2 семестр 2021-2022н.р. «Алгебра та геометрія»

Пі-11_2

Модульна контрольна робота №1

Лектор - доц., к.ф.-м.н. Б.В.Довгай,

Практ.– асист. к.ф.-м.н. А.В.Заворотинський

Варіант № 1 (30 балів)

1. Нехай задано дійсний векторний простір квадратних матриць другого порядку $M_2(R)$.

   (3 бал.) Перевірити що система $B\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right\}$ утворює базис і знайти координати матриці $A=\begin{pmatrix}13 & 11\\-1 & -5\end{pmatrix}$ в цьому базисі.

   (3 бал.) Знайти матрицю переходу T від стандартного базису E$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ до базису B. Зробити перевірку.

2. Нехай задано векторні підпростори U і V, які натягнуті на вектори $(a1, a2, a3)$ і $(b1, b2, b3)$ відповідно, де $a_1=(-1,2,-3), a_2=(-2,1,-4), a_3=(-1,-1,0)$; $b_1=(2,-1,-3)$, $b_2=(1,0,-2), b_3=(-1,-1,3)$;

   (3 бал.) Визначити, чи вектор $x=(1,4,1)$ належить сумі підпросторів $U+V$.

   (3 бал.) Скласти систему рівнянь, множина розв'язків якої є перетин підпросторів $U \cap V$.

3. (2. бал.) Побудуйте матрицю лінійного оператора $\varphi(x)$ в базисі $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ лінійного простору, якщо φ вектори $\boldsymbol{x_1=e_1-e_2}$ та $\boldsymbol{x_2=e_1+e_2}$ переводить, відповідно в вектори $\boldsymbol{y_1=e_1+2e_2}$ та $\boldsymbol{y_2= e_1-3e_2}$

   (1. бал.) знайдіть образ вектора $\boldsymbol{z=2e_1-e_2}$ під дією оператора φ

   (2. бал.) Знайдіть ker φ та def φ.

   (1. бал.) Побудуйте матрицю оператора $\varphi(x)$ в базисі B ($\boldsymbol{y_1}$,$\boldsymbol{y_2}$).

4. (2+2+2 бал.) Чи можна матрицю $\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\-1 & -1 & 1\\-2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ лінійного перетворення дійсного векторного простору V привести до діагонального виду шляхом переходу до нового базису. Знайти цей базис і відповідну йому матрицю. Зробити перевірку.

5. (2+2+2 бал.) Для матриці $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\3 & -5\end{pmatrix}$ визначити A^{50}.

2 семестр 2021-2022н.р. «Алгебра та геометрія»

Пі-11_2

Модульна контрольна робота №1

Лектор - доц., к.ф.-м.н. Б.В.Довгай,

Практ.– асист. к.ф.-м.н. А.В.Заворотинський

Варіант № 2 (30 балів)

1. Нехай $R_2(x)$ простір многочленів з дійсними коефіцієнтами порядку не вище 2.
   (3. бал.) Перевірити що система
   $B\{2x^2-3x+1, x^2-2x+4, x^2-5x+2\}$ утворює базис і знайти координати вектора $f(x)=x^2+2x+4$ в цьому базисі В.
   (3 бал.) Знайти матрицю переходу Т від стандартного базису $\mathrm{E}\{1, x, x^2\}$ до базису В. Зробити перевірку.
2. Нехай в просторі R^4 задано підпростори U і V, які натягнуті на вектори $(a1, a2, a3)$ і $(b1, b2, b3)$ відповідно, де
   $a_1=(1,1,-1,-1), a_2=(3,-1,1,-2), a_3=(-2,2,-2,1)$;
   $b_1=(-2,-1,-2,3),\ b_2=(1,2,3,-3), b_3=(1,-1,-1,0)$;
   (3. бал.) Доведіть, що $R^4=U\oplus V$
   (3. бал.) Знайдіть проекцію вектора $x=(0,2,0,-1)$ на підпростір U паралельно підпростору V
3. (3. бал.) Покажіть, що відображення $\varphi(x)$, яке полягає у множенні всіх матриць лінійного простору $M_2(R)$ зліва на матрицю $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ є лінійним оператором простору $M_2(R)$ та знайдіть матрицю цього лінійного оператора в стандартному базисі $E=(E_1, E_2, E_3, E_4)$
   (3. бал.) Знайдіть ker φ та def φ.

4. (2+2+2 бал.) Чи можна матрицю лінійного перетворення дійсного векторного простору V $\begin{pmatrix}-4 & 3 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$ привести до діагонального виду шляхом переходу до нового базису. Знайти цей базис і відповідну йому матрицю. Зробити перевірку
5. (2+2+2 бал.) Привести матрицю лінійного оператора
   $$\begin{pmatrix}-4 & -1 & 1\\ 2 & -4 & -5\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$
   до жорданової форми, знайти її мінімальний многочлен, побудувати канонічний базис над полем дійсних чисел. Зробити перевірку.

