КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Іванов Є.О., Ченцов О.І., Шевченко В. П.

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

РОБОЧИЙ ЗОШИТ

з українсько-англійським тематичним словником

Булеві функції
Теорія графів

КИЇВ-2012

Іванов Є.О., Ченцов О.І., Шевченко В. П.

Дискретна математика. Робочий зошит з українсько-англійським тематичним словником. Булеві функції. Теорія графів. – К., 2012. – 75 с.

У книзі подано матеріали для вивчення четвертого та п`ятого модулів «Булеві функції» та «Теорія графів» курсу дискретної математики студентами 1 курсу факультету кібернетики напрямків підготовки «Інформатика» та «Програмна інженерія».

Робочий зошит призначено для ведення у ньому конспекту з дискретної математики, для полегшення і прискорення конспектування тут наведені всі слайди лекцій, що позбавляє студента необхідності перемальовувати формули і рисунки, записувати з голосу означення і формулювання. Крім того у зошиті подані плани семінарських занять (теоретичні питання, умови аудиторних, домашніх і додаткових завдань), література до відповідного модулю курсу, українсько-англійський тематичний словник, який полегшить користування іноземною літературою з дискретної математики.

Всі матеріали зошиту можна знайти в електронній бібліотеці факультету кібернетики за адресою: ***http://www.unicyb.kiev.ua/Library/DM*** .

Рецензенти:

О.А.Летичевський, академік НАН України, д-р фіз.-мат. наук;

А.Ю.Дорошенко, д-р фіз.-мат. наук,

П.О.Бех, канд.філол.наук

Затверджено Радою факультету кібернетики
21 червня 2011 року, протокол № 11.

Друкується за авторською редакцією.

ЗМІСТ

МОДУЛЬ 4. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

Історична довідка

Бу́лева а́лгебра (*англ. boolean algebra*) в математиці та інформатиці — алгебраїчна структура, яка відображує певні логічні закономірності об'єктів та систем реального світу. Алгебра логіки — застосування алгебраїчних методів і символіки для вивчення логічних відношень і розв'язання логічних задач.

Засади алгебри логіки були сформульовані британцем Джорджем Булем в 1847 році. Пізніше її розвивали Чарлз Пірс, П. С. Порецький, Бертран Рассел, Давид Гільберт та ін.

Відтоді ця система застосовується для вирішення широкого спектру проблем математичної логіки та теорії множин, та особливо конструювання цифрової електроніки. Майже через 70 років після смерті Буля американський вчений та інженер Клод Шеннон у своїй університетській роботі на ступінь магістра, виконаній у Массачусетському технологічному інституті, застосував булеву алгебру для опису електротехнічних схем і одночасно показав зворотнє – як електричні схеми можуть бути використані для розв'язання логічних задач булевої алгебри. Булева логіка, яка спочатку була чисто абстрактною наукою, лежить зараз в основі проектування більшості сучасних комп'ютерів.

В Російській імперії перший курс алгебри логіки було прочитано П.С.Порецьким в Казанському університеті.

Буль, Джордж (*Boole, George;* 1815, Лінкольн — 1864, Баллінтемпл поблизу Корка). Буля майже рівною мірою цікавили логіка, математичний аналіз, теорія ймовірностей, філософські праці Аристотеля та Цицерона.

Після того як Буль упевнився, що його алгебра може бути застосована до логіки, у 1847 році він надрукував праці «Математичний аналіз логики», в якому висловив ідею, що логіка ближче до математики, ніж до філософії. У 1854 році він опублікував праці «Дослідження законів мислення, що базуються на математичній логіці та теорії ймовірностей» та «Закони мислення» (1854), де остаточно сформулював основи математичної логіки. Роботи 1847 та 1854 років поклали початок алгебрі логіки, або булевій алгебрі.

Одна з чотирьох доньок Буля, Етель Ліліан - автор популярного роману «Овід» (The Gadfly, 1897).

Порецький Платон Сергійович (1846, Елізаветград, нині Кіровоград, — 1907, с. Жоведь, Чернігівська обл.), російський математик, астроном, логік. У 1870 закінчив фізико-математичний факультет Харківського університету. У 1876—89 працював в Казанському університеті (спочатку астрономом-спостерігачем, з 1886 на посаді приват-доцента). Найбільш вагомий внесок Порецький зробив в математичну логіку, яку він визначав як «логіка за предметом, математика за методами»; він був першим російським вченим, який читав лекції з математичної логіки та її застосувань до теорії ймовірності. Порецький займався головним чином проблемами алгебри логіки, яку він у розвиток ідей Дж.Буля, У.С.Джевонса та Е.Шредера розумів як «числення логічних рівностей». Комбінаторно-логічні результати Порецького в цій галузі, зокрема його теорія т.з. канонічних форм, яка узагальнювала класичну теорію «нормальних форм» у логіці висловлювань, мали вплив на подальший розвиток математичної логіки, зокрема на роботи А.Блейка.

Пост, Еміль Леон (*Post, Emil Leon;* 1897, Августов (Польща) — 1954, Нью-Йорк), американський математик і логік; один з засновників багатозначної логіки (1921); основні праці з математичної логіки: алгебра Поста, класи Поста функції алгебри логіки; запропонував абстрактну обчислювальну машину — машину Поста.

Булеві функції

$$F_n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

Лема. Існує 2^n булевих наборів довжини n.

$$(\underset{0,1}{x_1}, \underset{0,1}{x_2}, \ldots\ldots \underset{0,1}{x_n})$$

$$2 \times 2 \times \underbrace{\ldots\ldots}_{n\ разів} \times 2 = 2^n$$

Лема. Існує 2^{2^n} різних булевих ф-й n змінних.

x_1	x_2	…	x_n	f
0	0	…	0	{0,1}
0	0	…	1	{0,1}
…	…	…	…	…
1	1	…	1	{0,1}

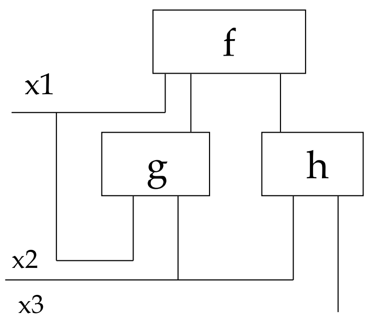
2^n

$$2 \times 2 \times \underbrace{\ldots\ldots}_{2^n\ разів} \times 2 = 2^{2^n}$$

1-4
2-16
3-256
4-65536

Суперпозиція булевих ф-й

$$f(x_1, g(x_1, x_2), h(x_2, x_3))$$



$$f_0(x_1,\dots.x_k)$$

$$f_1(x_1,\dots.x_n),\dots f_k(x_1,\dots.x_n)$$

Суперпозиція f_0, та $f_1,\dots f_k$

$$f_0(f_1(x_1,\dots x_n),\dots. f_k(x_1,\dots x_n))$$

Змінна x_k суттєва для $f(x_1,x_2,\dots x_n)$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots.\alpha_k,\dots\alpha_n)$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots.\alpha'_k,\dots\alpha_n)$$

$$\alpha_k \neq \alpha'_k$$

$$f(\alpha_1,\alpha_2,\dots.\alpha_k,\dots\alpha_n) \neq f(\alpha_1,\alpha_2,\dots.\alpha'_k,\dots\alpha_n)$$

Функція, в якої є не суттєві змінні називається виродженою

Ф-ї однієї змінної

заперечення $\overline{x}$

x	g_0	g_1	g_2	g_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

g_0,g_3 - вироджені

Ф-ї двох змінних

		*			*		*					*		*			*
x	y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

* - вироджені функції

Невироджені ф-ї 2-х змінних

1-кон'юнкція &, $\wedge$, $\cdot$
7-диз'юнкція $\vee$
11,13-імплікація $\rightarrow$
9-еквівалентність $\equiv$
6-сума за модулем 2 $\oplus$, $+$
8-стрілка Пірса $\downarrow$
14-штрих Шефера $|$
2,4-функції заборони
(заперечення імплікації)

Основні ф-ї 1-ї та 2-х змінних

x	$\bar{x}$
0	**1**
1	**0**

x	**y**	**x$\vee$y**	**x•y**	**x+y**	**x$\rightarrow$y**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**

Тотожності для бул. ф-й

$$x \vee y = y \vee x, \quad x \cdot y = y \cdot x$$
$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$
$$x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z$$
$$x \vee y \cdot z = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$$
$$\overline{\overline{x}} = x, \quad \overline{0} = 1, \quad \overline{1} = 0$$
$$x \vee x = x, \quad x \cdot x = x$$
$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}, \overline{x \cdot y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

Тотожності для бул. ф-й

$$x \vee \overline{x} = 1, x \cdot \overline{x} = 0,$$
$$x \vee 0 = x, x \vee 1 = 1, x \cdot 0 = 0, x \cdot 1 = x$$
$$A \vee A \cdot B = A, A \cdot (A \vee B) = A$$
$$A \vee \overline{A} \cdot B = A \vee B, A = A \cdot B \vee A \cdot \overline{B}$$

Таблиця значень бул. ф-ї

змінні

x_1	x_2	……	x_n	$f(x_1, \dots x_n)$
0	0	…	0	$f(0, \dots 0)$
…	…	…	…	
α_1	α_2		α_n	$f(\alpha_1, \dots \alpha_n)$
…	…	…	…	
1	1	…	1	$f(1, \dots 1)$

значення змінних

значення ф-ї

Правило заповнення таблиці значень *n* змінних

- Таблиця має ***2ⁿ*** рядків (без заголовку)
- 1-й зліва стовпчик ділиться навпіл. Верхня половина заповнюється нулями, нижня – одиницями.
- Кожна частина попереднього стовпчика ділиться навпіл. В утворені частини по черзі записуються нулі та одиниці.

Побудова таблиці значень бул. ф-ї

$$\overset{1}{(x+y)}\overset{4}{\vee}(\overset{2}{\overline{x}}\overset{3}{\cdot}z)$$

x	y	z	1	2	3	4
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0

Диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми булевих функцій

Елементарні диз'юнкції (ЕД)

$$0,\ \overline{x_1},\ x\vee y,\ \overline{a}\vee b\vee\overline{c}$$

Елементарні кон'юнкції (ЕК)

$$1,\ x,\ \overline{x_1}\cdot\overline{x_3},\ x\overline{y}z$$

ЕД (ЕК) будемо називати диз'юнкцію (кон'юнкцію) попарно різних змінних або їх заперечень

Елементарні диз'юнкції та кон'юнкції

$$x\bar{y}z,\ \bar{y}zx,\ xz\bar{y},\ zx\bar{y}$$

ЕД (ЕК) які відрізняються тільки порядком змінних будемо вважати однаковими

$$x\bar{y}z = \bar{y}zx = xz\bar{y} = zx\bar{y}$$

$$x\bar{y}zx = x\bar{y}z\bar{y} = x\bar{y}z$$

$$x\bar{y}z\bar{x} = x\bar{y}zy = 0$$

Диз'юнктивні нормальні форми (ДНФ), кон'юнктивні нормальні форми (КНФ)

Диз'юнктивною (кон'юнктивною) нормальною формою булевої ф-ї ***f*** будемо називати її представлення у вигляді диз'юнкції (кон'юнкції) попарно різних елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій).

$$x \vee \bar{x}y \vee yz \qquad \textit{днф}$$

$$(x \vee y)\cdot(y \vee \bar{z})\cdot z \qquad \textit{кнф}$$

$$\cancel{xy \vee x\bar{z} \vee yx}$$

$$\boxed{\bar{x} \vee y} = \boxed{\bar{x}\cdot y \vee x\cdot\bar{y} \vee x\cdot y}$$

Побудова ДНФ

$$\overline{\overline{(x\vee y)}\vee(\bar{x}\vee\bar{\bar{y}})}\vee\overline{(\bar{x}\vee y\vee\overline{(\bar{y}\vee\bar{z})})}$$

$$\overline{\overline{(x\vee y)}}\cdot\overline{(\bar{x}\vee\bar{\bar{y}})}\vee(\bar{\bar{x}}\cdot\bar{y}\cdot\overline{\overline{(\bar{y}\vee\bar{z})}})$$

$$(x\vee y)\cdot(x\cdot\bar{y})\vee x\cdot\bar{y}\cdot(\bar{y}\vee\bar{z})$$

$$xx\bar{y}\vee yx\bar{y}\vee x\bar{y}\bar{y}\vee x\bar{y}\bar{z}$$

$$x\bar{y}\vee 0\vee x\bar{y}\vee x\bar{y}\bar{z}$$

$$\boxed{x\bar{y}\vee x\bar{y}\bar{z} \quad \textit{днф}}$$

Повні елементарні кон'юнкції-ПЕК
Повні елементарні диз'юнкції-ПЕД

Елементарна кон'юнкція (диз'юнкція) називається повною відносно множини змінних $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$, якщо до неї входять, з запереченням чи без, всі змінні $x_1, x_2, \ldots x_n$.

$$x\bar{y}\vee x\bar{y}\bar{z}$$

неповна повна відносно {x,y,z}

$$x\cdot\bar{y}=x\cdot\bar{y}\cdot 1=x\cdot\bar{y}\cdot(z\vee\bar{z})$$

Досконалі диз'юнктивні нормальні форми (ДДНФ)
Досконалі кон'юнктивні нормальні форми (ДКНФ)

Диз'юнктивну (кон'юнктивну) нормальну форму булевої функції $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ будемо називати ***досконалою***, якщо всі її елементарні кон'юнкції (диз'юнкції) є повними відносно множини змінних $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$

Побудова ДДНФ

$$x\bar{y} \vee x\bar{y}\bar{z} = x\bar{y}\cdot 1 \vee x\bar{y}\bar{z} =$$
$$= x\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee x\bar{y}\bar{z} =$$
$$= x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}$$

$$x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}$$ *дднф*

$$x^{\alpha} = \begin{cases} x \text{ якщо } \alpha = 1 \\ \bar{x} \text{ якщо } \alpha = 0 \end{cases} \qquad x^{\alpha} = 1 \Leftrightarrow x = \alpha$$

$$x^0 = \bar{x} = 1 \Rightarrow x = 0$$
$$x^1 = x = 1 \Rightarrow x = 1$$

Лема. ПЕК обертається в 1 рівно на одному наборі значень своїх змінних

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot x_n^{\alpha_n} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1^{\alpha_1} = 1, x_2^{\alpha_2} = 1, \ldots x_n^{\alpha_n} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \ldots\ldots x_n = \alpha_n$$

Теорема. Для кожної $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ існує рівно одна дднф

<u>Існування (побудова) ДДНФ.</u>

Розглянемо значення ф-ї ***f*** на наборі $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$:

якщо $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 1$,
то включимо ПЕК $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ до ДДНФ,
тоді на цьому наборі ДДНФ буде дорівнювати 1

якщо $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 0$,
то не включимо до ДДНФ нічого,
тоді на цьому наборі ДДНФ не може дорівнювати 1,
тобто ДДНФ дорівнює 0

Єдиність ДДНФ

Нехай для $f(x_1,x_2, \ldots x_n)$ існує дві різні ДДНФ:
$g(x_1,x_2, \ldots x_n)$ та $h(x_1,x_2, \ldots x_n)$.
Тоді існує ПЕК $K=x_1^{\alpha 1} \cdot x_2^{\alpha 2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha n}$, що
$K \in g(x_1,x_2, \ldots x_n)$ але $K \notin h(x_1,x_2, \ldots x_n)$
Але за лемою про ПЕК це означає, що

$$\begin{matrix} g(\alpha_1,\ldots \alpha_n)=1 \\ h(\alpha_1,\ldots \alpha_n)=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow g(x_1,\ldots) \neq h(x_1,\ldots)$$

Тобто $g(x_1,x_2, \ldots x_n)$ та $h(x_1,x_2, \ldots x_n)$ не можуть бути ДДНФ однієї і тієї ж булевої ф-ї

