Білет - 11

① Простір елементарних подій:

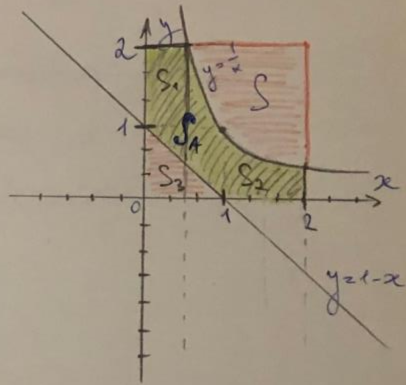
$\Omega = \{(x,y) \mid x, y \in [0;2]\}$

A - подія, коли сума двох випадкових чисел x та y з відрізку $[0;2]$ більша за 1, а їх добуток менший.

$A = \{(x,y) \mid ((x,y) \in \Omega) \& (x+y>1) \& (x \cdot y < 1)\}$.

Маємо систему:

$$\begin{cases} x+y>1 \\ x \cdot y < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 1-x \\ y < \frac{1}{x} \end{cases}$$



$P(A) = \frac{S_A}{S}$.

$S = 2 \cdot 2 = 4$.

$S_A = S_1 + S_2 - S_3$, де

1) $S_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

2) $S_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \ln 2 - (\ln \frac{1}{2}) = \ln 4$.

3) $S_3 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$S_A = 1 + \ln 4 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \ln 4$.

Отже, $P(A) = \frac{S_A}{S} = \frac{0{,}5 + \ln 4}{4}$.

Відповідь: $\frac{0{,}5 + \ln 4}{4}$.

② $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ – вибірка

$$F_{\xi_i}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}, \quad i = \overline{1,n}$$

Нехай випадкова величина $\eta = \max\{\xi_i\}, \ i=\overline{1,n}$.

$F_\eta(x) \ominus$ (За означенням) $\ominus P(\eta \le x) = P(\max\{\xi_i\} \le x) =$

$= P(\xi_1 \le x) \cdot P(\xi_2 \le x) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \le x) \ominus$ (у всіх $\xi_i, i = \overline{1,n}$ однаковий розподіл) $\ominus (P(\xi_1 \le x))^n = \begin{cases} 0, & x < a \\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$

$$f_\eta(x) = \frac{dF_\eta}{dx} = \begin{cases} \dfrac{n \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1}}{b-a}, & x \in [a;b] \\ 0, & x \notin [a;b] \end{cases}$$

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_\eta(x)\,dx = \int_a^b n x \cdot \frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1}}{b-a}\,dx =$$

$$= \frac{n}{b-a} \cdot \int_a^b x \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1} dx = \frac{n}{b-a} \cdot (b-a)^{1-n} \cdot \int_a^b x \cdot (x-a)^{n-1}\,dx \ominus$$

Інтегруємо частинами:

$$\ominus \frac{n}{(b-a)^n} \cdot \left(\frac{x(x-a)^n}{n} - \int_a^b \frac{(x-a)^n}{n} dx \right) = \left| \begin{matrix} u = x-a \\ du = dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{n}{(b-a)^n} \cdot \left(\frac{x \cdot (x-a)^n}{n} - \frac{1}{n} \int_0^{b-a} u^n\,du \right) = \frac{n}{(b-a)^n} \left(\frac{x(x-a)^n}{n} - \frac{u^{n+1}}{n(n+1)} \right) =$$

$$= \frac{n}{(b-a)^n} \cdot \left(\frac{x \cdot (x-a)^n}{n} - \frac{(x-a)^{n+1}}{n(n+1)} \right) = \frac{n}{(b-a)^n} \cdot \frac{(b-a)^{1-n} \cdot (x-a)^n (nx+a)}{n(n+1)} \Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{(a+nx)\left(\frac{a-x}{a-b}\right)^n}{n+1} \Bigg|_a^b = \frac{(a+bn) \cdot 1^n}{n+1} - \frac{(a+an) \cdot 0}{n+1} = \frac{a+bn}{n+1}.$$

$$D(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\eta(x)\,dx = \int_a^b x^2 \cdot n \cdot \frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1}}{b-a}\,dx =$$

$$= \frac{n}{(b-a)} \cdot (b-a)^{1-n} \cdot \int_a^b x^2 \cdot (x-a)^{n-1}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x-a \\ du = dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{n}{(b-a)^n} \cdot \int_0^{b-a} u^{n-1}(u+a)^2\,du = \frac{n}{(b-a)^n} \cdot \int_0^{b-a} \left(u^{n+1} + 2au^n + a^2u^{n-1}\right)du =$$