2 семестр 2021-2022н.р. «Алгебра та геометрія»

Пі-11_2

Модульна контрольна робота №1

Лектор - доц., к.ф.-м.н. Б.В.Довгай,

Практ.– асист. к.ф.-м.н. А.В.Заворотинський

Варіант № 3 (30 балів)

1. Нехай $R_2(x)$ − простір многочленів з дійсними коефіцієнтами порядку не вище 2.
   (3. бал.) Знайдіть базис та розмірність лінійної оболонки $L\{x^2+2x-3, -3x^2-4x+1, x^2+x+1\}$ векторів лінійного простору $R_2(x)$.
   (3. бал.) Чи належить вектор $f(x)=x^2+5$ цій лінійній оболонці? Якщо так – знайдіть координати цього вектора в базисі L
2. Нехай в просторі R^4 задано підпростори U і V, які натягнуті на вектори $(a1, a2, a3)$ і $(b1, b2, b3)$ відповідно, де $a_1=(1,1,-1,-1), a_2=(-3,1,-1,2), a_3=(2,-2,2,-1)$;
   $b_1=(2,1,2,-3),\ b_2=(1,2,3,-3), b_3=(1,-1,-1,0)$;
   (3. бал.) Доведіть, що $R^4=U\oplus V$
   (3. бал.) Знайдіть проекцію вектора $x=(0,2,0,-1)$ на підпростір V паралельно підпростору U .
3. (3. бал.) Покажіть, що відображення $\varphi(x)$, яке полягає у множенні всіх матриць лінійного простору $M_2(R)$ справа на матрицю $A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ є лінійним оператором простору $M_2(R)$ та знайдіть матрицю цього лінійного оператора в стандартному базисі $E=(E_1, E_2, E_3, E_4)$
   (3. бал.) Знайдіть Im φ та rank φ
4. (3+3 бал.) Чи можна матрицю лінійного перетворення дійсного векторного простору V $\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 3 & -5 & 1\\ 3 & -3 & -1\end{pmatrix}$ привести до діагонального виду шляхом переходу до нового базису. Знайти цей базис і відповідну йому матрицю. Зробити перевірку.
5. (2+2+2 бал.) Привести матрицю лінійного оператора
   $$\begin{pmatrix}-6 & -16 & 6\\ -2 & -10 & 3\\ -11 & -38 & 13\end{pmatrix}$$
   до жорданової форми, знайти її мінімальний многочлен, побудувати канонічний базис над полем дійсних чисел. Зробити перевірку.

2 семестр 2021-2022н.р. «Алгебра та геометрія»

Пі-11_2

Модульна контрольна робота №1

Лектор - доц., к.ф.-м.н. Б.В.Довгай,

Практ.– асист. к.ф.-м.н. А.В.Заворотинський

Варіант № 4 (30 балів)

1. Нехай $R_2(x) -$ простір многочленів з дійсними коефіцієнтами порядку не вище 2.
   (3. бал.) Знайдіть базис та розмірність лінійної оболонки $L\{-x^2 - 2x + 4, 3x^2 + 4x - 1, 2x^2 + 2x + 2\}$ векторів лінійного простору $R_2(x)$.
   (3. бал.) Чи належить вектор $f(x) = x^2 + 6$ цій лінійній оболонці? Якщо так – знайдіть координати цього вектора в базисі L
2. Нехай в просторі R^4 задано підпростори U і V, які натягнуті на вектори $(a1, a2, a3)$ і $(b1, b2, b3)$ відповідно, де $a_1 = (1, -1, -1, -1), a_2 = (3, -1,1, -2), a_3 = (2, -2,2, -1)$;
   $b_1 = (2, 1, 2, -3),\ b_2 = (1, 2,3, -3), b_3 = (-1, -1, -1,0)$;
   (3. бал.) Доведіть, що $R^4 = U \oplus V$
   (3. бал.) Знайдіть проекцію вектора $x = (0,2, 0, -1)$ на підпростір V паралельно підпростору U .
3. (3. бал.) Покажіть, що відображення $\varphi(x)$, яке полягає у множенні всіх матриць лінійного простору $M_2(R)$ справа на матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ є лінійним оператором простору $M_2(R)$ та знайдіть матрицю цього лінійного оператора в стандартному базисі $E=(E_1, E_2, E_3, E_4)$
   (3. бал.) Знайдіть Im φ та rank φ
4. (3+3 бал.) Чи можна матрицю лінійного перетворення дійсного векторного простору V $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ привести до діагонального виду шляхом переходу до нового базису. Знайти цей базис і відповідну йому матрицю. Зробити перевірку.
5. (2+2+2 бал.) Привести матрицю лінійного оператора
   $$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -4 & 7 & -8 \\ -6 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$
   до жорданової форми, знайти її мінімальний многочлен, побудувати канонічний базис над полем дійсних чисел. Зробити перевірку.