна, неперервна справа, нормована: $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Щільність

Розподіл випадкової величини ξ називається **абсолютно неперервним**, якщо $\exists f_\xi(x) \ge 0$ (яка називається **щільністю розподілу**) така, що $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$.

Властивості щільності:

а) $\frac{d}{dx} F_\xi(x) = f_\xi(x)$ у точках неперервності $f_\xi(x)$.

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$.

в) $P\{\xi \in B\} = \int\limits_B f_\xi(x)dx$.

Основні абсолютно неперервні розподіли

1) **Рівномірний на відрізку** $[a, b]$ ($\xi \sim U[a,b]$)

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \textit{інакше.} \end{cases}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}, \quad M\xi = \frac{a+b}{2}, \quad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2) **Показниковий (експоненційний) розподіл** ($\xi \sim Exp(\lambda)$)

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}, \quad M\xi = \frac{1}{\lambda}, \quad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3) **Нормальний (гауссівський) розподіл** ($\xi \sim N(m, \sigma^2)$, $m \in \mathrm{R}$, $\sigma^2 > 0$)

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt, \quad F_\xi(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \quad M\xi = m, \quad D\xi = \sigma^2.$$

Характеристичні функції

Основні визначення

Характеристична функція

$$\varphi_\xi(t) = Me^{it\xi} = M(\cos\xi t + i\sin\xi t) = M\cos\xi t + iM\sin\xi t,$$

$$\varphi_\xi(t) = \int_R e^{itx} dF_\xi(x).$$

У випадку дискретного розподілу

$$\varphi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \sum_{x_k} e^{itx_k} P\{\xi = x_k\},$$

в абсолютно неперервному випадку

$$\varphi_\xi(t) = \int_R e^{itx} f_\xi(x)dx, \qquad f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_R e^{-itx}\varphi_\xi(t)dt.$$

Властивості характеристичних функцій

1) $\forall t \in R \ \ |\varphi(t)| \le 1,\ \varphi(0) = 1$.

2) $\varphi(t)$ рівномірно неперервна по t.

3) Якщо $\eta = a\xi + b$, де a і b константи, то $\varphi_\eta(t) = e^{itb}\varphi_\xi(at)$.

4) Якщо $\xi_1, \ldots, \xi_n$ незалежні, то $\varphi_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{\xi_k}(t)$.

5) $\varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t) = \overline{\varphi}_\xi(t)$.

6) Якщо $m_n = M\xi^n < \infty$, то існують всі похідні $\varphi^{(k)}(t)$ ($k \le n$) і має місце $\varphi^{(k)}(0) = i^k M\xi^k$ та крім того $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(it)^k}{k!}m_k + R_n(t)$, де $R_n(t) = o(|t^n|)$, $t \to 0$.

7) Х.ф. $\varphi_\xi(t)$ однозначно визначає розподіл в.в. ξ.

8) $F_n(x) \Rightarrow F(x) \iff \varphi_n(t) \to \varphi(t)$ (Це так звана теорема про неперервну відповідність між множиною характеристичних функцій та множиною функцій розподілу)

Основні характеристичні функції

1. Якщо $\xi = c$, то $\varphi_\xi(t) = e^{itc}$.

2. $\xi \sim U([a,b])$, $\varphi_\xi(t) = \dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$.

3. $\xi \sim Exp(\lambda)$, $\varphi_\xi(t) = \left(1 - \dfrac{it}{\lambda}\right)^{-1}$.

4. $\xi \sim G(p)$, $\varphi(t) = \dfrac{p}{1 - e^{it} q}$.

5. $\xi \sim Be(p)$, $\varphi(t) = e^{it} p + 1 - p$.

6. $\xi \sim Bi(n,p)$, $\varphi(t) = \left(e^{it} p + 1 - p\right)^n$.

7. $\xi \sim \Pi(\lambda)$, $\varphi(t) = \exp\left\{\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right\}$.

8. $\xi \sim N(0,1)$, $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$; $\xi \sim N(m,\sigma^2)$, $\varphi(t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.