$$= \frac{n}{(b-a)^n} \cdot \left(\int_0^{b-a} u^{n+1}\,du + \int_0^{b-a} 2au^n\,du + \int_0^{b-a} u^{n-1}\,du \right) =$$

$$= \frac{n}{(b-a)^n} \cdot \left(\frac{u^{n+2}}{n+2}\Big|_0^{b-a} + \frac{u^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{b-a} + \frac{u^n}{n}\Big|_0^{b-a} \right) =$$

$$= \frac{n}{(b-a)^n} \cdot \left(\frac{(x-a)^n \cdot \left((n^2+n)x^2 + 2anx + 2a^2\right)}{n(n+1)(n+2)} \right)\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{\left(\frac{a-x}{a-b}\right)^n \cdot \left(2a^2 + 2anx + n(n+1)\cdot x^2\right)}{(n+1)(n+2)}\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{\left(\frac{a-b}{a-b}\right)^n \cdot \left(2a^2 + 2anb + n\cdot(n+1)\cdot b^2\right)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2a^2 + 2abn + b^2n(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

3. $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ – вибірка.

$$P(k,\theta) = C_{r-1+k}^{r-1} \cdot \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r \cdot \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k, \quad k = 0, 1 \dots$$

$\theta > 0$, r – відоме.

Щоб знайти оцінку методом максимальної вірогідності, спочатку запишемо ф-ю вірогідності:

$$L(\xi,\theta) = \prod_{k=1}^{n} f(\xi_k,\theta) = \prod_{k=1}^{n} P(\xi_k,\theta) = \prod_{k=1}^{n} C_{r-1+\xi_k}^{r-1} \left(\frac{n}{1+\theta}\right)^r \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{\xi_k} =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} C_{r-1+\xi_k}^{r-1}\right)\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{rn} \cdot \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{\sum_{i=1}^{n}\xi_i} \to \max \iff U(\xi,\theta) \to \max.$$

$$\ln(L(\xi,\theta)) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(C_{r-1+\xi_k}^{r-1} \cdot \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r \cdot \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{\xi_k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln C_{r-1+\xi_k}^{r-1} - r\cdot\ln(1+\theta) + \xi_k \ln\theta - \ln(1+\theta)\right) =$$

Функція вкладу: $U(\xi,\theta) = \dfrac{\partial \ln(L(\xi,\theta))}{\partial\theta} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(0 - r\cdot\frac{1}{1+\theta} + \frac{\xi_k}{\theta} - \frac{\xi_k}{1+\theta}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\xi_k}{(1+\theta)\theta} - \frac{r}{1+\theta}\right);$$

Точка максимуму:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\xi_k}{\theta(1+\theta)} - \frac{r}{1+\theta}\right) = 0$$

$$\frac{-nr}{1+\theta} + \frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}{\theta(1+\theta)} = 0 \quad \Big| \cdot (1+\theta)$$

$$-nr + \frac{\overline{\xi}\cdot n}{\theta} = 0$$

$\theta = \dfrac{\overline{\xi}}{r}$ – отримана точка екстремуму, очевидно, буде точкою максимуму функції вкладу. Тобто, $\hat{\theta} = \dfrac{\overline{\xi}}{r}$, де $\overline{\xi}$ – вибіркове середнє.

Для перевірки на ефективність використаємо теорему (Критерій ефективності). Якщо можна подати $U(X,\theta) = k(\theta)(T(X)-\theta)$, де $k(\theta)$ – деяка функція, що не залежить від вибірки, то оцінка $T(X)$ є ефективною для θ.

$$U(\xi,\theta) = \frac{\partial(\ln L(\xi,\theta))}{\partial\theta} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\xi_k}{\theta(1+\theta)} - \frac{r}{1+\theta}\right) =$$

$$= \frac{-nr}{1+\theta} + \frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}{\theta(1+\theta)} = nr\cdot\left(-\frac{1}{1+\theta} + \frac{\hat{\theta}}{\theta(1+\theta)}\right) =$$

$$= rn \cdot \left(\frac{-\theta + \hat{\theta}}{\theta(1+\theta)} \right) = \frac{rn}{\theta \cdot (1+\theta)} \cdot (\hat{\theta} - \hat{\theta}$$

$$= rn \cdot \left(\frac{-\theta + \hat{\theta}}{\theta(1+\theta)} \right) = \frac{rn}{\theta \cdot (1+\theta)} \cdot (\hat{\theta} - \theta)$$

Отже, оцінка $\hat{\theta} = \frac{\bar{\xi}}{r}$ ефективна для θ.

Час початку написання роботи: 9:00 (16.12.2022)

Час завершення написання роботи: 10:00(16.12.2022)

Під час написання цієї роботи я дотримувався принципів академічної доброчесності.