1.

Зв'язок між базисами. Матриця переходу.

В скінч. вим. пр. $\exists$ багато базисів. Зв'язок між двома довільними базисами визн. матрицею переходу.

Припустимо в пр. V задано два базиси $B_1=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, $B_2=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$.

Тоді всі вектори базису B_2 лін. вираж. через базис B_1:

$$b_1=\alpha_{11}a_1+\alpha_{21}a_2+\dots+\alpha_{n1}a_n$$
$$b_2=\alpha_{12}a_1+\alpha_{22}a_2+\dots+\alpha_{n2}a_n$$
$$\dots\dots\dots$$
$$b_n=\alpha_{1n}a_1+\alpha_{2n}a_2+\dots+\alpha_{nn}a_n.$$

Випишемо таку матрицю

$$T=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}$$

Матриця T наз. матрицею переходу $B_1\to B_2$. Таким чином, щоб виписати матрицю переходу, треба в стовпчики послідовно записати координати векторів базису B_2 в базисі B_1.

Зрозуміло, що матриця переходу завжди невироджена, оскільки її стовпчики лінійно незалежні.

Нехай в пр. задано 2 базиси $B_1=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, $B_2=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$, причому вони задані координатами в деякому третьому базисі $e_1,e_2,\dots,e_n$:

$$a_1=(\lambda_{11},\lambda_{21},\dots,\lambda_{n1}),\qquad b_1=(\gamma_{11},\gamma_{21},\dots,\gamma_{n1})$$
$$a_2=(\lambda_{12},\lambda_{22},\dots,\lambda_{n2}),\qquad b_2=(\gamma_{12},\gamma_{22},\dots,\gamma_{n2})$$
$$\dots\dots\dots\qquad\qquad \dots\dots$$
$$a_n=(\lambda_{1n},\lambda_{2n},\dots,\lambda_{nn})\qquad b_n=(\gamma_{1n},\gamma_{2n},\dots,\gamma_{nn})$$

З координат цих векторів складемо 2 матриці:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn}\end{pmatrix}.$$

Запишемо матрицю переходу від $B_1\to B_2$.

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \dots\end{pmatrix}$$

Тобто за означенням

$$T = \begin{pmatrix} \ldots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \ldots + \alpha_{n1}a_n$

$b_2 = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \ldots + \alpha_{n2}a_n$

$\ldots$

$b_n = \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \ldots + \alpha_{nn}a_n$.

Ці рівності можна переписати так:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \ldots \\ \gamma_{n1} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \ldots \\ \lambda_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_{21}\begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \ldots \\ \lambda_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{n1}\begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \lambda_{2n} \\ \ldots \\ \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \ldots \\ \gamma_{n2} \end{pmatrix} = \alpha_{12}\begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \ldots \\ \lambda_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_{22}\begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \ldots \\ \lambda_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{n2}\begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \lambda_{2n} \\ \ldots \\ \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

$\ldots$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \\ \ldots \\ \gamma_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_{1n}\begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \ldots \\ \lambda_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_{2n}\begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \ldots \\ \lambda_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{nn}\begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \lambda_{2n} \\ \ldots \\ \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

і якщо перейти до матричного рівняння, то:

$$B = AT.$$

$A = (a_1|a_2|\ldots|a_n)$ $\quad B = (b_1|b_2|\ldots|b_n)$ – в e_1, e_2, e_n; $T: B \to B_2$

$$B = AT.$$

Припустимо T – матр. переходу $B_1 \to B_2$.

Позначимо через T_1 – матр. переходу $B_2 \to B_1$.

Тоді за доведеним $B = AT$ і по аналогії $A = BT_1$.

$A = ATT_1$. Матриця A невироджена, оск. її стовпчики лін. незал., як стовпчики координат базисних векторів.

Тому $\exists A^{-1}$

$A^{-1}A = A^{-1}ATT_1$, або $TT_1 = E$, $\quad T_1 = T^{-1}$.

Таким чином, якщо T – матр. переходу від $B_1 \to B_2$, то матрицею переходу від $B_2 \to B_1$ є матриця T^{-1}.

Зв'язок координат вектора в різних базисах.

Припустимо в пр. V задано 2 базиси: $B_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ та $B_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

T – матр. переходу від $B_1 \to B_2$:

$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \end{pmatrix}$ Тобто виконується $b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \ldots + \alpha_{n1}a_n$

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ - & - & - & - \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Тобто виконується $b_1 \dots$

$b_2 = \alpha_{12} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \dots + \alpha_{n2} a_n$

$- - - - - - - -$

$b_n = \alpha_{1n} a_1 + \alpha_{2n} a_2 + \dots + \alpha_{nn} a_n$.

