Г. І. Кармелюк

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Посібник з розв'язування задач

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Київ – 2007

УДК 519.2(075.8)
К 24

Гриф надано
Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1.4/18–Г–854 від 31.05.2007 р.)

Рецензенти:

Каленюк П. І. – доктор фізико-математичних наук, професор Національного університету “Львівська політехніка”;

Єлейко Я. І. – доктор фізико-математичних наук, професор Львівського національного університету ім. І. Франка,

Бондар Д. І. – доктор фізико-математичних наук, професор Тернопільського національного економічного університету.

Кармелюк Г. І.
К 24 Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв’язування задач : Навч. посібник. — К.: Центр учбової літератури, 2007 — 576 с.

ISBN 978-966-364-495-0

В посібнику в доступній формі викладені загальні теоретичні положення основних розділів теорії імовірностей і математичної статистики, які ілюструються великою кількістю детально розглянутих прикладів і задач різної складності. Для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів, педуніверситетів, технічних вузів та осіб, що застосовують в своїй практиці імовірнісні методи і методи математичної статистики.

ISBN 978-966-364-495-0

Світлій пам'яті мого батька
Кармелюка Івана Степановича присвячую.

Передмова

Теорія ймовірностей і математична статистика лежить в основі викладу ряду спеціальних дисциплін і є невід'ємною складовою частиною фундаментальної підготовки майбутніх фахівців з усіх областей знань. Застосування теоретико-ймовірнісних і статистичних методів, які дають змогу аналізувати, синтезувати і прогнозувати складні економічні процеси, в даний час стають все більш актуальними. Це обумовлює необхідність вивчення економістами методів теорії ймовірностей і математичної статистики.

Цей практикум виник на основі лекцій, які автор протягом десяти років читала на різних факультетах Тернопільського національного економічного університету. Він написаний відповідно до програми з теорії ймовірності для економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. В посібнику в конспективній формі викладені загальні теоретичні положення основних розділів теорії ймовірностей та математичної статистики. Весь теоретичний матеріал проілюстрований великою кількістю детально розглянутих прикладів і задач різних ступенів складності. При цьому використаний принцип: від простого до складного. Для ряду задач наведені кілька способів розв'язків і дана їх порівняльна характеристика. В посібнику подані розв'язки більш, ніж 650 задач. Даний посібник може бути використаний студентами економічних, технічних, педагогічних і інших вищих навчальних закладів, а також для самостійного вивчення дисципліни. Нумерація формул в кожному розділі самостійна. Для поглибленого вивчення матеріалу може бути використаний задачник автора [12].

Висловлюю щиру вдячність рецензентам доц. Базилевич-Киричинській І. Б., докторам фіз.-мат. наук Єлейку Я. І., Калинюку П. І., Боднару Д. І. за зауваження та поради, які допомогли покращити зміст посібника.

Частина I
Випадкові події

§1. Основні поняття теорії ймовірності

1.1. Простір елементарних подій. Відношення між подіями

Подією в теорії ймовірностей називають довільний наслідок або результат будь-якого випробування, спостереження, стохастичного експерименту (який можна повторити будь-яку кількість раз), який може наступити (відбутись, здійснитись), або не наступити, тобто результат випробування не можна напевне передбачити.

Якщо в усіх випробуваннях дана подія обов'язково відбувається, то вона називається ***достовірною***, якщо в усіх випробуваннях дана подія ніколи не може відбутись, то вона називається ***неможливою***. ***Випадковою*** називається подія, яка в результаті випробування може як відбутися, так і не відбутися. Дві або декілька випадкових подій називаються ***рівноможливими***, якщо умови їх появи однакові і вони мають однакові шанси відбутися. ***Нерозкладні*** події називаються елементарними. Для кожного випробування можна вказати деяку сукупність (множину) можливих наслідків – елементарних подій, що виключають одна одну, причому в результаті одного випробування повинна відбутись одна будь-яка з них. Така сукупність (множина) називається ***простором елементарних подій*** і позначається буквою Ω, а події, що в нього входять – елементарними подіями або точками простору Ω і позначаються буквами ω_i або ω. Сама множина Ω є ***вірогідною*** (***достовірною***) подією, порожня множина $\varnothing$ – ***неможливою*** подією. Простір елементарних подій Ω може бути ***зліченним*** або ***скінченним***, якщо кожній елементарній події можна покласти у відповідність деяке натуральне число n. Такий простір Ω називається ***дискретним***. Простір елементарних подій, який складається з нескінченного числа елементів, які не можна пронумерувати, називається ***неперервним***. Простір елементарних подій може бути ***скінченною***, ***нескінченно зліченною*** або ***незліченною множиною***.

Дві або декілька подій називаються ***сумісними*** (***несумісними***), якщо у випробуванні поява однієї з них не заперечує появи (непояви) решти подій, або хоча б дві з них можуть відбутися одночасно.

Група несумісних подій $A_1, A_2 \ldots A_n$ називається ***повною*** групою подій, якщо в результаті випробування обов'язково наступить одна і тільки одна подія цієї групи. Кожна елементарна подія ω простору Ω повинна входити в склад однієї і тільки однієї з подій повної системи $A_1, A_2 \ldots A_n$. Вся множина Ω елементарних подій ω, що описує дане випробування, завжди утворює повну групу подій.

Операції над подіями – це операції над підмножинами, так що звичайні властивості операцій над множинами переносяться на операції над подіями.

Запис $A \subset B$ (читається: A підмножина B) означає, що кожен елемент множини A належить множині B. Множини A і B називаються рівними ($A = B$), якщо $A \subset B$ і $B \subset A$. Множина, яка не містить жодного елемента, називається ***порожньою*** $\varnothing$.

Сума (об'єднання) $A \cup B$ множин A і B є множина тих і тільки тих елементів, які належать принаймні одній з множин A і B.

Добуток (переріз) $A \cap B$ множин A і B є множина тих і тільки тих елементів, які належать і A, і B.

Різниця $A \backslash B$ множин A і B є множина тих і тільки тих елементів, які належать A і не належать B.

Доповнення $\overline{A}$ до множини A є множина тих і тільки тих елементів множини Ω, які не належать $A (\overline{A} = \Omega \setminus A)$.

Симетрична різниця $A \Delta B$ множин A і B є множина $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Множини A і B не перетинаються, якщо $A \cap B = \varnothing$.

Випадкові події геометрично ілюструють з допомогою ***діаграм Ейлера-Венна***, на яких простір елементарних подій Ω зображають у вигляді квадрата, а подій – у вигляді кругів.

На рис. 1.1 *а* зображені ***сумісні*** події, на рис. 1.1 *б* – ***несумісні*** події. Подія *А* є окремим випадком *В* (або *В* є наслідком *А*): $A \subset B$, якщо всі елементарні події, які входять в *А*, входять також у *В* (рис.1.1 *в*).

Якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, то *A* = *B*; якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

Сумою або об'єднанням двох подій *А* і *В* називається така подія *С*, яка полягає в настанні події *А* чи події *В*, чи подій *А* і *В* разом (рис. 1.1 *г*). Умовний запис такий: *С* = *А* + *В* або $C = A \bigcup B = \{\omega | \omega \in A$ або *B* або і *A*, і $B\}$ (1.1.1).

Сумою або ***об'єднанням*** будь-якого числа подій $A_1, A_2, \ldots A_n$ називається подія *С*, яка полягає в настанні хоч би однієї з цих подій і записується так: $C = \sum_{i=1}^{n} A_i$ або $C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ (1.1.2).

Добутком або ***перетином*** двох подій *А* і *В* називається подія *С*, яка полягає в настанні і події *А* і події *В* (рис.1.1 *д*). Умовний запис: $C = A \times B = AB$ або $C \bigcap B = \{\omega | \omega \in A$ і $B\}$ (1.1.3). Добуток подій $A_1, A_2, \ldots A_n$ полягає в одночасному настанні всіх *n* подій і записується так: $C = \prod_{i=1}^{n} A_i$ або $C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ (1.1.4).

Різницею подій *А* і *В* називається подія *С*, яка полягає в тому, що подія *А* відбувається, а подія *В* – ні (рис.1.1 *е*).

Симетрична різниця $C = A \Delta B$ зображена на рис. 1.1 *є*, є такою подією, в яку входять ті елементарні події, які входять в *А* чи *В*, але не входять в їх перетин $A \cap B$. Отже симетрична різниця може бути представлена таким чином:

$C = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (1.1.5).

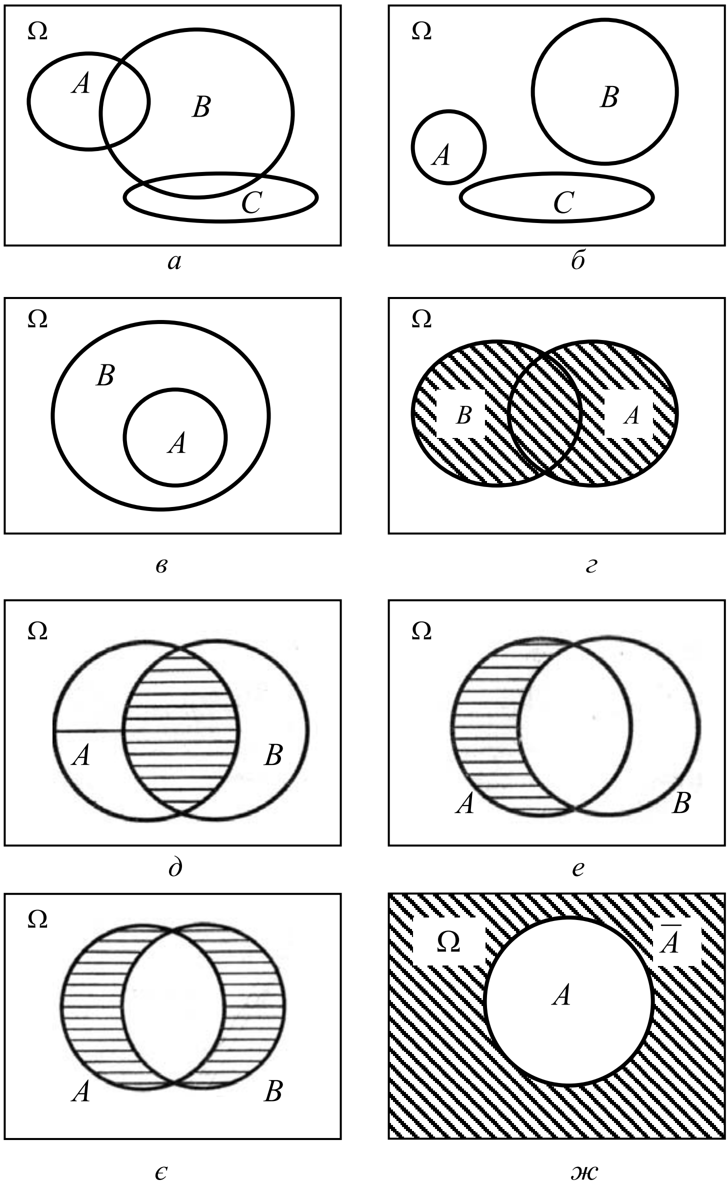


Рис. 1.1.

Протилежною подією $\overline{A}$ для події A або **доповненням** до A називається подія, що складається з усіх елементарних подій, які не входять в A: $\overline{A} = \{\omega \in A\} = \{\omega \in \Omega \setminus A\}$ (рис.1.1 *ж*).

Події A і B називаються **несумісними**, якщо $A \cdot B = \varnothing$ (рис.1.1 *б*).

На рис.1.1 *ж* зображена повна група подій.

В табл. 1.1 подана відповідність основних понять теорії множин в теорії імовірностей.

Таблиця 1.1.

Позначення	Термінологія в теорії множин	Термінологія в теорії ймовірностей
Ω	простір (основна множина)	простір елементарних подій, достовірна подія
$\omega, \omega \in \Omega$	елемент простору ω	елементарна подія ω
$A, A \subseteq \Omega$	множина A	подія A
$A \cup B$ $A + B$	сума або об'єднання множин A і B	сума подій A і B
$A \cap B, AB$	перетин множин A і B	добуток подій A і B
$A \setminus B$	різниця множин A і B	різниця подій A і B
$\perp$	пуста множина	неможлива подія
$\overline{A}$	доповнююча множина A	протилежна до A подія
$AB = \perp$	A і B не перетинаються	A і B несумісні
$A \subseteq B$	A є підмножиною B	з A виплива B
$A = B$	A і B рівні	A і B рівнозначні

Задачі

1.1.1. Нехай *A*, *B*, *C* – довільні випадкові події. Використовуючи поняття протилежної події, означення суми та добутку подій, записати вирази для таких подій:

а) D – відбулась тільки подія C;

б) E – відбулись події B і C, а подія A не відбулась;

в) K – не відбулось жодної з цих подій;

г) L – відбулись всі три події;

д) F – відбулось не більше двох з цих подій;

е) M – відбулись тільки дві події;

є) N – відбулось не менше двох з цих подій;

ж) O – відбулась хоча б одна з цих подій;

з) S – відбулось не більше однієї з цих подій;

и) T – не відбулася хоча б одна з цих подій.

Розв'язок.

а) $D = \overline{A}\,\overline{B}C$;

б) $E = \overline{A}BC$

в) $K = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

г) $L = ABC$;

д) Дана подія F є протилежною подією до такої: відбулись усі три події – ABC, тобто $F = \overline{ABC}$;

е) $M = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} = (AB + AC + BC) - ABC$;

є) $N = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC = AB + AC + BC$;

ж) $O = A + B + C = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$ або $O = \overline{K}$;

з) $T = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = \overline{ABC}$ або $T = \overline{L}$.

и) подія S – “відбулось не більше однієї з цих подій” означає суму несумісних подій: не відбулась жодна подія – $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ і відбулась одна з подій A, B, C, що є теж сумою несумісних подій $- A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$. Дана подія $S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$ є протилежною до події: відбулись дві і три події – $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$.

Отже,

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C = \overline{AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC}\,.$$

1.1.2. З'ясувати, сумісні чи несумісні події:

а) $\overline{A} \times B$ і $A \times \overline{B}$;

б) $A\ B$ і $A + B$;

в) $\overline{A} + \overline{B}$ і $A + B$.

Розв'язок.

а) Події $C = \overline{A}B$ і $D = A\overline{B}$ несумісні, оскільки подія C полягає у настанні події B, а подія D заперечує її настання. Тому події C і D одночасно відбуватися не можуть, а отже, є несумісними.

б) Оскільки сума подій $A + B = A\overline{B} + \overline{A}B + AB$ містить подію AB, то події $A \times B$ і $A + B$ є сумісними.

в) Дані суми подій $E = \overline{A} + \overline{B} = \overline{A} \times \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{A}} \times \overline{B} + \overline{A} \times \overline{B} = \overline{A} \times B + A \times \overline{B} + \overline{A} \times \overline{B}$ і $F = A + B = A \times \overline{B} + \overline{A} \times B + A \times B$ містять одні і ті ж події $\overline{A} \times B$, $A \times \overline{B}$. Отже, події E і F є сумісними.

1.1.3. Вказати, які з наведених подій утворюють повну групу подій:

а) $\overline{A} \times B$ і $A \times B$;

б) $A \times \overline{B}$ і $\overline{A} \times B$;

в) $A + B$ і $\overline{A} + \overline{B}$;

г) $A + B$ і $\overline{A + B}$;

д) $A + \overline{B}$, $\overline{A} + B$, $A \times B$, $\overline{A} \times \overline{B}$.

Розв'язок.

Якщо є дві події A і B, то повну групу подій утворить сума таких єдиноможливих несумісних подій: $A \times B$, $\overline{A} \times B$, $A \times \overline{B}$, $\overline{A} \times \overline{B}$. Тому, події:

а) $\overline{A} \times B$ і $A \times B$ не утворюють повну групу подій;

б) $A\times\overline{B}$ і $\overline{A}\times B$ не утворюють повну групу подій;

в) сума подій F і E: $F = A + B = A\times\overline{B} + \overline{A}\times B + A\times B$ і $E = \overline{A} + \overline{B} = \overline{A}\times B + A\times\overline{B} + \overline{A}\times\overline{B}$ містить всю сукупність несумісних подій, що утворює повну групу подій;

г) події $F = A + B$ і $\overline{F} = \overline{A + B} = \overline{A}\times\overline{B}$ є протилежними і утворюють повну групу подій;

д) розпишемо суми подій:

$$A + \overline{B} = A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{\overline{B}} = A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} + AB\,;$$

$$\overline{A} + B = \overline{A}B + \overline{\overline{A}}B + \overline{A}\,\overline{B} = \overline{A}B + AB + \overline{A}\,\overline{B}\,.$$

Отже дані події утворюють повну групу подій.

1.1.4. Довести, що подія $(A+B)\times(\overline{A}+B)\times(A+\overline{B})\times\times(\overline{A}+\overline{B})$ – неможлива.

Розв’язок.

$$(A+B)\times(\overline{A}+B)\times(A+\overline{B})\times(\overline{A}+\overline{B}) = \left[(A+B)\times(\overline{A}+\overline{B})\right]\times$$
$$\times\left[(\overline{A}+B)(A+\overline{B})\right] = \left(A\times\overline{A} + A\times\overline{B} + B\times\overline{A} + B\times\overline{B}\right)\times$$
$$\times(\overline{A}\times A + \overline{A}\times\overline{B} + B\times A + B\times\overline{B}) = (A\times\overline{B} + \overline{A}\times B)\times$$
$$\times(\overline{A}\times\overline{B} + A\times B) = A\times\overline{B}\times\overline{A}\times\overline{B} + A\times\overline{B}\times A\times B + B\times\overline{A}\times\overline{A}\times\overline{B} +$$
$$+ B\times\overline{A}\times A\times B = A\times\overline{A}\times\overline{B} + A\times B\times\overline{B} + \overline{A}\times B\times\overline{B} + A\times\overline{A}\times B$$

– це сума неможливих подій і є подією неможливою.

1.1.5. Довести, що події $(A+\overline{B})\times(\overline{A}+B)+(A+B)\times\times(\overline{A}+\overline{B})$ і $(A+B)\times(\overline{A}+B)\times(A+\overline{B})+(\overline{A}+\overline{B})$ – достовірні.

Розв’язок.

Виконаємо відповідні дії над подіями:

$$(A+\overline{B})\times(\overline{A}+B)+(A+B)\times(\overline{A}+\overline{B}) = (A\times\overline{A} + A\times B)+$$
$$+\overline{B}\times\overline{A} + \overline{B}\times\overline{B}) + (A\times\overline{A} + A\times\overline{B} + B\times\overline{A} + B\times\overline{B}) = *$$

Оскільки $A\times\overline{A}$ і $B\times\overline{B}$ – події неможливі, то

$* = A\times B + \overline{A}\times\overline{B} + A\times\overline{B} + \overline{A}\times B = \Omega$ – повна група подій, а, отже, подія достовірна, оскільки одна з подій повної групи, обов'язково відбудеться.

$(A+B)\times(\overline{A}+B)\times(A+\overline{B})+(\overline{A}+\overline{B}) = (A+B)\times(\overline{A}\times A +$

$+\overline{A}\times\overline{B} + A\times B + B\times\overline{B}) + (\overline{A}+\overline{B}) = A\times\overline{A}\times\overline{B} + A\times A\times B +$

$+B\times\overline{A}\times\overline{B} + B\times A\times B + (\overline{A}+\overline{B}) = AB + (\overline{A}+\overline{B}) = *$

Але сума подій

$\overline{A}+\overline{B} = \overline{A}\times\overline{B} + \overline{\overline{A}}\times\overline{B} + \overline{A}\times\overline{\overline{B}} = \overline{A}\times\overline{B} + A\times\overline{B} + \overline{A}\times B.$

Остаточно даний вираз буде $= * A\times B + \overline{A}\times\overline{B} + A\times\overline{B} +$ $+\vec{A}\times B = \Omega$ – повна група подій. Отже, дана подія – достовірна.

1.1.6. Яка умова сумісності подій $A+B$, $\overline{A}+\overline{B}$, $A+C$, $\overline{B}+\overline{C}$?

Розв'язок.

