2 семестр 2021-2022н.р.   ПІ-13   Алгебра та геометрія»

Модульна контрольна робота №3

Лектор - доц. к.ф.-м.н. Б.В.Довгай,

Практ.– асист. к.ф.-м.н. А.В.Заворотинський

Варіант № 1 (30 балів)

1. (1+2 бал.) Поняття ортонормованої системи. Твердження про лінійну незалежність системи ортонормованої системи (дов.)
2. Для системи векторів векторів евклідового простору $\mathbf{R}^4$

   $a_1\,(1,1,1,1), a_2\,(1,2,2,-1), a_3\,(1,0,0,3)$

   - (4 бал.) Застосовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмітда, побудуйте ортонормований базис лінійної оболонки $L(a_{1,}a_{2,}a_3)$.
   - (5 бал.) Знайдіть базис ортогонального доповнення лінійної оболонки $L(a_{1,}a_{2,}a_3)$.
3. Лінійний оператор φ в ортонормованому базисі e_1, e_2, e_3 евклідового простору V має матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
   - (3 бал.) Визначте тип оператора. Зробіть перевірку.
   - (3 бал.) Знайдіть базис із власних векторів, в якому матриця оператора φ має діагональний вид, вкажіть цей діагональний вид.
   - (3 бал.) Знайдіть таку ортогональну матрицю T, що матриця $T^{-1}AT$ є діагональною. Зробіть перевірку.
4. Для заданої квадрат. форми (КФ)

   $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1\,x_2 - 4x_2x_3$

   - (2 бал.) Записати КФ в симетричній та матричній формах, визначити її тип (за критерієм Сільвестра).
   - (2 бал.) Привести КФ до канонічного вигляду методом Лагранжа.
   - (2 бал.) Вказати невироджене лінійне перетворення, яке переводить КФ до канонічного вигляду, зробити перевірку.
   - (2 бал) Привести КФ до нормального канонічного вигляду та обрахувати індекси інерції.

2 семестр 2021-2022н.р.   ПІ-13   Алгебра та геометрія»

Модульна контрольна робота №3

Лектор - доц. к.ф.-м.н. Б.В.Довгай,

Практ.– асист. к.ф.-м.н. А.В.Заворотинський

Варіант № 2 (30 балів)

1. (1+2 бал.) Нерівність Коші-Буняковського (дов.)
2. Для системи векторів евклідового простору $\mathbf{R}^4$

   $a_1\,(1,1,3,0), a_2\,(2,1,1,-1), a_3\,(1,2,8,1)$

   - (4 бал.) Застосовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмітда, побудуйте ортонормований базис лінійної оболонки $L(a_{1,}a_{2,}a_3)$.
   - (5 бал.) Знайдіть кут між вектором x(0,1,2,3) та підпростором $L(a_{1,}a_{2,}a_3)$.
3. Лінійний оператор φ в ортонормованому базисі e_1, e_2, e_3 евклідового простору V має матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
   - (3 бал.) Визначте тип оператора. Зробіть перевірку.
   - (3 бал.) Знайдіть базис із власних векторів, в якому матриця оператора φ має діагональний вид, вкажіть цей діагональний вид.
   - (3 бал.) Знайдіть таку ортогональну матрицю T, що матриця $T^{-1}AT$ є діагональною. Зробіть перевірку.
4. Для заданої квадрат. форми (КФ)

   $f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1\,x_2 + 8x_2x_3$

   - (2 бал.) Записати КФ в симетричній та матричній формах, визначити її тип (за критерієм Сільвестра).
   - (3 бал.) Привести КФ до канонічного вигляду ортогональним перетворенням.
   - (2 бал.) Вказати невироджене лінійне/ортогональне перетворення, яке переводить КФ до канонічного вигляду, зробити перевірку.
   - (2 бал) Привести КФ до нормального канонічного вигляду та обрахувати індекси інерції.

