Екзаменаційна робота
з дослідження операцій
студента групи ІПС-21
Ольховатого Ігоря
Білет №7

1. Двоїста задача до транспортної, потенціали рядків та стовпчиків транспортної таблиці. Обчислення потенціалів. Перевірка оптимальності опорного плану.

Будь яка транспортна задача лінійного програмування є стандартною задачею лінійного програмування. Нехай маємо ГЗЛП у вигляді:

$$cx \to \min, \quad Ax = b, \quad x \geq 0.$$

Тоді двоїста задача до неї буде мати вигляд:

$$ub \to \max, \quad uA \leq c, \text{ де}$$

$\dim(u) = m+n$, $u = (-u_1, \ldots -u_m, v_1 \ldots v_n)$ (оскільки його компоненти не обов'язково додатні).
Двоїсті змінні $-u_i$ та v_j відповідають обмеженням $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $i = \overline{1,m}$ та $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j = \overline{1,n}$

відповідно у вихідній ГЗЛП.

Координатна форма запису задачі (двоїстої):

$$\sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \to max,$$

$$v_j - u_i \le c_{ij}, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}.$$

Потенціалом рядка транспортної таблиці (потенціалом пункту виробництва P_i, $i=\overline{1,m}$) називається змінна u_i.

Потенціалом стовпчика транспортної таблиці (потенціалом пункту споживання Q_j, $j=\overline{1,n}$) називається змінна v_j.

Перевірка оптимальності опорного плану здійснюється так:

Нехай u_i, $i=\overline{1,m}$, $v_j=\overline{1,n}$ – потенціали пунктів P_i та Q_j відповідно. Величину $c_{ij}-(v_j-u_i)=\Delta_{ij}$ назвемо симплекс різницею для x_{ij}. Тоді за двоїстим критерієм оптимальності для ТЗЛП, базисний розв'язок $x=\|x_{ij}\|$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ буде оптимальним $\iff \exists\, u_i$, $i=\overline{1,m}$, v_j, $j=\overline{1,n}$:

$\Delta_{ij}=0$ для базисних клітинок

$\Delta_{ij}\ge 0$ для не базисних.

Якщо умови двоїстого критерію оптимальності виконуються, тоді даний опорний план є оптимальним.

② Двоїстий критерій оптимальності.

Базисний розв'язок $x = \|x_{ij}\|$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ транспортної задачі лінійного програмування є оптимальним $\Longleftrightarrow$ $\exists\, u_i$, $i = \overline{1,m}$, $v_j = \overline{1,n}$:

$$v_j - u_i = c_{ij}\text{, якщо } x_{ij}\text{ - базисне}$$

$$v_j - u_i \le c_{ij}\text{, якщо } x_{ij}\text{ - не базисне.}$$

Цей метод лежить в основі методу потенціалів для розв'язування ТЗЛП. Часто його формулюють й трохи по-іншому:

базисний розв'язок $x = \|x_{ij}\|,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ ТЗЛП є оптимальним $\Leftrightarrow \exists\, u_i,\ i=\overline{1,m},\ v_j,\ j=\overline{1,n}$:

$\Delta_{ij} = 0$ для базисних клітинок

$\Delta_{ij} \geq 0$ для не базисних клітинок

де $\Delta_{ij} = c_{ij} - (v_j - u_i)$ (так звані симплекс різниці) для змінної x_{ij}

~~Нас хтось~~ Нехай $U_б = \{(i,j)$ - базисні клітинки$\}$ та маємо $m+n-1$ - клітинок, $B = (\bar{A}_{ij},\ (i,j) \in U_б)$ - базис, $\bar{c}_б = (c_{ij},\ (i,j) \in U_б)$, тоді $\bar{\Delta} = \bar{c} - \bar{c}_б \cdot \alpha = \bar{c} - \bar{c}_б \cdot B^{-1} A = \bar{c} - \bar{y} \cdot A$

$\bar{y} = \bar{c}_б \cdot B^{-1} \Rightarrow \bar{y} B = \bar{c}_б \Rightarrow \bar{y} A_{ij} = c_{ij},\ (i,j) \in U_б$

$\bar{y} = (-u_1, \dots -u_m, v_1 \dots v_n) \Rightarrow v_j - u_i = c_{ij},\ (i,j) \in U_б$

Тоді $\Delta_{ij} = c_{ij} - \bar{y} A_{ij} = c_{ij} - (v_j - u_i)$ - симплекс різниці ТЗЛП.