Запишемо добуток подій:

$(A+B)\times(\overline{A}+\overline{B})\times(A+C)\times(\overline{B}+\overline{C}) = \left[(A+B)(\overline{A}+\overline{B})\right]\times$

$\times\left[(A+C)\times(\overline{B}+\overline{C})\right] = \left(A\overline{A} + A\overline{B} + B\overline{A} + B\overline{B})\right)\times$

$\times\left(A\overline{B} + A\overline{C} + C\overline{B} + C\overline{C}\right) = (A\overline{B} + B\overline{A})(A\overline{B} + A\overline{C} + C\overline{B}) =$

$= A\overline{B}\times A\overline{B} + A\overline{B}\times A\overline{C} + A\overline{B}\times C\overline{B} + B\overline{A}\times A\overline{B} + B\overline{A}\times A\overline{C} +$

$+ B\overline{A}\times C\overline{B} = A\overline{B} + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C = A\overline{B} + A\overline{B}(\overline{C}+C) =$

$= A\overline{B} + A\overline{B}\Omega = A\overline{B} + A\overline{B} = A\overline{B}.$

Умовою сумісності даних подій є сумісність подій A і $\overline{B}$.

1.1.7. Знайти випадкову подію X з рівності:

$(A+\overline{X})\times(\overline{A}+\overline{X}) + \overline{X+A} + \overline{X+\overline{A}} = B$.

Розв'язок.

Виразимо через протилежні події суми подій:

$\overline{X+A}=\overline{X}\times\overline{A}$, $\overline{X+\overline{A}}=\overline{X}\times\overline{\overline{A}}=\overline{X}\times A$ і підставимо їх у ліву частину рівняння:

$$(A+\overline{X})(\overline{A}+\overline{X})+\overline{X}\times\overline{A}+\overline{X}\times A=A\times\overline{A}+A\times\overline{X}+\overline{X}\times\overline{A}+$$

$$+\overline{X}\times\overline{X}+\overline{X}\times(\overline{A}+A)=\overline{X}(A+\overline{A})+\overline{X}+\overline{X}(\overline{A}+A)=\overline{X}\Omega=$$

$$=\overline{X}=B.$$

Отже, $X=\overline{B}$.

1.1.8. Довести, що для будь-яких подій A і B виконуються такі рівності:

а) $\overline{A+B}=\overline{A}\times\overline{B}$;

б) $\overline{A\times B}=\overline{A}+\overline{B}$.

Розв’язок.

а) Подія $A+B$ полягає в появі хоч би однієї з подій A чи B, тому протилежною подією до даної є непоява подій A і B, отже $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

Це можливо довести другим способом.

Згідно означення $A+B=A\overline{B}+\overline{A}B+AB$. Тоді протилежною подією $\overline{A+B}$ до даної є подія $\overline{A}\,\overline{B}$, яка доповнює несумісні події $A\overline{B}, \overline{A}B, AB$ до повної групи подій.

б) Подія AB полягає в одночасній появі подій A і B, отже протилежною подією до даної є непоява хоч би однієї з подій A і B, тобто сума подій $\overline{A}+\overline{B}$. Отже, $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

Другий спосіб доведення. Події $A\overline{B}, \overline{A}B, \overline{A}\,\overline{B}, AB$ утворюють повну групу подій. Тоді протилежною подією до даної AB є $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, $\overline{A}\,\overline{B}$: $\overline{AB}=A\overline{B}+\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A}+\overline{B}$.

1.2. Формула включень та виключень

N-множиною Ω називається множина, що містить N-елементів.

Нехай $A_{1,} A_{2, \dots} A_n$ – підмножини N-множини Ω. Позначимо через $\overline{A_i}$ доповнення множини A_i: $\overline{A_i} = \Omega \setminus A_i$ і $N(A)$ – кількість елементів множини A. Має місце формула:

$$N(\overline{A}_1\overline{A}_2\dots\overline{A}_n) = N - \sum_{i=1}^{n} N(A_i) + \sum_{1\le i<j\le n} N(A_iA_j) -$$

$$- \sum_{1\le i<j\le k\le n} N(A_iA_jA_k) + \dots + (-1)^n N(A_1A_2\dots A_n) \quad (1.2.1).$$

Наслідок. Візьмемо у формулі $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ і врахуємо, що $N = N(\Omega) = N(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ та $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \dots \overline{A_n} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \varnothing$. Отримаємо формулу:

$$N(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} N(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} N(A_iA_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} N(A_iA_jA_k) -$$

$$- \dots + (-1)^{n-1} N(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) \quad (1.2.2).$$

Це формули включень та виключень, або формули решета.

Задачі

1.2.1. Відомо, що $N(A) = N(B) = \dfrac{1}{2} N$. Довести, що $N(AB) = N(\overline{A}\overline{B})$.

Розв’язок.

Підставимо у формулу “решета” числові дані:

$N(\overline{A}\,\overline{B}) = N - N(A) - N(B) + N(AB) = N - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N +$
$+ N(AB) = N(AB).$

1.2.2. Відомо, що $N(A) = N(B) = N(C) = \frac{1}{3}N,$

$N(ABC) = N(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$.

Довести, що $2N(ABC) = N(AB) + N(AC) + N(BC)$.

Розв'язок.

Згідно формули "решета":

$N(AB) + N(AC) + N(BC) = N(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) - N + N(A) +$
$+ N(B) + N(C) + N(ABC) = 2N(ABC) - N + 3 \cdot \frac{1}{3}N =$
$= 2N(ABC).$

1.2.3. Довести, що $N(AB) + N(AC) + N(BC) \geq N(A) +$
$+ N(B) + N(C) - N$.

Розв'язок:

Згідно формули "решета":

$N(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = N - N(A) - N(B) - N(C) + N(AB) + N(BC) +$
$+ N(AC) - N(ABC),$ звідки: $N(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) + N(ABC) =$
$= N - N(A) - N(B) - N(C) + N(AB) + N(BC) + N(AC)$.

Оскільки $N(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) \geq 0, N(ABC) \geq 0$, то $N(ABC) +$
$+ N(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) \geq 0$. Отже, $N - N(A) - N(B) - N(C) + N(AB) +$
$+ N(BC) + N(AC) \geq 0$, що рівнозначно нерівності
$N(AB) + N(BC) + N(AC) \geq N(A) + N(B) + N(C) - N.$

1.2.4. У звіті наведено числові дані як такі, що насправді спостерігались: N = 1000, $N(A)$ = 510, $N(B)$ = 490, $N(C)$ = 427,

$N(AB)$ = 189, $N(AC)$ = 140, $N(BC)$ = 85. Показати, що в цих даних є помилка.

Розв'язок.

За умовою $N(ABC) = 0;$ $N(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 0$. Обчислимо $N(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$ згідно формули "решета":

$$N(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = N - N(A) - N(B) - N(C) + N(AB) + N(BC) +$$
$$+ N(AC) - N(ABC) = 1000 - 510 - 490 - 427 + 189 + 140 +$$
$$+ 85 = -13 \neq 0$$

Отже, в даних є помилка.

1.2.5. Із 100 студентів англійську мову знають 28 студентів, німецьку – 30, французьку – 42, англійську і німецьку – 8, англійську і французьку – 10, німецьку і французьку – 5, всі 3 мови знають 3 студенти.

Скільки студентів не знають жодної з трьох мов?

Розв'язок.

Використаємо формулу включень та виключень або формулу решета:

$$N(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = N - N(A) - N(B) - N(C) + N(AB) +$$
$$+ N(AC) + N(BC) - N(ABC),$$

де $N = 100$ – загальна кількість усіх студентів,

$N(A) = 28$ – кількість студентів, що знають англійську,

$N(B) = 30$ – німецьку,

$N(C) = 42$ – французьку,

$N(AB) = 8$ – англійську і німецьку,

$N(AC) = 10$ – англійську і французьку,

$N(BC) = 5$ – німецьку і французьку мови,

$N(ABC) = 3$ – всі три мови,

$N(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$ – не знають жодної мови.

Отже, $N(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 100 - 28 - 30 - 42 + 8 + 10 + 5 - 3 = 20$.

1.2.6. У класі 35 учнів. З них 20 відвідують математичний гурток, 11 – фізичний, а 10 учнів не відвідують жодного гуртка.

Скільки учнів відвідують математичний та фізичний гуртки?

Скільки учнів відвідують лише математичний гурток?

Розв’язок.

Позначимо A і B – множини учнів, що відвідують відповідно математичний і фізичний гуртки, Ω – множина всіх 35 учнів. Тоді N=35, $N(A)$=20, $N(B)$=11, $N(\overline{A}\,\overline{B})=10$.

Кількість учнів, що відвідують математичний та фізичний гуртки $N(AB)$, згідно формули “решета” рівна: $N(AB)=$
$=N(A)+N(B)+N(\overline{A}\,\overline{B})-N=20+11+10-35=6$.

Тоді кількість учнів, що відвідують лише математичний гурток $N(A\overline{B})=20-6=14$; лише фізичний гурток: $N(\overline{A}B)=11-6=5$.

1.2.7. У бібліотеці зарубіжної літератури працює певна кількість фахівців, кожен з яких знає хоча б одну іноземну мову. Шість з них знають англійську мову, шість – німецьку, сім – французьку, чотири – англійську і німецьку, три – німецьку і французьку, два – французьку і англійську, один знає всі три мови. Скільки фахівців працює у відділенні? Скільки з них знає лише англійську, німецьку, французьку мову?

Розв’язок.

Нехай A, B, C – множини всіх фахівців, що відповідно знають англійську, німецьку і французьку мови. Тоді $N(A)$ = = 6, $N(B)$ = 6, $N(C)$ = 7, $N(AB)$ = 4, $N(BC)$ = 3, $N(AC)$ = 2, $N(ABC)$ = 1, $N(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=0$. Для знаходження N використаємо формулу “решета”:

$$N=N(A)+N(B)+N(C)-N(AB)-N(BC)-N(AC)+$$
$$+N(ABC)+N(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=6+6+7-4-3-2+1=11.$$

Для того, щоб відповісти на питання, скільки фахівців володіє лише однією мовою, скористуємось діаграмами Ейлера-Венна.

Зобразимо множину всіх фахівців у вигляді квадрата Ω, а множини *A, B, C* у вигляді кругів, що лежать у цьому квадраті (рис. 1.2).

Переріз множин *A, B, C* дає $N(ABC)=1$ – кількість фахівців, що знають всі три мови.

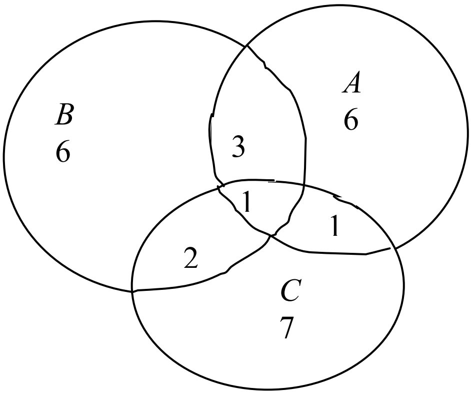


Рис. 1.2.

Переріз множин *A* і *B* без *C* дає $N(AB\overline{C}) = N(AB) - N(ABC) = 4 - 1 = 3$ – кількість фахівців, що знають дві мови: англійську і німецьку. Переріз множин *B* і *C* без *A* дає $N(\overline{A}BC) = N(BC) - N(ABC) = 3 - 1 = 2$ – кількість фахівців, що знають німецьку і французьку мови. Переріз множин *A* і *C* без *B* дає $N(A\overline{B}C) = N(AC) - N(ABC) = 2 - 1 = 1$ – кількість фахівців, що знають англійську і французьку мови. Тоді кількість фахівців, що знає лише англійську мову рівна

$$N(A\overline{B}\overline{C}) = N(A) - \left[N(AB) + N(AC) + N(ABC)\right] =$$

$$= 6 - [3 + 1 + 1] = 1.$$

Кількість фахівців, що знають лише німецьку мову рівна $N(\overline{A}B\overline{C}) = N(B) - [N(AB) + N(BC) + N(ABC)] = 6 - (3 +$
$+ 2 + 1) = 0;$

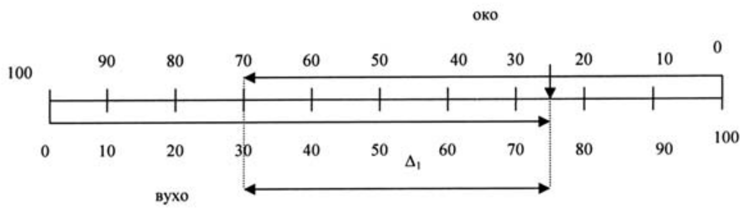
кількість фахівців, що знає лише французьку мову рівна:
$N(\overline{A}\overline{B}C) = N(C) - [N(AC) + N(BC) + N(ABC)] = 7 - (1 +$
$+ 2 + 1) = 3.$

1.2.8. Задача-жарт.

У жорстокому бою не менше 70% бійців втратили одне око, не менше 75% – одне вухо, не менше 80% – одну руку і не менше 85% – одну ногу. Яка мінімальна кількість бійців, які втратили одночасно око, вухо, руку й ногу?

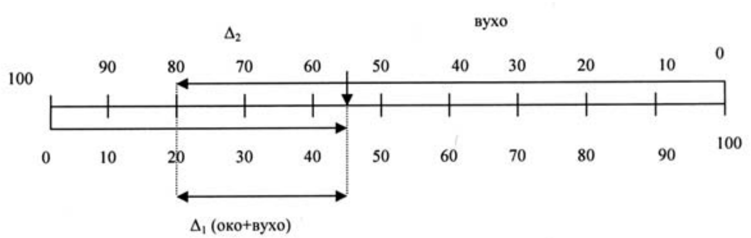
Розв’язок.

Відкладемо на відрізку 100% з різних його кінців значення найменшої кількості бійців, що втратили око (75%) і одне вухо (80%). Спільна частина відрізка дасть найменшу кількість бійців, що одночасно втратили око і одне вухо:

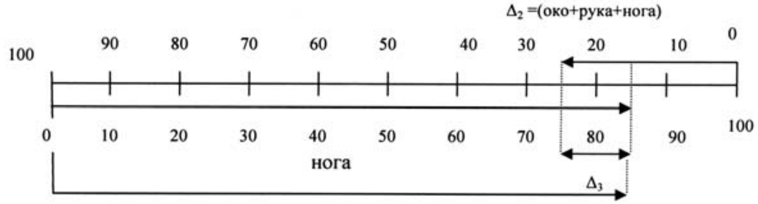


$\Delta_1 = 75 - (100 - 70) = 75 - 30 = 45(\%).$

Знайдемо тепер найменшу кількість бійців, що втратили одночасно око, вухо і руку. Для цього на 100% відрізку відкладемо у протилежних напрямах найменше значення бійців, що одночасно втратили око і вухо (45%) і одну руку (80%). Спільна частина становить $\Delta_2 = 80 - (100 - 45) =$
$= 80 - 55 = 25(\%)$.



Аналогічно, для знаходження найменшої кількості бійців, що втратили одночасно око, вухо, руку і ногу, на відрізку довжиною 100% відкладемо у протилежних напрямах відрізки Δ_2=25% і 85%. Тоді спільна частина становить



$$\Delta_3 = 85 - (100 - 25) = 85 - 75 = 10\% .$$

Отже, наближена кількість бійців, що втратили одночасно око, вухо, руку і ногу складає не менше 10%.

1.3. Елементи комбінаторики

Правило суми. Якщо деякий об’єкт ***a*** можна вибрати m способами, а об’єкт ***b*** n способами, причому ніякий вибір ***a*** не збігається з жодним з виборів ***b***, то один з об’єктів ***a*** або ***b*** можна вибрати $m + n$ способами (1.3.1).

Правило добутку. Якщо об’єкт ***a*** можна вибрати m способами і при кожному виборі об’єкта ***a*** об’єкт ***b*** можна вибрати n способами, то вибір пари (***a, b***) можна здійснити $m \cdot n$ способами.

Узагальнене правило добутку. Якщо об’єкт a_1 можна вибрати m_1 способами, об’єкт a_2 $- m_2$ способами ,…, об’єкт

$a_r - m_r$ способами, то вибір впорядкованої системи об’єктів ($a_1,...,a_r$) можна здійснити $m_1 . m_2 ... m_r$ способами (1.3.2).

Перестановками називають сполуки або групи, що складаються з n елементів, що розрізняються між собою і відрізняються між собою тільки порядком їх розташування. Число всіх можливих перестановок рівне $P_n = n!$, де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ (1.3.3).

Наприклад, з трьох букв *абв* можна скласти $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ таких перестановок: *абв, авб, бав, бва, ваб, вба*.

Нехай є сукупність з n різних елементів. З цієї сукупності утворимо групи або сполуки з k $(k < n)$ різних елементів.

Розміщеннями називають сполуки або сукупності з n різних елементів по $к$ елементів, які відрізняються або складом елементів, або порядком їх розташування у групі.

Число всіх можливих розміщень рівне:

$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$ (1.3.4).

Наприклад, з чотирьох букв *абвг* можна скласти $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ розміщень з чотирьох елементів по два: *аб, ба, ав, ва, аг, га, бв, вб, бг, гб, вг, гв.*

Якщо $n = k$, то $A_n^k = A_n^n = n(n-1)(n-2)...1 = n! = P_n$ (1.3.5).

Комбінаціями називаються сполуки або групи, складені з n різних елементів по k елементів, які відрізняються одна від одної хоча б одним елементом. Число комбінацій

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} \quad (1.3.6).$$

При цьому: $0! = 1$; $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; $C_n^k = C_n^{n-к}$; $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... C_n^n = 2^n$. Число розміщень, перестановок і комбінацій зв’язані рівнянням: $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{A_n^k}{P_k}$ або $A_n^k = P_k C_n^k$ (1.3.7).

Наприклад, з чотирьох букв *абвг* можна скласти $C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$ = 6 комбінацій по дві букви в кожній.

Сполуки 1) *аб* і *ба*; 2) *ав* і *ва*; 3) *аг* і *га*; 4) *бв* і *вб*; 5) *бг* і *гб*; 6) *вг* і *гв* є однією комбінацією, оскільки набір букв в кожній з шести комбінацій однаковий, а порядок їх розташування не має значення.

Перестановки з повтореннями. Якщо серед n елементів є однакові, то перестановки, які утворюються одна з одної переставлянням однакових елементів, нічим не відрізняються, тому кількість різних перестановок буде менша, ніж $n!$. Якщо серед елементів множини, що має n елементів є n_1 елементів 1-го типу, n_2 елементів 2-го типу, ... n_k елементів k-го типу ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), то число всіх перестановок такої множини позначається $P_n(n_1,\ldots n_k)$ і рівне

$$P_n(n_1, n_2, \ldots n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \qquad (1.3.8).$$

Розміщення з повтореннями. Розміщенням з повтореннями з n елементів по k називається будь-яка впорядкована k-множина виду $(a_1,\ldots a_k)$, де $a_1,\ldots a_k$ – елементи множини (не обов'язково різні). Число всіх розміщень з повтореннями позначається $\overline{A}_n^k$ (тут можливе $k > n$) і рівне $\overline{A}_n^k = n^k$. Розміщення з повтореннями з n елементів по k називають також впорядкованими k-вибірками з поверненням з n-множини.

Приклад. Код замка складається з шести цифр. Загальна кількість усіх можливих наборів з шести цифр рівна числу розміщень з повтореннями з 10 елементів по 6: $\overline{A}_{10}^6 = 10^6 = 1000000$.

Комбінації з повтореннями. Комбінацією з повтореннями з n елементів по k називається будь-яка k-множина виду $\{a_1, a_2, \ldots a_k\}$, де a_1, a_2, ... a_k – елементи множини (не обов'язково різні). Число всіх комбінацій з повтореннями з n елементів по k позначається $\overline{C}_n^k$ (тут можливе $k > n$) і рівне

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \quad (1.3.10).$$

Приклад. Кількість способів, якими можна вибрати:

а) шість цифр з десяти цифр дорівнює кількості комбінацій з повтореннями з 10 елементів по 6:

$$\overline{C}_{10}^6 = C_{10+6-1}^6 = \frac{15!}{6!\cdot 9!} = \frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 9!} = 5005;$$

б) десять цифр з шести цифр дорівнює кількості комбінацій з повтореннями з 36 елементів по 10:

$$\overline{C}_6^{10} = C_{6+10-1}^{10} = \frac{15!}{10!\cdot 5!} = \frac{10!\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{10!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 3003.$$

Задачі

1.3.1. На вершину гори веде 7 доріг.

