# Варіант №2

№1 Нехай $\mathbb{R}_2(x)$ - простір многочленів із дійсними коефіцієнтами, $\overline{b}_1 = 2x^2-3x+1$, $\overline{b}_2 = x^2-2x+4$, $\overline{b}_3 = x^2-5x+2$

1) $\alpha_1\overline{b}_1+\alpha_2\overline{b}_2+\alpha_3\overline{b}_3=\overline{0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & 0 \end{array}\right)$$

Система векторів $B=\{\overline{b}_1,\overline{b}_2,\overline{b}_3\}$ лінійнонезалежна $\Rightarrow$ $B$ утворює базис.

$f(x) = x^2+2x+4$ $\quad f(x)=\beta_1\overline{b}_1+\beta_2\overline{b}_2+\beta_3\overline{b}_3$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\beta_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\beta_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}\beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -3 & -7 \\ 0 & 10 & 1 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 1 & 14 \\ 0 & -7 & -3 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & -3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & -7 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -23 & 28 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{28}{23} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & \frac{148}{23} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{35}{23} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{28}{23} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{23} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{35}{23} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{28}{23} \end{array}\right)$$

$$f_B(x) = \frac{8}{23}x^2+\frac{35}{23}x-\frac{28}{23}.$$

2) $E=\{1,x,x^2\}$ $\quad \begin{cases} \overline{e}_1-3\overline{e}_2+2\overline{e}_3 \\ 4\overline{e}_1-2\overline{e}_1+\overline{e}_3 \\ 2\overline{e}_1-5\overline{e}_2+\overline{e}_3 \end{cases}$ Тоді $T_{E\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Перевірка:

$f(x)_B = T^{-1}\cdot f(x)$ (за властивістю).

Нехай $f(x)=x^2+2x+4$; $(1;2;4)$

$$T^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -23 & 10 & 7 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{23} & -\frac{7}{23} & -\frac{1}{23} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & \frac{20}{23} & \frac{14}{23} & \frac{25}{23} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{23} & \frac{3}{23} & \frac{7}{23} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{23} & -\frac{7}{23} & -\frac{1}{23} \end{array}\right) \sim \frac{1}{23}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 16 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -7 & -1 \end{array}\right)$$

$$f(x)_B = T^{-1} \cdot f(x) = \begin{pmatrix} \frac{16}{23} & \frac{2}{23} & -\frac{3}{23} \\ \frac{1}{23} & \frac{3}{23} & \frac{7}{23} \\ -\frac{10}{23} & -\frac{7}{23} & -\frac{1}{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{23} \\ \frac{35}{23} \\ -\frac{28}{23} \end{pmatrix}$$

$$\frac{8}{23}(2x^2-3x+1)+\frac{35}{23}(x^2-2x+4)-\frac{28}{23}(x^2-5x+2)=x^2+2x+4$$

② Довести $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ $U = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ $V = \left( \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

1) $\dim U : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ rank $= 2$. $\Rightarrow \dim U = 2$

$\dim V : \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

rank $= 2 \Rightarrow \dim V = 2$.

$\dim U + \dim V = \dim \mathbb{R}^4$ $\dim U \cap V = \{\varnothing\}$

$B_U = \{a_1, a_3\}$ $B_V = \{b_2, b_3\}$.

$\dim U \oplus V : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & 8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{33}{2} \end{pmatrix}$ rank $= 4$

$\dim U \oplus V = 4 = \dim \mathbb{R}^4$.

$B_{U \oplus V} = \{a_1, a_3, b_2, b_3\} \Rightarrow \mathbb{R}^4 = U \oplus V$. $B_{\mathbb{R}^4} = B_V + B_U$

$\forall x \in \mathbb{R}^4 : x = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_3) + (\alpha_3 b_2 + \alpha_4 b_3) = x_1 + x_2$, $x_1 \in U$, $x_2 \in V$

2) $x = (0, 2, 0, -1)$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow x = a_1 - b_3$ Проекція $x$ на $U \parallel V$: $\text{пр}_{U \parallel V}\, x = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

№3 За означенням лінійного перетворення для ∀ матриць $X, Y \in M_2$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1) $\varphi(\alpha X + \beta Y) = A \cdot (\alpha X + \beta Y) = \alpha A X + \beta A Y = \alpha \varphi(X) + \beta \varphi(Y)$.