Побудова ДДНФ за таблицею

x	y	z	f		
0	0	0	0		
0	0	1	0		
0	1	0	1	$x^0y^1z^0$	$\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$
0	1	1	0		
1	0	0	0		
1	0	1	1	$x^1y^0z^1$	$x \cdot \bar{y} \cdot z$
1	1	0	0		$x \cdot y \cdot z$
1	1	1	1	$x^1y^1z^1$	

$$f(x,y,z) = \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \vee x \cdot \bar{y} \cdot z \vee x \cdot y \cdot z$$

Алгебра Жегалкіна

Алгебра Жегалкіна –
алгебра булевих функцій,
утворених за допомогою:

Булевої константи 1
Булевих змінних
Булевих функцій:
+ - сума за модулем 2
• - кон’юнкція

Тотожні співвідношення в алгебрі Жегалкіна

x+y=y+x	x•y=y•x
x+(y+z)=(x+y)+z	x•(y•z)=(x•y) •z
x•(y+z)=x•y+x•z	
x•1=x	x+0=x x•0=0
x•x=x	x+x=0

Тотожні співвідношення для АЖ

$$x + y = \bar{x} \cdot y \vee x \cdot \bar{y}$$

$$x + 1 = \bar{x}$$

$$x \vee y = x + y + x \cdot y$$

$$x \equiv y = 1 + x + y$$

$$x \to y = 1 + x + x \cdot y$$

$$x \downarrow y = 1 + x + y + x \cdot y$$

$$x | y = 1 + x \cdot y$$

Поліном Жегалкіна

Поліномом Жегалкіна **(ПЖ)** будемо називати суму за модулем 2 попарно різних добутків попарно різних змінних

Добутки, які відрізняються тільки порядком множників, вважаємо рівними
Добуток порожньої множини змінних вважаємо рівним 1

Приклади поліноміів Жегалкіна

0 x

1+x•y 1+x+y+x•y•z

~~x•x~~ ~~1+x•y+y•x~~

1-й спосіб побудови ПЖ

Лема. В ддНф функції $\vee$ можна замінити на +

$$f = k_1 \vee k_2 \vee \ldots \vee k_m \quad \text{ддНф функції } f$$

$$f_1 = k_1 + k_2 + \ldots + k_m \quad k_i - \textit{попарнорізні ПЕК}$$

$$\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$$

1. $f(\widetilde{\alpha}) = 0 \Rightarrow \textit{всі} \quad k_i = 0 \Rightarrow f_1(\widetilde{\alpha}) = 0$
2. $f(\widetilde{\alpha}) = 1 \Rightarrow k_{i_0} = 1, k_j = 0, \textit{для } j \neq i_0 \Rightarrow f_1 = 1$

$$\boxed{f(\widetilde{\alpha}) = f_1(\widetilde{\alpha}) \textit{ для довільного } \widetilde{\alpha}}$$

1-й спосіб побудови ПЖ

$$f(x, y, z) = \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \vee x \cdot \overline{y} \cdot z \vee x \cdot y \cdot z =$$
$$= (x+1) \cdot y \cdot (z+1) + x \cdot (y+1) \cdot z + x \cdot y \cdot z =$$
$$= x \cdot y \cdot z + x \cdot y + y \cdot z + y +$$
$$+ x \cdot y \cdot z + x \cdot z + x \cdot y \cdot z =$$
$$= x \cdot y \cdot z + x \cdot y + y \cdot z + x \cdot z + y$$

Теорема про єдиність ПЖ

Для довільної булевої функції $f(x_1,x_2, \ldots x_n)$ існує рівно одне представлення у вигляді ПЖ

Нехай P,Q – ПЖ для $f(x_1,x_2, \ldots x_n)$ і $P \neq Q$

$$r \in P, r \notin Q \quad k = \min_{r \in P, r \notin Q} |r|$$

$$r = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \quad r \in P, \quad r \notin Q$$

$$\tilde{\alpha} : x_{i_1} = 1, x_{i_2} = 1, \ldots x_{i_k} = 1, \text{ решта } \quad x_j = 0$$

$$r' = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_m} \ |r'| \geq |r| \ (m \geq k)$$

$$r'(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 1 & r' = r \\ 0 & r' \neq r \end{cases}$$

Продовження теореми

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n) = P_1(x_1, x_2, \ldots x_n) + \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$Q(x_1, x_2, \ldots x_n) = Q_1(x_1, x_2, \ldots x_n) + \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$P_1 = \sum_{s \in P, |s| \geq k} s, \quad Q_1 = \sum_{s \in Q, |s| \geq k} s, \quad \varphi = \sum_{s \in P, |s| < k} s$$

$$P_1(\tilde{\alpha}) = 1, \quad Q_1(\tilde{\alpha}) = 0$$

$$P(\tilde{\alpha}) = 1 + \varphi(\tilde{\alpha}), \quad Q(\tilde{\alpha}) = \varphi(\tilde{\alpha})$$

$$P(\tilde{\alpha}) \neq Q(\tilde{\alpha}) \Rightarrow P(x_1, \ldots x_n) \neq Q(x_1, \ldots x_n)$$

$$f(x_1, \ldots x_n)$$

2-й спосіб:
метод невизначених коефіцієнтів

$f(x_1,x_2, \ldots x_n) = P(x_1,x_2, \ldots x_n) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots$

0,0, … 0,0: $f(0,0, \ldots 0,0) = P(0,0, \ldots 0,0) = \alpha_0$
0,0, … 0,1: $f(0,0, \ldots 0,1) = P(0,0, \ldots 0,1) = \alpha_0 + \alpha_n$
0,0, … 1,0: $f(0,0, \ldots 1,0) = P(0,0, \ldots 1,0) = \alpha_0 + \alpha_{n-1}$
……………………………………………………

$$\begin{cases} f(0,0, \ldots 0,0) = \alpha_0 \\ f(0,0, \ldots 0,1) = \alpha_0 + \alpha_n \\ f(0,0, \ldots 1,0) = \alpha_0 + \alpha_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Приклад на метод невизначених коефіцієнтів

$$f(x,y,z)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z+\alpha_4 xy+\alpha_5 xz+\alpha_6 yz+\alpha_7 xyz$$

x	y	z	f	
0	0	0	0	$\boldsymbol{\alpha_0=0}$
0	0	1	0	$\alpha_0+\alpha_3=0$ $\boldsymbol{\alpha_3=0}$
0	1	0	1	$\alpha_0+\alpha_2=1$ $\boldsymbol{\alpha_2=1}$
0	1	1	0	$\alpha_0+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_6=0$ $\boldsymbol{\alpha_6=1}$
1	0	0	0	$\alpha_0+\alpha_1=0$ $\boldsymbol{\alpha_1=0}$
1	0	1	1	$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5=1$ $\boldsymbol{\alpha_5=1}$
1	1	0	0	$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4=0$ $\boldsymbol{\alpha_4=1}$
1	1	1	1	$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7=1$ $\boldsymbol{\alpha_7=1}$

$$f(x,y,z)=y+xy+xz+yz+xyz$$

Замкнені класи булевих функцій

Клас (множина) функцій називається замкненим, якщо довільна суперпозиція функцій цього класу також належить цьому класу.

$$f, f_1, f_2, \dots f_k \in S \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(f_1, f_2, \dots f_k) \in S$$

Булева функція F називається **лінійною**, якщо її поліном Жегалкіна є лінійним.

Лема 1.

Суперпозиція лінійних функцій є функція лінійна. Клас лінійних функцій **L** - замкнений.

$x \equiv y = x + y + 1$ лінійна

$x \vee y = x + y + x \bullet y$ нелінійна

<u>Двоїстою</u> до функції F
будемо називати функцію F^*

$$F^*(x_1,\dots x_n) = \overline{F(\overline{x_1},\dots \overline{x_n})}$$

Функція F називається **<u>самодвоїстою</u>**,
якщо $F=F^*$

$$F(x_1,\dots x_n) = F^*(x_1,\dots x_n) = \overline{F(\overline{x_1},\dots \overline{x_n})}$$

Лема 2.

На протилежних наборах самодвоїста функція приймає протилежні значення.

$$\overline{F(x_1,\dots x_n)} = \overline{F^*(x_1,\dots x_n)} =$$

$$= \overline{\overline{F(\overline{x_1},\dots \overline{x_n})}} = F(\overline{x_1},\dots \overline{x_n})$$

Лема 3.

Суперпозиція самодвоїстих функцій є функція самодвоїста. Клас самодвоїстих функцій **S** - замкнений.

Доведення леми 3

$$F(x_1,\dots x_n) = f(f_1(x_1,\dots x_n),\dots f_k(x_1,\dots x_n))$$

$$F^* = \overline{f(f_1(\overline{x_1},\dots \overline{x_n}),\dots f_k(\overline{x_1},\dots \overline{x_n}))} =$$

$$f_i(\overline{x_1},\dots \overline{x_n}) = \overline{f_i(x_1,\dots x_n)}$$

$$= \overline{f(\overline{f_1(x_1,\dots x_n)},\dots \overline{f_k(x_1,\dots x_n)})} =$$

$$\overline{f(\overline{f_1},\dots \overline{f_k})} = f(f_1,\dots f_k)$$

$$= f(f_1(x_1,\dots x_n),\dots f_k(x_1,\dots x_n)) = F$$

Функція F **<u>зберігає константу 1</u>**,
якщо на наборі з усіх 1 функція F
приймає значення 1.   F(1,1,….. 1)=1

Функція F **<u>зберігає константу 0</u>**,
якщо на наборі з усіх 0 функція F
приймає значення 0.   F(0,0,… 0)=0

Лема 4.
Суперпозиція функцій, які зберігають
константу 1 (константу 0) зберігає ту ж
константу. Класи функцій $\mathbf{T_1}$ та $\mathbf{T_0}$ - замкнені.

Доведення леми 4

$$F(x_1,\dots x_n) =$$
$$= f(f_1(x_1,\dots x_n),\dots f_k(x_1,\dots x_n))$$

$$F(1,1,\dots 1) =$$
$$= f(f_1(1,\dots 1),\dots f_k(1,\dots 1)) =$$
$$f_i(1,\dots 1) = 1$$
$$= f(1,1,\dots 1) = 1$$

Порівняння булевих наборів

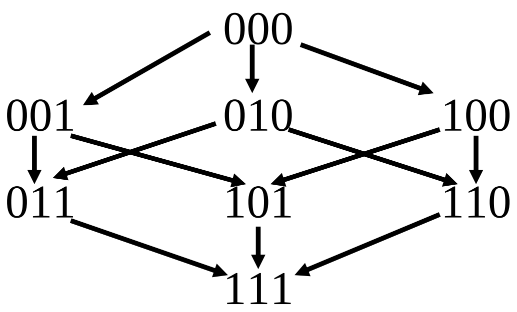
$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \le (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n)$$
$$\alpha_i \le \beta_i \quad при \quad i = \overline{1, n}$$

(0,1,0,1)≤(0,1,1,1)
(0,0,1,0)≤(1,0,1,1)

(0,1,0,1)   (0,0,1,1)
не можуть бути
порівняні

≤
частковий
порядок

Граф наборів



Монотонні функції

Функція F - **монотонна**, якщо на більших наборах вона приймає не менші значення.

$$\forall \alpha, \beta \ \alpha \le \beta \Rightarrow F(\alpha) \le F(\beta)$$

$$\alpha_i \le \beta_i \quad \text{для} \quad i = \overline{1, n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \le F(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n)$$

Лема 5.

Суперпозиція монотонних функцій є функція монотонна. Клас монотонних ф-й **M** - замкнений

Доведення леми 5

$$F(x_1, \ldots x_n) = f(f_1(x_1, \ldots x_n), \ldots f_k(x_1, \ldots x_n))$$

$$\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta}$$

$$F(\tilde{\alpha}) = f(f_1(\alpha_1, \ldots \alpha_n), \ldots f_k(\alpha_1, \ldots \alpha_n)) =$$

$$\gamma_j = f_j(\tilde{\alpha}) \le f_j(\tilde{\beta}) = \delta_j$$

$$= f(\gamma_1, \ldots \gamma_k) \le f(\delta_1, \ldots \delta_k) =$$

$$= f(f_1(\beta_1, \ldots \beta_n), \ldots f_k(\beta_1, \ldots \beta_n)) = F(\beta)$$

$$F(\tilde{\alpha}) \le F(\tilde{\beta})$$

Функціонально повні системи булевих функцій

Система булевих функцій $\{f_1, f_2, \dots f_k\}$ називається функціонально повною, якщо довільна функція $F(x_1, x_2, \dots. x_n)$ може бути одержана як суперпозиція функцій $f_1, f_2, \dots f_k$ та функцій $x_1, x_2, \dots. x_n$.

Лема 6. З довільної немонотонної функції $f(x_1, x_2, \dots. x_n)$, змінної x та констант 0 й 1 може бути одержано заперечення $\bar{x}$.

$$\exists \tilde{\alpha} \le \tilde{\beta} \quad f(\tilde{\alpha}) = 1,\ f(\tilde{\beta}) = 0$$

$$f(\tilde{\alpha}) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i, 0, \dots. \alpha_j, 0, \dots) = 1$$

$$f(\tilde{\beta}) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i, 1, \dots. \alpha_j, 1, \dots) = 0$$

$$g(x) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i, x, \dots. \alpha_j, x, \dots)$$

$$g(0) = f(\tilde{\alpha}) = 1,\ g(1) = f(\tilde{\beta}) = 0,\ g(x) = \bar{x}$$

Лема 7. З немонотонної, несамодвоїстої та незберігаючих констант функцій, а також функції *x* можна одержати заперечення $\bar{x}$ та константи 0 та 1.

$f_1(x_1, x_2, \dots. x_n)$ - не зберігає 0

$g(x) = f_1(x, x, \dots, x)$, $\quad g(0) = f_1(0, \dots 0) = 1$

<u>Випадок 1: g(1)=1</u>

g(x) - константа 1

$f_2(x_1, x_2, \dots. x_m)$ - не зберігає 1

$f_2(g(x), g(x), \dots. g(x)) = f_2(1, 1, \dots) = 0$

$f_2(g(x), g(x), \dots. g(x))$ - константа 0

Випадок 2: g(1)=0 $g(x)=\overline{x}$

$f_3(x_1,x_2,\dots x_p)$ - несамодвоїста

$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_p)$$

$$f_3(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_p)=f_3(\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\dots\overline{\alpha_p})$$

$$\varphi_i(x)=\begin{cases} x \ \ \text{при} \ \alpha_i=0 & \varphi_i(0)=\alpha_i \\ \overline{x} \ \ \text{при} \ \alpha_i=1 & \varphi_i(1)=\overline{\alpha_i} \end{cases}$$

$$h(x)=f_3(\varphi_1(x),\dots\varphi_p(x))$$

$$h(0)=f_3(\varphi_1(0),\dots\varphi_p(0))=$$

$$=f_3(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_p)=f_3(\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\dots\overline{\alpha_p})=$$

$$=f_3(\varphi_1(1),\dots\varphi_p(1))=h(1) \quad h(x)-const$$

Лема 8. З нелінійної ф-ї, констант, ф-й x_1, x_2 та заперечення можна одержати кон'юнкцію $x_1{\cdot}x_2$

$$f_4(x_1,\dots x_k)=x_1\cdot x_2\cdot\psi_1(x_3,\dots x_k)+x_1\cdot\psi_2(x_3,\dots x_k)+$$
$$x_2\cdot\psi_3(x_3,\dots x_k)+\psi_4(x_3,\dots x_k) \quad \psi_1(x_3,\dots x_k)\neq const0$$
$$(\alpha_3,\alpha_4,\dots\alpha_k) \quad \psi_1(\alpha_3,\alpha_4,\dots\alpha_k)=1$$
$$p(x_1,x_2)=f_4(x_1,x_2,\alpha_3,\alpha_4,\dots\alpha_k)=$$
$$=x_1\cdot x_2+\alpha\cdot x_1+\beta\cdot x_2+\gamma \quad \alpha,\beta,\gamma=0,1$$

Продовження доведення леми 8

$$p(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2+\alpha\cdot x_1+\beta\cdot x_2+\gamma \quad \alpha,\beta,\gamma=0,1$$
$$\overline{x_1}=x_1+1 \quad \overline{x_2}=x_2+1$$
$$p(x_1+\beta,x_2+\alpha)=(x_1+\beta)\cdot(x_2+\alpha)+\alpha\cdot(x_1+\beta)+$$
$$+\beta\cdot(x_2+\alpha)+\gamma=x_1\cdot x_2+\alpha\cdot x_1+\beta\cdot x_2+\alpha\cdot\beta+$$
$$+\alpha\cdot x_1+\alpha\cdot\beta+\beta\cdot x_2+\alpha\cdot\beta+\gamma=x_1\cdot x_2+\alpha\cdot\beta+\gamma$$
$$\alpha\cdot\beta+\gamma=0 \quad p(x_1+\beta,x_2+\alpha)=x_1\cdot x_2$$
$$\alpha\cdot\beta+\gamma=1 \quad p(x_1+\beta,x_2+\alpha)=\overline{x_1\cdot x_2}$$

Теорема Поста.