Скількома способами турист може піднятись на гору і спуститись з неї?

Дати відповідь на те саме запитання, якщо підняття і спуск відбуваються різними шляхами.

Розв'язок.

Турист може піднятись $n_1 = 7$ способами і спуститись $n_2 =$ 7 способами. Згідно узагальненого правила добутку піднятись на гору і спуститись з неї можна $n = n_1 \cdot n_2 = 7\cdot 7 = 49$ способами. Якщо спуск відбувається іншим шляхом ніж підйом, то $n_2 = 7 - 1 = 6$. Отже $n = n_1 \cdot n_2 = 6\cdot 7 = 42$. Іншими словами, оскільки має значення не лише вибір двох доріг з усіх доріг для підняття і спуску (вибір 2 елементів серед 7 елементів), але й вибір доріг для підняття і спуску серед двох уже вибраних (порядок розташування елементів у групі), то число n рівне числу розміщень з 2 елементів серед 7: $n = A_7^2 = 6\cdot 7 =$ $= 42$.

1.3.2. Скільки тризначних чисел можна записати цифрами 0, 1, 2, 3, 4?

Розв'язок.

Перша цифра у тризначному числі може бути вибрана $n_1 = 4$ способами ("0" не вибирається), друга цифра $n_2 = 5$ способами, третя цифра $n_3 = 5$ способами. Згідно узагальненого правила добутку усіх тризначних чисел може бути $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.

1.3.3. Скільки тризначних чисел можна записати цифрами 0, 1, 2, 3, 4, якщо кожну з цих цифр використовувати не більше одного разу?

Розв'язок.

Якщо кожну з цифр використовувати не більше одного разу, то третю цифру можна записати $n_3 = 5$ способами, другу цифру – $n_2 = 4$ способами, першу цифру – $n_1 = 3$ способами. Згідно узагальненого правила добутку усіх тризначних чисел може бути $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Це число n дорівнює кількості розміщень з 3 елементів серед 5 елементів:

$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$.

1.3.4. Скількома способами 7 осіб можуть стати в чергу до каси?

Розв'язок.

Число n дорівнює кількості перестановок з 7 елементів $n = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

1.3.5. Скількома способами можна з 7 осіб вибрати комісію, що складається з 3 осіб?

Розв'язок.

Оскільки має значення лише набір 3 осіб серед 7 осіб, а порядок їх розташування у групі не має значення, то число способів n рівне числу комбінацій, які можна утворити з 3 елементів серед 7: $n = C_7^3 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$.

1.3.6. Студентові треба за 8 днів скласти 4 іспити. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язок.

Розглянемо варіанти розв'язків.

а) Оскільки порядок розташування іспитів за кожен день має значення, то кількість способів рівне числу розміщень з чотирьох елементів серед 8 елементів: $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

б) Логічно зробити такі обмеження – за один день можна скласти лише один іспит. Тоді на 8 місць треба розставити 4 значущі цифри (різні іспити) і 4 нулі (відсутність іспитів). Вибрати 4 дні з восьми можна $C_8^4 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$ способами, а посортувати ці 4 іспити по порядку в кожному із способів можна $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ варіантами. Всього одержимо $70 \cdot 24 = 1680$ способів здачі іспитів.

в) Можна міркувати інакше – якщо обмеження є: за один день складається 1 іспит, то для здачі I іспиту маємо 8 варіантів (днів); для здачі II іспиту – лише 7, бо один день вже вибрано; для здачі III іспиту – 6; а IV– лише 5; отже, число способів рівне $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

г) Якщо ж обмежень немає і за день можна скласти будь-яку кількість іспитів, то для кожного з іспитів є 8 варіантів вибору для складання і тому цих способів буде рівне $8^4 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = \; = 64 \cdot 64 = 4096$.

1.3.7. У розіграші першості країни з футболу бере участь 17 команд.

Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна і бронзова медалі?

Розв'язок.

Оскільки мова йде про вибір групи з $k = 3$ елементів серед $n = 17$ елементів і тут важливий порядок розташування елементів у групі, то $N = A_n^k = A_{17}^3 = 17 \cdot 16 \cdot 15$.

1.3.8. У класі вивчають 10 предметів. У понеділок 6 уроків, причому всі уроки різні.

Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

Розв'язок.

$n = 10, \quad k = 6, \quad N = A_{10}^{6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$.

1.3.9. Автомобільний номер складається з двох букв і чотирьох цифр.

Яке число номерів можна скласти з 33 літер українського алфавіту?

Розв'язок.

У номері можуть повторюватись букви і цифри. Так що кількість способів, якими можна розташувати 33 літери українського алфавіту на двох місцях рівна $n_1 = 33 \cdot 33 = 33^2$, це рівне кількості розміщень з повтореннями з 33 елементів по 2: $\overline{A}_{33}^{2} = 33^2$. Кількість способів, якими можна розташувати 10 цифр на чотирьох місцях рівна $n_2 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$, що рівне кількості розміщень з повтореннями з 10 елементів по 4: $\overline{A}_{10}^{4} = 10^4$.

За правилом добутку шукана кількість номерів рівна $n = n_1 \cdot n_2 = 33^2 \cdot 10^4 = 1089000$.

1.3.10. На зборах повинно виступити 4 особи: *A*, *B*, *C*, *D*.

Скількома способами їх можна записати в список ораторів, якщо *B* не може виступити раніше, ніж *A*?

Розв'язок.

Необхідно вибрати дві особи: *A* і *B* ($k = 2$) серед чотирьох осіб ($n = 4$) і при цьому важливий порядок розташування вибраних осіб. Таким чином, кількість способів, якими можна записати ораторів рівна кількості розміщень без повторень з 2 елементів серед 4 елементів: $N = A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ або $= \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 12.$

1.3.11. Скільки різних слів можна утворити переставлянням букв у слові “математика”?

Розв’язок.

У слові “математика” є десять букв, з них – буква “м” повторюється $n_1 = 2$ рази, “а” – $n_2 = 3$ рази, “т” – $n_3 = 2$ рази. Тоді загальна кількість слів, які можна утворити переставлянням букв рівна: $P_n(n_1, n_2 ... n_k) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$.

Підставивши необхідні дані, отримуємо:

$$P_{10}(2,3,2) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 151200.$$

1.3.12. Скільки різних слів можна утворити переставлянням букв у слові а) “баобаб”; б) “комбінаторика”?

Розв’язок.

а) У слові “баобаб” є шість букв; з них буква “б” повторюється $n_1 = 3$ рази; буква “а” повторюється $n_2 = 2$ рази. Тоді загальна кількість слів, які можна утворити переставлянням букв рівна:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!}.$$

Підставивши необхідні дані, отримуєм:

$$P_6(3;2) = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 60;$$

б) $P_{13}(2;2;2) = \dfrac{13!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 778377600.$

1.3.13. Скількома способами можна вибрати 6 однакових або різних тістечок у кондитерській, де є 11 різних сортів тістечок?

Розв’язок.

Кількість способів, якими можна вибрати 6 однакових або різних тістечок з 11 різних тістечок рівне числу комбінацій з повтореннями з 11 елементів по 6:

$$N = \overline{C}_{11}^{6} = C_{11+6-1}^{6} = C_{16}^{6} = C_{16}^{10} = \frac{16!}{6!(11-1)!} = \frac{16!}{6!10!} =$$

$$= \frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 8008$$, згідно формули

$$\overline{C}_{n}^{k} = C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

1.3.14. У кімнаті є *n* лампочок.

Скільки всього є різних способів освітлення кімнати, при яких горить рівно *k* лампочок? Скільки всього може бути різних способів освітлення кімнати?

Розв’язок.

Оскільки мова йде лише про горіння *k* конкретних лампочок з *n*, то кількість способів, якими можна освітити кімнату рівна числу комбінацій з *k* елементів серед *n*, тобто $N = C_n^k$.

Загальне число способів, якими можна освітити кімнату рівна сумі комбінацій з k = 0, 1, ... n серед n елементів: $N = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.

Числа C_n^0, C_n^1, $C_n^2, \ldots$ C_n^n є коефіцієнтами в розкладі бінома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} +$$
$$+ C_n^2 a^2 b^{n-2} + \ldots + C_n^n a^n b^0.$$

Якщо покласти $a = b = 1$, то $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n =$
$= C_n^0 \cdot 1^0 \cdot 1^n + C_n^1 \cdot 1^1 \cdot 1^{n-1} + C_n^2 \cdot 1^2 \cdot 1^{n-2} + \ldots + C_n^n \cdot 1^n \cdot 1^0 =$
$= (1+1)^n = 2^n$. Отже, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

1.3.15. Довести рівність $(M-m)C_M^m = MC_{M-1}^m$.

Розв’язок.

Перетворимо ліву частину рівності, використавши формули комбінаторики:

$$(M-m)C_M^m = (M-m)\cdot\frac{M!}{m!(M-m)!} =$$

$$= \frac{M!(M-m)}{m!(M-m-1)!(M-m)} = \frac{(M-1)!M}{m!(M-m-1)!} = MC_{M-1}^m,$$

або перетворимо праву частину рівності:

$$MC_{M-1}^m = \frac{M(M-1)!}{m!(M-1-m)!} = \frac{M!(M-m)}{m!(M-1-m)(M-m)} =$$

$$= \frac{M!(M-m)}{m!(M-m)!} = (M-m)C_M^m..$$

1.4. Класичне означення імовірності

Імовірністю події A називається відношення числа результатів випробування *m*, сприятливих до настання події *A* до загального числа всіх рівноможливих несумісних елементарних подій *n*, що утворюють повну групу: $P(A)=\frac{m}{n}$ (1.4.1).

Для кожної випадкової події $A\subset\Omega$ має місце така її основна властивість: $0\le P(A)\le 1$, оскільки $m=0,1,2,...=n$.

Причому, імовірність неможливої події дорівнює 0: $P(\varnothing)=$ $=0$; імовірність достовірної (вірогідної) події дорівнює 1: $P(\Omega)=1$.

Відносною частотою події *A* називають відношення числа випробувань *m*, в яких подія відбулась до загального числа проведених випробувань *n*: $W(A)=\frac{m}{n}$ (1.4.2).

Імовірність обчислюють з теоретичних міркувань, відносну частоту – після проведення випробування. Як і імовірність, відносна частота знаходиться в межах: $0 \le W(A) \le 1$.

Відносну частоту або число, близьке до неї, приймають за статистичну імовірність події.

Задачі

1.4.1. В конверті серед 100 фотокарток знаходиться одна розшукувана. З конверту навмання витягується 10 карток.

Знайти ймовірність того, що серед них виявиться потрібна.

Розв’язок.

Умовно розіб’ємо сто фотокарток на 10 блоків по 10 штук в кожному блоці. Таким чином, шукана фотокартка знаходиться в одному (m = 1) з 10 блоків (n = 10). Тоді імовірність події A – “потрібна фотокартка знаходиться серед 10 витягнутих” згідно класичного означення імовірності рівна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{10}.$$

1.4.2. При встановленні в механізм бракованої деталі і при перевірці її дієздатності весь механізм вийшов з ладу.

Визначити умову, при якій буде економічно вигідно проводити поштучний контроль вказаних деталей, якщо відомо, що вартість контролю кожної з них після їх виготовлення рівна M грн., вартість всього механізму N грн.; ймовірність виготовлення бракованої деталі – p і в механізм входить одна з цих деталей.

Чи буде економічно вигідно проводити поштучний контроль деталей, якщо собівартість механізму 2 грн., вартість контролю кожної деталі – 1 коп., а а) ймовірність виготовлення бракованої деталі – 0,01; б) ймовірність виготовлення бракованої деталі – 0,001?

Розв’язок.

Ймовірність бракованої деталі рівна $p = \frac{m}{n}$, де m – кількість бракованих деталей, n – кількість усіх деталей в механізмі. Отже, $n = \frac{m}{p}$, за умовою $m = 1$, отже, $n = \frac{1}{p}$.

Оскільки вартість контролю однієї деталі рівна M, то вартість перевірки всього механізму рівна $S = n \times M = \frac{1}{p}M$.

Умовою економічної доцільності проведення контролю є виконання нерівності:

$S < N$, або $p > \frac{M}{N}$. Підставивши необхідні дані отримаємо:

а) $P = 0{,}01$; $M = 1$; $N = 200$; $S = \frac{1}{0{,}01} \times 1 = 100 < 200.$ Отже, контроль проводити вигідно;

б) $P = 0{,}01$; $M = 1$; $N = 200$; $S = \frac{1}{0.001} \times 1 = 1000 > 200.$ Отже, контроль проводити невигідно.

1.4.3. Підкидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що випаде принаймні одна шістка, якщо відомо, що сума очок дорівнює 8?

Розв’язок.

Простір елементарних подій, коли сума очок рівна „8”, такий: $\Omega = (2;6),(6;2),(3;5),(5;3),(4;4)$. З них у двох подіях $(2;6)$ і $(6;2)$ випадає „6”. Згідно класичного означення імовірностей, імовірність даної події A рівна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{5}$.

1.4.4. Висячий замок з секретом має 4 шестикутні призми. Кожна призма повертається незалежно одна від другої навколо своєї осі. Бокові грані кожної призми пронумеровані від 1 до 6. Замок відкривається, якщо шляхом обертання призм на лицевій стороні замка буде набране відповідне (секретне) чотиризначне число.

Обчислити ймовірність того, що:

а) замок відкриється, якщо виявиться забутою остання цифра секретного числа, а замість неї на відповідній призмі буде набрана яка-небудь із можливих цифр;

б) замок відкриється, якщо виявляться забутими дві останні цифри, а замість них будуть набрані на відповідних призмах які-небудь дві цифри;

в) особа, яка не знає секрету зможе відкрити замок, набравши на призмах довільне чотиризначне число.

Розв’язок.

Нехай A – описана подія. а) Усіх можливих цифр на останній призмі може бути набрано 6 (усіх можливих наслідків випробувань рівне $n = 6$) і лише при одній певній цифрі замок відкриється (кількість випробувань m, що сприяють настанню події A рівне $m = 1$).

Отже, згідно класичного означення імовірностей $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{6}$;

б) Дві останні цифри можна вибрати $n = n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 6$ способами і лише один спосіб набору $m = 1$ буде відповідати даному коду. Отже, імовірність відкриття замка рівна $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{6 \cdot 6} = \dfrac{1}{36}$;

в) Чотири цифри можна вибрати $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 =$ $= 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ способами і лише при одному наборі цифр $m = 1$ буде відкритий замок. Отже, імовірність відкриття замка рівна: $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{1296}$.

1.4.5. В лотереї розігрується 1000 білетів. Серед них 2 виграші по 50 грн., 5 – 20 грн., 10 – 10 грн., 25 – 5 грн. Дехто купує 1 білет.

Знайти ймовірність:

а) виграшу не менше 20 гривень;

б) якого-небудь виграшу.

Розв'язок.

$1000 = 2_{50} + 5_{20} + 10_{10} + 25_5 + 958_{\text{прогр.}}$

а) Нехай A – шукана подія. Виграш не менше 20 гривень – це виграш у 20 гривень, який зустрічається $m_1 = 5$ раз і виграш у 50 гривень, який зустрічається $m_2 = 2$ рази, так що $m = m_1 + m_2$, $n = 1000$ – загальна кількість усіх білетів. Тоді

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5+2}{1000} = 0{,}007;$$

б) Нехай подія A означає який-небудь виграш. Число усіх можливих виграшів рівне $m = 42$. Отже,

$$P(A) = \frac{42}{1000} = 0{,}042\,.$$

1.4.6. Є шість відрізків, довжини яких відповідно рівні 2, 4, 6, 8, 10, 12 одиницям. Визначити імовірність того, що з допомогою взятих навмання трьох відрізків з даних шести можна побудувати трикутник.

Розв'язок.

Нехай A – подія, імовірність якої треба обчислити. Тоді $P(A) = \dfrac{m}{n}$ – згідно класичного означення імовірностей. Тут $n = C_6^3$ – загальна кількість комбінацій, які можна утворити з 3 елементів серед 6 елементів. Для того, щоб з 3 відрізків можна було побудувати трикутник, необхідно, щоб сума будь-яких двох його сторін була більшою за третю сторону.

Таких комбінацій сторін, сприятливих настанню події A, може бути 7:

(4;6;8), (4;8;10), (4;10;12), (6;8;10), (6;8;12), (6;10;12), (8;10;12), тобто $m = 7$.

Отже, $P(A) = \frac{7}{C_6^3} = \frac{7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = 0{,}35$.

1.4.7. В урні знаходяться червоні й зелені кулі. Ймовірність того, що навмання витягнуті три кулі будуть червоними становить 0,5. Яка мінімальна кількість куль в урні?

Розв'язок.

І спосіб.

Нехай подія A полягає в тому, що 3 витягнуті кулі є червоними. Нехай m – кількість червоних куль, k – кількість зелених куль в урні. Тоді $m + k$ – загальна кількість куль.

Згідно класичного означення імовірностей

$$P(A) = \frac{C_m^3}{C_{m+k}^3} = \frac{1}{2}.$$

Розписавши ліву частину рівняння, отримаємо:

$$\frac{C_m^3}{C_{m+k}^3} = \frac{m(m-1)(m-3)/3!}{(m+k)(m+k-1)(m+k-2)/3!} =$$

$$= \frac{m}{m+k} \cdot \frac{m-1}{m+k-1} \cdot \frac{m-2}{m+k-2} = \frac{1}{2}$$

або

$$\frac{m+k}{m} \cdot \frac{m+k-1}{m-1} \cdot \frac{m+k-2}{m-2} = 2.$$

Виділивши в кожному дробі цілу частину, отримуємо:

$$\left(1 + \frac{k}{m}\right) \cdot \left(1 + \frac{k}{m-1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k}{m-2}\right) = 2.$$

Очевидно, щоб рівняння мало розв'язок, необхідно, щоб кожний дріб у дужках був меншим одиниці. Отже, чим більше k, тим більше m. Тому спочатку шукаємо розв'язок для $k = 1$ – кількості зелених куль в урні. Підставивши $k = 1$ в формулу імовірності, отримуємо:

$$\frac{m}{m+1} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m-1} = \frac{1}{2}, \text{ або } \frac{m-2}{m+1} = \frac{1}{2}.$$

Розв’язавши рівняння, отримаємо m = 5. Отже, в урні 5 червоних і 1 зелена куля. Загальна кількість куль в урні рівна 6. Використавши даний підхід для різних імовірностей витягання трьох червоних куль при одній зеленій кулі k = 1 в урні отримаємо такий кількісний склад куль:

а) $P(A)=\dfrac{2}{3}$; m = 8; n = m + k = 9;

б) $P(A)=\dfrac{3}{4}$; m = 11; m + k = 12;

в) $P(A)=\dfrac{5}{6}$; m = 17; m + k = 18;

г) $P(A)=\dfrac{7}{8}$; m = 23; m + k = 24;

д) $P(A)=\dfrac{8}{9}$; m = 26; m + k = 27;

е) $P(A)=\dfrac{M}{M+1}$; m = (M+1)3 – 1; m + k = (M+1)3;

є) $P(A)=\dfrac{1}{4}$; m = 6; m + k = 7;

ж) $P(A)=\dfrac{7}{10}$; m = 9; m + k = 10;

з) $P(A)=\dfrac{5}{12}$; m = 7; k = 2; m + k = 9.

II спосіб.

Оскільки витягують три кулі, то уявно розіб’єм усі кулі в урні на трійки. Тоді згідно умови, імовірність того, що витягнута трійка куль є червоною, рівна: $P(A)=\dfrac{m}{n}=0{,}5$. Мінімальна кількість куль в урні буде тоді, коли $m=1$; $n=2$. Враховуючи те, що кулі виймаються трійками, загальна кількість куль в урні становить $n=2\cdot 3=6$. Серед шести куль повинна бути лише одна зелена куля, щоб вона попала в одну з двох трійок. Якщо будуть дві зелені кулі, то одна або дві зелені кулі можуть попасти в кожну з двох трійок і тому може не бути трійки лише з червоними кулями. Перевіримо це з допомогою формул комбінаторики. Нехай подія *A* – “3 витягнуті кулі є червоними”. Тоді згідно класичного означення $P(A) = \dfrac{m}{n}$, де *n* – рівне числу комбінацій якими можна вибрати 3 будь-які кулі серед 6 куль: $n = C_6^3$; *m* – рівне числу комбінацій якими можна вибрати 3 червоні кулі серед 5 червоних куль: $m = C_5^3$. Отже, $P(A) = \dfrac{C_5^3}{C_6^3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!} = \dfrac{1}{2}$.

