Варіант №31

Означення і позначення: символ ¬ означає операцію доповнення.

|X| - потужність (кількість елементів) множини X.

$A^2 = AA$ — результат множення матриці A саму на себе, $A^n = A^{n-1}A$.

Нехай A − матриця суміжності графа G = (V , E) (|V| = n); тоді $M^{(n)} = I_n + A + A^2 + ... + A^{n-1}$, де I_n − одинична матриця порядку n (нагадаємо, що будь-яка вершина зв'язана сама із собою маршрутом довжини 0).

Граф G^* = (V, E^*) називають *транзитивним замиканням* графа G = (V, E), якщо (v, w)$\in E^*$ тоді й тільки тоді, коли вершини v і w зв'язані в графі G.

Для графа G^* n×n-*матриця* A^* будується за таким правилом: (i, j)-й елемент матриці A^* дорівнює 1 тоді й тільки тоді, коли відповідний елемент матриці $M^{(n)}$ не дорівнює 0, а усі інші елементи матриці A^* дорівнюють 0; матрицю A^* називають *матрицею досяжності* графа G.

Нехай $A^{(1)}$ - булева матриця, елементи якої повністю збігаються з елементами матриці A, але їх розглядають не як числа 0 і 1, а як символи булевого (логічного) алфавіту 0 і 1. Уведемо операцію булевого множення $C \wedge D$ матриць C і D, які складаються з булевих елементів 0 і 1, наступним чином: (i, j)-й елемент матриці $C \wedge D$ дорівнює $f_{ij} = \vee_{t=1}^{n} (c_{it} \wedge d_{tj})$, де c_{it} і d_{tj} − відповідні елементи матриць C і D , а операції ∨ і ∧ − це операції диз'юнкції та кон'юнкції. Позначимо через $A^{(m)}$ матрицю $A^{(1)} \wedge A^{(1)} \wedge ... \wedge A^{(1)}$ (m разів).

Трикутник (C_3) - простий цикл довжиною 3.

Кубічний граф — граф, степені всіх вершин якого дорівнюють 3.

χ(G) - хроматичне число графа G.

ν(G) = |E| − |V| + k - цикломатичне число графа G, k - число компонент зв’язності графа G.

Граф G називають *критичним*, якщо хроматичне число підграфа G', отриманого в результаті вилучення будь-якої вершини із G, строго менше, ніж хроматичне число графа G.

Критичний граф G, для якого k = χ(G), називають k-*критичним*.

Максимальним планарним графом називають планарний граф, який при додаванні до нього будь-якого ребра перестає бути планарним.

Плоский зв'язний граф, кожну грань якого (включаючи й зовнішню) обмежено трикутником, називають *тріангуляцією*.

N - множина натуральних чисел.

φ(G) - число вершинної зв'язності графа G (найменше число вершин, видалення яких приводить до незв'язаного або тривіального графу),

ψ(G) - число реберної зв'язності графа G (найменше число ребер, видалення яких приводить до незв'язаного або тривіального графу),

δ(G) - мінімальна степінь вершин графа G.

Граф G називається k-*зв'язным*, якщо φ(G) = k.

1. Чи існує повний граф G = (V, E), у якого кількість ребер дорівнює 24?
2. Визначити, чи існує граф із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють: (а) 0, 0, 2, 3, 3, 4; (б) 1, 1, 2, 3, 4, 4; (в) 2, 3, 3, 4, 4, 4. Відповідь обґрунтувати.
3. Довести, що зв’язних графів ізоморфізм зберігає діаметр.
4. Навести приклад пари неізоморфних графів G_1 і G_2, у яких для довільного k≥0 кількість простих циклів довжини k однакова.
5. Скільки існує попарно неізоморфних графів, які мають 7 вершин і 18 ребер? Відповідь обґрунтувати.
6. Нехай A − матриця суміжності графа G із n вершинами. Довести, що i-й діагональний елемент матриці A^2 дорівнює степеню $\delta(v_i)$ i-ї вершини графа G, i = 1, 2, …, n.
7. Чи існує в графі K_5 цикл довжини 9? Відповідь обґрунтувати.
8. Побудувати граф із 5 вершинами, в якому 4 вершини мають попарно різні степені, причому ізольованих вершин немає.