Для того щоб система булевих
функцій була функціонально повною,
необхідно і достатньо,
щоб ця система містила:
•хоча б одну ф-ю нелінійну,
•хоча б одну ф-ю несамодвоїсту,
•хоча б одну ф-ю що не зберігає 1,
•хоча б одну ф-ю що не зберігає 0,
•хоча б одну ф-ю немонотонну.

Необхідність.

$\{f_1, f_2, \ldots f_k\} \subset K$,
$K \in \{L, S, T_0, T_1, M\}$,
$\{x_1, x_2, \ldots. x_n\} \subset K$

суперпозиція функцій
$\{f_1, f_2, \ldots f_k, x_1, x_2, \ldots. x_n\}$
також належить класу K,
леми 1,3-5
$x \downarrow y \notin K$, $K \in \{L, S, T_0, T_1, M\}$

Достатність.

Випливає з існування для будь-якої
функції ддноф, $x \vee y = \overline{(\bar{x} \cdot \bar{y})}$
а також з лем 6-8.

Лема 9.

З будь-якої функціонально повної системи
можна виділити
функціонально повну підсистему,
яка містить не більше 4 функцій.

Доведення леми 9

f - не зберігає 0, тобто f(0,0,…0)=1
якщо f(1,1,…1)=0 то f - не зберігає 1,
якщо f(1,1,…1)=1 то f - не самодвоїста

$\{0;\ 1;\ x\cdot y;\ x+y+z\}$

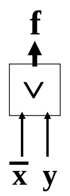
x·y - єдина ф-я нелінійна;
0 - єдина ф-я, що не зберігає 1;
1 - єдина ф-я, що не зберігає 0;
x+y+z - єдина ф-я немонотонна

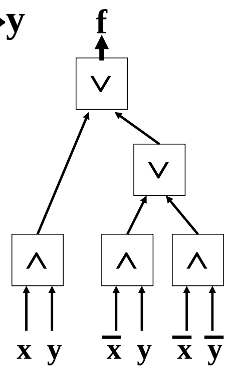
Належність до замкнених класів основних булевих фнкцій

	x	$\bar{x}$	0	1	x□y	x□y	x+y	x□y	x→y	x|y	x□y
L	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-
S	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
T_1	+	-	-	+	+	+	-	+	+	-	-
T_0	+	-	+	-	+	+	+	-	-	-	-
M	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-	-

Мінімізація булевих функцій

f(x,y)=x→y





$f=\bar{x}\vee y$

$f=x\cdot y \vee \bar{x}\cdot y \vee \bar{x}\cdot\bar{y}$

Імпліканти, прості імпліканти

g імпліканта функції **f**

g=1 ⇒ f=1

g→f=1

$$g = x_{i_1}^{\alpha_1} \cdot x_{i_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}^{\alpha_k} \qquad x_{i_m}^{\alpha_m}$$

ЕК g називається простою імплікантою (ПК) функції f, якщо g є імплікантою f і з неї не можна викинути жодного множника так, щоб вона залишилась імплікантою f.

Приклад імплікант

x→y **$x \cdot y$, $\bar{x} \cdot y$, $\bar{x} \cdot \bar{y}$, $\bar{x}$, y**

імпліканти

прості

Теорема 1. Диз'юнкція всіх простих імплікант функції f дорівнює функції f

$g_1 \vee g_2 \vee \ldots\ g_m$ - диз'юнкція всіх простих імплікант

$$f(\alpha_1, \ldots \alpha_n) = 1$$
$$g = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$$
$$x_1^{\alpha_1}$$
$$x_2^{\alpha_2}$$
.....
$$x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdot x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$$

$$g_1 \vee g_2 \vee \ldots \vee g_m = 1$$
$$g_i = 1 \Rightarrow f = 1$$

Диз'юнкція всіх простих імплікант функції **f** називається ***скороченою*** диз'юнктивною нормальною формою (СкДНФ)

ДНФ функції **f** називається ***тупіковою (ТДНФ)***, якщо всі ЕК є простими імплікантами і жодної з них не можна викинути не порушивши рівність функції **f**.

ДНФ функції **f** називається ***мінімальною (МДНФ)***, якщо вона містить найменшу кількість операцій диз'юнкції та кон'юнкції (найменшу сумарну кількість змінних в усіх добутках).

Теорема. Мінімальна ДНФ функції f є тупіковою ДНФ функції f.

$$f=g_1\vee g_2\vee\ldots g_m$$

$$g_1 = x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n} - не\,проста$$

$$g_1' = x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n} - імпліканта$$

$$f = g_1'\vee g_2\vee\ldots\vee g_m$$

$$g_1' = 1 \Rightarrow f = 1$$

$$x\cdot y\cdot z\vee x\cdot y\cdot\bar{z}\vee x\cdot\bar{y}\cdot z\vee\bar{x}\cdot y\cdot\bar{z}\vee\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z$$

$x\cdot y\vee x\cdot z\vee y\cdot\bar{z}\vee\bar{y}\cdot z$ скорочена ДНФ

$$\left.\begin{array}{l} x\cdot z\vee y\cdot\bar{z}\vee\bar{y}\cdot z \\ x\cdot y\vee y\cdot\bar{z}\vee\bar{y}\cdot z \end{array}\right\}\text{ тупікові, мінімальні ДНФ}$$

<u>Метод Блейка (Порецького)</u>

Правило узагальненого склеювання

$$A\cdot x\vee B\cdot\bar{x} = A\cdot x\vee B\cdot\bar{x}\vee A\cdot B$$

$A\vee A\cdot B = A$ правило поглинання

Метод Блейка (Порецького)

ДНФ функції f $\Rightarrow$ скорочена ДНФ функції f

1. До всіх ЕК ДНФ всіма можливими способами застосовується правило узагальненого склеювання. При цьому новоутворені ЕК також можуть брати участь у наступних склеюваннях.
2. Одержаний вираз приводиться до виду ДНФ.
3. У ДНФ всіма можливими способами застосовується правило поглинання.

$$\underset{1}{x \cdot y \cdot \bar{z}} \vee \underset{2}{x \cdot z} \vee \underset{3}{\bar{x} \cdot y} \qquad \text{ДНФ}$$

$$\vee \underset{4}{\overset{1,2}{x \cdot y}} \vee \underset{5}{\overset{1,3}{y \cdot \bar{z}}} \vee \underset{6}{\overset{2,3}{y \cdot z}} \vee \underset{7}{\overset{5,6}{y}}$$

7 поглинає 1,3,4,5,6

$$x \cdot z \vee y \qquad \text{скорочена ДНФ}$$

$$\underset{1}{\bar{x}y\bar{z}} \vee \underset{2}{\bar{x}yz} \vee \underset{3}{xyz} \vee \underset{4}{x\bar{y}z} \vee \underset{5}{x\bar{y}\bar{z}} \vee \underset{6}{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}$$

$$\underset{1,2}{\bar{x}y} \vee \underset{2,3}{yz} \vee \underset{3,4}{xz} \vee \underset{4,5}{x\bar{y}} \vee \underset{5,6}{\bar{y}\bar{z}} \vee \underset{6,1}{\bar{x}\bar{z}}$$

Метод Петрика

1. Будується таблиця, стовпчики якої підписуються ПЕК ДДНФ функції f, а рядки всіма простими імплікантами з СкДНФ. Рядкам таблиці приписуються також попарно різні літери (ідентифікатори).
2. В клітинці таблиці ставиться зірочка, якщо відповідна ПІ є частиною ПЕК (ПІ поглинає ПЕК).

3. Кожному стовпчику приписується диз’юнкція літер, які відповідають рядкам, в яких у даному стовпчику стоять зірочки.
4. Утворюється кон’юнкція виразів, приписаних стовпчикам, яка приводиться до виду ДНФ.(Дистрибутивність, ідемпотентність, поглинання)
5. Кожна ЕК утвореної ДНФ відповідає 1-й тупіковій днф ф-ї f, до якої входять прості імпліканти, позначені літерами, що входять до ЕК.

		$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}yz$	xyz	$x\bar{y}z$	$x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
A	$\bar{x}\bar{z}$	♦					♦
B	$\bar{x}y$	♦	♦				
C	yz		♦	♦			
D	xz			♦	♦		
E	$x\bar{y}$				♦	♦	
F	$\bar{y}\bar{z}$					♦	♦
		A∨B	**B∨C**	**C∨D**	**D∨E**	**E∨F**	**A∨F**

$(A \vee B)(B \vee C)(C \vee D)(D \vee E)(E \vee F)(A \vee F)=$

$=(AB \vee AC \vee B \vee BC)(CD \vee CE \vee D \vee DE)$

$(EA \vee EF \vee AF \vee F)=$

$=(B \vee AC)(D \vee CE)(F \vee AE)=$

$=(BD \vee BCE \vee ACD \vee ACE)(F \vee AE)=$

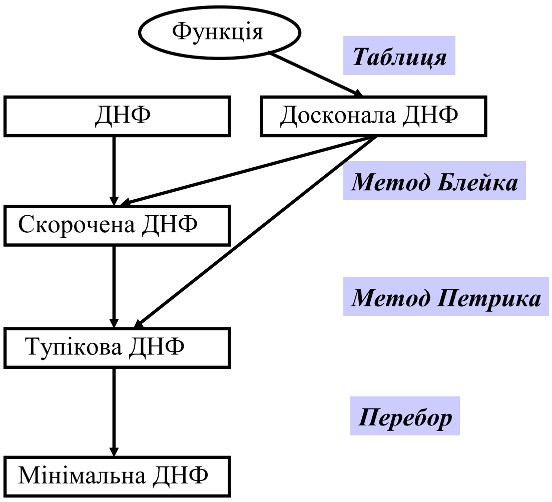
$=BDF \vee ABDE \vee BCEF \vee ABCE \vee ACDF \vee$

$\vee ACDE \vee ACEF \vee ACE=$

$=BDF \vee ACE \vee ABDE \vee BCEF \vee ACDF$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}y \vee xz \vee \bar{y}\bar{z} \\ \bar{x}\bar{z} \vee yz \vee x\bar{y} \end{array}\right\} \text{мінімальні ДНФ}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}y \vee xz \vee x\bar{y} \\ \bar{x}y \vee yz \vee x\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \\ \bar{x}\bar{z} \vee yz \vee xz \vee \bar{y}\bar{z} \end{array}\right\} \text{тупікові ДНФ}$$



Практичні заняття

ТЕМА 1: БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ. НОРМАЛЬНІ ФОРМИ. ПОЛІНОМИ ЖЕГАЛКІНА.

Мета: Навчити будувати таблиці, диз`юнктивні та кон`юнктивні нормальні форми, поліноми Жегалкіна.

Теоретичні питання: Означення булевої функції. Таблиця функції, правила її побудови. Елементарні кон'юнкції та диз'юнкції, повні елементарні кон'юнкції (диз'юнкції), досконалі днф та кнф. Способи їх побудови. Поліном Жегалкіна, способи його побудови: з дднф та методом невизначених коефіцієнтів.

Аудиторне завдання:

1. Побудувати таблицю для функції: $(x \cdot y \vee \bar{z}) \oplus x$.
2. Застосовуючи тотожні перетворення привести функцію $(x \cdot y \vee \bar{z}) \oplus x$ до виду днф, а потім дднф.
3. Побудувати дднф функції $(x \cdot y \vee \bar{z}) \oplus x$ за її таблицею.
4. Чи буде тотожно дорівнювати 0 чи 1 функція: $((x \oplus y) \equiv z) \cdot (x \rightarrow y \cdot z)$? [5-1.2.17.2]
5. Побудувати таблицю, дднф та поліном Жегалкіна для функції $(x \rightarrow y) \downarrow (y \equiv \bar{z})$.

Домашнє завдання:

1. Побудувати таблиці, дднф та поліноми Жегалкіна для функцій [5-1.2.16]:
   - $(x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow z) \oplus (z \rightarrow x))$;
   - $\overline{(\bar{x} \vee y) \vee (x \cdot \bar{z})} \downarrow (x \equiv y)$;
   - $\bar{x} \rightarrow (\bar{z} \equiv (y \oplus x \cdot z))$;
   - $(((x|y) \downarrow z)|y) \downarrow z$.
2. Чи будуть еквівалентними формули $(x \rightarrow y) \rightarrow z$ та $x \rightarrow (y \rightarrow z)$? [5-1.2.18.2]
3. Методом невизначених коефіцієнтів побудувати поліноми Жегалкіна для функцій: F(x,y)=(1001); F(x,y,z)=(01101000); F(x,y,z)=(11111000). [5-1.3.21]
4. Знайти булеву функцію $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ для якої довжина полінома Жегалкіна у 2^n разів більша за довжину дднф. [5-1.3.26]

Додаткове завдання:

1. Довести, що якщо формули (U∨B) та (¬U∨B) тотожно дорівнюють 1, то формула (B∨W) тотожно дорівнює 1.
2. Довести, що з рівностей a∧c = b∧c і a∨c = b∨c випливає рівність a=b.

3. Знайти фіктивні змінні функції f, що задана вектором значень:

- f=(0,0,1,1,0,0,1,1);
- f=(0,0,1,1,1,1,0,0).

4. Показати, що x є фіктивною змінною функції f, яка задана формулами:

- f=((z→y)∨x)(y→x)z¬x);
- f=((x∨y)(x∨¬z)→(¬x→y¬z)y.

5. Довести, що для довільної функції f від n змінних має місце наступна рівність:

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)=x_i\cdot f(x_1,\ldots,1,\ldots,x_n)\vee\neg\, x_i\cdot f(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n).$$

(Ця рівність називається розкладом функції f по змінній x_i.)

6. Показати, що кількість булевих функцій, що суттєво залежать від n аргументів, визначається рекурентним співвідношенням $A_n = 2^{2^n} - \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \cdot A_i$, де A_i-кількість булевих функцій, що суттєво залежать від i аргументів.

ТЕМА 2: ТЕОРЕМА ПОСТА.

Мета: Ввести означення для замкнених класів L, S, T_0, T_1, M. Навчити визначати до яких класів належить булева функція, застосовувати крітерії теореми Поста для визначення повноти системи функцій.

Теоретичні питання: Визначення лінійної, самодвоїстої, зберігаючої константу, монотонної булевої функції. Замкнені класи. Означення повної системи функцій. Теорема Поста.

Аудиторне завдання:

1. Визначити до яких класів відносяться функції з домашнього завдання [5-1.2.16]:

- $(x \to y) \oplus ((y \to z) \oplus (z \to x))$;
- $\overline{(\bar{x} \vee y) \vee (x \cdot \bar{z})} \downarrow (x \equiv y)$;
- $\bar{x} \to (\bar{z} \equiv (y \oplus x \cdot z))$;
- $(((x|y) \downarrow z)|y) \downarrow z$?

