Алгебра лінійних операторів.

Вважаємо, що ці оператори діють на лін. пр. V над полем F.

1. Нульовий оператор.

На пр. V введ. опер. $O: V \to V$ такий, що $\forall x \in V: O(x) = \Theta$.
Такий оператор наз. нульовим.
Якщо V – скінч. вим. пр., то в $\forall$ базисі нульовому опер. відпов. нульова матриця.

2. Одиничний оператор.

На пр. V введ. опер. $\mathcal{E}: V \to V$ такий, що $\forall x \in V: \mathcal{E}(x) = x$.
Цей опер. наз. одиничним і якщо V – скінч. вим. пр., то в $\forall$ базисі одиничному опер. відпов. одинична матриця E.

3. Сума операторів

Нехай $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – лін. опер. на лін. пр. V. Визначимо відображ. $\mathcal{A}+\mathcal{B}$.
$\forall x \in V: (\mathcal{A}+\mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)$.
Відобр. $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ – лінійне
Припустимо V – скінч. вим. пр., $a_1, a_2, \dots, a_n$ – деякий фікс. базис пр. V,
В якому опер. $\mathcal{A} \to A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$, $\mathcal{B} \to B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^n$, $(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \to C = (\gamma_{ij})_{i,j=1}^n$.
Тоді $C = A + B$, тобто $(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \to A + B$.

4. Множення оператора на скаляр

Припустимо $\mathcal{A}$ – лін. опер на пр. V, $\lambda \in F$ – фікс. скаляр.
Визначимо відобр. $(\lambda\mathcal{A})$. $\forall x \in V: (\lambda\mathcal{A})(x) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x)$.
Відображення $(\lambda\mathcal{A})$ – лінійне.
Якщо V – скінч. вим. пр., $a_1, a_2, \dots, a_n$ – деякий базис V,
В якому опер. $\mathcal{A}$ відпов. матр. $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$, то в цьому ж базисі оператору $\lambda\mathcal{A}$ відповідає матр. $\lambda A = (\lambda\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$.

5. Протилежний оператор.

Нехай $\mathcal{A}$ – лін. опер. на пр. V. Покладемо $(-\mathcal{A}) = (-1)\mathcal{A}$.
Оператор $-\mathcal{A}$ наз. протилежним до опер. $\mathcal{A}$. $\mathcal{A} + (-\mathcal{A}) = O$.

Позначимо $\mathcal{L}(V)$ – мн. всіх лін. опер. на лін. пр. V над полем F.
Тоді сама мн. $\mathcal{L}(V)$ утворює лін. пр. над полем F відносно операцій $+$ та $\cdot$ на скаляри з поля F.
Припустимо V – скінч. вим. пр., $a_1, a_2, \dots, a_n$ – деякий фікс. базис V.

Тоді добутку над операторами відповідають дії над матрицями цих опер. в цьому базисі. Таким чином, при фікс. базисі $\exists$ ізоморфізм між пр. $\mathcal{L}(V)$ операторів і пр. всіх квадр. матриць порядку n з елементами з поля F.
Звідси, зокрема, випливає, що $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$.

6. Добуток операторів

Припустимо $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ – лін. опер. на пр. V
Визначимо відобр. $(\mathcal{A}\mathcal{B})$. $\forall x \in V: (\mathcal{A}\mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x))$.
Опер. $\mathcal{A}\mathcal{B}$ – лінійний.
Зрозуміло, що $\forall$ опер. $\mathcal{A}$ на пр. V: $\mathcal{A} \cdot 0 = 0 \cdot \mathcal{A} = 0$; $\mathcal{A}\mathcal{E} = \mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Нехай V – скінч. вим. пр., $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – фікс. базис, в якому опер $\mathcal{A}$ відпов. матр. A

$\mathcal{B}$ — B

$\mathcal{A}\mathcal{B}$ — C

Тоді $C = A \cdot B$.
Таким чином, при фікс. базисі добутку операторів відповідає добуток матриць цих операторів.

2. <u>Білінійні функції та білінійні форми.</u>

Нехай V – векторний простір над полем $\mathbb{R}$.
Відображення $f: V \times V \to \mathbb{R}$ називається білінійною функцією, якщо виконуються умови:
1. $\forall x, y, z \in V$: $f(x+y, z) = f(x, z) + f(y, z)$;
2. $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$;
3. $\forall x, y, z \in V$: $f(x, y+z) = f(x, y) + f(x, z)$;
4. $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $f(x, \alpha y) = \alpha f(x, y)$.

Таким чином, відображення f білінійне, якщо при фіксованому другому аргументі воно лінійне по першому, і при фіксованому першому воно лінійне по другому.

Припустимо тепер, що V – скінченновимірний простір, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – деякий фіксований базис простору, $x, y \in V$ – довільні вектори, які в цьому базисі мають координати $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$. Тоді

$$f(x,y)=f(x_1a_1+x_2a_2+\dots+x_na_n,\ y_1a_1+y_2a_2+\dots+y_na_n)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(a_i,a_j)\,x_iy_j.$$

Означимо $\alpha_{ij}=f(a_i,a_j)$, $i,j=\overline{1,n}$. Тоді

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_iy_j.$$

Сума такого вигляду називається білінійною формою від змінних $x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_n$.

