Варіант 10

1. З якою точністю необхідно обчислити $\sin\frac{\pi}{8}$, щоб відносна похибка обчислення коренів рівняння $x^2 - 2x + \sin\frac{\pi}{8} = 0$ не перевищувала 10^{-3}?
2. Зробити дві ітерації для знаходження найменшого кореня нелінійного рівняння $x^2+\sin x-12x-0,25=0$ методом релаксації. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.
3. Зробити дві ітерації методом Зейделя для знаходження розв'язку $\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12 \\ 4x_1 - 5x_2 - 5x_3 = -13 \\ 2x_1 - 5x_2 - 14x_3 = -9 \end{cases}$ Перевірити умову припинення, $\varepsilon = 0.01$.
4. Проробити дві ітерації методу Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} \tan(xy+0.1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$. Записати умову закінчення ітераційного процесу, $\varepsilon = 0.01$.
5. Яка точність обчислення значення $\ln 100,5$ за допомогою інтерполяції за відомими значення $\ln 100$, $\ln 101$, $\ln 102$, $\ln 103$, $\ln 104$.

Кіндук Ярослав

ЯП 6-33

10 - варіант

1. $\sin \pi/8$ $\quad \delta(\sin \pi/8) - ?$

$x^2 - 2x + \sin \pi/8 = 0 \quad \delta(x^*) < 10^{-3}$

$$\delta\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\Delta\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)}{\sin \pi/8^*}$$

$$\Delta(x^*) = \frac{\Delta(f^*)}{|f'(x^*)|} \leq \frac{\varepsilon}{|f'(x^*)|}$$

$f'(x^*) = 2x - 2$

~~$f^*(x^*$~~

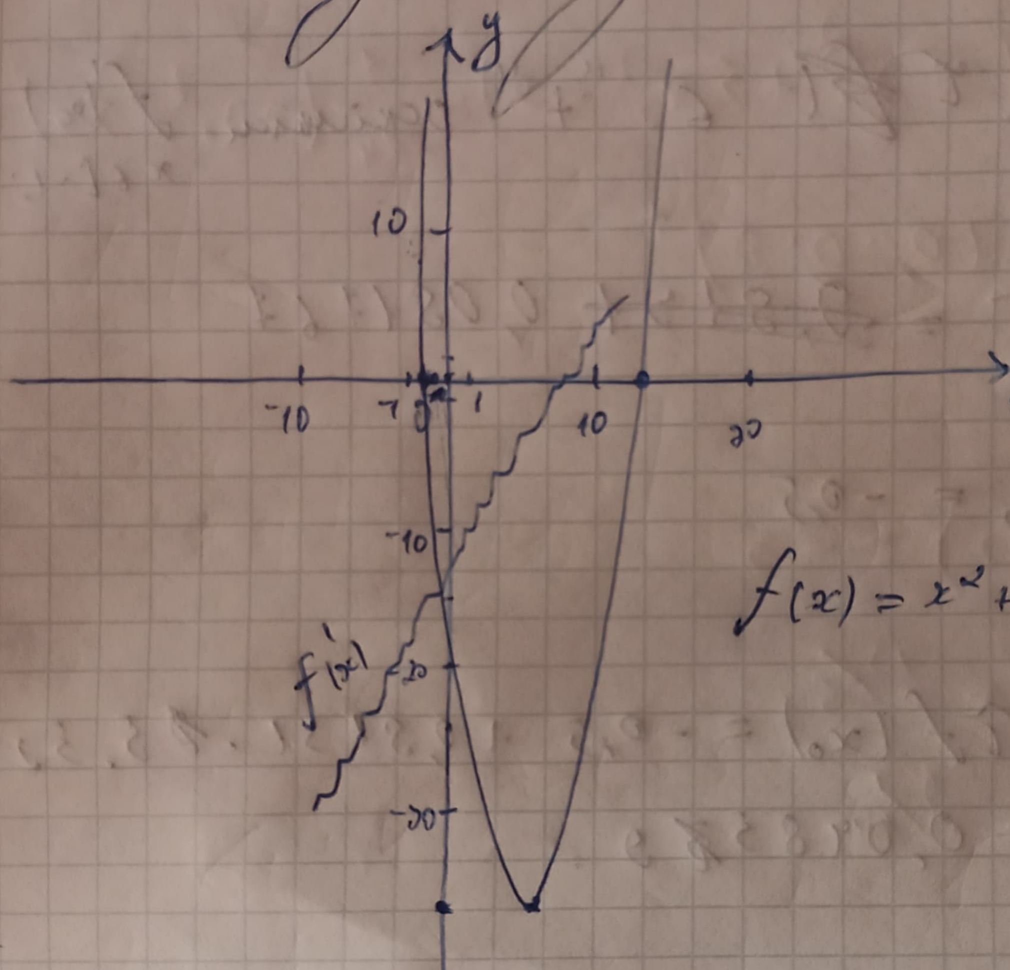
$\Delta f(x^*) = f'(x^*)\,\Delta(x^*) =$