9. Довести, що множину ребер зв’язного графа, який має 2k вершин ($k \geq 1$) із непарними степенями, можна розбити на k ланцюгів.
10. Для довільного k ($k>2$) побудувати граф, діаметр якого дорівнює k, а будь-яке його кістякове дерево має діаметр 2k.
11. Нехай A − матриця суміжності графа G. Довести, що сума всіх діагональних елементів $a_{ii}^{(3)}$ матриці A^3 у шість разів перевищує кількість трикутників у графі G.
12. Описати всі дерева, які є самодоповненими графами.
13. Довести, що доповнення жодного кубічного графа не є кубічним графом.
14. Довести, що кількість вершин степеня 1 у дереві з n ($n \geq 2$) вершинами, серед яких немає вершин степеня 2, не менше $n/2 +1$.
15. У футбольному турнірі беруть участь 19 команд. Довести, що в будь-який момент знайдеться команда, яка зіграла парну кількість матчів.
16. Побудувати граф, центр якого складається із трьох вершин і не збігається із множиною всіх вершин.
17. Чому дорівнює радіус повного двочасткового графа $K_{n,m}$? Відповідь обґрунтувати.
18. Довести, що будь-яке дерево є двочастковим графом.
19. Скільком граням може належати вершина степеня k плоского графа? Відповідь обґрунтувати.
20. Нехай граф $G = (V, E)$ має k компонент зв'язності, $\nu(G) = |E| - |V| + k$ - його цикломатичне число. Довести, що граф G є лісом тоді й тільки тоді, коли $\nu(G) = 0$.
21. Довести, якщо у зв’язному планарному $K_{n,m}$ графі межа кожної грані є циклом довжини r ($r \geq 3$), то $(r - 2)m = (n - 2)r$.
22. Довести, що не існує розташованого на площині планарного графа з 5 гранями, який має властивість, що довільні дві його грані мають спільне ребро.
23. З’ясувати, яку найменшу кількість ребер необхідно видалити з графа K_6 щоб отримати планарний граф.
24. Чи можна до плоского графа C_4 додати нові ребра так, щоб отриманий граф залишився плоским? Якщо можна, то які ребра і скільки? (зобразити граф із доданими ребрами).
25. Довести, що серед всіх плоских графів з n вершинами найбільшу кількість граней має тріангуляція.
26. Довести, що в будь-якому планарному графі з n вершинами ($n \geq 4$) є принаймні чотири вершини, степені яких не більше 5.
27. Довести: якщо граф не планарний, то він повинен містити більше 4 вершин, степінь яких більше 3, або більше 5 вершин, степінь яких більше 2.
28. Яку найбільшу кількість граней може мати плоский граф із 5 вершинами? Відповідь обґрунтувати. Побудувати цей граф.
29. Вершина графа, вилучення якої збільшує кількість компонент зв’язності, називається точкою зчленування графа. Яку найбільшу та найменшу кількість точок зчленування може мати зв’язний граф із n вершинами? Відповідь обґрунтувати.
30. Чи вірне твердження: об’єднання двох дерев $G_1=(V, E_1)$ і $G_2=(V, E_2)$, де $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, є двозв’язним? Відповідь обґрунтувати.
31. Довести, що $\varphi(G) \leq \psi(G) \leq \delta(G)$, де $\varphi(G)$ - число вершинної зв'язності графа G, $\psi(G)$ - число реберної зв'язності графа G, $\delta(G)$ - мінімальна степінь вершин графа G.
32. Визначити, які з повних графів K_n є ейлеровими.
33. Довести, що граф G, який має дві несуміжні вершини степеня 3, а всі інші вершини степеня не більше 2, не має гамільтонового циклу.
34. Довести, що для довільного зв’язного графа існує циклічний маршрут, який починається з будь-якої вершини та містить усі ребра графа, причому кожне з них двічі.
35. Навести приклади: а) ейлерового графа, який не є гамільтоновим; б) гамільтонового графа, який не є ейлеровим.
36. Довести, що будь-який повний граф є критичним.
37. Знайти всі 2-критичні графи. Відповідь обґрунтувати.
38. Визначити хроматичне число простого циклу довжиною 2k, $k \in N$. Відповідь обґрунтувати.

39. Навести приклади графів G_1 і G_2, які мають різні хроматичні числа й у яких кількість простих циклів довжиною k однакова для всіх $k \geq 0$.

40. Чому дорівнює хроматичне число повного графа K_n, з якого вилучене одне ребро? Відповідь обґрунтувати.

41. Показати: для розфарбування карти, яка є перетином кіл на площині, достатньо двох кольорів.

42. Довести, що для довільного планарного графа G виконується нерівність $\chi(G) \leq 5$.