2. Довести, що для самодвоїстої функції $f(x_1, x_2, \ldots. x_n)$ кількість наборів, на яких вона обертається в 1 - $|N_f| = 2^{n-1}$. [5-2.2.11]

3. Знайти функцію $f(x, x, \ldots. x)$, якщо $f(x_1, x_2, \ldots x_n) \in T_1 \setminus T_0$. [5-2.4.6.1]

4. З'ясувати чи будуть повними системи функцій [5-2.6.2.4, 6]:

- {(01101001),(10001101),(00011100)} (визначення лінійності почати з останньої функції);
- $(S \setminus M) \cup (L \setminus (T_0 \cup T_1))$ (в другому доданку немає несамодвоїстих функцій).

Домашнє завдання:

1. Показати, що не існує самодвоїстої функції, суттєво залежної від двох змінних. [5-2.2.12]

2. Довести, що якщо $f(x_1,x_2,\ldots x_n)\in S$, то $f(x,x,\ldots x)\in\{x,\overline{x}\}$. [5-2.2.17.1]

3. Довести, що якщо $f(x_1,x_2,\ldots.x_n)$ лінійна функція відмінна від константи, то $\left|N_f\right|=2^{n-1}$. Чи вірне зворотнє? [5-2.3.3]

4. При яких n функція $x_1\oplus x_2\oplus\ldots x_n\oplus 1$ належить множині $T_1\setminus T_0$? [5-2.4.2.1]

5. Знайти функцію $f(x,x,\ldots.x)$, якщо $f(x_1,x_2,\ldots x_n)\in S\setminus T_0$. [5-2.4.6.3]

6. Довести, що якщо f не є константою, а $f\vee f^*$ - константа, то $f\notin M\cup S$. [5-2.5.7]

7. З'ясувати чи будуть повними системи функцій [5-2.6.2.1, 5, 8]:
   - $\{x\to y, x\to\overline{y}\cdot z\}$;
   - {(0010),(1010110111110011)};
   - $(M\setminus(T_0\cap T_1))\cup(L\setminus S)$ (перший доданок містить лише константи)?

Додаткове завдання:

1. Довести, що замикання множини функцій, що складається з диз`юнкції та суми за модулем 2, співпадає з класом T_0.
2. Довести, що множина $T_0\cap T_1$ є замиканням одноелементної множини $\{f=xy\oplus z\oplus t\}$.
3. Які функції будуть двоїстими для $\oplus$, $\equiv$, $|$, $\downarrow$?
4. Довести, що довільна монотонна функція, що відмінна від константи, може бути представлена ДНФ без заперечень.
5. Довести, що булева функція f є монотонною тоді і тільки тоді, коли монотонною є двоїста до неї функція f^*.
6. Довести повноту системи булевих функцій, що складається з диз`юнкції, константи 0 та еквівалентності. Чи утворює ця система базис?
7. Знайти довільний базис, що містить імплікацію ($\to$) .
8. Навести приклади базисів з 1, 2, 3, 4 функцій.
9. Чи утворює базис система булевих функцій, що складається з імплікації та константи 0?
10. Чи можна отримати функцію f операцією суперпозиції над множиною F:
    - $f=x\oplus y$, $\mathbf{F}=\{x\to y\}$;
    - $f=x\to y$, $\mathbf{F}=\{xy, x\vee y\}$;
    - f=(1000), $\mathbf{F}=\{f_1=(10110010)\}$;
    - $f=x\to y$, $\mathbf{F}=\{x\oplus y\oplus z, x\oplus 1, x\oplus y\}$?
11. Довести, що функцію $x\to y$ не можна отримати операцією суперпозиції з функцій $x\oplus y\oplus z$, $x\oplus 1$, $x\oplus y$.
12. Довести, що якщо деяка булева функція не зберігає константи та несамодвоїста, то вона немонотонна або нелінійна.
13. Чи справедливим є твердження: якщо булева функція істотно залежить більш ніж від однієї змінної і є лінійною, то вона не є монотонною?

14. Чи існує базис в P_2 , що складається з таких чотирьох функцій f_1, f_2, f_3, f_4, що $f_1 \notin T_0$, $f_2 \notin T_1$, $f_3 \notin L$, $f_4 \notin S$?

ТЕМА 3: МІНІМІЗАЦІЯ БУЛЕВСЬКИХ ФУНКЦІЙ.

Мета: Опанування методами Блейка та Петрика.

Теоретичні питання: Імпліканта, проста імпліканта, скорочена днф, тупикова днф, мінімальна днф. Зв'язок між цими поняттями.

Аудиторне завдання:

1. З множини елементарних кон`юнкцій $\{x_1, \overline{x_3}, x_1 \cdot x_2, x_2 \cdot \overline{x_3}\}$ виділити імпліканти і прості імпліканти функції $f(x_1, x_2, x_3) = (00101111)$. [5-1.4.1.1]
2. Скориставшись методом Блейка, побудувати скорочені днф для функцій [5-1.4.2.1,3]:
   - $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \vee x_1 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 \vee x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$;
   - $x_1 \cdot x_2 \vee \overline{x_1} \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$.
3. Побудувати імплікантні таблиці і тупикові днф для функцій, що задані скор.днф:
   - взяти скор.днф з попереднього прикладу [5-1.4.2.3];
   - $\overline{x_1} \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_4 \vee \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_3 \cdot x_4$;
   - $x_2 \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3 \vee \overline{x_3} \cdot x_4 \vee \overline{x_2} \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_4$ [5-1.4.12.3].

Домашнє завдання:

1. Скориставшись методом Блейка побудувати скорочені днф для функцій: [5-1.4.8]
   - $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1111100001001100)$;
   - $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0000001111111101)$;
   - $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0001101111011011)$.
2. Скориставшись методом Блейка та методом Петрика побудувати всі тупикові днф функцій [5-1.4.17]:
   - $f(x_1, x_2, x_3) = (01111110)$;
   - $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1110011000010101)$;
   - $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0110101111011110)$.

Додаткове завдання:

1. Довести, що скорочена днф, що представляє монотонну функцію, є мінімальною.

2. Кожен з чотирьох членів комітету голосує "за", натискаючи на кнопку. Рішення вважається прийнятим, якщо не менш трьох членів комітету голосують "за". Знайти мінімальну днф для функції голосування.

3. Чи є ДНФ тупиковими, мінімальними:

- $x \cdot y \vee \bar{y}$;
- $\bar{x} \cdot z \vee y \cdot z \vee x \cdot y \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot w \vee \bar{y} \cdot z \cdot w \vee x \cdot z \cdot w$?

4. Довести, що жодна проста імпліканта монотонної функції не містить заперечень змінних.

5. Визначити довжину скороченої днф функції $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$.

6. Визначити число тупикових днф та число мінімальних днф функції $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$.

7. Визначити число тупикових днф та число мінімальних днф функції $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)= (011111\ldots110)$.

Література до модуля 4.

ОСНОВНА

1. http://www.diskmat.kiev.ua

2. Глушков В.М. Введение в кибернетику. - К.: Изд-во Академии наук Украинской ССР, 1964. - 324 с.

3. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. - М.: Наука, 1962. - 476 с.

4. Калужнін Л.А., Королюк В.С. Алгоритми і математичні машини. - К.: "Радянська школа", 1964. - 280 с.

5. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. - М.: "Наука", 1977. - 368 с.

6. Трохимчук Р.Н. Збірник задач з теорії булевих функцій: Навчальний посібник. - К.: ВПЦ "Київський університет", 2002. - 104 с.

7. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. - М.: "Наука", 1975. - 240 с.

8. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. - М.: "Энергоатомиздат", 1988. - 480 с.

9. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика. - М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. - 744 с.

10. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. - СПб.: "Питер", 2001. - 304 с.

ДОДАТКОВА

1. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т.1 /Под общ. редакцией С.В.Яблонского и О.Б.Лупанова. - М.: "Наука". 1974. - 312 с.

2. Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л. Алгебра. Языки. Программирование. - К.: "Наукова думка", 1989. - 376 с.

3. Цейтлин Г.Е. Введение в алгоритмику. - К.:Сфера, 1998. - 310 с.

4. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. - М.: "Наука", 1972.

5. Новиков П.С. Элементы математической логики. - М.: "Наука", 1973. - 400 с.

6. Анисимов В.В., Донченко В.С., Дидовик А.А., Лужных В.М., Лебедев Е.А. Элементы дискретной математики, ч.2. Учебное пособие. - К.: Изд-во Киевского университета, 1980. - 57 с.

7. Горбатов В.А. Основы дискретной математики: Учебное пособие для студентов вузов. - М.:"Высшая школа", 1986. - 311 с.

МОДУЛЬ 3. ТЕОРІЯ ГРАФІВ

Історична довідка

Теорія графів – розділ математики, що вивчає властивості графів. Останні спрощено можна розглядати як сукупність точок (вершин) сполучених лініями (ребрами). Визначення графу є настільки загальним, що цим терміном можна описувати безліч подій та об'єктів повсякденного життя. Високий рівень абстракції та узагальнення дозволяє використовувати типові алгоритми теорії графів для вирішення зовнішньо несхожих задач у транспортних і комп'ютерних мережах, будівельному проектуванні, молекулярному моделюванні тощо.

Теорія графів зародилась у XVIII ст., перші її результати були одержані Леонардом Ейлером, однак теорія ще довго була осторонь головних напрямів досліджень.

Поштовх до розвитку теорія графів одержала на межі XIX–XX ст., коли різко зріс інтерес до праць у галузі топології та комбінаторики. У 1847 р. Г.Кірхгоф при вивченні питання про визначення току в кожному контурі й провідникові певної електричної схеми, замінив електричну схему на відповідний граф. Кірхгоф показав, що для розв’язання цієї задачі достатньо розглядати цикли отриманого графа. Через 10 років А.Келі при спробі знайти всі ізомери граничних вуглеводів з заданою кількістю атомів вуглецю прийшов до абстрактної постановки задачі: знайти кількість дерев з заданою кількістю вершин, таких що вершині суміжні одно чи чотири ребра. Тільки у 1869 р. відомий математик К.Жордан незалежно від робіт Кірхгофа та Келі почав систематично вивчати графи, як абстрактні математичні об’єкти. З того часу графи стали ефективно використовуватись в теорії планування та управління, соціології, лінгвістиці, економіці, медицині.

Відома забавна історія про спробу видатного німецького математика Германа Мінковського (1864–1909) довести теорему про розфарбування графу чотирма кольорами під час власної лекції з топології в Геттінгенському університеті.

„Ця теорема досі не була доведена лишень тому, що нею займалися тільки математики третього сорту, – заявив Мінковський з рідкісною для нього зарозумілістю. – Я впевнений у тому, що мені вдасться її довести”. Він почав доводити відразу. Минула година, а доведення не було закінчене. Довелося його відкласти до наступного заняття. Так тривало кілька тижнів. Нарешті, одного дощового ранку Мінковський увійшов до лекційної зали, супроводжуваний гуркотами грому. Він повернувся до аудиторії і з серйозним виразом на круглому доброму обличчі оголосив:

„Небеса розгнівані моєю зухвалістю. Моє доведення теореми про чотири кольори також неправильне”.

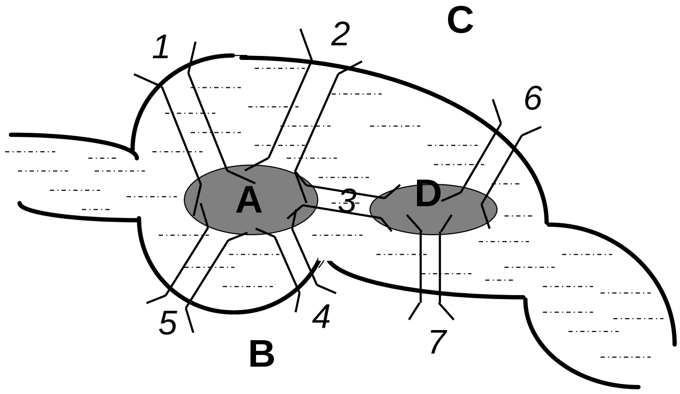
Не можна однозначно стверджувати, що зазначена теорема сама по собі була дуже важливою. Однак численні спроби впоратися з нею не минули даром. Нарешті, у 1976 році питання про достатність чотирьох кольорів дістало остаточну позитивну відповідь. Найбільш трудомістка частина відповідних обґрунтувань була пророблена комп’ютером. Його було використано для перевірки 1432 частинних випадків. Машина з честю виконала покладене на неї завдання "усього" за 1000 годин. Реакція на повідомлення про те, що проблема чотирьох кольорів перестала існувати після "брутального" втручання комп’ютера, була різною – від захоплення до скепсису. Багатьох не полишало відчуття, що таке обґрунтування не є доведенням у повному розумінні цього слова.

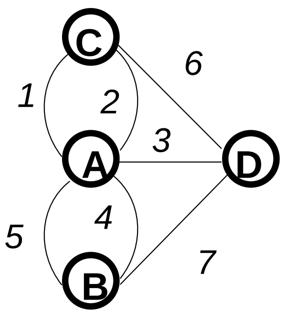
Ейлер, Леонард (*Euler, Leonhard*; 1707 – 1883), математик, механік, фізик й астроном. За походженням швейцарець. У 1726 був запрошений до Петербурзької АН і переїхав у 1727 до Росії. Був ад'юнктом (1726), а в 1731-41 і з 1766 академіком Петербурзької АН (1742-66 іноземний почесний член). В 1741-66 працював у Берліні, член Берлінської АН. Ейлер - вчений надзвичайної широти інтересів і творчої продуктивності. Автор понад 800 робіт у галузі математичного аналізу, диференціальної геометрії, теорії чисел, наближених обчислень, небесної механіки, математичної фізики, оптики, балістики, кораблебудування, теорії музики, тощо. Його праці зробили значний вплив на розвиток науки.

Кірхгоф, Густав Роберт (*Kirchhoff, Gustav Robert*; 1824, Кенігсберг – 1887, Берлін), один з великих фізиків XIX століття. З 1842 по 1846 вивчав математику та фізику в Кенігсбергському університеті, а в 1847 році вже выступив як приват-доцент в Берліні; у 1850—1854 рр., як екстраординарний профессор, читав лекції в Бреславлі, потім до 1874 року виконував обов’язки ординарного професора в Гейдельберзі, звідки в 1875 році перейшов у Берлін; у 1875 році був обраний членом берлінської академії, з 1862 року був член-корреспондентом Санкт-Петербургської академії наук.

Рамсей, Франк (*Ramsey, Frank*; 1903 – 1930), англійський математик та логік. Основні праці відносяться до комбінаторики, логіки, теорії алгебраїчних кривих. Крім математики зробив значний внесок у розвиток філософії та економіки.