(Виконуються I та II властивості)

Тобто, $\varphi$ є лінійним оператором.

Нехай $X$ - матриця лінійного оператора $\varphi$.

$X \cdot E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot e_1 + 3e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$

$X \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1e_1 - 1e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$

$X \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3 + 3 \cdot e_4$

$X \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1e_3 - 1 \cdot e_4$

Тоді $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

2) Знайдемо ядро $\ker \varphi$:

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_1 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \\ 5x_3 = 0 \\ 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

$(0; 0; 0; 0)$ - базисний вектор.

$\ker \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\dim \ker \varphi = 1 \Rightarrow \operatorname{def} \varphi = 1$

$B_{\ker \varphi} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

№4 $V = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\chi(\lambda) = |V-\lambda E| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 3 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -2-\lambda & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-1)$

Власт числа: $\lambda_1 = 1$, $(n(\lambda_1)=1)$, $\lambda_2 = -1$ $(n(\lambda_2)=1)$, $\lambda_3 = -2$ $n(\lambda_3)=1$.

Кількість дійсних коренів дорівнює розмірності простору, отже, матриця діагоналізована.

Для $\lambda_1 = 1$: $A-E = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & -12 & 12 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $x_2 = x_3$, $x_1 = x_2$

ФСР:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |

Для $\lambda_2 = -1$

$A+E = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$x_1 = x_2$
$x_3 = 0$

ФСР:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |

Для $x_3 = -2$

$A+2E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $x_2 = 0$, $x_1 = x_3$

ФСР:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |

Отже, оператор має просту структуру і в базисі $(1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ йому відповідає діагональна матриця:

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ Перевірка: $D = T^{-1} V T$, де $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

№5 $A=\begin{pmatrix}-4&-1&1\\2&-4&-5\\-1&0&-1\end{pmatrix}$ $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-4-\lambda&-1&1\\2&-4-\lambda&-5\\-1&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=(-4-\lambda)^2(-1-\lambda)-5+$

$+(-4-\lambda)+2(-1-\lambda)=-\lambda^3-9\lambda^2-27\lambda-27=-(\lambda+3)^3.$

$\lambda_1=3$ $n(\lambda_1)=3.$ $\Rightarrow \exists J_A.$

$B(\lambda_1)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&-1&-5\\-1&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&-3&-3\\0&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$ $\text{rank}\,B(\lambda_1)=2.$

$l(\lambda_1)=n-\text{rank}(B(\lambda_1))=3-2=1.$

Загальна кількість жорданових клітинок 1, тобто жорданова матриця складається з 1 жорданової клітини розмірності 3. $J_A=J_3(\lambda_1)=\begin{pmatrix}-3&1&0\\0&-3&1\\0&0&-3\end{pmatrix}$

Мінімальний многочлен: $\chi(\lambda)=-(\lambda+3)(\lambda+3)^2$ – характерист. многочлен.

$m_g(\lambda)=\text{НСК}\,(\lambda+3)^3=(\lambda+3)^3$

Перевірка: $f(\lambda)=\lambda+3$ $\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&-1&-5\\-1&0&2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$f(\lambda)=(\lambda+3)^2$ $\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&-1&-5\\-1&0&2\end{pmatrix}^2\neq\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$f(\lambda)=(\lambda+3)^3=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&-1&-5\\-1&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&2&6\\1&-3&-3\\-1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$B\lambda_1\sim\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$ $x_2=-x_3$, $x_1=2x_3$ ФСР:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|
| 2 | -1 | 1 |

$a_1=(2;-1;1)$

$a_1\to a_2$ $B\lambda_1 a_2=a_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&1&2\\2&-1&-5&-1\\-1&0&2&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&1&2\\0&-3&-3&3\\0&1&1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&1&2\\0&1&1&1\end{array}\right)$

ФСР:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|
| -5 | 1 | -2 |
| 1 | -2 | 1 |

$a_2=(-5;1;-2)$

$a_2\to a_3$ $B\lambda_1 a_3=a_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&1&2\\+2&-1&-5&-1\\-1&0&2&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&1&-5\\0&-3&-3&-9\\0&1&1&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&1&-5\\0&1&1&3\end{array}\right)$

$a_3=(-4;2;1)$

ФСР:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|
| 4 | 2 | 1 |

$B_{\text{ж}}=\begin{pmatrix}2&-5&4\\-1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$