а) Коли кількість трійок $N = 3$, то кількість куль в урні $n = 3 \cdot 3 = 9$. Якщо в урні є тільки одна зелена куля ($k = 1$), то вона міститься лише в одній трійці, дві інших будуть лише з червоних куль. Отже $M = 2$, $P(A) = \dfrac{2}{3}$, $m = 9 - 1 = 8$ (кількість червоних куль).

б) Коли $N = 4$, то кількість куль в урні $n = 4 \cdot 3 = 12$. При ($k = 1$) одній зеленій кулі в урні, три трійки куль ($M = 3$) будуть лише червоними. Отже $P(A) = \dfrac{3}{4}$, $m = 12 - 1 = 11$.

е) По індукції, для $P(A) = \dfrac{M}{M+1}$, $k = 1$, $m = (M + 1) \cdot 3 - 1$, $m + k = (M + 1) \cdot 3$.

1.4.8. Серед *N* виробів знаходиться *M* бракованих. Навмання беруть n_1 виробів.

Яка ймовірність того, що серед них є m_1 бракованих виробів ($m_1 < M$)?

Розв’язок.

Нехай подія *A* полягає в тому, що витягнуто m_1 бракованих виробів.

Запишемо умову задачі наступним чином:

$N = M_{(брак)} + (N - M) -$ придатних;

$n_1 = m_{1(брак)} + (n_1 - m_1) -$ придатних.

Імовірність події A обчислимо згідно класичного означення імовірності: $P(A) = \dfrac{m}{n}$, де n – загальна кількість усіх можливих наслідків випробування, які полягають у виборі n виробів серед N виробів і оскільки має значення набір конкретних елементів у групі, а не порядок їх розташування, то n рівне числу комбінацій, які можна утворити з n_1 елементів серед N елементів: $n = C_N^{n_1}$; m – число наслідків випробувань, що сприяють настанню події A. Настанню події A сприяють $m^{/}$ наслідків випробувань – вибору m_1 бракованих виробів серед M бракованих і $m^{//}$ наслідків випробувань – вибору $(n_1 - m_1)$ придатних виробів серед $(N - M)$ придатних. Отже, $m^{/} = C_M^{m_1}$, $m^{//} = C_{N-M}^{n_1 - m_1}$.

Враховуючи узагальнене правило множення $m = m^{/} \times$ $\times m^{//} = C_M^{m_1} \cdot C_{N-M}^{n_1 - m_1}$.

Остаточно, $P(A) = \dfrac{C_M^{m_1} \cdot C_{N-M}^{n_1 - m_1}}{C_N^{n_1}}$.

1.4.9. В ящику є 4 білих і 5 червоних кульок. З ящика навмання одна за одною виймають всі кульки, які знаходяться в ньому і не дивлячись відкладають в сторону.

Знайти ймовірність того, що остання вийнята кулька буде білою.

Розв’язок.

І спосіб.

Нехай A – шукана подія, яка полягає в тому, що остання куля біла. Отже, склад попередньо витягнутих куль такий: 3б + 3ч = 8. Тоді імовірність події A рівна $P(A) = \dfrac{m}{n}$, де

$n = C_9^8$, $m = m_1 \cdot m_2$, де $m_1 = C_4^3$ – кількість комбінацій, якими можна вибрати 3 білі кулі серед 4 куль, $m_2 = C_5^5$ – кількість комбінацій, якими можна вибрати 5 чорних куль серед 5 куль. Остаточно, $P(A) = \frac{C_4^3 \cdot C_5^5}{C_9^8} = \frac{C_4^1 \cdot 1}{C_9^1} = \frac{4}{9}$.

II спосіб.

Дане випробування замінимо таким, що буде полягати у зворотньому виборі кульок. Нехай з ящика вибрані всі 9 кульок і не дивлячись одну кладуть назад у ящик. Тоді за класичним означенням імовірності $P(A) = \frac{m}{n}$, де усіх наслідків випробувань рівне числу кульок – n = 9 і сприятливих до настання події A рівне числу білих кульок – m = 4. Отже $P(A) = \frac{4}{9}$.

1.4.10. З ящика, який вміщує три білети з номерами 1, 2, 3, виймають по одному всі білети. Припускається, що всі послідовності номерів білетів мають однакові ймовірності.

Знайти ймовірність того, що хоч у одного білета порядковий номер співпаде з власним.

Розв’язок.

Число усіх можливих подій n рівне числу перестановок з трьох елементів: n = 3! = 6. Це така алгебра подій: {123; 132 ;213; 231; 312; 321}. З них чотири події (I-ша, II-га, III-тя, IV-та) сприяють настанню шуканої події A, так що m = 4. Тоді $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

1.4.11. Дитина грається з чотирма буквами розрізної азбуки А, А, М, М. Яка ймовірність того, що при випадковому розміщенні букв в ряд вона одержить слово “МАМА”?

Розв'язок.

Нехай A – шукана подія, яка полягає в тому, що серед чотирьох букв буде по дві букви "М" і "А". Використаємо класичну формулу для знаходження $P(A)=\frac{m}{n}$, де n – загальна кількість способів, якими можна переставити чотири букви у слові, тобто кількості перестановок з чотирьох елементів: $n = 4!$. Кількість способів m, сприятливих для настання події A рівна добутку числа способів $m_1 = 2!$, якими можна вибрати "М" з двох "М" і числа способів $m_2 = 2!$, якими можна вибрати "А" з двох "А": $m = m_1 \cdot m_2$. Отже,

$$P(A)=\frac{2!\cdot 2!}{4!}=\frac{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{6}.$$

1.4.12. Букви, які утворюють слово "ОДЕССА" написані по одній на шести картках; картки перемішані і покладені в пакет.

Чому дорівнює ймовірність того, що, витягуючи картки по одній і записуючи відповідні букви в ряд зліва направо ми прочитаємо слово (кількість витягнутих карток рівна числу букв в слові):

а) САД;

б) АСС;

в) СОДА;

г) ОДЕССА. Яка ймовірність того, що вибравши три букви, з них можна скласти слово "ОДА"?

Вказівка. Задачу розв'язати двома способами: а) за схемою повернених і б) неповернених куль.

Розв'язок.

Перший спосіб.

Нехай A – описана подія.

I. Букви повертають назад.

а) Слово "САД" складається з трьох букв. Слово "ОДЕССА" складається з шести букв. Усіх слів з трьох букв можна утворити $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ способами, де $n_1 = 6$ (число способів, якими можна вибрати першу букву з шести), $n_2 = 6$ (число способів, якими можна вибрати другу букву з шести букв), $n_3 = 6$ (число способів, якими можна вибрати третю букву з шести букв). Нехай дві букви "С" в слові "ОДЕССА" пронумеровані №1 і №2. Тоді слово "САД" можна скласти двома способами, вибравши "С" під №1 чи "С" під №2. Отже, $m = 2!$. Остаточно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2!}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{2}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{108}$.

б) Імовірність складання слова "АСС" рівна $P(A) = \frac{m}{n}$, де $n = 6 \cdot 6 \cdot 6$, а $m = m_1 \cdot m_2$, де $m_1 = 2!$ – число способів вибору першої букви "С", $m_2 = 2!$ – число способів вибору другої букви "С". Таким чином, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2! \cdot 2!}{6^3} = \frac{1}{54}$.

в) Імовірність складання слова "СОДА" рівна $P(A) = \frac{m}{n}$, де $n = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$, $m = 2!$ Остаточно $P(A) = \frac{2!}{6^4} = \frac{1}{648}$.

г) Імовірність складання слова "ОДЕССА" рівна $P(A) = \frac{m}{n}$, де $n = 6^6$, $m = m_1 \cdot m_2 = 2! \cdot 2! = 4$;

$$P(A) = \frac{2! \cdot 2!}{6^6} = \frac{1}{11664}.$$

II) Букви не повертають.

а) Імовірність складання слова "САД" за класичним означенням імовірності рівна: $P(A) = \frac{m}{n}$, де $n = A_6^3$ – оскільки для складання певного слова важливий порядок розташування букв у слові; $m = 2$, оскільки у слові "ОДЕССА" є дві букви "*С*", тому слово "САД" можна скласти двома способами, вибравши одне з двох "*С*".

Отже, $P(A)=\dfrac{2}{A_6^3}=\dfrac{2}{6\cdot5\cdot4}=\dfrac{1}{60}$.

б) Імовірність складання слова "АСС" рівна:

$P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{2}{A_6^3}=\dfrac{2}{6\cdot5\cdot4}=\dfrac{1}{60}$, де m = 2, оскільки слово "АСС" можна скласти двома способами, переставивши різні "С".

в) Імовірність складання слова "СОДА" рівна:

$P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{2}{A_6^4}=\dfrac{2}{6\cdot5\cdot4\cdot3}=\dfrac{1}{180}$, де m = 2, оскільки "С" з шести букв, де є два "С" можна вибрати двома способами.

г) Усіх можливих слів (навіть беззмістовних), що складаються з шести букв, рівне числу перестановок з шести елементів $n=6!$. Сприятливих випадків для утворення слова "ОДЕССА" при даному наборі букв рівна $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{2!}{6!}=$

$$=\frac{1\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=\frac{1}{360}.$$

Для того, щоб з вибраних букв можна було скласти слово "ОДА", необхідно, щоб були вибрані три букви: "О", "Д" і "А". Число усіх можливих наслідків випробування (вибір трьох букв з шести) рівне числу комбінацій з 3 елементів серед 6: $n_1=C_6^3$. І оскільки лише одним способом можна скласти слово "ОДА", тобто першою повинна бути буква О, другою – Д, третьою – А, то m = 1. Остаточно, $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{20}$.

1.4.13. В записаному телефонному номері 135–3... три останні цифри стерлись.

В припущенні, що всі комбінації трьох стертих цифр рівноможливі, знайти ймовірність подій:

A = {стерлись різні цифри, відмінні від 1, 3, 5},

B = {стерлись однакові цифри},

Розв'язок.

Усіх трьох останніх цифр може бути $n=10\times10\times10=1000$.

Число цифр m сприятливих настанню події A рівне числу розміщень з 3 елементів серед 7 елементів $(7=10-3): m=$ $=A_7^3$. Отже, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A_7^3}{1000}=\frac{7\times6\times5}{1000}=0{,}21$.

Число m сприятливих настанню події B рівне 10, оскільки однакових цифр може бути 10. Отже, $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{10}{1000}=$ $=0{,}01$.

1.4.14. Яка ймовірність того, що чотиризначний номер випадково взятого автомобіля у великому місті:

а) має всі цифри різні?

б) має тільки дві однакові цифри?

в) має дві пари однакових цифр?

г) має тільки три однакові цифри?

д) має всі цифри однакові?

Розв'язок.

Всіх чотиризначних номерів можна утворити $n=10\times$ $\times10\times10\times10=10^4$ способами.

а) Номерів, чотири цифри якого різні, можна утворити $m=A_{10}^4$ способами. Отже, імовірність того, що чотиризначний номер має всі цифри різні, рівна згідно класичного означення імовірності $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A_{10}^4}{10^4}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{10^4}=\frac{5040}{10000}=0.504$.

б) Якщо в чотиризначному номері 2 однакові цифри, то дві інші відмінні від попередніх і різні. Одну з однакових цифр можна вибрати десятьма способами, другу з однакових цифр – одним способом, оскільки вона повинна бути такою, як перша. Дві інші різні цифри з дев'яти можна вибрати C_9^2 способами. Усіх наборів цифр у чотиризначному номері з двома однаковими цифрами можна утворити $\frac{4!}{2!}$ способами:

$$\frac{4!}{2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2} = 12.$$

Таким чином,

$$m = 10\cdot 1\cdot C_9^2\cdot 12; P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10\cdot 1\cdot C_9^2\cdot 12}{10^4} = \frac{10\cdot 1\cdot 9\cdot 8\cdot 12}{2\cdot 10^4} = .$$

$$= \frac{4320}{10000} = 0{,}432.$$

в) Якщо у числі дві пари однакових цифр, то ці дві цифри обов'язково різні. З десяти різних цифр їх можна вибрати C_{10}^2 способами. Чотири різні цифри можна переставити 4! способами. Враховуючи те, що у числі є дві пари однакових цифр, то число перестановок з чотирьох елементів буде

$$\frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 2} = 6. \text{ Тоді } m = C_{10}^2\cdot 6 = \frac{10\cdot 9\cdot 6}{2} = 270.$$

Отже, $P(A) = \frac{270}{10000} = 0{,}027.$

г) Якщо у чотиризначному числі є три однакові цифри, то першу цифру можна вибрати десятьма способами, II і III цифри одним способом, а четверту – девятьма способами (бо залишиться дев'ять цифр). Крім того, четверта цифра може стояти на одному з чотирьох місць (розрядів) у чотиризначному числі. Отже, $m = 10\cdot 1\cdot 1\cdot 9\cdot 4 = 360$, а $P(A) =$

$$= \frac{360}{10000} = 0{,}036.$$

д) Якщо у чотиризначному числі всі цифри однакові, то першу цифру можна вибрати десятьма способами, а кожні три наступні цифри – одним способом. Отже, $m = 10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 10$, а $P(A) = \dfrac{10}{10000} = 0{,}001$.

1.4.15. Букет квітів складається з 5 ромашок і 10 волошок. З цього букету випадковим чином складають букетики по три квітки в кожному. Знайти імовірність того, що в кожному букетику буде по одній ромашці.

Розв’язок.

Нехай *A* – шукана подія.

З 15 квіток (5 + 10=15) можна скласти 5 букетів, в кожному з яких є по 3 квітки. Перший букет можна скласти $n_1 = C_{15}^3$ способами, другий – $n_2 = C_{12}^3$ способами, третій – $n_3 = C_9^3$ способами, четвертий – $n_4 = C_6^3$ способами. Згідно узагальненого правила добутку число всіх можливих букетів рівне: $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = C_{15}^3 \cdot C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 == \dfrac{15!}{(15-3)! \cdot 3!} \times$

$$\times \frac{12!}{(12-3)! \cdot 3!} \cdot \frac{9!}{(9-3)! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{15!}{12!} \cdot \frac{12!}{9!} \cdot \frac{9!}{6!} \cdot \frac{6!}{3!} \cdot \frac{1}{(3!)^4} = \frac{15!}{(3!)^5}.$$

Дві волошки для кожного з п’яти букетів можна вибрати так: для першого букета $m_1^{/} = C_{10}^2$ способами, для другого – $m_2^{/} = C_8^2$ способами, для третього $m_3^{/} = C_6^2$ способами, для четвертого – $m_4^{/} = C_4^2$ способами, для п’ятого – $m_5^{/} = C_2^2$ способами. Загальна кількість способів вибору волошок рівна $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4 \cdot m_5$. Кожному з п’яти букетів з двох волошок можна підібрати будь-яку ромашку так: першому букету $m_1^{//} = 5$ (п’ятьма) способами, оскільки всього є 5 ромашок, другому букету – $m_2^{//} = 4$ способами, третьому букету – $m_3^{//} = 3$ способами, четвертому – $m_4^{//} = 2$ (двома) способами, п’ятому – $m_5^{//} = 1$ способом, так що $m^{//} = m_1^{//} \cdot m_2^{//} \cdot m_3^{//} \times$

$\times m_4^{//} \cdot m_5^{//}$. Загальна ж кількість способів вибору букетів сприятливих для настання події A рівна:

$$m = m^{/} \cdot m^{//} = C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= 5! \cdot \frac{10!}{(10-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} \times$$

$$\times \frac{2!}{(2-2)! \cdot 2!} = 5! \cdot \frac{10!}{8! \cdot 2!} \cdot \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{0! \cdot 2!} = 5! \cdot \frac{10!}{(2!)^5}.$$

Тоді шукана імовірність рівна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5! \cdot 10! \cdot (3!)^5}{(2!)^5 15!} = \frac{5! \cdot 10!}{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} \cdot \left(\frac{2! \cdot 3!}{2!} \right)^5 =$$

$$= \frac{5! \cdot 3^5}{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 27}{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{81}{1001} = 0{,}08092.$$

1.4.16. В урні знаходиться n білих і n червоних куль. Всі кулі з урни витягають парами, причому витягнуті кулі назад не повертають. Яка імовірність того, що всі пари будуть складатися з куль різного кольору?

Розв'язок.

Нехай A – подія, яка полягає в тому, що одна куля білого і одна куля червоного кольорів. В урні всього є $n_б + n_ч = 2\ n$ куль. З $2n$ куль можна утворити n пар куль. Загальна кількість способів n, якими можна вибрати 2 кулі з усіх куль рівна добутку: n_1 – кількості способів, якими можна вибрати 2 кулі серед $2n$ куль, тобто кількості комбінацій, які можна утворити з 2 елементів серед $2n$ елементів – $n_1 = C_{2n}^2$; n_2 – кількості способів, якими можна вибрати 2 кулі серед $(2n – 2)$ куль, що залишились, тобто кількості комбінацій, які можна утворити з 2 елементів серед $(2n – 2)$ елементів – $n_2 = C_{2n-2}^2$; n_3 – кількості комбінацій, які можна утворити з 2 елементів серед решти $(2n – 4)$ елементів, ... n_n – кількості комбінацій, які можна утворити з 2 елементів серед 2 елементів – C_2^2. Таким чином, $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ...n_n$. Кількість способів, сприятливих настанню події A згідно узагальненого правила добутку рівна добутку: m_1' – числа способів (комбінацій) якими можна вибрати 1 білу кулю серед n білих куль $m_1^/ = C_n^1$ і $m_1^{//}$ – числа способів (комбінацій), якими можна вибрати 1 чорну кулю серед n чорних куль $m_1^{//} = C_n^1$ – для першої пари куль; $m_2^/$ – числа способів (комбінацій), якими можна вибрати 1 білу кулю серед (n – 1) білих куль $m_2^/ = C_{n-1}^1$ і $m_2^{//}$ – числа способів (комбінацій), якими можна вибрати 1 чорну кулю серед (n – 1) чорних куль $m_2^{//} = C_{n-1}^1$ у другій парі куль; $m_3^/ = C_{n-2}^1$ – числа комбінацій, якими можна вибрати 1 білу кулю серед n – 2 білих куль і $m_3^{//} = C_{n-2}^1$ – числа комбінацій, якими можна вибрати 1 чорну кулю серед n – 2 чорних куль у третій парі куль і т. д., поки $m_n^/ = C_1^/$ і $m_n^{//} = C_1^1$.

Отже, $m = m_1^/ \cdot m_1^{//} \cdot m_2^/ \cdot m_2^{//} \cdot m_3^/ \cdot m_3^{//} \cdot ...m_n^/ \cdot m_n^{//}$.

Остаточно, $P(A) = \dfrac{m}{n} =$

$$= \frac{C_n^1 \cdot C_n^1 \cdot C_{n-1}^1 \cdot C_{n-1}^1 \cdot C_{n-2}^1 \cdot C_{n-2}^1 \cdot C_{n-3}^1 \cdot C_{n-3}^1 \cdot C_{n-4}^1 \cdot C_{n-4}^1 \cdot ...C_n^1 \cdot C_n^1}{C_{2n}^2 \cdot C_{2n-2}^2 \cdot C_{2n-4}^2 \cdot C_{2n-6}^2 \cdot C_{2n-8}^2 ... \cdot C_2^2} =$$

$$= \frac{n \cdot n \cdot (n-1)(n-1)(n-2)(n-2)(n-3)(n-3)(n-4)(n-4) \cdot ...1 \cdot 1}{\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!} \cdot \frac{(2n-2)!}{2!(2n-4)!} \cdot \frac{(2n-4)!}{2!(2n-6)!} \cdot \frac{(2n-6)!}{2!(2n-8)!} \cdot \frac{(2n-8)!}{2!(2n-10)!} ... \cdot \frac{(2)!}{2!(2-2)!}} =$$

$$= \frac{[n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \cdot ...1]^2 \cdot 2^n}{(2n)!} = \frac{(n!)^2 \cdot 2^n}{(2n)!}.$$

1.4.17. Колода з 36 карт ретельно перемішана (тобто всі можливі розміщення карт рівноймовірні).

