Ольховатий Ігор ІПС-21

1. а)
Нехай $\Pi(x)$ означає, що $x \neq 1 \wedge \forall a \forall b ((a \cdot \cancel{b}$

Ольховатий Ігор ІПС-21

(1.) а) Нехай $\Pi(x)$ означає, що:

$$\neg(x=1) \wedge \forall a \forall b ((a*b=x) \to (a=x \vee a=1))$$

(x - просте число)

Нехай $H(x)$ означає, що:

$$\exists a (x = a+a+1)$$

(x - непарне число).

$$\exists a \exists b \exists c (\Pi(a) \& \Pi(b) \& \Pi(c) \& H(a) \& H(b) \& H(c) \& \&\neg(a=b) \& \neg(a=c) \& \neg(b=c)).$$

б) $X = Y \cap (Z \setminus S)$

$$\forall x ((x \in X) \to (x \in Y) \& (x \in Z) \& \neg(x \in S) \&$$

$$\& (x \in Y) \& (x \in Z) \& \neg(x \in S) \to (x \in X)).$$

(2.) $\forall y \exists x A(x,y) \to \forall y (\forall z, \forall x B(x,y,z) \to \neg \forall x \forall y A(x,y))$

$\forall y \exists x A(x,y) \to \forall a (\forall z \forall b (B(b,a,z) \to \neg \forall c \forall d A(c,d))$

$\forall y \exists x A(x,y) \to \forall a (\forall z \forall b (B(b,a,z) \to \exists c \forall d A(c,d))$

$\forall y \exists x A(x,y) \to \forall a \forall z \forall b \exists c \forall d (B(b,a,z) \to A(c,d))$

$\forall y \exists x A(x,y) \to \forall a \forall z \forall b \exists c \forall d (\neg B(b,a,z) \vee A(c,d))$

$\forall y \exists x \forall a \forall z \forall b \exists c \forall d (A(x,y) \to (\neg B(b,a,z) \vee A(c,d))$

$\forall y \exists x \forall a \forall z \forall b \exists c \forall d (\neg A(x,y) \vee (\neg B(b,a,z)) \vee A(c,d))$

$x \longmapsto f(y)$

$c \longmapsto g(y, a, z, b)$

$\forall y \forall x \forall a \forall z \forall b \forall c \forall d\, (\neg A(f(y), y) \vee \neg B(b, a, z) \vee$
$\vee A(f(y, a, z, b), d))$.

(3) $\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) \longrightarrow (\forall x A(x) \wedge B(x))$

$$\frac{\vdash \forall x (A(x) \wedge B(x)),\ \dashv (\forall x A(x) \wedge B(x))}{\vdash\wedge \quad \vdash \forall x A(x), \vdash \forall x B(x),\ \dashv (\forall x A(x) \wedge B(x))}$$

$\dashv\wedge$: $\vdash \forall x A(x), \vdash \forall x B(x), \dashv \forall x A(x)$ | $\vdash \forall x A(x), \vdash \forall x B(x), \dashv \forall x B(x)$

$\times \qquad\qquad \times$

Отримали замкнене секвенційне дерево, отже, твердження правильне.

(4). $M = \{y \mid E_y \neq D\}$. $\quad D = \{y \mid \varphi_y(y)\downarrow\} \in$ РПМ

"$E_y \neq D$" $\Leftrightarrow \exists a (a \in E_y) \& (a \notin D)$.

$\neg \exists a \exists c (\varphi_y(y) = c \ \& \ \varphi_y(a) = c \ \& \ a \neq x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg \exists a \exists c \exists k_1 \exists k_2 (P_y(y)\downarrow_{\text{на кроці } k_1} = c \ \&$

$\& \ P_y(a)\downarrow_{\text{на кроці } k_2} = c \ \& \ a \neq x)$.

$\underbrace{\forall a}\, \underbrace{\exists c \exists k_1 \exists k_2} (\neg (P_y(y)\downarrow_{k_1} = c \ \& \ P_y(a)\downarrow_{k_2} = c \ \& \ a \neq x)$.

Π_2^M

5. $X(x)$ – справді хотіти вчитися
$\Pi(x)$ – наполегливо працювати.
$C(x)$ – бути студентом

$$\dashv(\forall x(X(x)\to\Pi(x))\wedge\exists x(C(x)\wedge\Pi(x))\to\exists x(C(x)\wedge X(x)))$$

$\dashv\to$ $\vdash(\forall x(X(x)\to\Pi(x))\wedge\exists x(C(x)\wedge\Pi(x))), \dashv\exists x(C(x)\wedge X(x))$

$\vdash\wedge$ $\vdash\forall x(X(x)\to\Pi(x)), \vdash\exists x(C(x)\wedge\Pi(x)), \dashv\exists x(C(x)\wedge X(x)).$

$\vdash\forall, \vdash\exists, \dashv\exists$ $\vdash(X(x)\to\Pi(x)), \vdash(C(x)\wedge\Pi(x)), \dashv(C(x)\wedge X(x))$

$\vdash\wedge$ $\vdash(X(x)\to\Pi(x)), \vdash C(x), \vdash\Pi(x), \dashv(C(x)\wedge X(x)).$

$\dashv\wedge$ $\vdash(X(x)\to\Pi(x)), \vdash C(x), \vdash\Pi(x), \dashv C(x)$ ✗ | $\vdash(X(x)\to\Pi(x)), \vdash C(x), \vdash\Pi(x), \dashv X(x)$

$\vdash\to$ $\dashv X(x), \vdash C(x), \vdash\Pi(x), \dashv X(x)$ | $\vdash\Pi(x), \vdash C(x), \dashv X(x)$

Секвенційне дерево не замкнене, отже, твердження не правдиве. Контрприклад:
$\dashv X(x), \vdash C(x), \vdash\Pi(x).$
(або ж $\vdash\Pi(x), \vdash C(x), \dashv X(x)$).