3. Гравець Б

	Т	К	Д	
Гравець А Т	3	-1	-1	3
Гравець А К	-1	2	-1	2
Гравець А Д	-1	-1	1	1
	-1	-1	-1	~~-1~~ 1

$\bar{v} = \min(\max c_{ij})$

$\underline{v} = \max(\min c_{ij})$

Оскільки $\bar{v} \neq \underline{v}$, тоді не існує оптимальних чистих стратегій.

За таблицею можна виписати платіжну матрицю:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$F(x,y) = (x_1, x_2, x_3)$. $C \cdot y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Маємо пару двоїстих задач:

$$\begin{cases} x_4 \to \min \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \le x_4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \le x_4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \le x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

(пряма задача)

$$\begin{cases} y_4 \to \max \\ 3y_1 - y_2 - y_3 \geq y_4 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 \geq y_4 \\ -y_1 - y_2 + y_3 \geq y_4 \end{cases}$$

(двоїста задача)

$x_4 = x_4' - x_4''$

$y_4 = y_4' - y_4''$

$x_4' - x_4'' + Mx_8 \to \min$

$3x_1 - x_2 - x_3 - x_4' + x_4'' + x_5 = 0$

$-x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4' + x_4'' + x_6 = 0$

$-x_1 - x_2 + x_3 - x_4' + x_4'' + x_7 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_8 = 1$

$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,8}.$

$y_4' - y_4'' - My_8 \to max$

$3y_1 - y_2 - y_3 - y_4' + y_4'' - y_5 = 0$

$-y_1 + 2y_2 - y_3 - y_4' + y_4'' - y_6 = 0$

$-y_1 + 2y_2 - y_3 - y_4' + y_4'' - y_7 = 0$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_8 = 1$

$C_б$	$x_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	Θ
0	x_5	0	-3	1	1	-1	1	1	0	0	0	0
0	x_6	0	1	-2	1	-1	1	0	1	0	0	0
0	x_7	0	1	1	-1	-1	1	0	0	1	0	-
M	x_8	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
	Δ	=	-M	-M	-M	1	-1	0	0	0	0	
0	x_3	0	-3	1	1	-1	1	1	0	0	0	0
0	x_6	0	4	-3	0	0	0	-1	1	0	0	0
0	x_7	0	-2	2	0	-2	2	1	0	1	0	—
M	x_8	1	4	0	0	1	-1	-1	0	0	1	1/4
	Δ	=	-4M	0	0	1-M	-1+M	-M	0	0	0	
0	x_3	0	0	-5/4	1	-1	1	-1/4	-3/4	0	0	-
0	x_1	0	1	-3/4	0	0	0	-1/4	1/4	0	0	-
0	x_7	0	0	1/2	0	-2	2	1/2	1/2	1	0	0
M	x_8	1	0	3	0	1	-1	0	-1	0	1	1/3
	Δ	=	0	-3M	0	1-M	1+M	0	M	0	0	

0	x_3	0	0	0	1	-6	6	-1	1/2	5/2	0	—
0	x_1	0	1	0	0	-3	3	-1	1	3/2	0	—
0	x_2	0	0	1	0	-4	4	1	1	2	0	—
M	x_6	1	0	0	0	$\frac{13}{8}$	-13	$\cancel{-13}$	-4	-6	1	1/13
	$\Delta =$	0	0	0		$1-13M$	$-1+13M$	$-3M$	$4M$	$+6M$	0	

0	x_3	6/13	0	0	1	0	0	5/13	-29/13	4/13	6/13	
0	x_1	3/13	1	0	0	0	0	-4/13	1/13	3/26	3/13	
0	x_2	4/13	0	1	0	0	0	-1/13	-3/13	8/13	4/13	
1	x_4	1/13	0	0	0	1	-1	-3/13	-4/13	-6/13	1/13	
	$\Delta =$	0	0	0	0	0	≥ 0.					

$X^* = (3/13; 4/13; 6/19; 1/13). \Rightarrow X^*_{вих} = (3/13; 4/13; 6/13).$

Тоді розв'язок двоїстої задачі:

$$y^* = (0; 0; 0; -1) \cdot \begin{pmatrix} 5/13 & -29/13 & 4/13 & 6/13 \\ -4/13 & 1/13 & 3/26 & 3/13 \\ -\cancel{2}/13 & -3/13 & 8/13 & 4/13 \\ -3/13 & -4/13 & -6/13 & 1/13 \end{pmatrix} =$$

$$= (3/13; 4/13; 6/13; -1/13) \Rightarrow (3/13; 4/13; 6/13).$$

Оптимальна змішана стратегія для

гравця $A = (3/13; 4/13; 6/13)$, ціна гри $= 1/13$

гравця $B = (3/13; 4/13; 6/13)$, ціна гри $= -1/13$.