Теореми Кліні про нерухому точку (для індексних РФ)

<u>Теорема</u>. Для кожної $(n+1)$-арної РФ $f(z,\overline{x})$ існує n-арна РФ $g(\overline{x})$:

$$\varphi_{f(g(\overline{x}),\overline{x})} = \varphi_{g(\overline{x})}, \text{ для всіх значень } x_1,..,x_n \in N.$$

Тут $g(\overline{x})$ – нерухома точка (НТ).

<u>Спрощений варіант</u> (для $n=0$):

$$\forall \text{ РФ } f(x) \ \exists n \in N : \varphi_n = \varphi_{f(n)}.$$

Це не означає $n = f(n)$, тут n та $f(n)$ – номери тієї самої ЧРФ. Тому ці теореми можна назвати теоремами про псевдонерухому точку.

<u>Наслідок</u>. $\forall$ РФ $f(x)$ $\exists n \in N$:

$$D_n = D_{f(n)} \text{ та } E_n = E_{f(n)}.$$

<u>Первісне формулювання Кліні</u>.

$$\forall \text{ ЧРФ } h(z,x) \ \exists n \in N : h(n,x) = \varphi_n(x), \ \forall x \in N$$

Ефективний варіант. Існує РФ $\alpha(x)$: для всіх $n \in \mathbb{N}$ якщо φ_n — РФ, то $\varphi_{\varphi_n(\alpha(n))} = \varphi_{\alpha(n)}$.
Тобто можна ефективно визначати НТ.

Для кожної РФ $f(x)$ існує строго монотонна зростаюча РФ $\alpha(x)$: $\varphi_{f(\alpha(n))} = \varphi_{\alpha(n)}$, $\forall n$.
Отже, множина НТ кожної РФ нескінченна:
$\forall$ РФ $f(x)$ $\forall k \exists m$: $\varphi_{f(k)} = \varphi_m$ та $m > k$.

Не існує природних однозначних ефективних нумерацій ЧРФ:
якщо f — всюди визначена та 1) строго монотонна; 2) однозначна нумерація на індексах: $\varphi_{f(m)} \neq \varphi_{f(n)}$ при $m \neq n$; 3) $f(m)$ — найменший номер ф-ї $\varphi_{f(m)}$ $\Rightarrow$
тоді f — не ЧРФ.

МНР-програма P самотвірна, якщо $\forall x \in \mathbb{N}$ вона повертає свій номер $\tau(P)$.
Такі програми існують!
Візьмемо ЧРФ $h(z, x) = z$. За первісним формулюванням Кліні теореми про НТ, існує $n \in \mathbb{N}$: $h(n, x) = \varphi_n(x)$, для всіх $x \in \mathbb{N}$.
Отже, $\varphi_n(x) = h(n, x) = n$, $\forall x$ і програма P_n — шукана.