Зафіксуємо деякий вектор $x \in V$. Тоді в базисі B_1 він має координати $x = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)_{B_1}$, а в базисі B_2 $x = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)_{B_2}$.

Це означає, що
$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n,$$
$$x = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \dots + \gamma_n b_n.$$

Перепишемо останню рівність:

$$x = \gamma_1(\alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + \dots + \alpha_{n1} a_n) + \gamma_2(\alpha_{12} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \dots + \alpha_{n2} a_n) + \dots + \gamma_n(\alpha_{1n} a_1 + \alpha_{2n} a_2 + \dots + \alpha_{nn} a_n) =$$
$$= (\alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \dots + \alpha_{1n}\gamma_n) a_1 + (\alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \dots + \alpha_{2n}\gamma_n) a_2 + \dots + (\alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + \dots + \alpha_{nn}\gamma_n) a_n.$$

Але кожен вектор можна розкласти в лін. комб. базисних векторів однозначно $\Rightarrow$
$$\lambda_1 = \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \dots + \alpha_{1n}\gamma_n,$$
$$\lambda_2 = \alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \dots + \alpha_{2n}\gamma_n,$$
$$- - - - - - - -$$
$$\lambda_n = \alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + \dots + \alpha_{nn}\gamma_n.$$

Якщо ці рівності переписати в матричному вигляді, одержимо
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$
Остання рівність дає зв'язок координат вектора у базисах B_1 і B_2. Її можна переписати у вигляді:
$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ортогональність.

2. Озн. Вектори x, y в евкл. пр. V наз. ортогональними, якщо $(x, y) = 0$. Позн. $x \perp y$.

Заув. Для ортогон. векторів в евкл. пр. викон. теор. Піфагора:
$$\forall a, b \in V, \ a \perp b: \ |a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2.$$

Теор. В евкл. пр. $\forall$ система ненульових попарно ортогональних векторів лінійно незалежна.

Озн. Сист. век. в евкл. пр. наз. ортогональною, якщо вектори в цій системі попарно ортогональні.

Процес ортогоналізації.

Нехай в евкл. пр. V задано лін. незал. систему векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Процес ортогоналізації дає можливість, користуючись

Процес ортогоналізації ...
цими векторами, одержати ортогональну систему
з k ненульових векторів $b_1, b_2, \dots, b_k$.

Беремо $b_1 = a_1$.
Наступний вектор b_2 шукаємо у вигляді
$b_2 = a_2 - \alpha_{21} b_1$, де коефіцієнт $\alpha_{21} \in \mathbb{R}$ підбираємо
з умови ортогональності $(b_2, b_1) = 0$, тобто

$$(a_2 - \alpha_{21} b_1, b_1) = 0 \Rightarrow (a_2, b_1) - \alpha_{21}(b_1, b_1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{21} = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}.$$

Припустимо тепер, що за допомогою век. $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$
вже побудовано систему ненульових попарно ортогональних
векторів $b_1, b_2, \dots, b_{i-1}$. Черговий вектор b_i шукаємо
у вигляді: $b_i = a_i - \alpha_{i1} b_1 - \alpha_{i2} b_2 - \dots - \alpha_{i\,i-1} b_{i-1}$.
Коефіцієнти підбираємо з умови ортогональності:

$$(b_i, b_1) = 0, \quad (a_i - \alpha_{i1} b_1 - \alpha_{i2} b_2 - \dots - \alpha_{i\,i-1} b_{i-1}, b_1) = 0,$$

$$(a_i, b_1) - \alpha_{i1}(b_1, b_1) - \alpha_{i2}\underbrace{(b_2, b_1)}_{0} - \dots - \alpha_{i\,i-1}\underbrace{(b_{i-1}, b_1)}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow (a_i, b_1) - \alpha_{i1}(b_1, b_1) = 0 \Rightarrow \alpha_{i1} = \frac{(a_i, b_1)}{(b_1, b_1)}.$$

Аналогічно з умови $(b_i, b_2) = 0 \Rightarrow \alpha_{i2} = \dfrac{(a_i, b_2)}{(b_2, b_2)}, \dots,$

з умови $(b_i, b_{i-1}) = 0 \Rightarrow \alpha_{i\,i-1} = \dfrac{(a_i, b_{i-1})}{(b_{i-1}, b_{i-1})}$.