Знайти ймовірності подій:

A = {чотири тузи розміщені поруч},

B = {місця розміщення тузів утворюють арифметичну прогресію з кроком 7}.

Розв'язок.

а) Схематично розташування тузів можна зобразити так (див. рис 1.4.1а). Використаємо $P(A)=\dfrac{m}{n}$,

$$\underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\bullet}_{36}$$

Рис. 1.4.1а.

де n = 36! – числу перестановок з 36-ти карт. Число наслідків випробування, що сприяють настанню події A, обчислимо так: чотири тузи можна розмістити поруч m_1 = 4! способами; відповідно, решту 36 – 4 карт можна розмістити m_2 = (36 – 4)! способами. Крім цього, блок з чотирьох карт може знаходитись на одному з m_3=(36 – 3) місць. Тоді згідно узагальненого правила добутку $m=m_1\cdot m_2\cdot m_3$ і $P(A)$ рівне:

$$P(A)=\frac{4!(36-4)!(36-3)}{36!}=\frac{4!32!33}{36!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot32!\cdot33}{32!\cdot33\cdot34\cdot35\cdot36}=$$

$$=\frac{1}{1785}\approx 0{,}0005602.$$

б) Схематично розташування тузів можна зобразити так:

1 8 15 22 29 36

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

Рис. 1.4.1б.

(див. рис. 1.4.1б), де цифрами позначені номера місць. Четвертий туз (а відповідно і три попередні) може займати одне з п'ятнадцяти місць: m_3 = 36 – 21 = 15; m_1 = 4!; m_2 = (36 – 4)!; n = = 30! аналогічно до п. а).

Отже,

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{m_1m_2m_3}{n}=\frac{4!\cdot32!\cdot15}{36!}=\frac{4!\cdot15}{33\cdot34\cdot35\cdot36}=\frac{1}{3927}\approx 0{,}0002317\cdot$$

1.4.18. П'ять різних кульок випадковим чином розкидаються по п'яти лунках, кожна кулька попадає в ту чи іншу лунку з однаковою імовірністю і незалежно від других (в одну лунку може попасти будь-яке число кульок). Знайти імовірність того, що в кожній лунці виявиться по одній кульці.

Розв'язок.

Позначимо через A – подію, імовірність якої необхідно обчислити. Скористуємось класичним означенням імовірності $P(A) = \frac{m}{N}$. Загальна кількість усіх способів N, якими можна розкидати n кульок по n урнах обчислюється так: перша кулька може попасти в n лунок, друга – в n лунок..., n-а кулька аналогічно, може попасти в n лунок, оскільки в кожній лунці може бути від однієї до n кульок. Використовуючи узагальнене правило добутку отримаємо: $N = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots n} = n^n$.

Це формула розміщень з повтореннями $\overline{A}_n^n$.

Число випробувань сприятливих настанню події A обчислюється так: перша кулька може попасти в n лунок; друга кулька в $(n-1)$ лунку, оскільки одна лунка вже зайнята: третя в $(n-2)$ лунку, оскільки вже 2 лунки зайняті; четверта – в $(n-3)$ лунок; остання – в одну лунку, оскільки всі попередні лунки зайняті. Згідно узагальненого правила добутку $m = n \cdot (n-1)(n-2)(n-3) \cdot \ldots 1 = n!$.

Число m можна також розглядати як кількість перестановок з n елементів, тобто $m = n!$.

Таким чином, $P(A) = \frac{n!}{n^n}$; поклавши $n = 5$, отримаємо:

$$P(A) = \frac{5!}{5^5} = \frac{4! \cdot 5}{5^4 \cdot 5} = \frac{4!}{5^4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{625} = \frac{24}{625}.$$

1.4.19. (Розподіл куль по урнах). Є r різних куль, які випадково розкидаються по n урнах. В одній і тій же урні можуть знаходитись декілька куль і навіть всі кулі.

Знайти ймовірність того, що в першу урну попадуть рівно r_1 куль, в другу – r_2 куль і т. д. , в n-у урну – r_n куль, $r_1 + r_2 + {}$ $+ \ldots + r_n = r$.

Розв’язок.

Нехай A – шукана подія.

Кожну кулю можна кинути в одну з N урн, тобто N способами, відповідно r куль можна розкидати по N урнах N^r різними способами. Отже, $n = N^r$. Число наслідків випробувань m, що сприяють настанню події A можна обчислити таким чином. Число способів, якими можна вибрати r_1 куль серед r куль рівне $m_1 = C_r^{r_1}$; число способів, якими можна вибрати r_2 куль серед решти $r - r_1$ куль рівне $m_2 = C_{r-r_1}^{r_2}$, і т.д.; число способів, якими можна з $r - (k_1 + k_2 + \ldots k_{N-1}) = k_N$ вибрати k_N, рівне $m_N = C_{k_N}^{k_N} = 1$, так що

$$m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots m_N = C_r^{k_1} \cdot C_{r-k_1}^{k_2} \cdot C_{r-(k_1+k_2)}^{k_3} \cdot \ldots C_{r-(k_1+k_2+\ldots k_{N-2})}^{k_{N-1}} \cdot 1 =$$

$$= \frac{r!}{k_1!(r-k_1)!} \cdot \frac{(r-k_1)!}{k_2!\left[r-(k_1+k_2)\right]!} \cdot \frac{\left[r-(k_1+k_2)\right]!}{k_3!\left[r-(k_1+k_2+k_3)\right]!} \cdot \ldots$$

$$\cdot \ldots \frac{\left[r-(k_1+k_2+\ldots k_{N-2})\right]!}{k_{N-1}!k_N!} = \frac{r!}{k_1!k_2!k_3!..k_{N-1}!k_N!} = \frac{r!}{\prod\limits_{i=1}^{N} k_i!}.$$

Тоді, $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{r!}{N^r \prod\limits_{i=1}^{N} k_i!}$.

1.4.20. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 чоловік припадуть на різні місяці року.

Розв’язок.

Нехай A – описана подія, ймовірність, якої необхідно знайти.

Згідно класичного означення імовірностей: $P(A)=\frac{m}{n}$, де n – загальна кількість способів, якими можна розставити 12 днів народження по 12 місяцях, яка рівна $n=\underbrace{12\cdot 12\cdot ...12}_{12}=$ $=12^{12}$, оскільки один день народження можна розставити по дванадцяти місяцях 12-ма способами, n – рівне числу розміщень з повтореннями або $n=\overline{A}_n=12^{12}$. Число способів m, які сприяють настанню події A, рівне числу розміщень з одного елементу серед 12 елементів, тобто числу перестановок з 12 елементів: m=12!.

Отже,

$$P(A)=\frac{12!}{12^{12}}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12\cdot 12}\approx 0{,}0000537\cdot$$

1.4.21. У ліфті 6 пасажирів, ліфт зупиняється на 11-ти поверхах. Яка імовірність того, що жодні два пасажири не вийдуть на тому самому поверсі?

Розв'язок.

Нехай A – шукана подія, імовірність якої треба обчислити. Перший пасажир може вийти на кожному з 11 поверхів, тобто $n_1=11$-ма способами, кожний наступний i-тий пасажир теж може вийти на 11-ти поверхах, тобто $n_i=11$-ма способами. Отже, загальна кількість способів n, якими можуть вийти шість пасажирів рівна: $n=n_1\cdot n_2\cdot ...n_6=\underbrace{11\cdot 11\cdot ...11}_{6\,разів}=11^6$, що рівне числу розміщень з повтореннями $\overline{A}_n^k=\overline{A}_{11}^6=11^6$. Оскільки 6 пасажирів можуть вийти на 6-ти різних поверхах з 11-ти поверхів, причому для пасажира важливий номер поверху на якому він вийде, тобто порядок розташування елементів у групі, то число способів m сприятливих для настання події A рівне числу розміщень з 6-ти елементів серед 11 елементів, тобто $m=A_{11}^6$. Таким чином,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A_{11}^{6}}{11^{6}}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{11^{6}}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{11^{5}}\approx 0{,}18777 \cdot$$

1.4.22. В ліфт семиповерхового будинку на першому поверсі зайшло троє людей. Кожна з них з однаковою ймовірністю виходить на будь-якому поверсі, починаючи з другого.

Знайти ймовірність наступних подій:

A = {всі пасажири вийдуть на четвертому поверсі};

B = {всі пасажири вийдуть одночасно (на одному і тому ж поверсі)};

C = {всі пасажири вийдуть на різних поверхах}.

Розв'язок.

Задача аналогічна до розкидання кульок по урнах. Роль урн відіграють поверхи, роль кульок – люди.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_3^3}{6^3}=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216},$$

або $P(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)$, де події A_1, A_2, A_3 означають, що перший, другий і третій пасажири вийшли на четвертому поверсі, відповідно. Оскільки події A_1, A_2, A_3 незалежні, то

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}.$$

Оскільки поверхів 6, то ймовірність події B – вийти на одному і тому ж поверсі рівна $P(B)=\frac{6}{6^3}=\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}$.

Для події C число способів якими можна розподілити трьох пасажирів по шести поверхах рівне числу комбінацій, які можна утворити з трьох елементів серед шести елементів: $m=C_6^3$, отже, $P(C)=\frac{C_6^3}{6^3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 6^3}=\frac{20}{216}=\frac{5}{54}$.

1.4.23. У групі є r студентів. Яка ймовірність того, що принаймні у двох з них збігаються дні народження?

Розв’язок.

Нехай A – шукана подія, ймовірність якої треба обчислити. Тоді протилежна подія $\overline{A}$ полягає в тому, що всі r студентів народилися в різні дні року. З рівності $P(A)+P(\overline{A})=1$ шукана імовірність $P(A)=1-P(\overline{A})$. Імовірність $P(\overline{A})=\dfrac{m}{n}$, де n – загальна кількість усіх наслідків випробувань рівна $n=\underbrace{365\cdot 365\cdot ...365}_{r}=365^r$ (схема розкидання r куль по N = = 365 урнах) або число розміщень з повтореннями $\overline{A}_{365}^{r}=$ $=365^r$; m – число розміщень з r елементів серед N = 365 елементів: $m=A_{365}^{r}$.

Отже,

$$P(A)=1-\frac{A_{365}^{r}}{365^r}=1-\frac{365\cdot 364\cdot 363\cdot ...(365-r+1)}{365^r}=$$
$$=1-\frac{364\cdot 363\cdot ...(366-r)}{365^{r-1}}.$$

1.4.24. n осіб, серед яких є A і B, шикуються в шеренгу у будь-якому порядку. Яка імовірність того, що між A і B стане рівно r осіб?

Розв’язок.

Нехай A – шукана подія, імовірність якої треба обчислити. Зобразимо схематично (рис. 1.4.2) дану подію:

$$\overbrace{\circ\,\circ\ldots\bullet\,\underbrace{\circ\,\circ\ldots\circ\,\circ}_{r}\,\bullet\,\circ\,\circ\,\circ\,\circ\,\circ}^{n}.$$

Рис. 1.4.2.

Імовірність події A обчислимо за класичним означенням імовірності: $P(A)=\dfrac{m}{N}$, де $N = n!$ – рівне числу перестановок з n елементів; m – число способів, якими можна переставити n елементів, так щоб між двома елементами було r елементів. Два елементи A і B можна переставити $m_1 = 2! = 2$ способами, решту $(n – 2)$ елементів можна переставити $m_2 = (n-2)!$ способами. Крім того, якщо A займає будь-яке місце в черзі, то B займає будь-яке з $m_3 = (n-1-r)$ місць. Отже, згідно узагальненого правила добутку $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$.

Отже, $P(A) = \dfrac{2 \cdot (n-2)! \cdot (n-1-r)}{n!} = \dfrac{2(n-2)!(n-1-r)}{(n-2)!(n-1)n} =$

$$= \frac{2(n-1-r)}{(n-1)n}.$$

1.4.25. A, B і ще вісім людей стоять в черзі. Визначити ймовірність того, що A і B відділені один від другого трьома особами.

Розв'язок.

Розв'язок у попередній задачі.

Тут $n = 2 + 8 = 10$; $r = 3$.

Отже, $P(A) = \dfrac{2 \cdot (10-2)! \cdot (10-1-3)}{10!} = \dfrac{2 \cdot 8! \cdot 6}{10!} = \dfrac{2 \cdot 8! \cdot 6}{8! \cdot 9 \cdot 10} = \dfrac{2}{15}$.

1.4.26. З послідовності чисел 1, 2, ... , n навмання вибирають два числа. Яка ймовірність того, що: а) одне з них менше k, а друге більше k, де $1 < k < n$ – довільне ціле число? б) обидва числа менші ніж k?

Розв'язок.

Нехай $P(A)$ – шукана подія. Згідно класичного означення імовірності $P(A) = \dfrac{m}{n}$, де n – загальне число способів, якими можна вибрати два числа з N чисел: $n = C_N^2$.

а) Серед усіх N чисел $k – 1$ числа менші, ніж k, одне число рівне k і $N – k$ більші за k. Отже, вибирається одне число з $k –$

– 1 чисел $m_1 = k - 1$ способами і одне число з N – k чисел $m_2 = N - k$ способами. Тому згідно узагальненого правила добутку $m = m_1 \cdot m_2 = (k-1)(N-k)$. Таким чином:

$$P(A) = \frac{m_1 \cdot m_2}{n} = \frac{(k-1)(N-k)}{C_N^2} = \frac{2(k-1)(N-k)}{N(N-1)}.$$

б) чисел менших, ніж k є k – 1. Отже $m = C_{k-1}^2$, оскільки для настання події A, важливим є лише набір елементів, а не порядок їх розташування. Отже,

$$P(A) = \frac{C_{k-1}^2}{C_N^2} = \frac{(k-1)(k-2)}{N(N-1)}.$$

1.4.27. Товариство з N чоловік сідає за круглий стіл.

Знайти ймовірність того, що дві певні особи виявляться поруч.

Розв'язок.

Обчислимо імовірність шуканої події A за класичним означенням імовірності: $P(A) = \frac{m}{n}$, де n – загальна кількість способів, якими можна розмістити N людей, рівна числу перестановок з N елементів: $n = N!$

Обчислимо число способів m, сприятливих для настання події A. Кожного з двох людей можна розмістити на $m_1 = N$ місцях, оскільки стіл круглий і двох людей можна посадити поруч $m_2 = 2$ способами, отже, решту N – 2 людей можна розмістити $m_3 = (N-2)!$ способами. Отже, $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 2N(N-2)!$, так що

$$P(A) = \frac{2N(N-2)!}{N!} = \frac{2N(N-2)!}{(N-2)!(N-1)N} = \frac{2}{(N-1)}.$$

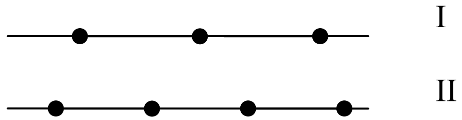
1.4.28. На деякій прямій взято 3 точки, а на паралельній до неї прямій – 4 точки. Навмання вибирають три точки.

Знайти ймовірність того, що вони будуть вершинами трикутника?

Розв'язок.

Нехай подія *A* полягає в тому, що вибрані три точки будуть вершинами трикутника. Подія *A* відбудеться лише в тому випадку, коли буде обрана 1 точка на одній прямій і дві точки на паралельній до неї прямій.

Зобразимо це схематично:



Число способів, якими можна вибрати одну точку на I прямій рівне $m_1' = C_3^1$, число способів якими можна вибрати дві точки на II прямій рівне $m_2' = C_4^2$. Отже, згідно узагальненого правила добутку число способів m', якими можна здійснити такий вибір рівне $m' = m_1' \cdot m_2'$. Трикутник також можна побудувати, якщо вибрати одну точку на II прямій і дві точки на першій. Число способів, якими можна здійснити такий вибір рівне $m'' = m_1'' \cdot m_2'' = C_4^1 \cdot C_3^2$. Тоді згідно правила суми число способів сприятливих до настання події *A* рівне $m = m' + m''$. Загальне число способів *n*, якими можна вибрати три точки з 7 (3 + 4 = 7) рівне числу комбінацій, якими можна вибрати 3 елементи серед 7 елементів: $n = C_7^3$. Тоді згідно класичного означення ймовірності:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_3^1 \cdot C_4^2 + C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{\left(3 \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} + 4 \cdot 3\right) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{30}{35} = 0{,}8571 \cdot$$

1.5 Геометричне означення імовірності

Коли у випробуванні є нескінченне число наслідків випробувань, класичне означення імовірності не може бути застосоване. Тому вводять геометричну імовірність, як імовірність попадання події (точки) в область (відрізка, частину площини, об'єм):

$$P = \frac{mesg}{mesG} \qquad (1.5.1),$$

де *mes* – міра довжини, площі, об'єму, *g* – частина області *G*.

Задачі

1.5.1. Два судна повинні підійти до одного причалу. Появи суден – незалежні випадкові події, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна – 1 год., а другого – 2 години.

Розв'язок.

Позначимо час приходу до причалу першого судна через x, другого судна – через y. Оскільки обидва судна можуть підійти протягом доби , то $0 \le x \le 24$; $0 \le y \le 24$. Другому судну доведеться чекати звільнення першого судна, якщо воно підходить до причалу під час стоянки першого судна. Умовою цього є виконання нерівності: $x \le y \le x + 3$. Першому судну доведеться чекати звільнення другого судна, якщо воно підійде до причалу під час стоянки другого судна, що виражається нерівністю: $y \le x \le y + 5$.

Зобразимо штрихом на графіку (рис. 1.5.1) область, що відповідає даним нерівностям. Тоді імовірність події A – одному з суден доведеться чекати причалу рівна: $P(A) = \frac{S_\Omega - (S_1 + S_2)}{S_\Omega}$, де

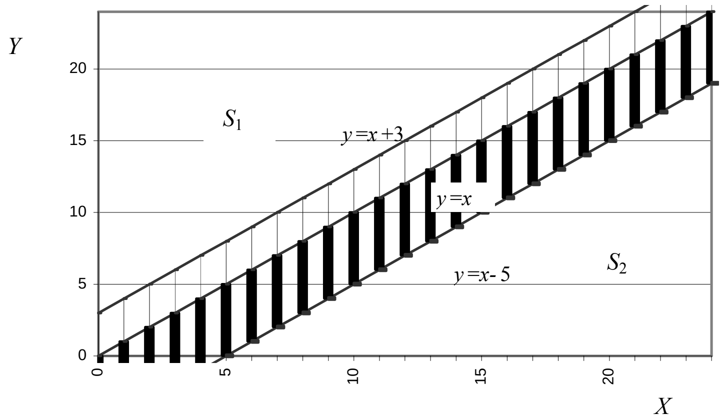


Рис. 1.5.1.

S_Ω – площа, що відображає повну групу подій: $S_\Omega = 24 \times 24$ (кв. од.), $S_1 = \dfrac{(24-3)}{2} \cdot 21 = \dfrac{21^2}{2}$ (кв. од.); $S_2 = \dfrac{(24-5)}{2} \times$ $\times 19 = \dfrac{19^2}{2}$ (кв. од.).

Отже,

$$P(A) = \frac{24^2 - (21^2 + 19^2)/2}{24^2} = 1 - \frac{21^2 + 19^2}{2 \cdot 24^2} = 1 - 0{,}69618 = 0{,}30382 \cdot$$

1.5.2. Навмання взято два додатніх числа x і y, кожне з яких не перевищує двох.

Знайти ймовірність того, що добуток xy буде не більше одиниці, а частка $\dfrac{y}{x}$ не більша двох.

Розв’язок.

Нехай A – шукана подія.

Згідно умови задачі допустима множина точок, що задана нерівностями $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$ відповідає квадрату з стороною 2, площа якого $S = 2 \cdot 2 = 4$ (кв. од.). Множина точок, що сприяє настанню події *A* зв'язана системою нерівностей:

$$\begin{cases} 0 \le xy \le 1 \\ 0 \le \dfrac{y}{x} \le 2 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 0 \le y \le \dfrac{1}{x} & (1) \\ 0 \le y \le 2x & (2) \end{cases}$$

Функція $y = \dfrac{1}{x}$ задає гіперболу (1), $y = 2x$ – пряму (2), так що спільна область лежить в першій четверті і обмежена (1) і (2). На рисунку 1.5.2. вона заштрихована. Точка *M* перетину прямої $y = 2x$ і гіперболи $y = \dfrac{1}{x}$ має координати $x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = \sqrt{2}$.