Кенігсбергські мости





Графи, вершини, ребра

G=(V,X)

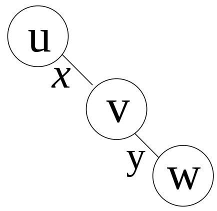
$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$$ вершини

$$X = \{x_1 = (v_{i_1}, v_{j_1}), x_2 = (v_{i_2}, v_{j_2}), \ldots, x_q = (v_{i_q}, v_{j_q})\}$$

множина невпорядкованих пар
різних вершин - ребра

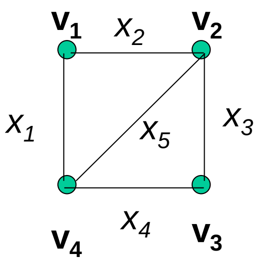
Суміжність, інцидентність

u,v,w∈V
x=(u,v)∈X
y=(v,w)∈X



u та ***v***, ***v*** та ***w*** - суміжні вершини
x та ***u***, ***y*** та ***w*** – інцидентні
x та ***y*** - суміжні ребра

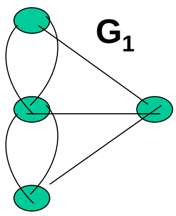
Приклад простого графу



$$V=\{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$$

$$X=\{ (v_1,v_4),(v_1,v_2), (v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_2) \}$$

Мультиграфи



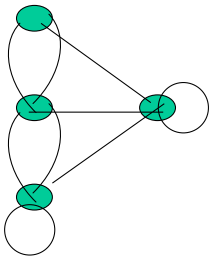
G_1

$$G=(V,X)$$

$$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$$

$$X=\{x_1=(v_{i_1},v_{j_1}), x_2=(v_{i_2},v_{j_2}),\ldots, x_q=(v_{i_q},v_{j_q})\}$$

множина, ***можливо повторюваних***,
невпорядкованих пар різних вершин



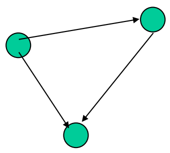
Графи з петлями

G=(V,X)

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$$

$$X = \{x_1 = (v_{i_1}, v_{j_1}), x_2 = (v_{i_2}, v_{j_2}), \ldots, x_q = (v_{i_q}, v_{j_q})\}$$

множина, ***можливо повторюваних***, невпорядкованих пар ***не обов'язково різних*** вершин



Орієнтовані графи

G=(V,X)

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$$

$$X = \{x_1 = (v_{i_1}, v_{j_1}), x_2 = (v_{i_2}, v_{j_2}), \ldots, x_q = (v_{i_q}, v_{j_q})\}$$

множина, ***……………………….*** , ***впорядкованих*** пар ***……………………………*** вершин

Підграфи. Маршрути

Граф G'=(V',X') підграф G=(V,X) якщо

$$V' \subset V, \quad X' \subset X$$

Чередована послідовність вершин та ребер, що починається і закінчується вершиною: $v_0\ x_1\ v_1\ x_2\ v_2\ x_3\ \ldots\ldots\ v_{n-1}\ x_n\ v_n$, а кожне ребро інцидентне сусіднім вершинам: $x_i = (v_{i-1}, v_i)$, називається маршрутом з v_0 до v_n довжини *n.*

Якщо немає кратних ребер, то в послідовності достатньо залишити тільки вершини $v_0\ v_1\ v_2\ \ldots\ldots\ v_{n-1}\ \ v_n$

Зв'язність

Вершини u та v називаються
зв'язаними,
якщо існує маршрут
з вершини u до вершини v

Граф називається ***зв'язним***, якщо будь-
які 2 його вершини зв'язані між собою

Зв'язність

Лема 1. Відношення зв'язності є відношенням еквівалентності на множині вершин графа G=(***V,X)***

vRu – вершини v та u зв'язані між собою

A) Рефлексивність – v зв'язано з v
B) Симетричність – якщо v зв'язано з u, то й u зв'язано з v
C) Транзитивність – якщо v зв'язано з u, а u зв'язано з w,
то v й зв'язано з w

Відношення зв'язності утворює розбиття усієї множини вершин графу на систему множин вершин, зв'язаних між собою

$$V = \cup V_i\,, \quad V_i \cap V_j = \varnothing$$

Розбиття ребер

$$X_i = \{(u,v): u,v \in V_i\}$$

Лема 2. Система $\{X_i\}$ є розбиттям X.

1. $(u,v)\in X$, $u\in V_i \Rightarrow$ u та v зв'язані у графі G $\Rightarrow$
$\Rightarrow u,v \in V_i \Rightarrow (u,v)\in X_i \Rightarrow \cup X_i$
2. $(u,v)\in X_i$, $(u,v)\in X_k \Rightarrow u,v\in V_i$, $u,v\in V_k \Rightarrow$
$\Rightarrow V_i = V_k$

Компоненти зв'язності

G_i = (V_i , X_i) – підграфи графу ***G = (V, X)***

Лема 3. Графи ***G_i*** - зв'язні графи

$u,v \in V_i \Rightarrow u,v$ зв'язані у графі $G \Rightarrow$
існує маршрут $u=v_0,v_1,\ldots v_n=v$ у графі $G \Rightarrow$
$v_1,v_2,\ldots v_{n-1} \in V_i$, як зв'язані між собою$\Rightarrow$
ребра $(v_i,v_{i+1}) \in X_i \Rightarrow$
маршрут $u=v_0,\ldots v_n=v$ є маршрутом у графі $G_i \Rightarrow$
u та v зв'язані у графі G_i

Підграфи G_i, які породжуються відношенням зв'язності на множині вершин графа *G*, називаються ***компонентами зв'язності*** графа *G*

Ланцюги, цикли

- Маршрут у графі G називається ***ланцюгом***, якщо ребра в ньому не повторюються
- Маршрут у графі G називається ***простим ланцюгом***, якщо в ньому не повторюються вершини (а значить і ребра)
- Маршрут називається ***замкненим***, якщо його початкова і кінцева вершини співпадають
- Замкнений ланцюг називається ***циклом***
- Замкнений маршрут, у якому не повторюються вершини, крім першої і останньої (замкнений простий ланцюг), називається ***простим циклом***

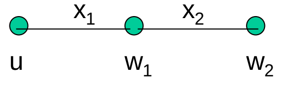
Лема 4. З довільного маршруту, що з'єднує дві різні вершини ***u*** та ***v*** можна відділити простий ланцюг. що з'єднує ці ж вершини

$$u = w_0\ w_1\ w_2\ \ldots\ldots w_n = v$$

$$w_0 = w_j \neq w_n \qquad u = w_j\ w_{j+1}\ w_{j+2}\ \ldots\ldots w_n = v$$

$$w_i = w_j \qquad u = w_0\ w_1\ w_2\ \ldots w_i w_{j+1} \ldots w_n = v$$

$$w_i = v \qquad u = w_0\ w_1\ w_2\ \ldots\ldots w_i = v$$



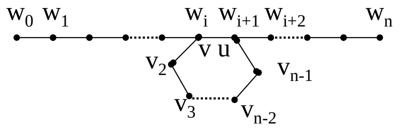
$ux_1w_1x_2w_2x_2w_1x_1u$

Лема про цикл у зв'язному графі

Якщо у зв'язному графі G видалити ребро $x=(v,u)$,
яке входить у деякий цикл $v=v_1,v_2,\ldots v_n=u,v_1=v$
то утворений граф G' залишиться зв'язним.

Нехай 2 довільні вершини w' та w'' зв'язані у графі G.
Покажемо, що вони будуть зв'язані і у G'. Можливі 2 випадки:

1. Маршрут з w' до w'' не проходить через ребро x, тоді вилучення ребра не змінить зв'язності w' та w'' у графі G'.
2. Маршрут $w'=w_0,w_1,\ldots, w_i=v,w_{i+1}=u,w_{i+2},\ldots w_n= w''$ з w' до w'' проходить через ребро x, тоді існує "обхідний" маршрут з w' до w": $w'=w_0,w_1,\ldots, w_i=v=v_1,v_2,\ldots v_n=u=w_{i+1},w_{i+2},\ldots w_n= w''$

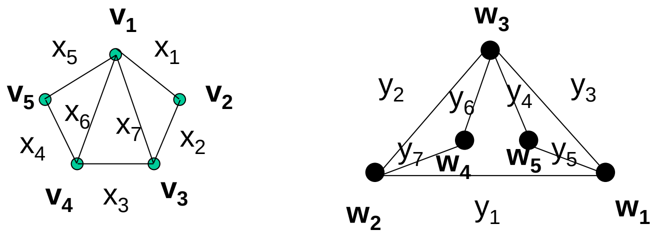


Ізоморфізм графів

Графи $G=(V,X)$ та $H=(W,Y)$ називаються ізоморфними, якщо існує бієкція $\chi:V\leftrightarrow W$, така що $(u,v)\in X\Leftrightarrow(\chi(u),\chi(v))\in Y$

Якщо вершини u та v є суміжними у графі G,
то їх образи є суміжними у графі H
і навпаки,
якщо вершини u' та v' є суміжними у графі H,
то їх прообрази є суміжними у графі G

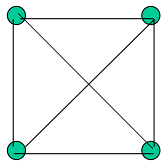
Приклад ізоморфних графів



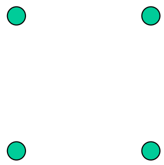
v_1 - w_3	x_1 - y_4	x_5 - y_6
v_2 - w_5	x_2 - y_5	x_6 - y_2
v_3 - w_1	x_3 - y_1	x_7 - y_3
v_4 - w_2	x_4 - y_7	
v_5 - w_4		

Повні, порожні графи

Граф G=(V,X) називається повним, якщо $X=V^2$



Граф G=(V,X) називається порожнім, якщо $X=\varnothing$

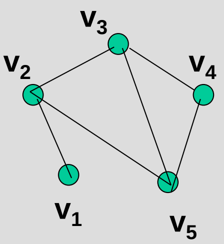


Степінь вершини

$$\deg(v) = \left|\left\{u : (u,v) \in X\right\}\right|$$

Степінь вершини v – кількість інцидентних їй ребер

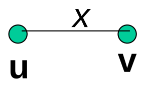
Лема 5. Сума степенів всіх вершин графу дорівнює подвоєній кількості ребер графу



$\deg v_1 = 1$
$\deg v_2 = 3$
$\deg v_3 = 3$
$\deg v_4 = 2$
$\deg v_5 = 3$

12

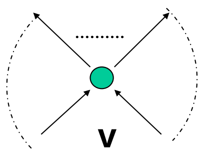
$$\sum_{i=1}^{|V|} \deg(v_i) = 2 \cdot |X|$$



Перша теорема Ейлера

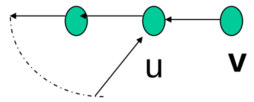
В скінченому зв'язному графі існує замкнений маршрут, в який кожне ребро входить рівно по 1 разу, тоді і тільки тоді, коли всі вершини графа мають парну степінь.

Необхідність

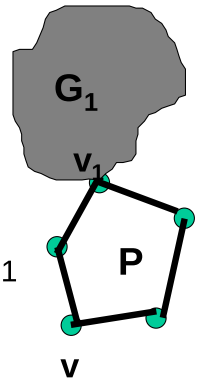


deg(v)=2×кількість заходів у вершину v

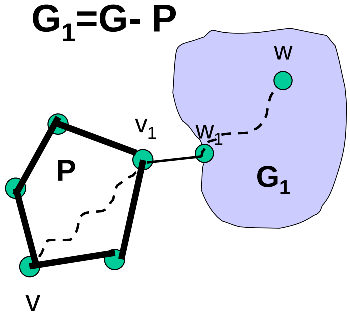
Достатність



deg(u)=
=2× кількість заходів у вершину u + 1

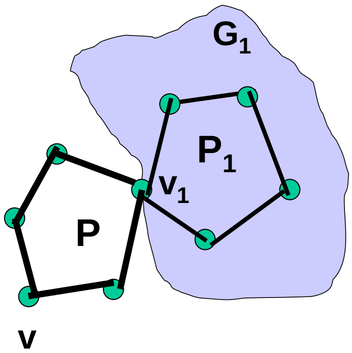


якщо **P≠G**
G_1=G- P

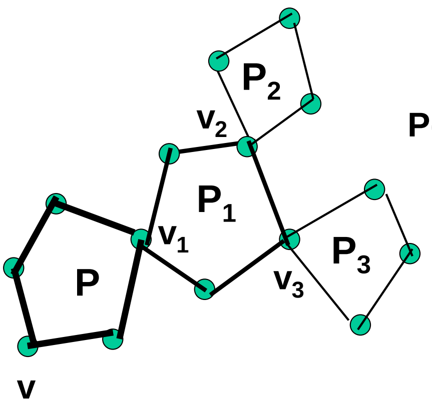


(v_1,w_1) – перше ребро на шляху з v до w, що не належить **P⇒**
v_1∈P та v_1∈G_1

v_1 – вершина, спільна для **P** та **G_1**



P(v,v_1) P_1 P(v_1,v)



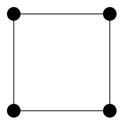
G_1=G- P

P(v,v_1) P_1 P(v_1,v)

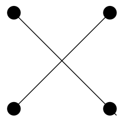
якщо P∪P_1≠G, побудуємо P_2 , потім P_3 і т.д.

P(v,v_1) P_1(v_1,v_2) P_2 P_1(v_2,v_3) P_3 P_2(v_3,v_1) P(v_2,v)

Доповненням до графу G=(V,X) ,
будемо називати граф
$\overline{G}$ =(V,V^2-X)

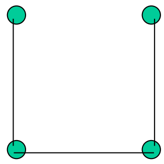


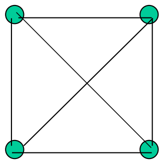
G

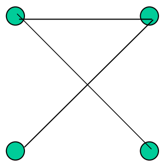


$\overline{G}$

Граф G називається самодоповненим,
якщо граф G ізоморфний графу $\overline{G}$







G $\overline{G}$

Задача Рамсея

Серед 6-х студентів знайдуться
3 студенти попарно знайомі, або
3 студенти попарно не знайомі

Теорема.

У графі G=({v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6},X)
з 6 вершинами:
або 3 вершини попарно суміжні,
або 3 вершини попарно не суміжні.

Доведення

Візьмемо довільну вершину $\mathbf{v_1}$ -
серед решти вершин v_2,v_3,v_4,v_5,v_6
частина суміжна з v_1 в G,
решта не суміжна з v_1 в G.
За принципом Діріхле одна з цих частин мусить
містити не менше 3 вершин.
Тоді або 3 деякі вершини суміжні з v_1 в G,
або 3 вершини не суміжні з v_1 в G,
тобто ці ж вершини суміжні з v_1 в $\overline{G}$.

v_1 суміжна з v_2,v_3,v_4 в G

1-й випадок:
серед v_2,v_3,v_4 у графі G
є дві суміжні між собою вершини,
наприклад v_2,v_3,
тоді v_1,v_2,v_3
попарно суміжні між собою у графі G

2-й випадок:
серед v_2,v_3,v_4
всі вершини не суміжні між собою у графі G,
тоді v_2,v_3,v_4
попарно суміжні між собою у графі $\overline{G}$

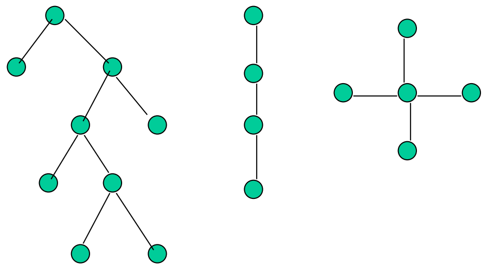
v_1 не суміжна з v_2,v_3,v_4 в G

1-й випадок:
серед v_2,v_3,v_4 у графі $\overline{G}$
є дві суміжні між собою вершини,
наприклад v_2,v_3,
тоді v_1,v_2,v_3
попарно суміжні між собою у графі $\overline{G}$,
а значить v_1,v_2,v_3 не суміжні у графі G

2-й випадок:
серед v_2,v_3,v_4
всі вершини не суміжні між собою у графі $\overline{G}$,
тоді v_2,v_3,v_4
попарно суміжні між собою у графі G

Дерева

Дерево - зв'язний ациклічний (без циклів) граф



Теорема про дерева

Наступні твердження еквівалентні

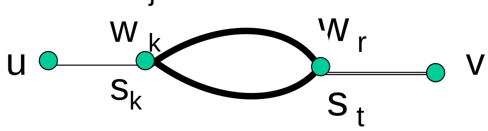
1. **G** - дерево
2. Будь-які дві вершини у **G** зв'язані єдиним простим ланцюгом
3. G - зв'язний граф і **p=q+1**
4. **G** - ациклічний граф і **p=q+1**

p – вершини **q –** ребра

1=>2 $u=w_0\ w_1\ .....\ w_n=v$ прості
$u=s_0\ s_1\ ....\ s_m=v$ ланцюги

k: $w_i = s_i \quad i<k+1, \quad w_{k+1} \neq s_{k+1}$

r: $w_i \neq s_j \quad k<i<r,\ k<j<t,\ w_r = s_t$

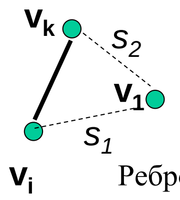


$w_k\ w_{k+1}\ ...\ w_r = s_t\ s_{t-1}\ ....\ s_k = w_k$

За побудовою $w_r\ s_t$ всі вершини різні, тобто це цикл

Існування ланцюга $\Rightarrow$ зв'язність графа

2=>3



Зафіксуємо деяку вершину графа v_1

Побудуємо бієкцію між ребрами графа і рештою вершин $v_2, v_3, \dots, v_p$

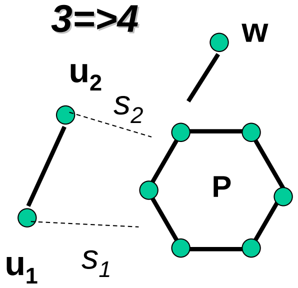
Поставимо у відповідність вершині v_i останнє ребро єдиного ланцюга з v_1 до v_i