2 семестр 2021-2022н.р. ПІ-13 Алгебра та геометрія»
Модульна контрольна робота №3
Лектор - доц. к.ф.-м.н. Б.В.Довгай,
Практ.– асист. к.ф.-м.н. А.В.Заворотинський

Варіант № 3 (30 балів)

1. (1+2 бал.) Теорема про полярний розклад не виродженої матриці (дов.)
2. Для системи векторів векторів евклідового простору $\mathbf{R}^4$
   $$a_1\,(1,0,2,1), a_2\,(2,1,2,3), a_3\,(0,1,-2,1)$$
   - (4 бал.) Застосовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмітда, побудуйте ортонормований базис лінійної оболонки $L(a_1, a_2, a_3)$.
   - (5 бал.) Знайдіть ортогональну проекцію x(0,1,2,3) на підпростір $L(a_1, a_2, a_3)$.
3. Лінійний оператор φ в ортонормованому базисі e_1, e_2, e_3 евклідового простору V має матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
   - (3 бал.) Визначте тип оператора. Зробіть перевірку.
   - (3 бал.) Знайдіть базис із власних векторів, в якому матриця оператора φ має діагональний вид, вкажіть цей діагональний вид.
   - (3 бал.) Знайдіть таку ортогональну матрицю T, що матриця $T^{-1}AT$ є діагональною. Зробіть перевірку.
4. Для заданої квадрат. форми (КФ)
   $$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1\,x_2 - 4x_2x_3$$
   - (2 бал.) Записати КФ в симетричній та матричній формах, визначити її тип (за критерієм Сільвестра).
   - (3 бал.) Привести КФ до канонічного вигляду методом Якобі.
   - (2 бал.) Вказати невироджене лінійне/ортогональне перетворення, яке переводить КФ до канонічного вигляду, зробити перевірку.
   - (2 бал) Привести КФ до нормального канонічного вигляду та обрахувати індекси інерції.

---

2 семестр 2021-2022н.р. ПІ-13 Алгебра та геометрія»
Модульна контрольна робота №3
Лектор - доц. к.ф.-м.н. Б.В.Довгай,
Практ.– асист. к.ф.-м.н. А.В.Заворотинський

Варіант № 4 (30 балів)

1. (1+2 бал.) Ознака (критерій) лінійної залежності системи векторів через визначник Грамма (дов.).
2. Для системи векторів векторів евклідового простору $\mathbf{R}^4$
   $$a_1\,(1,-1,1,-1), a_2\,(1,1,1,1), a_3\,(1,0,-1,0)$$
   - (4 бал.) Застосовуючи процес ортогоналізації Грама-Шмітда, побудуйте ортонормований базис лінійної оболонки $L(a_1, a_2, a_3)$.
   - (5 бал.) Знайдіть ортогональну складову вектором x(0,1,2,3) відносно підпростору $L(a_1, a_2, a_3)$.
3. Лінійний оператор φ в ортонормованому базисі e_1, e_2, e_3 евклідового простору V має матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
   - (3 бал.) Визначте тип оператора. Зробіть перевірку.
   - (3 бал.) Знайдіть базис із власних векторів, в якому матриця оператора φ має діагональний вид, вкажіть цей діагональний вид.
   - (3 бал.) Знайдіть таку ортогональну матрицю T, що матриця $T^{-1}AT$ є діагональною. Зробіть перевірку.
4. Для заданої квадрат. форми (КФ)
   $$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1\,x_2 - 4x_2x_3$$
   - (2 бал.) Записати КФ в симетричній та матричній формах, визначити її тип (за критерієм Сільвестра).
   - (3 бал.) Привести КФ до канонічного вигляду методом Лагранжа.
   - (2 бал.) Вказати невироджене лінійне/ортогональне перетворення, яке переводить КФ до канонічного вигляду, зробити перевірку.
   - (2 бал) Привести КФ до нормального канонічного вигляду та обрахувати індекси інерції.