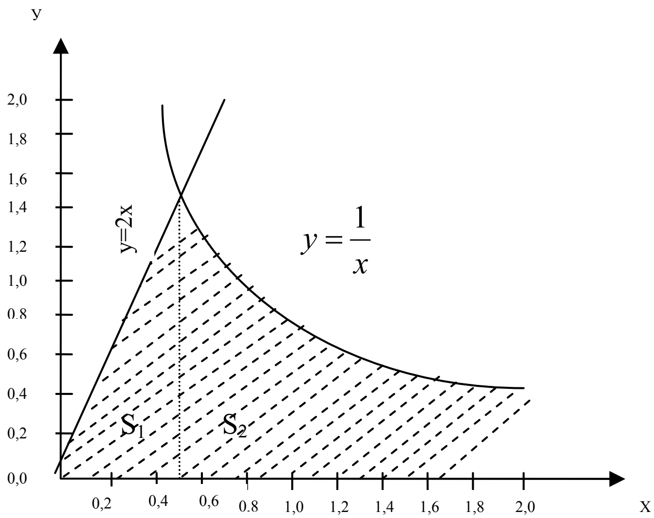


Рис. 1.5.2.

Вона розбиває область *S(A)* точок сприятливих до настання події *A* на дві площі S_1 і S_2: $S(A) = S_1 + S_2$, де:

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2x dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 0 = \frac{1}{2} \text{ – (кв.од.);}$$

$$S_2 = \int_{x_2}^{x_3} y dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} = \ln 2 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 + \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2 \text{ (кв.од.).}$$

Отже, $S(A) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \ln 2 = \frac{1}{2}(1 + 3\ln 2)$ (кв.од.).

Тоді, згідно геометричного означення імовірностей:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S} = \frac{1 + 3\ln 2}{2 \cdot 4} = \frac{1 + 3\ln 2}{8} \approx 0{,}38.$$

1.5.3. Навмання взято два додатніх числа *x* і *y*, кожне з яких не перевищує одиниці.

Знайти ймовірність того, що сума *x* + *y* буде не більше одиниці, а добуток *yx* не менше 0,09.

Розв’язок.

Нехай *A* – шукана подія. Область допустимих значень *x* і *y* задається: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$, що буде відповідати квадрату з стороною 1, площа якого $S = 1 \cdot 1 = 1$ (кв. од). Область значень, сприятливих до настання події *A* задається системою рівнянь:

$$\begin{cases} x + y \le 1 \\ yx \ge 0{,}09 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y \le 1 - x & (1) \\ y \ge \dfrac{0{,}09}{x} & (2) \end{cases}.$$

Це буде відповідати заштрихованій області *S(A)* (рис. 1.5.3.), межами якої є $x_1 = 0{,}1$ і $x_2 = 0{,}9$.

$$S(A) = S_{BCDE} + S_{крив};$$

$$S_{BCDE} = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \int_{x_1}^{x_2} (1-x) dx = \int_{0,1}^{0,9} dx - \int_{0,1}^{0,9} x dx =$$

$$= x \Big|_{0,1}^{0,9} - \frac{x^2}{2} \Big|_{0,1}^{0,9} = 0,8 - \frac{1}{2} \cdot 0,8 = 0,4 \text{ (кв.од.)};$$

$$S_{крив.} = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \int_{0,1}^{0,9} \frac{0,09}{x} dx = 0,09 \ln x \Big|_{0,1}^{0,9} =$$

$$= 0,09(\ln 0,9 - \ln 0,1) = 0,09 \ln 9 \text{ (кв.од.)}.$$

Отже,

$$S(A) = 0,4 - 0,09 \ln 9 = 0,4 - 0,19775 = 0,2022 \text{ (кв.од.)}.$$

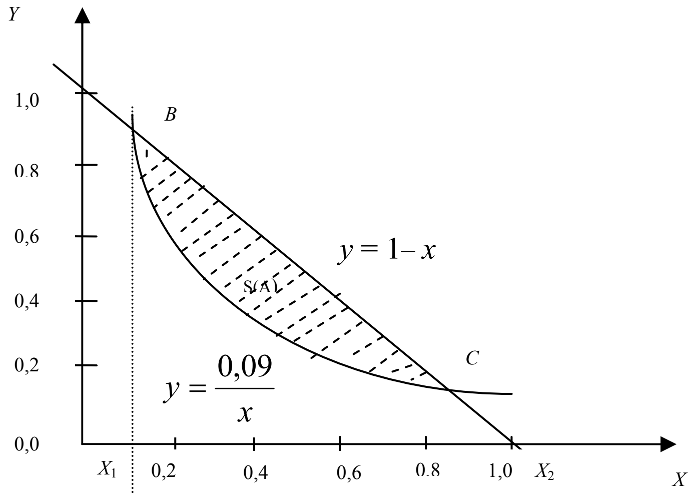


Рис. 1.5.3.

Згідно, геометричного означення імовірностей:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S} = \frac{0,2022}{1} = 0,2022.$$

1.5.4. В квадрат з вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1) навмання кинута точка *M*. Нехай (;) – її координати. Знайти імовірність того, що корені рівняння $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ – дійсні числа.

Розв’язок.

Нехай $P(A)$ – імовірність шуканої події. Для того, щоб рівняння $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ мало дійсні корені, необхідно, щоб дискримінант рівняння був невід’ємним: $D \geq 0$, тобто $\alpha^2 - 4\beta \geq 0$, звідки $\alpha^2 \geq 4\beta$, або $\beta \leq \frac{\alpha^2}{4}$.

В системі координат α, β побудуємо криву $\beta = \frac{\alpha^2}{4}$ і вершини квадрату (0;0), (0;1), (1;0), (1;1) (рис. 1.5.4).

Допустимою областю, в яку може попасти точка $M(\alpha, \beta)$ є весь квадрат.

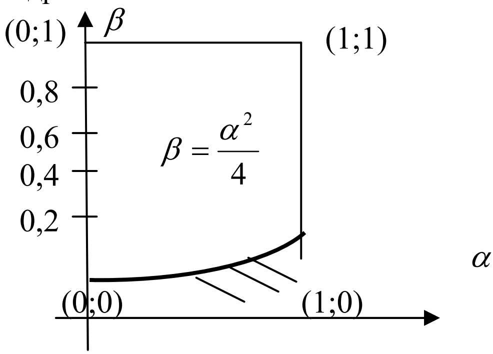


Рис. 1.5.4.

Областю, в яку може попасти точка, що буде сприяти настанню події A – заштрихована криволінійна фігура, що задовольняє нерівності $\beta \leq \frac{\alpha^2}{4}$. Отже, згідно геометричного означення імовірності $P(A)=S_{\text{фігури}}/S_{\square}=S_{\text{фігури}}/1=1/12$,

де $S_{\text{фігури}} = \int_a^b \beta \cdot d\alpha = \int_0^1 \frac{\alpha^2}{4} d\alpha = \frac{\alpha^3}{4 \cdot 3}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$ (кв. од.);

$S_{\square}=1 \cdot 1=1$ (кв. од.).

1.5.5. На колі радіуса *R* навмання взято три точки *A*, *B*, *C*. Яка ймовірність того, що ΔABC гострокутний?

Розв'язок.

Вважаємо *A* – фіксованою точкою, *O* – центр кола. Тоді $\angle BOC = \alpha$; $\angle AOB = \beta$; $\angle COA = \gamma$ (рис. 1.5.5.);

$$\Omega = \{(\alpha;\beta)|0 < \alpha < 2\pi; 0 < \beta < 2\pi; 0 < 2\pi - (\alpha+\beta) < 2\pi|\}$$

(рис. 1.5.6). Оскільки $\alpha + \beta < 2\pi$, то множина допустимих значень α і β знаходиться в трикутнику і на рис. 1.5.6 вона заштрихована.

D – подія, яка полягає в тому, що ΔABC – гострокутний. Тоді $D = \{(\alpha,\beta) \mid 0 < \alpha < \pi; 0 < \beta < \pi; 0 < 2\pi - (\alpha+\beta) < \pi\}$.

Площа області допустимих значень $S(\Omega) = \frac{1}{2}(2\pi)^2$.

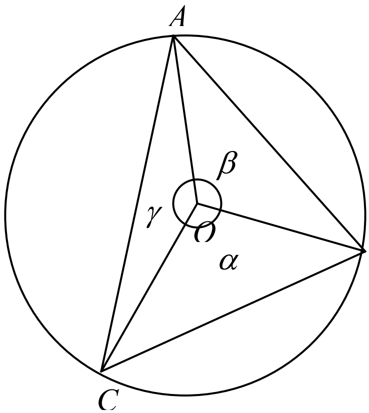


Рис. 1.5. 5.

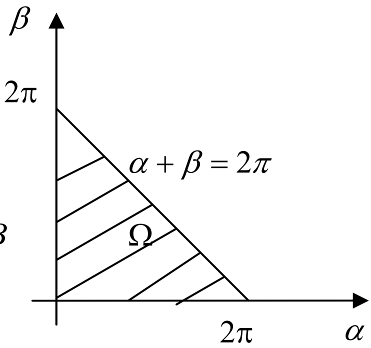


Рис. 1.5.6.

$$D:\ \begin{cases} 0<\alpha<\pi \\ 0<\beta<\pi \\ 2\pi-(\alpha+\beta)<\pi \\ 2\pi-(\alpha+\beta)>0 \end{cases} = \begin{cases} 0<\alpha<\pi \\ 0<\beta<\pi \\ (\alpha+\beta)>\pi \\ (\alpha+\beta)<2\pi \end{cases} \quad \text{(рис. 1.5.7).}$$

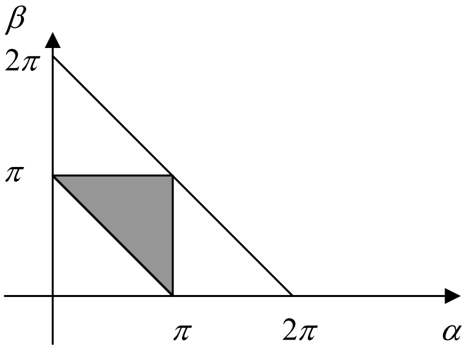


Рис. 1.5.7.

Отже, площа області, де ΔABC гострокутний (затемнений трикутник) рівна $S(D)=\frac{1}{2}\pi^2$.

Тоді ймовірність того, що ΔABC гострокутний, згідно геометричного означення рівна $P(D)=\frac{S(D)}{S(\Omega)}=\frac{\frac{1}{2}\pi^2}{2\pi^2}=\frac{1}{4}$.

§2 Теореми додавання та множення імовірностей та наслідки з них

2.1. Теореми додавання для несумісних подій

Теорема 1. Імовірність появи однієї з двох несумісних подій A і B, байдуже якої, дорівнює сумі імовірностей цих подій: $P(A+B)=P(A)+P(B)$ (2.1.1).

Наслідок. Імовірність появи однієї з декількох попарно несумісних подій $A_1, A_2 \ldots A_n$, дорівнює сумі імовірностей цих подій: $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$ (2.1.2).

Теорема 2. Сума імовірностей подій $A_1, A_2, \ldots A_n$, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці: $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$ (2.1.3).

Протилежними називають дві єдиноможливі події, що утворюють повну групу. Якщо одну з протилежних подій позначити через A, то другу подію позначають як $\overline{A}$.

Теорема. Сума імовірностей протилежних подій дорівнює одиниці: $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Теореми множення імовірностей. Якщо при обчисленні імовірності певної події ніяких інших обмежень, крім сукупності умов S, при яких вона може відбутися чи не відбутися не накладають, то таку імовірність називають ***безумовною***. Якщо накладають і другі додаткові умови, то таку імовірність події називають ***умовною***.

Умовною імовірністю $P_B(A)$ називають імовірність події A, обчислену за умови, що подія B уже наступила:

$P_B(A)=P(A\cdot B)/P(B)$ (2.1.4).

Теорема. Імовірність сумісної появи двох подій рівна добутку імовірності однієї з них на умовну імовірність іншої події, обчислену в припущенні, що перша подія вже відбулася:

$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A)$ (2.1.5).

Наслідок 1. Імовірність сумісної появи декількох подій рівна добутку імовірності однієї з них на умовні імовірності всіх решти, причому імовірність кожної наступної події обчислюється в припущенні, що всі попередні події відбулися:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 ... A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) ... P_{A_1 A_2 ... A_{n-1}}(A_n) \quad (2.1.6).$$

Дві події називаються ***незалежними***, якщо імовірність появи однієї з них не впливає на імовірність настання чи не настання іншої події, тобто умовні імовірності подій рівні їх безумовним імовірностям:

$$P_B(A) = P(A); \quad P_A(B) = P(B) \quad (2.1.7).$$

Наслідок 2. Якщо події A і B незалежні, то імовірність їх сумісної появи рівна добутку їх імовірностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \quad (2.1.8)$$

Дві події називаються ***незалежними***, якщо імовірність їх добутку рівна добутку імовірностей цих подій; в протилежному випадку події називаються ***залежними***. Декілька подій називають ***попарно незалежними***, якщо кожні дві з них незалежні. Наприклад, події A, B, C, D попарно незалежні, якщо незалежні події A і B, A і C, A і D, B і C, B і D, C і D.

Декілька подій називають ***незалежними в сукупності*** (або просто ***незалежними***), якщо незалежні кожні дві з них і незалежні кожна подія і всі можливі добутки решти. Наприклад, якщо події A, B, C, D незалежні в сукупності, то незалежні події A і B, A і C, A і D, A і BC, A і BD, A і CD, A і BCD, B і D, B і CD, B і AC, B і AD, B і ACD, C і D, C і AB, C і AD, C і BD, C і ABD, D і AB, D і AC, D і BC, D і ABC.

Якщо декілька подій незалежні попарно, то звідси ще не випливає їх незалежність в сукупності. Але з умови незалежності подій у сукупності випливає їх попарна незалежність. Тому умова незалежності подій у сукупності сильніша вимоги їх попарної незалежності.

Наслідок 3. Імовірність сумісної появи декількох подій, незалежних в сукупності, дорівнює добутку імовірностей цих подій.

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) ... P(A_n) \quad (2.1.9).$$

Теорема. **Імовірність появи хоч би однієї з подій** A_1, A_2, ..., A_n незалежних в сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком імовірностей протилежних подій $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ...\overline{A_n}$:

$P(A) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})...P(\overline{A_n}) = 1 - q_1 q_2 ... q_n$ (2.1.10), де

$q_1 = P(\overline{A_1}), q_2 = P(\overline{A_2}), ...q_n = P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n) = 1 - p_n$.

Коли $P(A_1) = P(A_2) = ...P(A_n) = p,$ то

$P(A) = 1 - q^n$ (2.1.11).

Імовірність суми сумісних подій. Імовірність появи хоч би однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій без імовірності їх сумісної появи:

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ (2.1.12).

Якщо події A і B незалежні, то формула імовірності суми подій набере вигляду:

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ (2.1.13),

якщо події A і B залежні, то формула має вигляд:

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B) = P(A) + P(B) -$

$- P(B) \cdot P_B(A)$ (2.1.14).

Для трьох сумісних подій A, B, C імовірність суми рівна:

$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) -)$

$- P(AC) - P(BC) + P(ABC)$ (2.1.15).

Імовірність суми довільного числа сумісних подій має вигляд:

$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) -$

$- P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - ... - P(A_{n-1} A_n) + P(A_1 A_2 A_3) +$

$+ ... + P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) - ... + (-1)^n P(A_1 A_2 ... A_n)$ (2.1.16).

або в скороченому записі:

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1 \le i_1 < ... < i_r \le n} P(A_{i_1} ... A_{i_r})$ (2.1.17).

Це формули включень і виключень.

Задачі

2.1.1. Дві однакові монети радіуса r розташовані всередині кола радіуса R, в яке навмання кидається точка. Визначити імовірність того, що ця точка впаде на одну з монет, якщо монети не перекриваються.

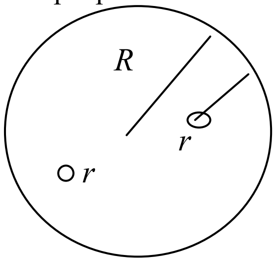


Рис. 2.1.1.

Розв'язок.

Нехай A – подія, що розглядається; A_1 – подія, яка полягає в тому, що "точка падає на першу монету", A_2 – подія, яка полягає в тому, що "точка падає на другу монету" (рис. 2.1.1).

Але $A = A_1 + A_2$, де A_1 і A_2 – несумісні події.

Тоді $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$.

Згідно геометричного означення імовірностей:

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{\pi r^2}{\pi R^2}, \text{ тому } P(A) = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} + \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = 2\left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

2.1.2. Телефонний номер складається з шести цифр.

Знайти ймовірність того, що при випадковому наборі номер буде закінчуватись на 1988?

Розв'язок.

Нехай A – шукана подія, що рівна добутку незалежних подій: A_1 – перша цифра "1"; A_2 – друга цифра "9"; A_3 – третя цифра "8"; A_4 – четверта цифра "8".

Тобто $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$. Імовірність події рівна:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) \quad \text{і},$$

оскільки, $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \dfrac{1}{10}$, то

$$P(A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10^4}.$$

2.1.3. Обчислити імовірність неповернення позичальником кредиту банку (кредитний ризик щодо позичальника), якщо фахівцями банку було встановлено, що: а) позичальник погасить узяту позику після її пролонгації і в терміні пролонгації в повному обсязі з імовірністю 0,17; б) позика буде винесена на прострочення після того, як вона була пролонгована з імовірністю 0,06; в) позика буде винесена на прострочення відразу після закінчення терміну дії кредитного договору, тобто без пролонгації з імовірністю 0,01.

Розв’язок

Позначимо через A подію, яка полягає в неповерненні позичальником кредиту банку; A_1 – позичальник погасить узяту позику після її пролонгації і в терміні пролонгації в повному обсязі; A_2 – позика буде винесена на прострочення після того, як вона була пролонгована; A_3 – позика буде винесена на прострочення відразу після закінчення терміну дії кредитного договору. Отже, $A = A_1 + A_2 + A_3$. Оскільки події A_1, A_2, A_3 є несумісними, то $P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}17 + 0{,}06 + 0{,}01 = 0{,}24$.

Отже, кредитний ризик щодо позичальника становить 0,24.

2.1.4. Позичальник може не повернути кредит банку при впливі хоч би одного з таких чинників ризику: галузевому (переорієнтація економіки, зменшення попиту на продукцію даної галузі); системному (зміни в економічній системі, які можуть негативно вплинути на фінансовий стан позичальника, гаранта, страховика); форс-мажорному (землетруси, повені, катастрофи, смерчі, страйки, військові дії); суб’єктивному (репутація позичальника, гаранта, страховика в діловому світі, їх відповідальність і готовність виконати взяті зобов'язання); юридичному (недоліки в складанні та оформленні кредитного договору, гарантійного листа, договору страхування). Визначити імовірність неповернення кредиту банку, якщо задані імовірності кожного з чинників ризику.

Розв'язок

Нехай подія A полягає у неповерненні позичальником кредиту банку. Кожний з чинників кредитного ризику можна розглядати як подію. Ця подія A може відбутися при настанні хоч би однієї з сумісних подій, що мають імовірності: $P(A_1)$ – імовірність галузевого, $P(A_2)$ – системного, $P(A_3)$ – форс-мажорного, $P(A_4)$ – суб'єктивного, $P(A_5)$ – юридичного чинників. Згідно формули імовірності настання хоч би однієї з подій отримуємо:

$$P(A) = 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)][1 - P(A_3)][1 - P(A_4)][1 - P(A_5)].$$

2.1.5. Кинуті три різні гральні кості.

Знайти ймовірності наступних подій:

а) на кожній з граней, що випали, з'явиться одне очко;

б) на всіх випавших гранях з'явиться однакова кількість очок;

в) на двох гранях з'явиться одне очко, а на третій грані – інше число очок;

г) на двох гранях з'явиться однакова кількість очок, а на третій грані – інше число очок;

д) на всіх гранях з'явиться різне число очок.