Ребро (v_i, v_k) може відповідати тільки одній вершині, інакше $v_1 s_2 v_k$ та $v_1 s_1 v_i v_k$ утворюють 2 ланцюги з v_1 до v_k

Ребро (v_i, v_k) повинно відповідати хоча б одній вершині v_i, чи v_k, інакше $v_1 s_2 v_k$ та $v_1 s_1 v_i$ з ребром (v_i, v_k) утворюють 2 ланцюги з v_1 до v_k

Тоді ребер стільки ж скільки вершин $v_2, v_3, \dots, v_p$, і $p=q+1$

3=>4



Нехай у графі є цикл P.
Кожній вершині w поза P поставимо у відповідність перше ребро найкоротшого маршруту з w до циклу P. Різним вершинам відповідатимуть різні ребра.
Нехай u_1 та u_2 відповідає одне ребро (u_1,u_2)
Це означає $|s_1|+(u_1,u_2)$ не довше за $|s_2|$ та $|s_2|+(u_1,u_2)$ не довше за $|s_1|$, або $|s_1|+1 \le |s_2|$ та $|s_2|+1 \le |s_1|$, що неможливо

Таким чином кожній вершині на циклі відповідає по 1 ребру і кожній вершина поза циклом теж по 1 ребру. Всі ребра при цьому різні тобто у графі ребер принаймні стільки, скільки вершин (можливо якісь ребра не відповідають жодній вершині), значить $p \le q$, але це протирічить тому, що $p=q+1$

Доведемо, що G зв'язний граф

4=>1 $G_1, G_2, \dots G_k$ - компоненти зв'язності G

Тоді $G_1, G_2, \dots G_k$ - дерева

$$+\begin{cases} p_1=q_1+1 \\ p_2=q_2+1 \\ \dots\dots\dots \\ p_k=q_k+1 \end{cases}$$

$$\overline{}$$

$p=q+k$

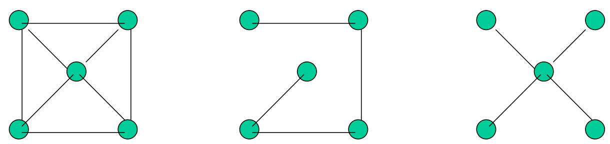
$p=q+1$ $\Rightarrow$ **k=1** $\Rightarrow$ G зв'язний граф

Ліс - ациклічний граф

Лемма. Всі компоненти зв'язності лісу є деревами

Ліс складається з дерев

Кістяковим деревом графу G=(V,X) назвемо дерево H=(W,Y), множина вершин якого співпадає з множиною вершин графу G, а множина ребер є підмножиною ребер графу G:
$V=W$, $Y\subset X$



Лема про існування кістякового дерева

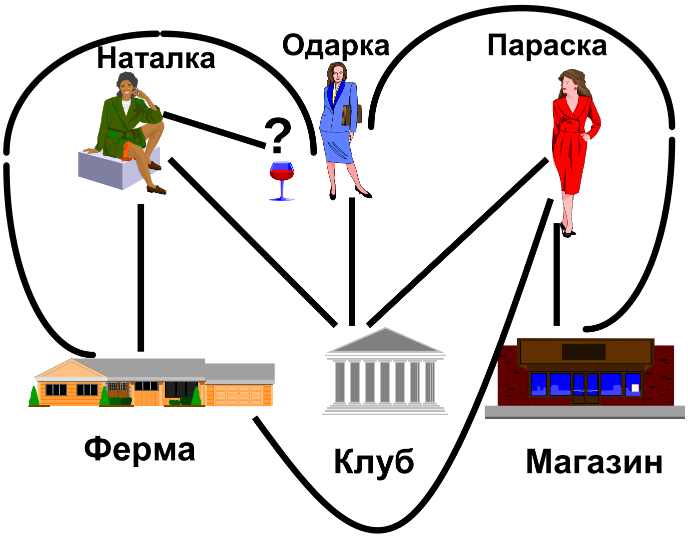
Зв'язний граф G завжди має кістякове дерево.

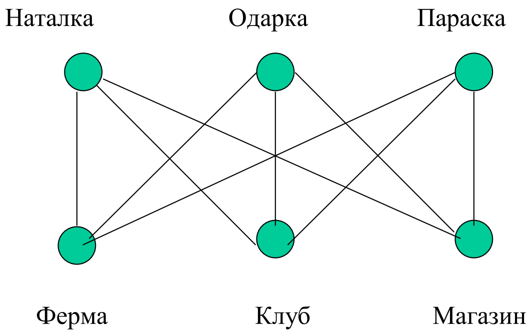
Крок 1.
Якщо граф G не має циклів, то він вже є кістяковим деревом

Крок 2.
Якщо граф G має цикл, вилучимо одне з ребер на цьому циклі.
За лемою про цикл у зв'язному графі, новий граф буде також зв'язним.
Go to крок 1.

Оскільки граф скінченний, то рано чи пізно всі цикли будуть ліквідовані, а граф залишиться зв'язним і не матиме циклів, тобто буде шуканим кістяковим деревом.

Планарні графи

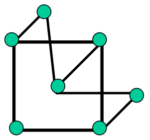


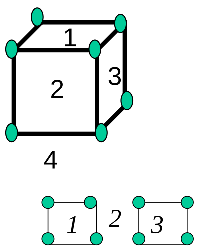


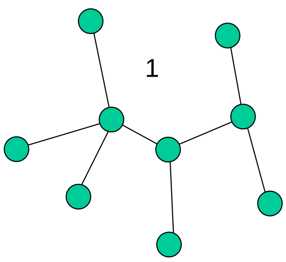
Планарні графи. Грані.

Граф називається ***планарним***, якщо його вершини і ребра можна ізоморфно розмістити на площині так, щоб ребра не перетинались

Гранню розміщеного на площині планарного графа будемо називати частину площини, яка повністю відокремлюється ребрами графа





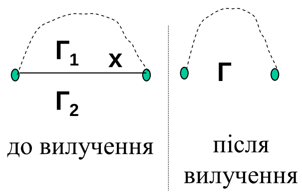


Теорема Ейлера 2

Для довільного зв'язного планарного графа

$$p-q+r=2$$

дерево - $p=q+1$, $r=1$, $q+1-q+1=2$



r зменшиться на 1
q зменшиться на 1
$p-(q-1)+(r-1)=p-q+r$
p-q+r – не зміниться

Лема 1: $q\leq 3p-6$

Для довільного зв'язного планарного графу з $p\geq 3$ виконується нерівність $q\leq 3p-6$

Кожне ребро, яке відокремлює якусь грань, насправді відокремлює (розмежовує) одночасно рівно 2 грані. Кожній грані потрібні щонайменше 3 відокремлюючих ребра.
Тому для кількості таких ребер q_1 виконується $2q_1\geq 3r$.
Але $q\geq q_1$, крім того $p-q+r=2$.
Позбудемось кількості граней r:

$$\begin{matrix} 2q\geq 3r \\ 3p-3q+3r=6 \end{matrix} \Rightarrow 3p-q\geq 6 \Rightarrow q\leq 3p-6$$

Лема 2: $q \leq 2p - 4$

Для довільного зв'язного планарного графу без трикутників з $p\geq 4$ виконується нерівність $q\leq 2p-4$

Кожне ребро, яке відокремлює якусь грань, насправді відокремлює (розмежовує) одночасно рівно 2 грані. Кожній грані потрібні щонайменше 4 (трикутників немає) відокремлюючих ребра.
Тому для кількості таких ребер q_1 виконується $2q_1\geq 4r$.
Але $q\geq q_1$, крім того $p-q+r=2$.
Позбудемось кількості граней r:

$$\begin{matrix} 2q\geq 4r \\ 4p-4q+4r=8 \end{matrix} \Rightarrow 4p-2q\geq 8 \Rightarrow q\leq 2p-4$$

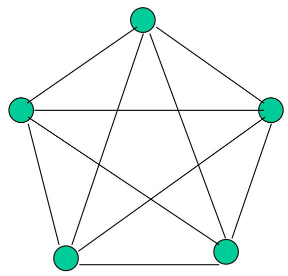
Лема 3. Кожний планарний граф має хоча б одну вершину степені не більше 5.

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q \qquad \mathbf{deg\ v_i \geq 6}$$

6 p ≤ 2 q **3 p - 6 ≥ q**

3 p ≤ q за лемою 1

Лема 4. Графи **K_5** та **$K_{3,3}$** не планарні



K_5

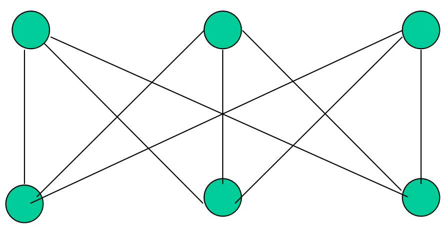
p=5, q=10

за лемою 1:

3 p - 6 ≥ q

9 ≥ 10

$K_{3,3}$



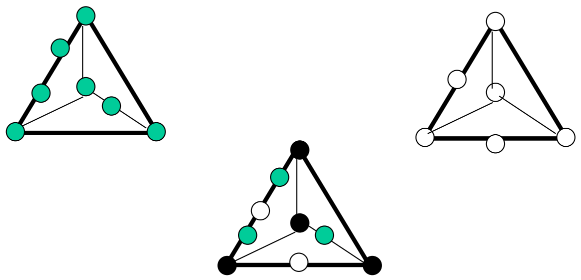
p=6, q=9

За лемою 1: 3 p - 6 ≥ q 12 ≥ 9

За лемою 2: 2 p - 4 ≥ q 8 ≥ 9

Гомеоморфні графи

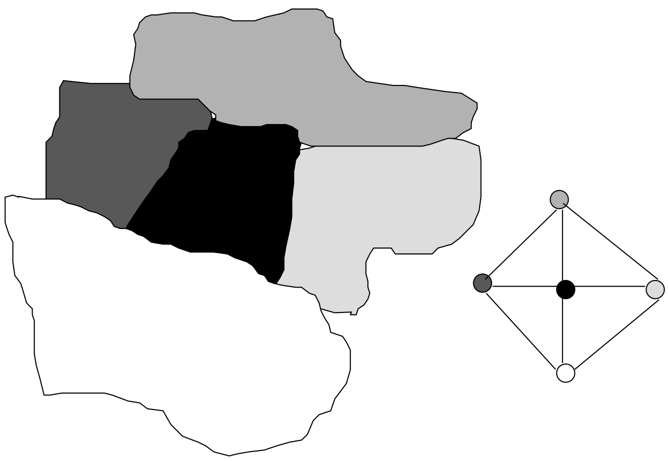
Два графа називаються гомеоморфними, якщо їх можна одержати з одного й того ж графу за рахунок розбиття ребер вершинами степені 2



Теорема Понтрягіна-Куратовського

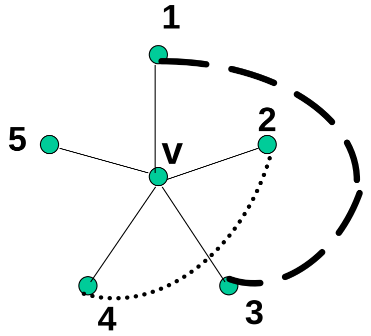
Для того щоб граф G був планарним необхідно і достатньо щоб G не містив підграфів гомеоморфних графам К $_{3,3}$ або К $_{5}$

Необхідність випливає з лем 1,2.
Доведення **достатності** заборонено МОЗ України



Теорема про 5 фарб

Довільний планарний граф можна розфарбувати за допомогою
5 фарб так, щоб суміжні вершини мали різний колір.

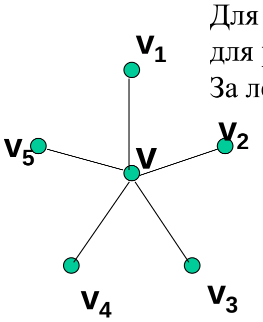


deg v < (

Теорема про 5 фарб

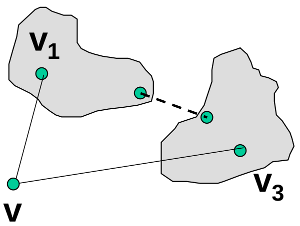
Довільний планарний граф можна розфарбувати за допомогою 5 фарб так, щоб суміжні вершини мали різний колір.

Індукція по p – кількості вершин графу G
Для p<6 очевидно, припустимо, що вірно для p=n, доведемо для p=n+1
За лемою 3 існує вершина v, що deg v≤5



Розфарбуємо спочатку G-{v}
Якщо deg v <5 або для вершин $v_1…v_5$ використані не всі 5 фарб, то v фарбується у невикористану фарбу.

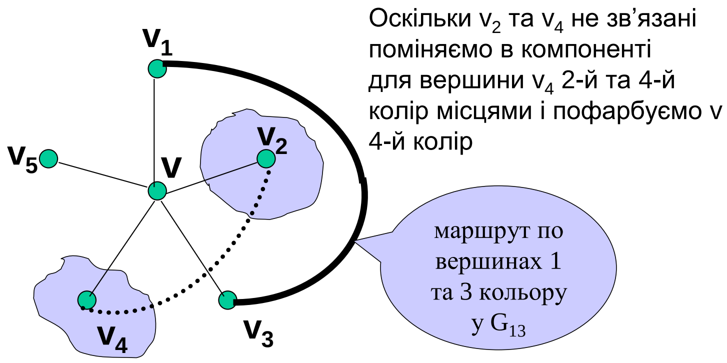
G_{13} - вершини 1 та 3 кольору та ребра, що їх з’єднують



Якщо v_1 та v_3 не зв’язані поміняємо в компоненті для вершини v_3 1-й та 3-й колір місцями і пофарбуємо v у 3-й колір

Якщо v_1 та v_3 зв’язані - розглянемо аналогічний граф **G_{24}**

В графі G_{24} вершини v_2 та v_4 не можуть бути зв'язаними, оскільки вони відокремлюються циклом v_1, v_3, v, v_1.



Застосування графів для розробки алгоритмів

Орієнтовані дерева

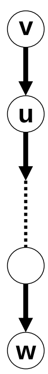
Орієнтованим деревом будемо називати орієнтований зв'язний ациклічний (в неорієнтованому сенсі) граф, у якого існує вершина ***v***, яку будемо називати коренем дерева і з якої існує шлях до будь-якої іншої вершини.

Властивості орієнтованих дерев

Якщо в дереві $G=(V,E)$ є ребро $(v,u)\in G$, то будемо називати v батьком u, а u сином v.

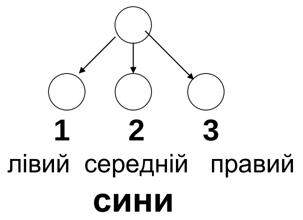
Якщо в дереві $G=(V,E)$ існує шлях з вершини v в вершину w, то будемо називати v предком w, а u нащадком w.

Вершини, у яких немає синів, будемо називати листками.

