1.

Поняття лінійного перетворення.

Нехай V_1, V_2 — вект. пр. над полем F.
Відображення $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$ наз. лінійним відображенням, якщо виконуються дві умови:

1) $\forall a, b \in V_1: \mathcal{A}(a+b) = \mathcal{A}(a) + \mathcal{A}(b)$;
2) $\forall a \in V_1\ \forall \alpha \in F: \mathcal{A}(\alpha a) = \alpha \mathcal{A}(a)$.

Ці умови можна замінити однією:

$\forall a, b \in V_1, \forall \alpha, \beta \in F: \mathcal{A}(\alpha a + \beta b) = \alpha \mathcal{A}(a) + \beta \mathcal{A}(b)$.

Якщо простори співпадають, тобто $V_1 = V_2 =: V$, то лінійне відображення $\mathcal{A}: V \to V$ наз. лінійним перетворенням векторного простору V, або лінійним оператором на просторі V.

2.

Ортогональні оператори

Озн. Лін. опер. $\mathcal{A}$ на евклід. пр. V наз. ортогональним, якщо $\forall x, y \in V: (x, y) = (\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y))$.
Таким чином, оператор ортогональний, якщо він зберігає скалярний добуток.

З означення ортогон. опер. випливає $\forall x \in V$:
$(x, x) = (\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(x))$, тобто $|x|^2 = |\mathcal{A}(x)|^2$, $|x| = |\mathcal{A}(x)|$.
Таким чином, ортог. опер. зберігає довжини векторів. Оскільки крім того він зберігає скалярний добуток, то він зберігає і кути між векторами.

Властивості ортогональних операторів.

1) Лін. оператор $\mathcal{A}$ на евкл. пр. V ортогональний, якщо $\forall x \in V: (x, x) = (\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(x))$.
Тобто оператор ортогональний, якщо він зберігає довжини векторів.
2) Власні числа ортогонального оператора $= \pm 1$.

Заув. З цієї властивості випливає, що власні числа лін. ортогон. оператора можуть бути лише 1 і -1, але власних чисел може і не бути.

3) Власні вектори ортогон. оператора, що відповідають різним власним числам, ортогональні.

4) Лінійний опер. в скінч. вимірному евкл. пр. ортогональний $\Leftrightarrow$ він ортонормований базис переводить в ортонормований базис.

<u>Заув.</u> З останньої властивості випливає, що ортогон. опер. в скінч. вим. просторі базис переводить в базис. Це означає, що ортогон. опер. невироджений. Тобто до ортогон. оператора завжди $\exists$ обернений.

5) Лін. опер. $\mathcal{A}$ на скінч. вим. евкл. пр. V ортогональний $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$.

<u>Озн.</u> Квадратна матриця A з дійсними елементами наз. ортогональною, якщо $A^T A = E$. Іншими словами, матр. A ортогональна, якщо $A^T = A^{-1}$.

6) Лін. опер. $\mathcal{A}$ в скінч. вим. евкл. пр. V ортогональний $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ в ортонормованому базисі йому відповідає ортогональна матриця.

7) Нехай підпр. L скінч. вим. евкл. пр. V інваріантний відносно ортогонального оператора $\mathcal{A}$. Тоді підпр. $L^\perp$ також інваріантний відносно оператора $\mathcal{A}$.

<u>Властивості ортогональних матриць.</u>

1) Квадратна матриця з дійсними елементами ортогональна $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ її рядки утворюють ортонормовану систему векторів.

<u>Наслідок</u> Квадратна матриця з дійсними ел. ортогональна $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ її стовпчики утв. ортонормовану систему векторів.

2) Модуль визначника ортогональної матриці $= 1$.

3) В скінч. вим. евклід. пр. матриця переходу від ортонормованого базису до ортонормованого базису ортогональна.

3. $x=(x_1,x_2,x_3)$ $\varphi(x)=(3x_1-x_2+4x_3,\ x_2-2x_3,\ x_1+2x_2+4x_3)$

За означенням, φ - лінійний оператор $\Leftrightarrow$

$\varphi(\alpha a+\beta b)=\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)$.

Нехай $a=(a_1,a_2,a_3)$ $b=(b_1,b_2,b_3)$

$\varphi(\alpha a+\beta b)=\varphi((\alpha a_1+\beta b_1,\ \alpha a_2+\beta b_2,\ \alpha a_3+\beta b_3))=$

$=(3(\alpha a_1+\beta b_1)-(\alpha a_2+\beta b_2)+4(\alpha a_3+\beta b_3),(\alpha a_2+\beta b_2)-2(\alpha a_3+\beta b_3),$

$(\alpha a_1+\beta b_1)+2(\alpha a_2+\beta b_2)+4(\alpha a_3+\beta b_3))$.

$\alpha\varphi(a)+\beta\varphi(b)=(3\alpha a_1-\alpha a_2+4\alpha a_3,\ \alpha a_2-2\alpha a_3,\ \alpha a_1+2\alpha a_2+4\alpha a_3)+$

$+(3\beta b_1-\beta b_2+4\beta b_3,\ \beta b_2-2\beta b_3,\ \beta b_1+2\beta b_2+4\beta b_3)=$

$=(3(\alpha a_1+\beta b_1)-(\alpha a_2+\beta b_2)+4(\alpha a_3+\beta b_3),(\alpha a_2+\beta b_2)-2(\alpha a_3+\beta b_3),$

$(\alpha a_1+\beta b_1)+2(\alpha a_2+\beta b_2)+4(\alpha a_3+\beta b_3))=\varphi(\alpha a+\beta b)$ ▫.

Отже, $\varphi(x)$ - лінійний оператор.

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}3&-1&4\\0&1&-2\\1&2&4\end{pmatrix}$$

4. $A_\varphi=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$ $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&0&8\\3&-1-\lambda&6\\-2&0&-5-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&8\\-2&-5-\lambda\end{vmatrix}=-(1+\lambda)\cdot(\lambda^2+$

$+2\lambda+1)=-(1+\lambda)^3$. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$. $n(\lambda)=3$.

$B=A+E=\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $x_1=-2x_3$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
0	1	0
-2	0	1

$a_1=(0;1;0)$

$a_2=(-2;0;1)$

$B^2=\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

ДФСР:

$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$
1	0	0

$a_3=(1;0;0)$

$\varphi(a_3)=(4;3;-2)$

$$\lambda_1 = -1 \begin{cases} f_1 = \varphi(a_3) = (4; 3; -2) \\ f_2 = a_5 = (1; 0; 0) \end{cases} \qquad T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1: \; f_3 = a_1 = (0; 1; 0).$$

$$J_1(-1) = (-1) \quad J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_j = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$