Розв'язок.

Нехай A – шукана подія.

а) Шукана подія A рівна добутку незалежних подій: A_1 – на грані першого грального кубика випало одне очко; A_2 – на грані другого грального кубика випало одне очко; A_3 – на грані третього грального кубика випало одне очко: $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Оскільки події A_1, A_2, A_3 незалежні і імовірність випадання одного очка рівна $\frac{1}{6}$, то

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}.$$

б) Імовірність того, що на трьох гранях з'явиться певна кількість очок рівна $\frac{1}{6^3}$, але таких чисел є 6, тому

$$P(A)=6\cdot\frac{1}{6^3}=\frac{1}{36}.$$

в) Шукана подія A рівна добутку незалежних подій $A=A_1\cdot A_2$, де подія A_1 – на двох будь-яких гранях випаде одне очко. Імовірність того, що на певних двох гранях випаде одне очко, рівна $\frac{1}{6^2}$, але дві грані з трьох можна вибрати C_3^2 способами, тому $P(A_1)=C_3^2\cdot\frac{1}{6^2}$. Імовірність випадання іншого числа очок (подія A_2), тобто імовірність невипадання одиниці рівна $P(A_2)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

Оскільки події A_1 і A_2 – незалежні, то

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)=C_3^2\cdot\frac{1}{6^2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{72}.$$

г) Шукана подія A рівна добутку незалежних подій A_1 і A_2, де подія A_1 полягає в тому, що на двох випавших гранях з'явиться однакове число очок. Імовірність того, що на двох будь-яких гранях з'явиться певне число рівна $C_3^2\cdot\frac{1}{6^2}$, а таких чисел є 6, тому $P(A_1)=C_3^2\cdot\frac{1}{6^2}\cdot 6$.

Подія A_2 полягає в тому, що на третій грані випаде інше число очок, імовірність якої рівна: $P(A_2) = \frac{5}{6}$.

Остаточно, $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) = C_3^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$.

д) Імовірність того, що на трьох гранях випаде різне число очок рівна:

$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot C_3^2 \cdot 6 = \frac{5}{9}$, або $P(A) = \frac{m}{n}$, де n – загальна кількість способів, якими можна вибрати 6 різних чисел на 3 гранях рівна 6^3, $m = A_6^3$, тому $P(A) = \frac{A_6^3}{6^3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{9}$.

2.1.6. В коло радіуса *R* вписаний квадрат.

Чому дорівнює ймовірність того, що поставлені навмання всередині кола дві точки виявляться всередині квадрата?

Розв’язок.

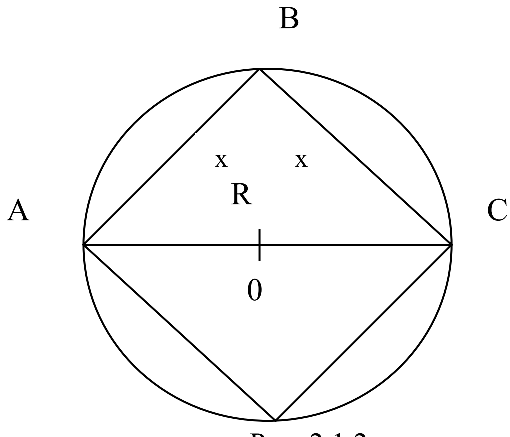


Рис. 2.1.2

Нехай *P(A)* – імовірність шуканої події. Імовірність $P(A_1)$ того, що одна точка попаде всередину вписаного у коло квадрата – подія A_1, дорівнює згідно геометричного означення імовірності відношенню площі квадрата до площі кола: $P(A_1) = S_{\square}/S_{\circ}$. Обчислимо площі цих фігур (рис. 2.1.2).

Нехай R – радіус кола, x – сторона квадрата. Оскільки $<B = 90^{o}$ – прямий, то $x^2 + x^2 = (2R)^2 = 4R^2$. Отже, площа квадрата $x^2 = 2R^2$, круга – πR^2, тому $P(A_1) = \dfrac{2R^2}{\pi R^2} = \dfrac{2}{\pi}$.

Подія A рівна добутку подій $A = A_1 \cdot A_2$, де A_1 – перша точка попаде в квадрат, і A_2 друга точка попаде в квадрат. Оскільки ці події незалежні, то

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi^2} \approx 0{,}4053 .$$

2.1.7. Три стрільці почергово ведуть стрільбу по одній і тій же мішені. Кожний стрілець має два патрони. При першому ж попаданні стрільба припиняється. Імовірність попадання в мішень при одному вистрілі для першого стрільця рівна 0.2, для другого – 0.3, для третього – 0.4. Знайти імовірність того, що всі три стрільці використають весь свій боєзапас.

Розв’язок.

Щоб три стрільці використали весь свій боєзапас – подія A, необхідно, щоб попередні п’ять вистрілів були невдалими. З умови задачі $p_1 = 0{,}2$; $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}3$; $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}4$; $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Отже, $P(A) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_1 \cdot q_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = .$
$= 0{,}18816 \approx 0{,}188.$

2.1.8. Відрізок розділений на три рівні частини. На цей відрізок навмання кинуті три точки. Знайти ймовірність того, що на кожну з трьох частин відрізку попадає по одній точці. Припускається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізку і не залежить від його розташування.

Розв'язок.

Нехай A – шукана подія. Імовірність попадання точки на одну з трьох рівних частин рівна $p = \frac{1}{3}$. Тоді імовірність події A – "на кожний відрізок попадає по одній точці" рівна добутку незалежних подій: A_1 – на перший відрізок попаде одна точка, A_2 – на другий відрізок попаде одна точка, A_3 – на третій відрізок попаде одна точка: $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Враховуючи те, що число способів, якими можна кинути три точки на три відрізки рівне числу перестановок з трьох елементів, тобто $P_3 = 3!$, імовірність події A рівна:

$$P(A) = 3! \cdot P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = 3! \cdot P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 3! \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{9}.$$

2.1.9. Винищувач атакує бомбардувальник і дає по ньому дві незалежні черги. Ймовірність того, що бомбардувальник збитий першою чергою рівна 0,2, другою – 0.3. Якщо бомбардувальник не збито, то він веде по винищувачу стрільбу і збиває його з ймовірністю 0,25.

Знайти ймовірність того, що в результаті повітряного бою буде збито бомбардувальник або винищувач.

Розв'язок.

Згідно умови $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}3$ – імовірність збиття бомбардувальника І і ІІ чергою відповідно; $p_3 = 0{,}25$ – імовірність збиття винищувача. Нехай подія A полягає у збитті бомбардувальника – подія B або винищувача – подія C, тобто $A = B + C$ і оскільки події B і C несумісні, то $P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C)$. Але $B = B_1 + \overline{B}_1 \cdot B_2$, де подія B_1 – збиття бомбардувальника І чергою; подія $\overline{B}_1 \cdot B_2$ – незбиття бомбардувальника І чергою і збиття ІІ чергою. Оскільки події $\overline{B}_1$ і B_2 – незалежні, то

$$P(B) = P(B_1) + P(\overline{B}_1 \cdot B_2) = P(B_1) + P(\overline{B}_1) \cdot P(B_2) =$$
$$= p_1 + (1 - p_1) \cdot p_2 = 0{,}2 + (1 - 0{,}2) \cdot 0{,}3 = 0{,}44.$$

Тоді $P(C) = [1 - P(B)] \cdot p_3 = (1 - 0{,}44) \cdot 0{,}25 = 0{,}14$.

Остаточно, $P(A) = 0{,}44 + 0{,}14 = 0{,}58$.

2.1.10. Радіолокаційна станція веде спостереження за k об'єктами. За час спостереження i-й об'єкт може бути втрачений з ймовірністю p_i.

Знайти ймовірності таких подій: A – жоден об'єкт не буде втрачений; B – буде втрачено принаймні один об'єкт; C – буде втрачено не більше одного об'єкта.

Розв'язок.

Подія $A = A_1 \cdot A_2 \cdot ...A_i \cdot ...A_k$, де A_i – подія, яка полягає в тому, що i-тий об'єкт не буде втрачено. Оскільки події A_i незалежні, то

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot ...A_i \cdot ...A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ...P(A_i) \cdot ...P(A_k) =$$
$$= (1 - p_1)(1 - p_2)... \cdot (1 - p_i) \cdot ...(1 - p_k).$$

Події B – втрачено принаймні один об'єкт і $\overline{B}$ – не втрачено жодного об'єкта протилежні і утворюють повну групу подій.

Тому, $P(B) + P(\overline{B}) = 1$, звідки

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(A) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)... \cdot (1 - p_i) \times$$
$$\times ...(1 - p_k).$$

Подія C рівна сумі несумісних подій A і D: $C = A + D$, де D – подія, яка полягає в тому, що втрачено один об'єкт, який може бути першим, другим, ...i-тим, ...k-тим. Отже,

$$P(C) = P(A + D) = P(A) + P(D) = (1 - p_1)(1 - p_2)... \times$$
$$\times ...(1 - p_i)... \cdot ...(1 - p_k) + p_1(1 - p_2)(1 - p_3) \cdot ...(1 - p_i) \times$$
$$\times ...(1 - p_k) + (1 - p_1)p_2(1 - p_3)... \cdot (1 - p_i)... \cdot (1 - p_k)... +$$
$$+ (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)... \cdot p_i ... \cdot ...(1 - p_k)... + (1 - p_1) \times$$
$$\times (1 - p_2)... \cdot (1 - p_i)... \cdot p_k = \prod_{i=1}^{k} (1 - p_i)\left(1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{p_j}{(1 - p_j)}\right).$$

2.1.11. По мішені здійснюється n незалежних пострілів. Ймовірність попадання при i-му пострілі рівна p_i , $i = 1, \ldots , n$.

Знайти ймовірність того, що при n пострілах буде не менше 2-х влучень.

Розв'язок.

Події A – при n пострілах не менше 2-х влучень і $\overline{A}$ – при n пострілах менше двох влучень є протилежними, так що $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Отже, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(C)$ [(див задачу 2.1.10)] =

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{1 - p_j}\right).$$

2.1.12. Серед N виробів знаходиться M бракованих. Навмання беруть n_1 виробів.

Яка ймовірність того, що серед них є більше, ніж m_1 бракованих виробів?

Розв'язок.

Зобразимо подію $A = (k > m_1)$ як суму несумісних подій:

$(k > m_1) = (k = m_1 + 1) + (k = m_1 + 2) + \ldots (k = n_1)$, де k – кількість бракованих виробів. Тоді:

$$P(A) = P(k = m_1 + 1) + P(k = m_1 + 2) \ldots + \ldots P(k = n_1) =$$

$$= \frac{C_M^{m_1+1} \cdot C_{N-M}^{n_1-m_1-1}}{C_N^{n_1}} + \frac{C_M^{m_1+2} \cdot C_{N-M}^{n_1-m_1-2}}{C_N^{n_1}} \ldots + \ldots \frac{C_M^{n_1} \cdot C_{N-M}^{n_1-n_1}}{C_N^{n_1}} =$$

$$= \sum_{S=1}^{n_1} \frac{C_M^{m_1+S} \cdot C_{N-M}^{n_1-m_1-S}}{C_N^{n_1}}.$$

2.1.13. В урні знаходиться 7 білих, 13 чорних, 10 зелених і 3 червоні кулі. Випадковим чином з урни витягують три кулі. Яка ймовірність того, що вони одного кольору?

Розв'язок.

Склад урни такий: 7 *б* + 13 *чор* + 10 *з* + 3 *черв* = 33.

Нехай подія A полягає в тому, що 3 кулі одного кольору. Три кулі можуть бути білими – подія A_1, чорними – подія A_2, зеленими – подія A_3 і червоними – A_4. Отже, подія A є сумою несумісних подій: $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. Тоді $P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$. Обчислимо кожну з імовірностей згідно її класичного означення: $P(A) = \frac{m}{n}$. Тоді $P(A_1) = \frac{C_7^3}{C_{33}^3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3!}{3! \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31} = 0{,}0064149$.

$$P(A_2) = \frac{C_{13}^3}{C_{33}^3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 3!}{3! \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31} = 0{,}00524193.$$

$$P(A_3) = \frac{C_{10}^3}{C_{33}^3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 3!}{3! \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31} = 0{,}0219941.$$

$$P(A_4) = \frac{C_3^3}{C_{33}^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!}{3! \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31} = 0{,}0001832.$$

Отже, $P(A) = 0{,}0064149 + 0{,}0524193 + 0{,}0219941 + 0{,}0001832 = 0{,}081$. Через залежні події дані імовірності виразяться так:

$A_i = A_i' \cdot A_i'' \cdot A_i'''$, i = 1, 2, 3, 4, де залежні події означають A_i' – перша куля, A_i'' – друга куля, A_i''' – третя куля відповідно білі, чорні, зелені і червоні. Тоді $P(A_i) = P(A_i') \cdot P_{A_i'}(A_i'') \times P_{A_i'A_i''}(A_i''')$.

Отже,

$$P(A_1) = P(A_1') \cdot P_{A_1'}(A_1'') \cdot P_{A_1'A_1''}(A_1''') = \frac{7}{33} \cdot \frac{6}{32} \cdot \frac{5}{31} = 0{,}0064149;$$

$$P(A_2) = \frac{13}{33} \cdot \frac{12}{32} \cdot \frac{11}{31} = 0{,}0524193;$$

$$P(A_3) = \frac{10}{33} \cdot \frac{9}{32} \cdot \frac{8}{31} = 0{,}0219941;$$

$$P(A_4) = \frac{3}{33} \cdot \frac{2}{32} \cdot \frac{1}{31} = 0{,}0001832.$$

2.1.14. З кишені, в якій знаходиться десять монет вартістю по 25 коп. і десять монет вартістю 5 коп., виймається пригорща з 10 випадково взятих монет.

Яка ймовірність того, що в кишені залишилась сума грошей, не менша тієї, що витягнута?

Розв'язок.

Нехай *A* – шукана подія. Для виконання умови: "сума грошей залишена ≥ сума грошей витягнута" необхідно, щоб кількість монет меншої вартості (5 коп), що витягнута, була не меншою за половину всіх монет меншої вартості. Якщо кількість монет меншої вартості, що витягнута, рівна кількості монет меншої вартості, що залишена, то сума грошей витягнутих і залишених рівні.

Імовірність події *A* рівна сумі ймовірностей несумісних подій: B_1 – витягнуто 5 монет по 5 копійок і 5 монет по 25 копійок: $P(B_1) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^5 \cdot C_{10}^5}{C_{20}^{10}}$; B_2 – витягнуто 6 монет по 5 копійок і 4 монети по 25 копійок; B_3 – витягнуто 7 монет по 5 копійок і 3 монети по 25 копійок; B_4 – витягнуто 8 монет по 5 копійок і 2 монети по 25 копійок; B_5 – витягнуто 9 монет по 5 копійок і 1 монета по 25 копійок; B_6 – витягнуто 10 монет по 5 копійок.

Таким чином,

$$P(A) = \frac{C_{10}^5 \cdot C_{10}^5}{C_{20}^{10}} + \frac{C_{10}^6 \cdot C_{10}^4}{C_{20}^{10}} + \frac{C_{10}^7 \cdot C_{10}^3}{C_{20}^{10}} + \frac{C_{10}^8 \cdot C_{10}^2}{C_{20}^{10}} + \frac{C_{10}^9 \cdot C_{10}^1}{C_{20}^{10}} +$$

$$+ \frac{C_{10}^{10} \cdot C_{10}^0}{C_{20}^{10}} = \sum_{k=0}^{5} \frac{C_{10}^k \cdot C_{10}^{10-k}}{C_{20}^{10}}.$$

Спростимо вираз врахувавши, що $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Тоді:

$$P(A)=\sum_{k=0}^{5}\frac{\left(C_{10}^{k}\right)^2}{C_{20}^{10}}=\frac{\left(C_{10}^{0}\right)^2}{C_{20}^{10}}+\frac{\left(C_{10}^{1}\right)^2}{C_{20}^{10}}+\frac{\left(C_{10}^{2}\right)^2}{C_{20}^{10}}+\frac{\left(C_{10}^{3}\right)^2}{C_{20}^{10}}+$$

$$+\frac{\left(C_{10}^{4}\right)^2}{C_{20}^{10}}+\frac{\left(C_{10}^{5}\right)^2}{C_{20}^{10}}=\frac{1}{C_{20}^{10}}\left[1+10^2+\left(\frac{10\cdot 9}{2}\right)^2+\left(\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right)^2+\left(\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\right)^2\right]=\frac{1}{C_{20}^{10}}(1+100+$$

$$+2025+14400+44100+63504)=\frac{124130\cdot 10!(20-10)!}{20!}=$$

$$=\frac{124310}{184756}=0{,}671859.$$

2.1.15. Учасник лотереї "Спортлото" з 49 назв видів спорту (позначених числами від 1 до 49) повинен назвати 6. Повний виграш одержує той, хто правильно вкаже всі шість назв. Виграші одержують і ті, хто вгадає не менше трьох назв.

Обчислити ймовірність повного виграшу в "Спортлото".

Обчислити ймовірність того, що учасник "Спортлото" відгадає 5, 4 і 3 назви, тобто отримає будь-який виграш?

Яка ймовірність одержати мінімальний виграш у "Спортлото"?

Розв'язок.

У лотереї "Спортлото" "6" з "49" 6 чисел є виграшними і 49 – 6 = 43 чисел є програшними.

Імовірність повного виграшу (імовірність вгадати всі шість виграшних чисел) обчислимо згідно класичного означення імовірностей: $P(A_6)=\dfrac{m}{n}$, де $m=C_6^6=1$, n – загальне число способів якими можна вибрати будь-які 6 чисел з 49 рівне числу комбінацій C_{49}^{6}:

Отже, $P(A_6)=\dfrac{1}{C_{49}^6}=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}\approx 0{,}72\cdot 10^{-7}$.

Якщо вгадано *i* чисел серед 6 виграшних, то решта (6 – *i*) чисел будуть програшними. Число способів, якими можна вибрати *i* виграшних чисел серед 6 виграшних рівна $m_1=C_6^i$. Число способів m_2, якими можна вибрати (6 – *i*) програшних чисел серед 43 програшних чисел рівне $m_2=C_{43}^{6-i}$. Імовірність вгадати *i* чисел рівна $P(A_i)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{m_1\cdot m_2}{n}=\dfrac{C_6^i\cdot C_{43}^{6-i}}{C_{49}^6}$.

Якщо $i=3$, то

$$P(A_3)=\frac{C_6^3\cdot C_{43}^{6-3}}{C_{49}^6}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 43\cdot 42\cdot 41\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}=$$
$$=0{,}01765043.$$

Якщо $i=4$, то

$$P(A_4)=\frac{C_6^4\cdot C_{43}^{6-4}}{C_{49}^6}=\frac{C_6^4\cdot C_{43}^2}{C_{49}^6}=$$
$$=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 43\cdot 42\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}=0{,}000968619.$$

Якщо $i=5$, то

$$P(A_4)=\frac{C_6^5\cdot C_{43}^{6-5}}{C_{49}^6}=\frac{C_6^5\cdot C_{43}^1}{C_{49}^6}=$$
$$=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 43\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}=0{,}000018449.$$

Мінімальний виграш отримає той, хто вгадає $i=3$ номери, тому імовірність мінімального виграшу рівна 0,01765.

Будь-який виграш отримає той, хто вгадає $i\geq 3$ номерів, тому імовірність цієї події *A* рівна сумі імовірностей несумісних подій A_3, A_4, A_5, A_6:

$$P(A)=P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)+P(A_6)=0{,}01765043+$$

$$+0{,}000968619+0{,}00018449+0{,}0000072=0{,}0186447.$$

2.1.16. Двоє людей купили по одному білету лотереї “6 з 49” і незалежно одна від одної відмітили по 6 номерів.

Знайти ймовірності подій:

а) кожен отримає мінімальний виграш;

б) кожен отримає будь-який виграш.

Мінімальний виграш відповідає трьом загальним елементам з набором номерів $(\alpha_1,...,\alpha_6)\in(1,2,...,49)$, що з’явились при розиграшу тиражу.