Таким чином, через k кроків одержимо систему
ненульових попарно ортогональних век. $b_1, b_2, \dots, b_k$,
причому $b_i = a_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} b_j$, де $\alpha_{ij} = \dfrac{(a_i, b_j)}{(b_j, b_j)}$.

Заув. Припустимо орт. систему век. $b_1, b_2, \dots, b_k$
одержали ортогоналізацією лін. нез. системи век. $a_1, a_2, \dots, a_k$.
Тоді $\forall i = \overline{1,k}$: $\langle b_1, b_2, \dots, b_i \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_i \rangle$.

Теор. В скінч. вим. евкл. просторі $\exists$ ортогональний
базис.

3. $L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ $a_1 = (-1; 3; 0; 1), a_2 = (4; 2; 1; 1), a_3 = (3; 5; 1; 2)$

$$\begin{cases} (x, a_1) = 0 \\ (x, a_2) = 0 \\ (x, a_3) = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 14 & 1 & 5 \\ 0 & 14 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 14 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3	x_4
-1	-5	0	14
-3	-1	14	0

$x_1 = 3x_2 + x_4$, $x_2 = \dfrac{x_3 + 5x_4}{-14}$, $x_1 = \dfrac{5x_3 + x_4}{-14}$

$b_1 = (-1; -5; 0; 14)$, $b_2 = (-3; -1; 14; 0)$ $B_{L^\perp} = \{b_1, b_2\}$.

4. $4y^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz + 4x - 2z - 1 = 0$

$f(x,y,z) = 4y^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 4-\lambda & 4 \\ -2 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 4-\lambda \\ -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$= -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 28) - 2(-2\lambda + 2) - 2(-2\lambda + 16) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 36\lambda - 36 = -(\lambda - 1)(\lambda - 6)(\lambda + 6)$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -6$.

Для $\lambda_1 = 1$: $(A - E) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ФСР:

x_1	x_2	x_3
-2	0	1

$a_1 = (-2; 0; 1)$ $c_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; 0; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Для $\lambda_2 = 6$: $(A - 6E) = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ ФСР:

x_1	x_2	x_3
1	5	2

$a_2 = (1; 5; 2)$ $c_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}; \frac{5}{\sqrt{30}}; \frac{2}{\sqrt{30}}\right)$.

Для $\lambda_3 = -6$: $(A + 6E) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 10 & 4 \\ 0 & -28 & -14 \\ 0 & 14 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 10 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
1	-1	2

$a_3 = (1; -1; 2)$ $c_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad B = Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-2}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{30}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3 \\ y = \frac{5}{\sqrt{30}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3 \\ z = \frac{1}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{30}} y_2 + \frac{2}{\sqrt{6}} y_3 \end{cases}$$

$f(x, y, z) = y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2$

Заміна: $y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2 + 4\left(\frac{-2}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{30}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{30}} y_2 +\right.$

$\left.+ \frac{2}{\sqrt{6}} y_3\right) - 1 = 0.$

$$= y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2 - \frac{8}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{4}{\sqrt{30}} y_2 + \frac{4}{\sqrt{6}} y_3 - \frac{2}{\sqrt{5}} y_1 - \frac{4}{\sqrt{30}} y_2 -$$

$$- \frac{4}{\sqrt{6}} y_3 - 1 = y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2 - \frac{10}{\sqrt{5}} y_1 - 1 = 0$$

$$\left(y_1^2 - \frac{10}{\sqrt{5}} y_1 + 5\right) + 6y_2^2 - 6y_3^2 - 6 = 0$$

$$z_1 = y_1 - \sqrt{5} \qquad y_1 = z_1 + \sqrt{5} \qquad z_1^2 + 6z_2^2 - 6z_3^2 = 6 \quad d_1 = 6 > 0.$$

$$z_2 = y_2 \qquad y_2 = z_2$$

$$z_3 = y_3 \qquad y_3 = z_3$$

Перепишемо рівняння у вигляді:

$$\frac{z_1^2}{6} + \frac{z_2^2}{1} - \frac{z_3^2}{1} = 1$$

$\frac{z_1^2}{6} + z_2^2 - z_3^2 = 1$ – однопорожнинний гіперболоїд.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = \frac{-2}{\sqrt{5}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{50}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} z_3 - 2 \\ y = \frac{5}{\sqrt{30}} z_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} z_3 \\ z = \frac{1}{\sqrt{5}} z_1 + \frac{2}{\sqrt{30}} z_2 + \frac{2z_3}{\sqrt{6}} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$