Модульна контрольна робота

з дисципліни „Чисельні методи"

студентки групи ПС-33

Матвійчук Анастасії Миколаївни

Під час виконання зобов'язуюсь

дотримуватися принципів

академічної доброчесності

Варіант 37

1) $f(x, y, z) = xz - y^2$

$x = 2{,}3 \pm 0{,}02$; $y = 1{,}5 \pm 0{,}02$; $z = 3{,}5 \pm 0{,}02$

Для розв'язання використаємо формулу:

$$\Delta(y^*) \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)}{\partial x_j} \right| \Delta(x_j^*)$$

Отримуємо:

$$\Delta(f^*) = |z^*|\,\Delta(x^*) + |-2y^*|\,\Delta(y^*) + |x^*|\,\Delta(z^*) =$$

$$= 3{,}5 \cdot 0{,}02 + 3 \cdot 0{,}02 + 2{,}3 \cdot 0{,}02 = 0{,}176$$

Тоді:

$$f(x^*, y^*, z^*) = 2{,}3 \cdot 3{,}5 - 1{,}5^2 = 5{,}8$$

$$\delta(f^*) = \frac{0{,}176}{5{,}8} = 0{,}0303 = 3{,}03\%$$

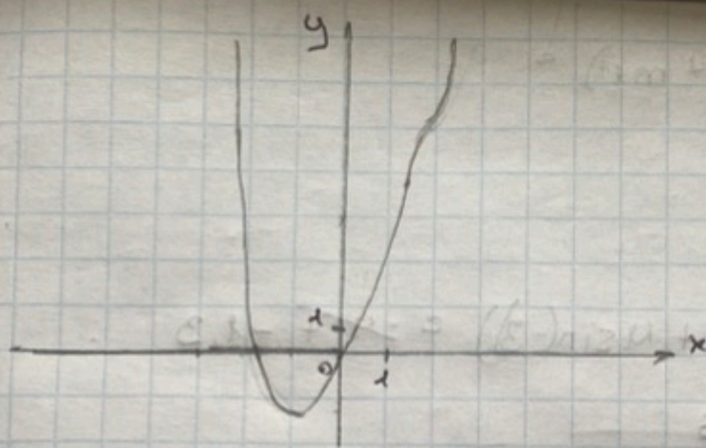
2) Дві ітерації для знаходження найменшого кореня методом релаксації

$$x^2 + 4\sin x = 0$$

Наприклад, $f(-1) = -2{,}366$, $f(-3) = 8{,}436$

Отже, корінь міститься на цьому проміжку

$[-3, -1]$



$f'(x) = 2x + 4\cos x < 0$ на усьому проміжку монотонно зростає

$f''(x) = 2 - 4\sin x > 0$

Тому $m_1 = \min\limits_{[-3,-1]} |f'(x)| = |f'(-3)| = -9{,}95697$

$M_1 = \max\limits_{[-3,-1]} |f'(x)| = |f'(-1)| = 0{,}1612$

Тоді:

$\tau = \tau_{onт} = 2/m_1 + M_1 = -0{,}2$

$x_{n+1} = x_n + 0{,}2\left(\overset{x_n^2 + 4\sin x_n}{\cancel{2x_n + 4\cos x_n}} \right)$

Оберемо початкове значення: $x_0 = -3$

$z_0 = x_0 - x^*$

$|z_0| \leq 3$

К-сть ітерацій:

$$n \geq \left[\frac{\ln(|z_0| / \varepsilon)}{\ln(1/q_\tau)} \right] + 1$$

$q = (M_1 - m_1)/(M_1 + m_1) =$

Ітерації

0) $x_0 = -3$

1) $x_1 = -3 + 0{,}2(9 + 4\sin(-3)) = \cancel{-4{,}7}\ -1{,}3$

$|x_1 - x_0| = 2{,}7 > \varepsilon$

2) $x_2 = -$[illegible] $+ 0{,}2(-$[illegible]$^2 + 4\sin(-$[illegible]$)) = -1{,}73$

$|x_2 - x_1| = 0{,}43 > \varepsilon$

Виконуємо ітерації поки не досягнемо $|x_{n+1} - x_n|$

3) Метод квадратних коренів:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$A = A^T \Rightarrow$ можна використ. метод

$$d_{11} = \operatorname{sgn}(a_{11}) = \operatorname{sgn} 1 = 1$$

$$s_{11} = \sqrt{|a_{11}|} = 1$$

$$s_{12} = \frac{a_{12}}{d_{11} s_{11}} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

$$s_{13} = \frac{a_{13}}{d_{11} s_{11}} = \frac{2}{1 \cdot 1} = 2$$

$$d_{22} = \operatorname{sgn}(a_{22} - s_{12}^2 d_{11}) = \operatorname{sgn}(0 - 1^2 \cdot 1) = -1$$

$$s_{22} = \sqrt{|a_{22} - s_{12}^2 d_{11}|} = \sqrt{|0 - 1 \cdot 1|} = 1$$

$$s_{23} = \frac{a_{23} - s_{12} d_{11} s_{13}}{d_{22} s_{22}} = \frac{1 - 1 \cdot 1 \cdot 2}{-1 \cdot \cancel{0} 1} = 2$$

$$d_{33} = \operatorname{sgn}(a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}) = \cancel{8}$$

$$= \operatorname{sgn}(4 - 4 \cdot 1 - 4 \cdot (-1)) = \operatorname{sgn} 4 = 1$$

$$s_{33} = \sqrt{|a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}|} = \sqrt{|4 - 2^2 \cdot 1 - 4 \cdot (-1)|} = 2$$

$$S = 2\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & 2 \\ \cancel{1} & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$S^T D y = b$

$$S^T D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 2$

$\cancel{y_2 - y_1 = -2}$ $\quad -y_2 + y_1 = 1 \Rightarrow y_2 = y_1 - 1 = 1$

$y_3 + y_1 - y_2 = 1 \Rightarrow y_3 = 1 - 2 + 1 = 0$

$Sx = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ розв'язати (не вистачно

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \varepsilon = 10^{-3}$

$A = A^T$

Знайти ~~максимальне~~ мінім. значення з точністю 10^{-3}

1) $\cancel{x^0} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow A < 0$

$B = \|A\|_\infty E - A = -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - A$

Кроки ітерації:

1) $x^0 = (1, 1, 1)^T$

$x^1 = Bx^0$

$\lambda_1^1 = \dfrac{x_1^1}{x_1^0}$

2) $e^1 = \dfrac{x^1}{\|x\|_\infty}$

$x^2 = Be^1$

$\lambda_1^2 = \dfrac{x_1^2}{e_1^1}$

$|\lambda_1^2 - \lambda_1^1| \le \varepsilon$ – якщо умова виконується – зупино

$\lambda_{min} = \|A\|_\infty - \lambda_{max}(B)$ (не зробх. не вистачило часу)

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

часу)