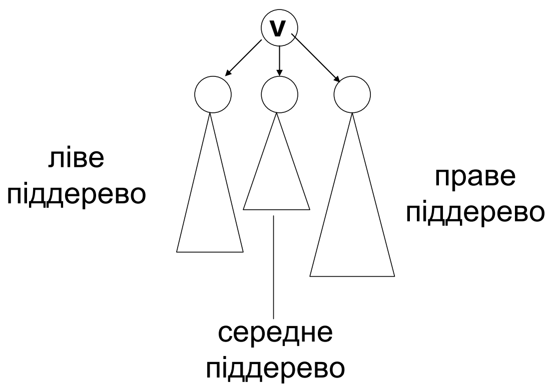


Властивості орієнтованих дерев

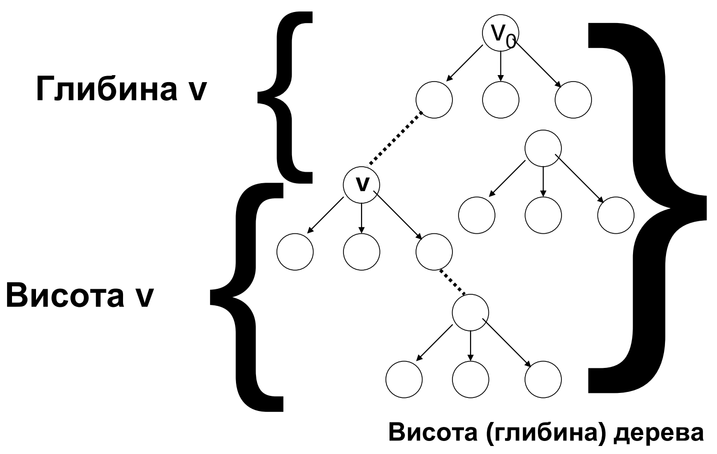
Вихідні ребра вершини будемо вважати впорядкованими, що означає впорядкованість відповідних синів.



Піддерева



Глибина і висота вершин



Двійкові дерева

Дерево (орієнтоване), у якому кожен батько має не більше двох синів, будемо називати двійковим.

<u>Теорема.</u> Двійкове дерево висоти h має не більш ніж 2^h листків

Теорема

Нехай кожен батько у дереві з n листками має не менше p синів і не більше q синів.
Тоді висота h дерева:

$$\log_q n \le h \le \log_p n$$

$$p^h \le n \le q^h$$

Теорема

Нехай кожна вершина у дереві висоти h має не більше q синів.
Тоді у дереві не більше
$(q^{h+1}-1)/(q-1)$ вершин

На глибині 0 – 1 вершина
На глибині 1 - $\le q$ вершин
....
На глибині h - $\le q^h$ вершин

$1+q+q^2+q^3+\ldots\ldots q^h=(q^{h+1}-1)/(q-1)$

Теорема

Нехай у двійковому дереві з n вершинами глибина всіх листків відрізняється не більш ніж на 1. Тоді для висоти цього дерева h виконується така нерівність:
$\log(n+1)-1 \le h < \log(n+1)$

$$2^h-1<n\le 2^{h+1}-1$$
$$2^h<n+1\le 2^{h+1}$$
$$h<\log(n+1)\le h+1$$

Сортдерево

$$v \to val(v) \in L$$

Відмічене двійкове дерево будемо називати сортдеревом, якщо:

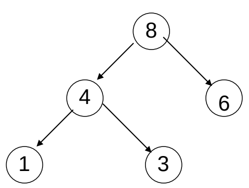
- Глибина листків різниться не більше ніж на 1
- Не більш ніж 1 батько має 1 сина і цей син лівий
- Всі листки більшої глибини лежать лівіше листків меншої глибини

$$val(w)<val(v)$$
w нащадок v

Розміщення сортдерева

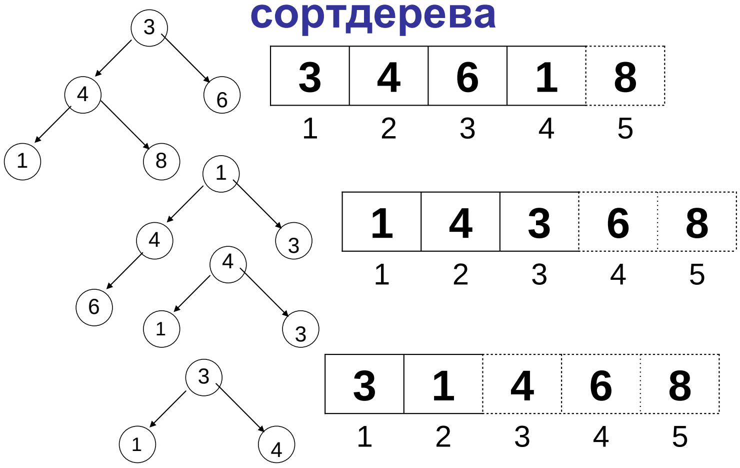
v → i-й елемент масиву

Корінь v_0 у першому елементі
Якщо v – у i-му елементі, то
лівий син – у 2i-му, а правий – у 2i+1-му



val	8	4	6	1	3
i	1	2	3	4	5

Сортування за допомогою сортдерева



Процедура *Зачистка*

Дерево, у якому треба “навести порядок”, розміщується у масиві ***A*** з ***i***-го по ***j***-й елементи.

Елемент “порушувач порядку” знаходиться у корені дерева (***i***-му елементі масиву).

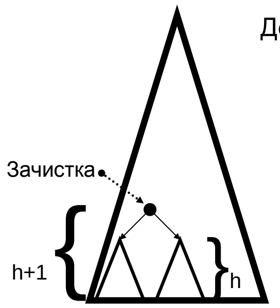
Якщо у кореня є син, в якому знаходиться більший елемент, то міняємо місцями елемент у корені з більшим з елементів у синах.

Рекурсивно повторюємо ці ж дії до дерева, у корені якого стоїть переміщений елемент.

Процедура *Зачистка*

```
procedure Зачистка(I,j:integer);
begin
if 2*i>j
then return
else if 2*i=j
        then if A[i]<A[j]
                then A[i]:=:A[j]
        else if A[2*i]>A[2*i+1] and A[2*i]>A[i]
                then begin A[i]:=:A[2*i]; Зачистка(2*i,j) end
                else if A[2*i+1]>A[2*i] and A[2*i+1]>A[i]
                        then begin A[i]:=:A[2*i+1]; Зачистка(2*i+1,j) end;
return
end
```

Побудова сортдерева



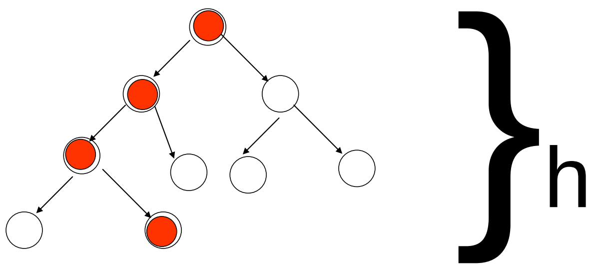
Дерево розташовано в масиві A[1..n]

for i:=n downto 1 do Зачистка(i,n)

Алгоритм сортування за допомогою сортдерева

```
Сортування;
for i:=n downto 1 do Зачистка(i,n)
for i:=n downto 2 do
    begin
       A[1]:=:A[i];
       Зачистка(1,i-1)
    end
```

Складність зачистки



O(h)=O(logn)

Складність сортування

```
Сортування;
for i:=n downto 1 do Зачистка(i,n)
for i:=n downto 2 do
    begin
       A[1]:=:A[i];
       Зачистка(1,i)
    end
```

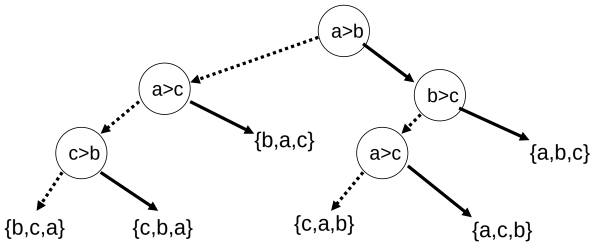
$O(logn) \times n$

$O(logn) \times (n-1)$

Усього $O(n \times logn)$

Нижня оцінка складності сортування

{a,b,c}



3!=6 листків

h≥]log3![

Нижня оцінка складності сортування

Кількість способів впорядкування =n!

Кількість листків≥Кількість способів впорядкування=n!

Висота дерева ≥log кількості листків = log n!

Складність ≥ O(log n!)=O(n logn)

Практичні заняття

ТЕМА 1: ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ГРАФІВ.

Мета: Засвоєння понять, пов'язаних з маршрутами та циклами, одержання навичок аналізу властивостей графів.

Теоретичні питання: Маршрут, ланцюг, цикл, зв'язність вершин та графу в цілому, степінь вершини.

Аудиторне завдання:

1. Підрахувати, скільки ребер в повному графі (орієнтованому графі) з n вершинами?

2. Навести приклад графа, в якому існують прості ланцюги з вершини v_1 в вершину v_2 та з вершини v_2 в вершину v_3, але не існує простого ланцюга з v_1 в v_3 через v_2.

3. Довести, що зв'язний граф з n вершинами має не менше ніж $n-1$ ребро. [7-4.1.7]

4. Довести, що у зв'язному графі з n вершинами між довільними двома вершинами існує маршрут довжини не більше ніж $n-1$.

5. Довести, що коли у графі G рівно дві вершини v та w мають непарні степені, тоді ці вершини є зв'язними у графі G.

6. Довести, що будь-який замкнений маршрут непарної довжини містить в собі простий цикл. Чи вірне це для маршрутів парної довжини? [7-4.1.6]

7. Довести, що якщо зі зв'язного графа видалити довільне ребро, що міститься у деякому простому циклі, то граф залишиться зв'язним. Чи вірне це для циклу, замкненого маршруту? [7-4.1.11]

Домашнє завдання:

1. Довести, що кількість вершин непарного степеня графа парна.

2. Довести, що у будь-якому графі з не менш ніж 2 вершинами знайдуться дві вершини однакового степеня. [7-4.1.3]

3. Довести, якщо у графі з n вершинами ($n \geq 2$) тільки одна пара має однаковий степінь, то у цьому графі завжди існує: або одна ізольована вершина, або одна вершина, яка суміжна з усіма іншими.

4. Довести, що у графі з n вершинами та c компонентами зв'язності кількість ребер не перевищує $\frac{1}{2}\cdot(n-c)\cdot(n-c+1)$. [7-4.1.8]

5. Довести, що у зв'язному графі будь-які два простих ланцюги максимальної довжини мають щонайменше одну спільну вершину. Чи будуть вони завжди мати спільне ребро? [7-4.1.10]

6. Довести, якщо у графа всі прості цикли мають парну довжину, то він не має жодного циклу непарної довжини.

7. Довести: якщо два різних цикли графа містять ребро (u,v), то в графі є цикл, серед ребер якого немає (u,v).

Додаткове завдання:

1. Описати у термінах теорії графів наступні бінарні відношення на скінченій множині:
   a) транзитивні відношення;
   b) відношення еквівалентності;
   c) відношення часткового порядку;
   d) відношення лінійного порядку.

2. Схарактеризувати відношення, що відповідають:
   a) орієнтованим графам без петель;
   b) неорієнтованим графам без петель;
   c) орієнтованим графам з петлями.

3. Чи існує граф з n вершинами, усі вершини якого мають степінь 1, якщо:
   a) $n = 2k-1$ $(k \in N)$;
   b) $n = 2k$ $(k \in N)$?

4. Чи можна з повного графа K_{17} вилучити деякі ребра так, щоб степінь кожної вершини дорівнювала:
   a) 15;
   b) 2;
   c) 1?

5. Чи існує повний граф, кількість ребер якого дорівнює:
   a) 15;
   b) 18?

6. Чому дорівнює кількість ребер у графі $\overline{G}$, якщо G має n вершин і k ребер?

7. Скільки вершин із однаковими степенями має граф $\overline{G}$, якщо в G таких тільки 2?

8. Який вигляд має доповнення двочасткового графу $K_{n,m}$?

9. Довести, що граф $G = (V, E)$ є зв'язним тоді й тільки тоді, коли для будь-якого розбиття множини вершин V на дві підмножини V_1 і V_2 існує таке ребро $(v, w) \in E$, що вершина v належить одній з підмножин розбиття, а вершина w — іншій.

ТЕМА 2: ВЛАСТИВОСТІ ГРАФІВ. ІЗОМОРФІЗМ ГРАФІВ.

Мета: Засвоєння понять, пов'язаних з обходами графів, одержання навичок порівняння графів на ізоморфізм.

Теоретичні питання: Ізоморфізм, замкнений маршрут, цикл, степінь вершини, 1-ша теорема Ейлера.

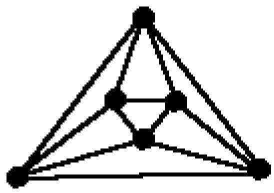
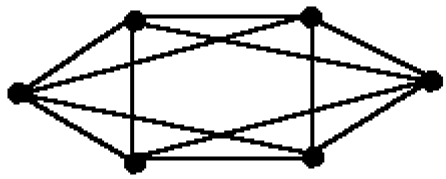
Аудиторне завдання:

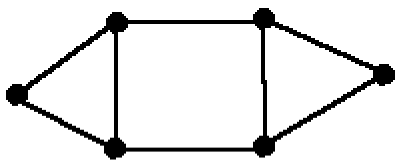
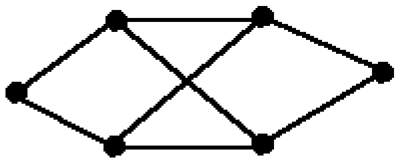
1. Показати, що відношення ізоморфізму графів є відношенням еквівалентності. Що собою являють класи еквівалентності?

2. Побудувати всі різні неізоморфні графи з 3 вершинами.

3. Нехай графи G та H ізоморфні, довести, що для будь-якого $d \geq 0$ кількість вершин степеня d в графах G та H однакова. [7-4.1.14.1]

4. Чи будуть ізоморфними наведені пари графів?

6. Чи є Ейлеровими ці графи?

7. Довести, що для того, щоб у зв’язного графа існував ланцюг $[v,w]$, який містить всі ребра в точності по одному разу, необхідно і достатньо, щоб тільки вершини v і w мали непарний степінь.

8. Довести, що для довільного графа або він сам, або його доповнення є зв'язним.

9. Навести приклад графу, який є ізоморфним власному доповненню.

Домашнє завдання:

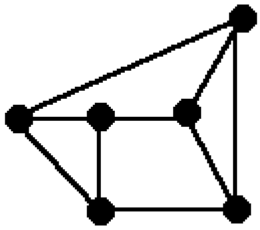
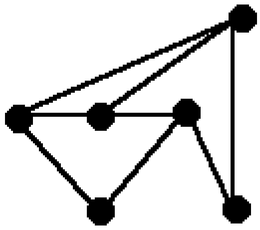
1. Побудувати всі неізоморфні між собою графи з 4 вершинами.

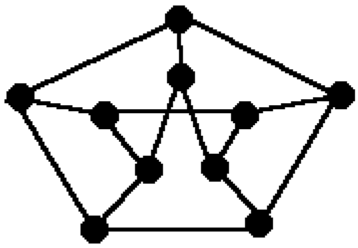
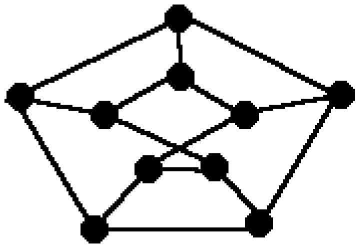
2. Побудувати всі неізоморфні між собою Ейлерові графи з 4 та 5 вершинами.

3. Довести, якщо граф є зв’язним і має $2k$ вершин непарного степеня, то в ньому можна провести k різних ланцюгів, які в сукупності містять всі його ребра в точності по одному разу.

4. Нехай графи G та H ізоморфні, довести, що для будь-якого $d \geq 0$ кількість циклів довжини d в графах G та H однакова.

5. Чи будуть ізоморфними наведені пари графів

6. Довести, що кількість вершин будь-якого нетривіального самодоповненого графа дорівнює або $4k$, або $4k+1$, $k \in N$.