Таким чином, можна зробити висновки:

1) На скінченновимірному векторному просторі при фіксованому базисі $\forall$ білінійна функція задається деякою білінійною формою

2) При фіксованому базисі $a_1,a_2,\dots,a_n$ білінійна функція $f(x,y)$ на скінченновимірному просторі задається набором чисел α_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$, де $\alpha_{ij}=f(a_i,a_j)$.

В цьому розумінні часто поняття білінійної функції замінюють поняттям білінійної форми. Зрозуміло, що при різних фіксованих базисах білінійна функція задається різними білінійними формами, тому кажуть про вигляд білінійної форми в різних базисах.

3. $W = \{(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n)\} \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, i=\overline{2,n}\}$

W- підпростір $\mathbb{R}^n$. $W \neq \emptyset$. Але $\forall \bar{x}, \bar{y} \in W : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(Нехай $x = (x_2+x_3+\ldots+x_n, x_2, x_3 \ldots x_n)$, $y = (y_2+y_3+\ldots+y_n, y_2, y_3 \ldots y_n)$

$\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} = (\alpha x_2 + \alpha x_3 + \ldots + \alpha x_n, \alpha x_2, \alpha x_3 \ldots \alpha x_n) +$
$+ (\beta y_2 + \beta y_3 + \ldots + \beta y_n, \beta y_2, \beta y_3, \ldots \beta y_n) = (\alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3 + \ldots + \alpha x_n + \beta y_n,$
$\alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3 \ldots \alpha x_n + \beta y_n)$.

Оскільки $\alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3 + \ldots + \alpha x_n + \beta y_n = (\alpha x_2 + \beta y_2) +$
$+ (\alpha x_3 + \beta y_3) + \ldots + (\alpha x_n + \beta y_n)$ (перша координата дорівнює сумі всіх інших), тоді $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in W$ => дана система векторів утворює лінійний підпростір простору $\mathbb{R}^n$ за означенням.

$\forall \bar{x} = ((\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \ldots + \alpha_n e_n)$

$B_W = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ - базис підпростору, де $e_1 = (1,1,0\ldots0)$,
$e_2 = (1,0,1\ldots0)$, $e_3 = (1,0,0,1\ldots0)$ $\ldots$ $e_n = (1,0,0,\ldots 1)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \sim \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}}^{n-1} \quad rank = n-1 \Rightarrow \dim W = n-1$$

4. $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 =$
$= (\sqrt{3}x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}})^2 - \frac{1}{3}x_2^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 =$
$= \left| y_1 = \sqrt{3}x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}} \right| = y_1^2 + \frac{5}{3}x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 =$
$= y_1^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{3}}x_2 - 2\sqrt{\frac{3}{5}}x_3 + \sqrt{\frac{3}{5}}x_4\right)^2 - \frac{12}{5}x_3^2 + \frac{12}{5}x_3x_4 -$
$- \frac{3}{5}x_4^2 - x_3^2 - 2x_4^2 = \left| y_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}x_2 - 2\sqrt{\frac{3}{5}}x_3 + \sqrt{\frac{3}{5}}x_4 \right| =$
$= y_1^2 + y_2^2 - \frac{17}{5}x_3^2 - \frac{13}{5}x_4^2 + \frac{12}{5}x_3x_4 = y_1^2 + y_2^2 - \left(\sqrt{\frac{17}{5}}x_3 - \frac{6}{\sqrt{85}}x_4\right)^2 +$
$+ \frac{36}{85}x_4^2 - \frac{13}{5}x_4^2 = \left| y_3 = \sqrt{\frac{17}{5}}x_3 - \frac{6}{\sqrt{85}}x_4 \right| = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - \frac{37}{17}x_4^2 =$
$= \left| y_4 = \sqrt{\frac{37}{17}}x_4 \right| = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2.$

$$
\begin{cases}
y_1 = \sqrt{3}\,x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,x_2 \\
y_2 = \sqrt{\dfrac{5}{3}}\,x_2 - 2\sqrt{\dfrac{3}{5}}\,x_3 + \sqrt{\dfrac{3}{5}}\,x_4 \\
y_3 = \sqrt{\dfrac{17}{5}}\,x_3 - \dfrac{6}{\sqrt{85}}\,x_4 \\
y_4 = \sqrt{\dfrac{37}{17}}\,x_4
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}y_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}y_2 + \dfrac{2y_3}{\sqrt{85}} + \dfrac{29y_4}{5\sqrt{629}} \\
x_2 = \sqrt{\dfrac{3}{5}}\,y_2 + \dfrac{6y_3}{\sqrt{85}} + \dfrac{87y_4}{5\sqrt{629}} \\
x_3 = \sqrt{\dfrac{5}{17}}\,y_3 + \dfrac{6\sqrt{629}}{629}\,y_4 \\
x_4 = \sqrt{\dfrac{17}{37}}\,y_4
\end{cases}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix}
\dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{85}} & \dfrac{29}{5\sqrt{629}} \\
0 & \sqrt{\dfrac{3}{5}} & \dfrac{6}{\sqrt{85}} & \dfrac{87}{5\sqrt{629}} \\
0 & 0 & \sqrt{\dfrac{5}{17}} & \dfrac{6\sqrt{629}}{629} \\
0 & 0 & 0 & \sqrt{\dfrac{17}{37}}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}
$$