1. Характеристичний многочлен лін. оператора.

Нехай $A=(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – дана кв. матриця.
Візьмемо незалежну змінну t і складемо матрицю

$$A-tE=\begin{pmatrix}\alpha_{11}-t & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-t & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-t\end{pmatrix}.$$

Матриця $A-tE$ наз. характеристичною матрицею матриці A.
Визначник характ. матриці $A-tE$ утворює многочлен степеня n від змінної t. Цей многочлен наз. характеристичним многочленом матриці A і позн. $\mathcal{X}_A(t)=|A-tE|$.
Корені характ. многочлена $\mathcal{X}_A(t)$ наз. характеристичними числами матр. A.

Теор. Характеристичні многочлени подібних матриць співпадають.

Дов. Нехай матриці A,B – подібні, тобто $\exists$ невироджена матриця T така, що $B=T^{-1}AT$.
Тоді $\mathcal{X}_B(t)=|B-tE|=|T^{-1}AT-tE|=|T^{-1}AT-T^{-1}(tE)T|=$
$=|T^{-1}(A-tE)T|=|T^{-1}|\cdot|A-tE|\cdot|T|=|A-tE|=\mathcal{X}_A(t)$. $\square$

Нехай $\mathcal{A}$ – лін. опер. в скінч. вим. век. пр. V, якому в деякому фікс. базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ відповідає матриця A. Оскільки матриці лін. оператора в різних базисах подібні, то характеристичний многочлен матриці лін. оператора A не залежить від вибору базису, а тому його можна називати просто характеристичним многочленом лінійного оператора $\mathcal{A}$. Таким чином, характеристичний многочлен даного лінійного оператора – це характеристичний многочлен його матриці в деякому базисі.

Власні вектори та власні числа

Нехай $\mathcal{A}$ – лін. опер. на вект. пр. V над полем F.

<u>Озн.</u> Ненульовий вектор $a \in V$, $a \neq \theta$ наз. власним вектором оператора $\mathcal{A}$, якщо $\exists \lambda \in F : \mathcal{A}(a) = \lambda a$. При цьому λ – власне значення (власне число) оператора $\mathcal{A}$. В цьому випадку також кажуть, що a є λ-власним вектором $\mathcal{A}$, або власним вектором, що відповідає власному значенню λ

Теореми про власні вектори.

<u>Теор. 1</u> Нехай $\mathcal{A}$ – лін. опер. в скінч. вим. век. пр. V над полем F; $\lambda_0 \in F$ – власне число опер. $\mathcal{A}$. Тоді розмірність власного підпростору L_{λ_0} не перевищує кратності λ_0 як кореня характеристичного многочлена опер. $\mathcal{A}$.

<u>Теор. 2</u> Власні вектори лін. опер., що відпов. різним власним числам, лінійно незалежні.

<u>Теор. 3</u> Нехай $\mathcal{A}$ – лін. опер. на скінч. вим. век. пр. V над полем F, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in F$ – власні числа оператора $\mathcal{A}$, $a_1, a_2, \dots, a_k \in L_{\lambda_1}$, $b_1, b_2, \dots, b_l \in L_{\lambda_2}$, $\dots$, $c_1, c_2, \dots, c_m \in L_{\lambda_s}$ – лінійно незалежні системи векторів у відповідних власних підпросторах. Тоді система век. $\{a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_l, \dots, c_1, c_2, \dots, c_m\}$ – лінійно незалежна.

2. Квадратичні функції та квадратичні форми.

Нехай $g(x,y)$ – симетрична білінійна функція на векторному просторі V над полем $\mathbb{R}$.

<u>Озн.</u> Квадратичною функцією $f(x)$ наз. функція одного аргументу, яка утворюється ототожненням аргументів симетричної білінійної функції $g(x,y)$, тобто $\forall x \in V$: $f(x) = g(x,x)$.

Припустимо V – скінченновимірний векторний простір, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – деякий його фіксований базис, $x \in V$ – довільний вектор, який в цьому базисі має координати

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тоді

$$f(x) = g(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g(a_i, a_j)\, x_i x_j .$$

Позначимо $\alpha_{ij} = g(a_i, a_j)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$. Тоді $f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$.

Сума такого виду називається квадратичною формою від змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Таким чином, квадратична функція на скінченновимірному векторному просторі в $\forall$ базисі задається деякою квадратичною формою. В цьому розумінні часто ототожнюють поняття квадратичної функції та квадратичної форми.

Оскільки в різних базисах квадратична функція задається різними квадратичними формами, то кажуть про вигляд квадратичної форми в тому чи іншому базисі.

Матрицею квадратичної функції $f(x)$ в даному базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ називається матриця в цьому базисі симетричної білінійної функції $g(x,y)$, яка породжує квадратичну функцію $f(x)$.

Озн. Симетрична білінійна функція $g(x,y)$, яка породжує квадратичну функцію $f(x)$, називається полярною білінійною функцією квадратичної функції $f(x)$.

Теорема Для даної квадратичної функції $\exists!$ полярна білінійна функція.

Дов. Нехай $f(x)$ – квадратична функція на просторі V, $g(x,y)$ – її полярна симетрична білінійна функція.
Тоді для даних фіксованих $x, y \in V$ враховуючи симетричність функції g одержимо

$$g(x+y, x+y) = g(x,x) + g(x,y) + g(y,x) + g(y,y) = g(x,x) + 2g(x,y) + g(y,y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x,y) = \frac{1}{2}\left(g(x+y, x+y) - g(x,x) - g(y,y)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x+y) - f(x) - f(y)\right).$$

Якщо $h(x,y)$ – інша полярна білінійна функція, то також виконується $h(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x+y) - f(x) - f(y)\right)$, тобто $g(x,y) = h(x,y)$ $\forall x, y \in V$. $\square$

В розумінні цієї теореми дослідження симетричних білінійних функцій зводиться до дослідження квадратичних функцій.

3. $a_1 = (1;-1;1;-1;1)$, $a_2 = (1;1;0;0;3)$, $a_3 = (3;1;1;-1;7)$,

$a_4 = (0;2;-1;1;2)$ $\quad L = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ $\quad L = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\}$

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_5 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + 7\alpha_5 = 0 \\ 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - 2x_5$

$x_2 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - x_5$

x_3, x_4, x_5 – вольні

ФСР:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	1	0	0	-1
1	-1	0	2	0
-1	1	2	0	0

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

4: $x = (1;-1;1;-1)$ $\quad a_1 = (1;1;0;2)$, $a_2 = (1;0;1;1)$

$x = y + z$, $y \in L$, $z \in L^\perp$

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_1, a_2) = (x, a_1) \\ \alpha_1 \cdot (a_2, a_1) + \alpha_2(a_2, a_2) = (x, a_2) \end{cases}$$

$(a_1 a_1) = 1+1+0+4 = 6$

$(a_1 a_2) = 1+0+0+2 = 3$

$(a_2, a_2) = 1+0+1+1 = 3$.

$(x, a_1) = 1+1+0-2 = 0$

$(x, a_2) = 1+0+1-1 = 1$

$$\begin{cases} 6\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1 \end{cases} -$$

$$\begin{cases} 3\alpha_1 = -1 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$\alpha_1 = -\frac{1}{3}$, $\alpha_2 = \frac{2}{3}$.

$y = -\frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2 = \left(\frac{-1}{3}; \frac{1}{3}; 0; \frac{-2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}; 0; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$.

$z = x - y = (1;-1;1;-1) + \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 0\right) = \left(\frac{2}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{1}{3}; -1\right)$.

$\|z\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{1}{9} + \frac{9}{9}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$