7. Довести, що довільний самодоповнений граф містить або $4k^2-k$, або $4k^2+k$ ребер, $k \in N$.

<u>Додаткове завдання:</u>

1. Довести, що для довільного $n \geq 2$ з точністю до ізоморфізму існують лише два графи з n вершинами, в яких n-1 вершина має попарно різні степені, причому з цих двох графів рівно один є зв'язним.

2. Довести, що ізоморфні графи мають однакові кількості компонент зв'язності.

3. Довести, що самодоповнений граф є зв'язним.

4. Довести, що в нетривіальному самодоповненому графі немає ізольованих вершин та вершин, суміжних з усіма іншими.

5. Довести, що в самодоповненому графі з n вершинами кількості вершин степеня k та степеня $n-k-1$ однакові ($0 \leq k \leq n-1$).

6. Довести, що існує тільки один самодоповнений граф із чотирма вершинами.

7. Довести, що існують тільки два самодоповнених графи з п'ятьма вершинами.

8. Чи є твердження вірними:

a) графи ізоморфні тоді і тільки тоді, коли їх матриці суміжності можна отримати одна з одної однаковими перестановками рядків та стовпчиків;

b) графи ізоморфні тоді і тільки тоді, коли їх матриці інцидентності можна отримати одна з одної деякими перестановками рядків та стовпчиків?

9. Які з повних графів K_n є ейлеровими?

10. Для яких значень n і m повний двочастковий граф $K_{n,m}$ є ейлеровим?

11. Довести, що двочастковий граф $K_{n,m}$ не є гамільтоновим, якщо $n \neq m$.

12. Навести приклади графів, які є одночасно й гамільтоновими, й ейлеровими.

ТЕМА 3: ДЕРЕВА, ВЛАСТИВОСТІ ДЕРЕВ.

Мета: Засвоєння властивостей дерев, зв'язок зв'язності та ациклічності в деревах, використання властивостей дерев для доведення тверджень про графи.

Теоретичні питання: Дерево, ациклічність, зв'язок зв'язності та ациклічності, еквівалентні означення дерева.

Аудиторне завдання:

1. Довести, якщо степінь кожної вершини графа не менше 2, граф має цикл.

2. Довести, що граф в якому кількість ребер не менша, ніж кількість вершин має цикл.

3. Довести, що в дереві будь-який ланцюг є простим.

4. Побудувати всі не ізоморфні між собою дерева з 4 вершинами.

5. Довести, що будь-яке дерево з n вершинами ($n \geq 2$), у якому є хоча б одна вершина степеня s, має не менше s вершин степеня 1.

Домашнє завдання:

1. Довести, що в довільному дереві з не менш ніж 2 вершинами є щонайменше дві вершини степеня 1.

2. Довести, що в дереві кінцеві вершини найдовшого ланцюга мають степінь 1. [7-4.4.2]

3. Довести, що якщо у графа з не менш ніж 3 вершинами кількість вершин степеня 1 дорівнює кількості ребер, то граф або не зв'язний, або є деревом. [7-4.4.3]

4. Побудувати всі не ізоморфні між собою дерева з 5 та 6 вершинами.

5. Описати всі дерева, доповнення яких також є деревами.

6. Довести, що кількість вершин степеня 1 у дереві з n ($n \geq 2$) вершинами, серед яких немає вершин степеня 2, не менше $n/2+1$.

7. Довести, що граф G є зв'язним тоді і тільки тоді, коли він має кістякове дерево.

Додаткове завдання:

1. Описати всі дерева, які є самодоповненими графами.

2. Довести, що в дереві з n вершинами ($n \geq 3$), в якому найбільший степінь вершини дорівнює s, кількість вершин степеня 1 не більше $(n(s-2)+2)/(s-1)$.

3. Довести, що у дереві з непарним діаметром довільні два простих ланцюга найбільшої довжини мають хоча б одне спільне ребро.

4. Довести, або спростувати твердження: об'єднання двох дерев (V, X_1) та (V, X_2), де $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, є 2-зв’язним.

5. Довести, що центр довільного дерева складається з однієї або двох суміжних вершин.

6. Довести, що центр довільного дерева складається з однієї вершини, коли діаметр цього дерева є парним число, й з двох суміжних вершин, коли діаметр - число непарне.

7. Чи вірним є твердження: якщо діаметр зв’язного графу G дорівнює k ($k>2$), то в G існує кістякове дерево, діаметр якого також дорівнює k?

8. Знайти кістякові дерева в K_5 та $K_{3,3}$.

9. Запропонувати алгоритм побудови кістякового дерева графа.

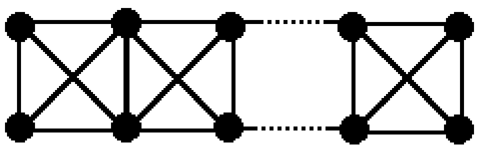
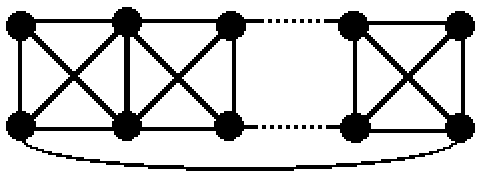
ТЕМА 4: ПЛАНАРНІ ГРАФИ, ФАРБУВАННЯ ГРАФІВ.

Мета: Зв’язок дерев та планарних графів, застосування теореми Ейлера для планарних графів. Розфарбовування графів, одержання навичок аналізу графів на планарність.

Теоретичні питання: Планарний граф, грань планарного графу, гомеоморфні графи.

Аудиторне завдання:

1. При яких $n \geq 2$ будуть планарними наведені графи:

2. Довести, що всі графи з менш ніж 5 вершинами планарні.

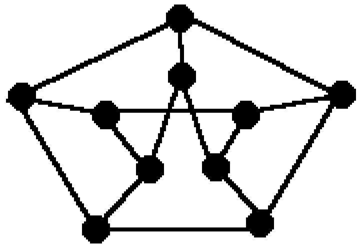
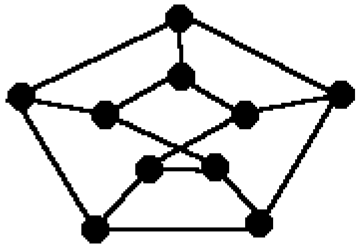
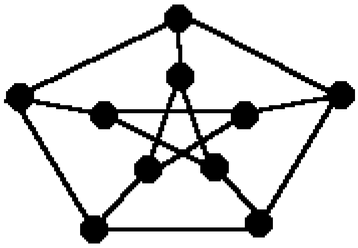
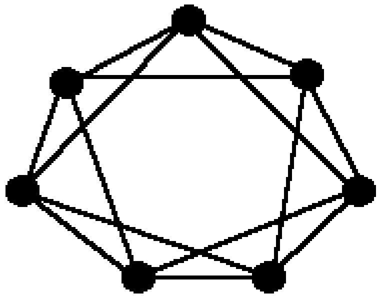
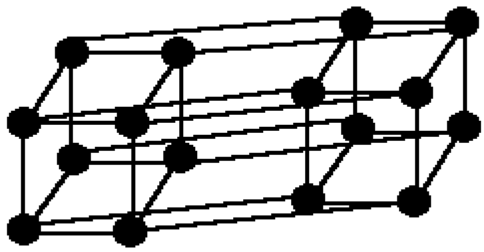
3. Показати, що формула Ейлера має таке узагальнення на випадок не зв’язних графів: $p - q + r = k + 1$, де k - кількість компонент зв’язності.

4. Чи є тривимірний одиничний куб планарним графом?

5. Довести, що будь-яке дерево є планарним графом.

Домашнє завдання:

1. Чи будуть планарними наведені графи:

2. Скільки існує не ізоморфних між собою планарних графів з 5 вершинами?

3. Показати, що для розфарбування карти, яка є перетином кіл на площині, достатньо двох кольорів.

4. Довести, що не існує розташованого на площині планарного графа з 5 гранями, який має властивість, що довільні дві його грані мають спільне ребро.

5. Побудувати приклад планарного графу, який не можна розфарбувати менш ніж 4 фарбами.

<u>Додаткове завдання:</u>

1. Довести, що графи G і $\overline{G}$ не можуть бути одночасно планарними, якщо кількість вершин у них не менше 11.

2. Чи існує планарний граф, який має 7 вершин і 16 ребер?

3. Для графа $G=(V,X)$ побудуємо двоїстий граф $G^*=(X,E)$, в якому ребра і вершини поміняємо місцями, тобто $((u,v),(v,w))\in E \Leftrightarrow u,v,w\in V$; $(u,v),(v,w)\in X$. Чи завжди буде планарним граф G^* для планарного графа G?

4. Довести, що граф є планарним тоді і тільки тоді, коли кожна з його зв'язних компонент є планарною.

5. Скільком граням може належати вершина степеня k планарного графа?

6. Обчислити мінімальну кількість кольорів, необхідну для фарбування графів з прикладу 1 домашнього завдання.

7. Довести, що якщо у зв'язному планарному (n,m)-графі межа кожної грані є циклом довжини r $(r \geq 3)$, то $(r-2)m = (n-2)r$.

Література до модуля 5.

ОСНОВНА

1. **http://www.diskmat.kiev.ua**

2. Оре О. Теория графов. - М.:Наука, 1980. - 336 с.

3. Харари Ф. Теория графов. - М.:Мир, 1973. - 300 с.

4. Уилсон Р. Введение в теорию графов. - М.:Мир, 1977. - 208 с.

5. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич - М.: Наука, 1990. - 384 с.

6. Зыков А.А. Основы теории графов. - М.:Наука, 1987. -384 с.

7. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. - М.: "Наука", 1977. - 368 с.

8. Трохимчук Р.М. Збірник задач з теорії графів. Навчальний посібник для студентів факультету кібернетики. К.: РВЦ "Київський університет", 1998. — 43 с.

9. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. - М.: "Энергоатомиздат", 1988. - 480 с.

10. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика. - М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. - 744 с.

11. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. - СПб.: "Питер", 2001. - 304 с.

12. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Учеб. Пособие. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

ДОДАТКОВА

1. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т.1 /Под общ. редакцией С.В.Яблонского и О.Б.Лупанова. - М.: "Наука". 1974. - 312 с.

2. Зыков А.А. Теория конечных графов. - М.: "Наука". 1969. - 544 с.

3. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. - М.:Мир, 1984. - 455 с.

4. Горбатов В.А. Основы дискретной математики: Учебное пособие для студентов вузов. - М.:"Высшая школа", 1986. - 311 с.

5. Евстигнеев В.А. Применение теории графов в программировании. /Под ред. А.П. Ершова. - М.: Наука, 1985. - 352 с.

6. Окулов С.М. Программирование в алгоритмах. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004. - 341 с.

7. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. - М.:Мир, 1979. - 536 с.

8. Рейнгольд Э., Нивергельт, Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. - М.: Мир, 1980. - 476 с.

9. Липский В. Комбинаторика для программистов. - М.: Мир, 1988. - 213 с.

10. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. - М.: Мир, 1978. - 432 с.

11. Майнике Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. - М.:Мир, 1981. - 323 с.

12. Гудман С., Хидетниеми С. Введение в разработку и анализ алгоритмов. - М.: Мир, 1981. - 368 с.

Українсько-англійський тематичний словник з дискретної математики

Розділи «Булеві функції» та «Теорія графів».

асоціативність	associativity
батько	parent
булева алгебра	Boolean algebra
— множина	Boolean domain
— функція	Boolean function
булевий куб	Boolean *n*-cube
— набір	Boolean vector
— — протилежний	complement vector
вершина	vertex
— висяча	leaf vertex, end vertex, pendant vertex
— ізольована	isolated vertex
висота	height
відстань	distance
глибина	depth
гомеоморфізм графів	graph homeomorphism
грань	face
граф	graph
— *k*-зв’язний	*k*-vertex-connected graph, *k*-connected graph
— ациклічний	acyclic graph
— гамільтонів	Hamiltonian graph
— двочастковий	bipartite graph
— ейлерів	Eulerian graph
— зв’язний	connected graph
— незв’язний	disconnected graph
— орієнтований	directed graph, digraph
— планарний	planar graph
— повний	complete graph
— порожній	edgeless graph

— простий	simple graph
— регулярний	regular graph
— самодоповнюваний	self-complimentary graph
— скінченний	finite graph
двоїста до функції	De Morgan dual
дерево	tree
— двійкове	binary tree, 2-ary tree
— кістякове	spanning tree
— орієнтоване	directed tree
диз’юнктивна нормальна форма	disjunctive normal form (DNF)
— — — досконала	sum of products (SoP) form, canonical form, full DNF
— — — мінімальна	minimal SoP form
— — — скорочена	Blake canonical form, simplified canonical form, complete sum
— — — тупикова	irreducible SoP form
диз’юнкція	disjunction
дистрибутивність	distributivity
діаметр	diameter
доповнення до графу	complement of a graph
дуга	arc, arrow
еквівалентність	logical equality
ексцентриситет	eccentricity
елементарна диз’юнкція	clause
елементарна кон’юнкція	product term, elementary conjunction (EC)
— — монотонна	monotone EC
— — повна	minterm, complete EC
закон	law
— поглинання	absorption identity
— подвійного заперечення	involution law, law of double complementation
замикання (операція)	closure (operation)
замкнений клас	clone
— — передповний	Post's class, maximal subclone of the full clone
заперечення	negation, logical complement

зв’язані вершини	connected vertices
зв’язність	connectivity
змінна суттєва	significant variable
— фіктивна	fictitious variable
ідемпотентність	idempotence
ізоморфізм графів	graph isomorphism
імпліканта	implicant
— проста	prime implicant
імплікантна таблиця	prime implicant chart
імплікація	implication
інваріант ізоморфізму	isomorphism invariant
інцидент ність	incidence
карта Карно	Karnaugh map
компонента зв'язності	connected component
комутативність	commutativity
кон’юнктивна нормальна форма	conjunctive normal form (CNF)
— — — досконала	Product of sums (PoS) form
кон'юнкція	conjunction
корінь	root
кратність (ребра)	multiplicity of an edge
ланцюг	trail
— простий	(simple) path
лема про рукостискання	handshaking lemma
листок	leaf
ліс	forest
маршрут	walk
— замкнений	closed walk
метод Блейка (Порецького)	iterated consensus
— невизначених коефіцієнтів	method of undetermined coefficients
метод Петрика	Petrick's method, branch-and-bound method
мінімізація булевих функцій	minimization of Boolean functions
морфізм графів	graph morphism
мультиграф	multigraph

нащадок	descendant
нуль-граф	null graph
ототожнення вершин	vertex identification
петля	loop
піддерево	subtree
поліном Жегалкіна	Zhegalkin polynomial
правила де Моргана	De Morgan's laws
правило склеювання	consensus rule
предок	ancestor
псевдограф	pseudograph
радіус	radius
ребро	edge
ребро кратне	multiple edge
решітка Поста	Post's lattice
розфарбування вершин	vertex coloring
— графів	graph coloring
— ребер	edge coloring
син	child
степінь	degree
стрілка Пірса	Peirce arrow, logical NOR
стягування ребра	edge contraction
сума за модулем 2	exclusive or, addition modulo 2
суміжність	adjacency
суперпозиція функцій	function composition
таблиця істинності	truth table
теорема Понтрягіна-Куратовського	Kuratowski's theorem, theorem P
— про чотири фарби	four color theorem
теорія графів	graph theory
тотожності	identities
тріангуляція	triangulation
формула Ейлера	Euler's formula
функціонально повна система	functionally complete set
функція лінійна	affine function

— монотонна	monotone function
— самодвоїста	self-dual function
— що зберігає 0	0-preserving function
— що зберігає 1	1-preserving function
хроматичне число	chromatic number
центр	central vertex
цикл	tour, circuit
— гамільтонів	Hamiltonian cycle
— ейлерів	Eulerian circuit
— простий	cycle
штрих Шефера	Sheffer stroke