$*$

2. $x^2 + \sin x - 12x - 0{,}25 = 0$ $\quad \varepsilon = 0{,}001$

м. Релаксації: $x_{n+1} = x_n \pm \tau f(x_n)$

Достатні умови збіжності:



$f(x) = x^2 + \sin x - 12x - 0{,}25$

Нехай

$x \in [-1; 0]$

$f'(x) = 2x + \cos x - 12$

$f(-1) > 0 \quad f(0) < 0 \quad f(-1)f(0) < 0 \Rightarrow$

$m_1 = \min\limits_{x\in[-1;0]} |2x + \cos x - 12| = \Rightarrow x^* \in [-1; 0]$.

$\approx \cancel{13.45969}$ 11 > 0 — доп. умові $0 < m_1 \le$

$\le |f'(x)| \le M_1$.

~~Нехай $x \in$~~ $[-0,5$;

$$M_1 = \max_{[-1;0]} |2x + \cos x - 12| \approx 13,459169$$

Знак перед τ ~~$[\,$~~ в "+" оскільки $f'(x) < 0$ $x \in [-1;0]$

$$\tau = \frac{2}{m_1 + M_1} = \cancel{0,8131} \; 0,051767$$

Оберемо $x_0 = -0,5$

Ітерація 1.

$$x_1 = x_0 + \tau f(x_0) = -0,5 + 0,8131 \cdot \cancel{8} 5.82857 =$$

$$= \cancel{3.9887} \; -0,048529$$

Умова припинення:

$$|x_1 - x_0| \approx \cancel{45.4888} \; 0,4514 > \varepsilon \quad \text{Не виконується}$$

Ітерація 2.

$$x_2 = x_1 + \tau f(x_1) = \cancel{3.9887 + 0,8131}$$

$$= \cancel{0,5 \cdot 1} \; -0,048397 + 0,051764 \cdot \cancel{8} \; 0.28687 =$$

$$= -0,02514$$

Змін.:

$|x_2 - x_1| \approx 0{,}0234 > \varepsilon$ Не виконується.

3. $\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12, \\ 4x_1 - 5x_2 - 5x_3 = -13, \\ 2x_1 - 5x_2 - 14x_3 = -9; \end{cases}$ $\varepsilon = 0{,}01$

$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & -5 \\ 2 & -5 & -14 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ -9 \end{pmatrix}$

Необхідна умова збіжності:

$\begin{vmatrix} -\lambda 4 & 4 & 2 \\ \lambda \cdot 4 & -5\lambda & -5 \\ 2\lambda & -5\lambda & -14\lambda \end{vmatrix} = 0$, $|\lambda|$ має бути < 1

$\Rightarrow$ $-280\lambda^3 + 100\lambda^2 + 1{,}45865\lambda - 0{,}2918 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{19}{35} - \frac{\sqrt{156}}{35},\ \lambda_3 = \frac{19}{35} + \frac{\sqrt{156}}{35} \approx 0{,}9025 < 1$

Умова виконується.

Іт. процес:

$x_2^2 = \frac{1}{14}\left(2\cdot(-3) - 5\cdot\frac{13}{7} + 9\right) = -\frac{10}{14} = -\frac{5}{7}$.

Умова припинення:

$\|x^2 - x^1\|_\infty = \|(-0{,}07537; -0{,}4425; -5/7)^T - (-3; 13/5; 9/14)^T\|_\infty = \|(2{,}92143; -5{,}0425; -1{,}357)\|_\infty = 5{,}0425 > \varepsilon$ не виконано.

4. $\begin{cases} \tan(xy + 0{,}1) = x^2, \\ x^2 + 2y^2 = 1; \end{cases} \quad \varepsilon = 0{,}01.$

Нехай $x^0 = (0; 0)^T$ Умова — ???

Якобі: $\begin{cases} \tan(xy + 0{,}1) - x^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0; \end{cases}$

$$A_k = \begin{pmatrix} y\tan^2(xy + 0{,}1) - 2x + y & x\tan^2(xy + 0{,}1) + x \\ 2x & 4y \end{pmatrix}$$

Ітерація 1.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^0 = \begin{pmatrix} \tan(xy + 0{,}1) - x^2 \\ x^2 + 2y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \approx 0{,}10033 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Отримаємо систему [illegible] $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Система розв'язків немає, потрібно інші x_0 та y_0.