Розв’язок.

а) Нехай подія A_1 полягає у мінімальному виграші першої людини, A_2 – у мінімальному виграші другої людини. Тоді подія A яка полягає у мінімальному виграшу обох людей рівна $A = A_1 \cdot A_2$. Оскільки події A_1 і A_2 незалежні, то

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=\frac{C_6^3\cdot C_{43}^3}{C_{49}^6}\cdot\frac{C_6^3\cdot C_{43}^3}{C_{49}^6}=$$

$$=\left(\frac{C_6^3\cdot C_{43}^3}{C_{49}^6}\right)^2=(0{,}01765043)^2=0{,}00031154.$$

б) нехай подія A_1 полягає у будь-якому виграші першої людини, A_2 – другої людини, A – у будь-якому виграшу двох людей. Тоді $A = A_1 \cdot A_2$ і оскільки події A_1 і A_2 незалежні, то

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=\sum_{i=3}^{6}\frac{C_6^i\cdot C_{43}^{6-i}}{C_{49}^6}\cdot\sum_{i=3}^{6}\frac{C_6^i\cdot C_{43}^{6-i}}{C_{49}^6}=$$

$$=\left(\sum_{i=3}^{6}\ \frac{C_6^i\cdot C_{43}^{6-i}}{C_{49}^6}\right)^2=(0{,}0186447)^2=0{,}000347624.$$

2.1.17. Спрощена схема контролю виробів складається з двох незалежних перевірок. В результаті k-ої перевірки (k = = 1,2) виріб, який задовольняє стандарту, забраковується з ймовірністю $_k$, а бракований виріб приймається з ймовірністю $_k$. Виріб приймається, якщо він пройшов обидві перевірки.

Знайти ймовірності подій:

а) бракований виріб буде прийнято;

б) виріб, який задовольняє стандарту, буде забраковано.

Розв'язок.

а) Нехай подія A полягає у тому, що бракований виріб буде прийнято, A_1 – прийнято на першій перевірці, A_2 – прийнято на другій перевірці. Отже, $A = A_1 \cdot A_2$ і $P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ – оскільки події A_1 і A_2 – незалежні. Тут $P(A_1) = \alpha_1$, і $P(A_2) = \alpha_2$. Отже, $P(A) = \alpha_1 \cdot \alpha_2$.

б) Позначимо через A – подію, яка полягає в тому, що виріб який задовільняє стандарту буде забраковано, $\overline{A}$ – виріб, який задовільняє стандарту буде прийнято. Оскільки ці події несумісні і утворюють повну групу подій, то $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, звідки $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (1 - \beta_1)(1 - \beta_2)$.

2.1.18. Довести, що $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \times B)$.

Розв'язок.

Оскільки подія A є сумою несумісних подій $A \times \overline{B}$ і $A \times B$: $A \to A \times \overline{B} + A \times B$, то її імовірність $P(A) = P(A \times \overline{B}) + P(A \times B)$, звідки $P(A \times \overline{B}) = P(A) - P(A \times B)$.

2.1.19. Відомі імовірності подій A, B, $A \times B$. Знайти імовірності подій: а) $\overline{A} + \overline{B}$; б) $\overline{A} \times \overline{B}$; в) $A + B$; г) $\overline{A} + B$; д) $\overline{A + B}$; е) $\overline{A \times B}$; є) $\overline{A} \times (A + B)$; ж) $A + (\overline{A} \times B)$.

Розв'язок.

Відомі $P(A)$, $P(B)$, $P(A \times B)$.

а) за означенням $P(\overline{A} + \overline{B}) = P(\overline{A} \times \overline{\overline{B}}) + P(\overline{\overline{A}} \times \overline{B}) + P(\overline{A} \times \overline{B}) = P(\overline{A} \times B) + P(A \times \overline{B}) + P(\overline{A} \times \overline{B}) = *$

Оскільки $P(\overline{A}\times B)+P(A\times\overline{B})+P(\overline{A}\times\overline{B})+P(A\times B)=$ $=1,$ як імовірність повної групи подій, то попередній вираз рівний: $*=1-P(A\times B)$;

б) з імовірності повної групи подій маємо:

$P(\overline{A}\times\overline{B})=1-P(\overline{A}\times B)-P(A\times\overline{B})-P(A\times B)=*$

Підставивши у рівність вирази $P(\overline{A}\times B)=P(B)-$ $-P(A\times B)$ і $P(A\times\overline{B})=P(A)-P(A\times B),$ отримаємо:

$*=1-\left[P(B)-P(A\times B)\right]-\left[P(A)-P(A\times B)\right]-P(A\times B)=$

$=1-P(A)-P(B)+P(A\times B);$

в) за означенням $P(A+B)=P(A\times\overline{B})+P(\overline{A}\times B)+$ $+P(A\times B)=\left[P(A)-P(A\times B)\right]+\left[P(B)-P(A\times B)\right]+$ $+P(A\times B)=P(A)+P(B)-P(A\times B)$;

г) $P(\overline{A}+B)=P(\overline{\overline{A}}\times B)+P(\overline{A}\times\overline{B})+P(\overline{A}\times B)=$ $=P(A\times B)+P(\overline{A}\times\overline{B})+P(\overline{A}\times B)=1-P(A\times\overline{B})=$ $=1-\left[P(A)-P(A\times B)\right]=1-P(A)+P(A\times B).$

д) Протилежною подією до суми $A+B$ подій є $\overline{A}\times\overline{B}$: $\overline{A+B}=\overline{A}\times\overline{B}$. Отже, $P(\overline{A+B})=P(\overline{A}\times\overline{B})=1-P(A)-$ $-P(B)+P(A\times B)$.

е) $\overline{A\times B}=\overline{A}\times B+A\times\overline{B}+\overline{A}\times\overline{B}=\overline{A}+\overline{B}$. Отже, $P(\overline{A\times B})=P(\overline{A}\times B)+P(A\times\overline{B})+P(\overline{A}\times\overline{B})=1-P(A\times B)$;

є) $\overline{A}\times(A+B)=\overline{A}(A\times\overline{B}+\overline{A}\times B+A\times B)=\overline{A}\times A\times\overline{B}+$ $+\overline{A}\times\overline{A}\times B+\overline{A}\times A\times B=\overline{A}\times B$, або $\overline{A}\times(A+B)=\overline{A}\times A+$ $+\overline{A}\times B=\overline{A}\times B$.

Отже, $P\left[\overline{A}\times(A+B)\right]=P(\overline{A}\times B)=P(B)-P(A\times B)$.

ж) $A+(\overline{A}\times B)=(A\times\overline{B}+A\times B)+\overline{A}\times B$. Тоді

$$P\left[A+(\overline{A}\times B)\right]=P(A\times\overline{B})+P(A\times B)+P(\overline{A}\times B)=P(A)-$$
$$-P(A\times B)+P(A\times B)+P(B)-P(A\times B)=P(A)+P(B)-$$
$$-P(A\times B).$$

2.1.20. Двоє по черзі кидають монету. Виграє той, хто першим викине "тризуб".

Знайти ймовірність подій:

а) гра закінчиться до 4-го кидання;

б) виграє той, хто почав гру (перший гравець);

в) виграє другий гравець.

Розв'язок.

Пронумеруємо черговість кидання монети. Тоді підкидання з непарними номерами i = 1, 3, 5... проводяться першим гравцем, з парними номерами – i = 2, 4, 6... другим гравцем. Нехай A – шукана подія, A_i – в i-тому підкиданні випав "тризуб".

а) Нехай подія A_i означає, що гра закінчиться до 4-го кидання, тобто або на першому киданні – подія A_1 (виграє I гравець), або на другому киданні – подія A_2 (виграє II гравець і відповідно перший програє) або на третьому киданні – подія A_3 (виграє I гравець, попередньо програють перший і другий гравці).

Отже, подія A є сумою несумісних подій:

$$A=A_1+\overline{A}_1\cdot A_2+\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3.$$

Оскільки імовірність p випадання "тризуба" рівна $\frac{1}{2}$, відповідно імовірність невипадання $q=\frac{1}{2}$, то імовірність події A рівна:

$$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A}_1\cdot A_2)+P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3)=P(A_1)+$$
$$+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)+P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3)=*$$

(оскільки події $\overline{A}_1$ і A_2; $\overline{A}_1,\overline{A}_2$ і A_3 незалежні між собою)

$$* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}.$$

б) Подія A – "виграє перший гравець" є сумою несумісних подій: $A = A_1 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \overline{A}_4 \cdot A_5 + + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \overline{A}_4 \cdot \overline{A}_5 \cdot \overline{A}_6 \cdot A_7 + \ldots \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \overline{A}_{2k} \cdot A_{2k+1} + \ldots$, де події $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots \overline{A}_{2k}, A_{2k+1}$ – незалежні між собою.

Тоді імовірність події A рівна:

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \times$$

$$\times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots \frac{1}{2^{2k}} + \ldots\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3},$$

як сума членів ряду нескінченної геометричної прогресії.

в) подія A – виграє другий гравець є сумою несумісних подій: $A = \overline{A}_1 \cdot A_2 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot A_4 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \overline{A}_4 \cdot \overline{A}_5 \cdot A_6 + + \ldots \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \overline{A}_{2k-1} \cdot A_{2k} + \ldots$

Імовірність такої події A рівна: $P(A) = P(\overline{A}_1 \cdot A_2) + + P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot A_4) + P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \overline{A}_4 \cdot \overline{A}_5 \cdot A_6) + \ldots P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \times \times \ldots \overline{A}_{2k-1} \cdot A_{2k}) + \ldots = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) + P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \times \times P(A_4) + P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_4) \cdot P(\overline{A}_5) \cdot P(A_6) + \ldots P(\overline{A}_1) \times \times P(\overline{A}_2) \cdot \ldots P(\overline{A}_{2k-1}) \cdot P(A_{2k}) + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} +$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \ldots = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots \frac{1}{2^{2k}} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \ \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}.$$

2.1.21. З настання події *AB* обов'язково випливає настання події *C*.

Довести, що $P(A) + P(B) - P(C) \leq 1$.

Розв’язок.

Подія *A* є частковим випадком події *B*, тобто з появи події *A* достовірно випливає настання події *B* (див. рис. 2.1.3а).

Доведемо спочатку, що якщо подія *B* випливає з події *A*, то $P(B) \geq P(A)$. Подію *B* можна представити у вигляді суми несумісних подій *A* і $\overline{A}B$: $B = A + \overline{A} \cdot B$. Застосуємо до цієї суми оператор імовірності:

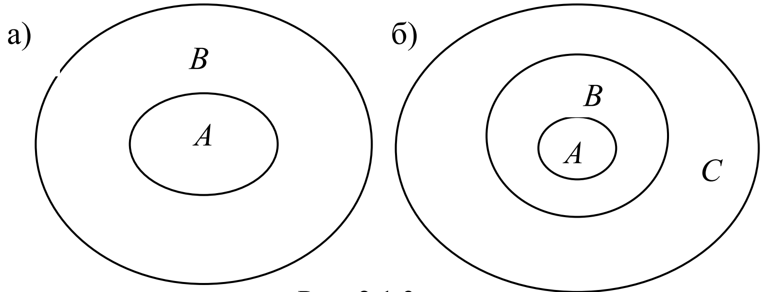


Рис. 2.1.3

$P(B) = P(A + \overline{A} \cdot B) = P(A) + P(\overline{A} \cdot B)$. Оскільки $P(\overline{A} \cdot B) \geq 0$, то $P(B) \geq P(A)$.

Згідно умови задачі подія *C* випливає з події $A \cdot B$, тому по аналогії $P(C) \geq P(AB)$ (див. рис. 2.1.3б)

Як видно з рис. 2.1.4а $A = AB + A \cdot \overline{B}$, отже, $P(A) = P(AB) + P(A \cdot \overline{B})$; $B = AB + \overline{A} \cdot B$, отже, $P(B) = P(AB) + P(\overline{A} \cdot B)$.

Тоді $P(A)+P(B)-P(C)\le P(AB)+P(A\cdot\overline{B})+P(AB)+$
$+P(\overline{A}\cdot B)-P(AB)=P(AB)+P(A\cdot\overline{B})+P(\overline{A}\cdot B).$

Оскільки несумісні події $A\cdot B$, $A\cdot\overline{B}$, $\overline{A}\cdot B$, $\overline{A}\cdot\overline{B}$ утворюють повну групу подій, то $P(A\cdot B)+P(A\cdot\overline{B})+P(\overline{A}\cdot B)+$ $+P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1$. Звідси $P(A\cdot B)+P(A\cdot\overline{B})+P(\overline{A}\cdot B)=1-$ $-P(\overline{A}\cdot\overline{B})$.

Підставивши цей вираз у попередню нерівність, отримуємо: $P(A)+P(B)-P(C)\le 1-P(\overline{A}\cdot\overline{B})\le 1$, оскільки $P(\overline{A}\cdot\overline{B})\ge 0$.

2.1.22. Дві гральні кістки кидають до випадання "6" хоча б на одній з них. Знайти ймовірність того, що вперше "6" з'явиться при k-му киданні, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Розв'язок.

Ймовірність p випадання "6" на одній кістці рівна 1/6, ймовірність невипадання $q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

Ймовірність $P(A_1)$ випадання хоч би однієї "6" при одному одночасному підкиданні двох кісток рівна сумі ймовірностей трьох несумісних подій: B_1 – на I кістці випала "6", а на II кістці не випала шістка: $P(B_1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$;

B_2 – на I кістці не випала "6", а на II кістці випала; $P(B_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$;

B_3 – на I і II кістках випали "6"; $P(B_3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

Таким чином, імовірність хоч би однієї появи "6" при одному одночасному підкиданні ($k = 1$) рівна:

$$P(A_1)=\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{1}{36}=\frac{11}{36}.$$

Тоді імовірність непояви хоч би однієї “6” при одному підкиданні рівна $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$.

Ймовірність *P(A*$_2$*)* того, що хоч би одна “6” з’явиться при другому підкиданні (k = *2*) рівна добутку імовірностей незалежних подій:

A_2^I – при першому підкиданні не випала жодна “6”,

A_2^{II} – при другому підкиданні випала хоч би одна “6”:

$P(A_2) = P(\overline{A}_2^I \cdot A_2^{II}) = P(\overline{A}_2^I) \cdot P(A_2^{II}) = \frac{25}{36} \cdot \frac{11}{36}$.

Тоді подія A_3 – з’явиться хоч би одна “шістка” при третьому підкиданні (k = 3), якщо при перших двох підкиданнях “6” не випала жодного разу, тобто відбулися події $\overline{A}_3^I, \overline{A}_3^{II}$. Імовірність цієї події рівна:

$$P(A_3) = (\overline{A}_3^I \cdot \overline{A}_3^{II} \cdot A_3^{III}) = P(\overline{A}_3^I) \cdot P(\overline{A}_3^{II}) \cdot P(A_3^{III}) = \left(\frac{25}{36}\right)^2 \cdot \frac{11}{36}.$$

Аналогічно, ймовірність події A_k, яка полягає в хоч би одній появі “6” при k-тому одночасному підкиданні двох гральних кісток рівна добутку імовірностей незалежних подій

$P(\overline{A}_k^I \cdot \overline{A}_k^{II} \cdot \ldots \overline{A}_k^{k-1}) = \left(\frac{25}{36}\right)^{k-1}$ і $P(A_k^k) = \frac{11}{36}$. Остаточно:

$$P(A_k) = \left(\frac{25}{36}\right)^{k-1} \cdot \frac{11}{36}.$$

2.1.23. Розглянемо квадратне рівняння $Ax^2 + Bx + C = 0$, де A, B, C визначаються відповідно як результати трьох послідовних підкидань грального кубика. Знайти імовірність того, що рівняння має дійсні корені. Знайти імовірність того, що рівняння має раціональні корені.

Розв'язок.

Оскільки *A, B, C* визначаються як результати підкидань грального кубика, то це означає, що *A, B, C* можуть набувати значень одного з чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, що з'являються на верхній грані грального кубика. Позначимо число, що з'являється при першому підкиданні кубика через A, другому – B, третьому – C. Для того, щоб рівняння $Ax^2 + Bx + C$ мало дійсні корені, необхідно, щоб дискримінант рівняння

$D = B^2 - 4AC \geq 0$, тобто, щоб $B^2 \geq 4AC$.

Розглянемо усі можливі варіанти результатів трьох підкидань грального кубика, тобто несумісні події:

1) $B_1 - B_1 = 1$ ($B^2 = 1$) – не підходить, оскільки нерівність $1 \geq 4 \cdot A \cdot C$ не може справджуватись ні при одному з значень A і C.

2) $B_2 - B = 2$ ($B^2 = 4$) – тут можливе лише виконання рівності $4 = 4 \cdot 1 \cdot 1$ при $A = 1$, $C = 1$. Обчислимо імовірність події B_2, яка рівна добутку незалежний подій: B_2^I – при першому підкиданні грального кубика випадає 1 ($A = 1$), B_2^{II} – при другому підкиданні грального кубика випадає 1 ($B = 1$), B_2^{III} – при третьому підкиданні випадає 1 ($C = 1$).

Отже, $P(B_2) = P(B_2^I \cdot B_2^{II} \cdot B_2^{III}) = P(B_2^I) \cdot P(B_2^{II}) \cdot P(B_2^{III})$,

і, оскільки, $P(B_2^I) = P(B_2^{II}) = P(B_2^{III}) = \dfrac{1}{6}$, то $P(B_2) =$

$= \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6^3}$.

3) $B_3 - B = 3$ ($B^2 = 9$). Нерівність $9 \geq 4 \cdot A \cdot C$ справджується, якщо відбувається одна з трьох несумісних подій, D_1, D_2, D_3, так що $B_3 = D_1 + D_2 + D_3$.

Розглянемо ці події.

D_1 – складна подія, яка полягає в одночасному настанні подій $D_1^I\,(A = 1)$, $D_1^{II}\,(B = 3)$, $D_1^{III}\,(C = 1)$, оскільки при цьому 9 > 4. Отже, $D_1 = D_1^I \cdot D_1^{II} \cdot D_1^{III}$. Цей варіант вибору A і C такий же, як в події B_2.

Подія, $D_2 = D_2^I \cdot D_2^{II} \cdot D_2^{III}$ – де події $D_2^I(A=1)$, $D_2^{II}(B=3)$, $D_2^{III}(C=2)$, так що при цьому $9 \geq 4 \cdot 1 \cdot 2$. Подія $D_3 = D_3^I \cdot D_3^{II} \cdot D_3^{III}$, де події $D_3^I(A=2)$, $D_3^{II}(B=3)$, $D_3^{III}(C=1)$, і при цьому $9 > 4 \cdot 2 \cdot 1$. Таким чином, імовірність події B_3 рівна сумі імовірностей несумісних подій D_1, D_2, D_3:

$$P(B_3) = P(D_1 + D_2 + D_3) = P(D_1) + P(D_2) + P(D_3) =$$

$$= P(D_1^I \cdot D_1^{II} \cdot D_1^{III}) + P(D_2^I \cdot D_2^{II} \cdot D_2^{III}) + P(D_3^I \cdot D_3^{II} \cdot D_3^{III}) =$$

$$= P(D_1^I) \cdot P(D_1^{II}) \cdot P(D_1^{III}) + P(D_2^I) \cdot P(D_2^{II}) \cdot P(D_2^{III}) +$$

$$+ P(D_3^I) \cdot P(D_3^{II}) \cdot P(D_3^{III}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{6^3} \right).$$

4) B_4 – $B = 4$ ($B^2 = 16$). Нерівність $16 \geq 4 \cdot A \cdot C$ виконується при відбутті однієї з восьми несумісних подій $E_i(i = \overline{1,8})$, де в подіях E_1, E_2, E_3, варіанти вибору A і C такі ж як у подіях D_1, D_2, D_3, відповідно. Інші події розшифровуються так: $E_4(A = 2, B = 4, C = 2)$; $E_5(A = 1, B = 4, C = 3)$, в якій $16 > 12$; $E_6(A = 3, B = 4, C = 1)$, в якій $16 > 12$; $E_7(A = 1, B = 4, C = 4)$, в якій $16 = 16$; $E_8(A = 4, B = 4, C = 1)$, в якій $16 = 16$.

Імовірності $P(N_i)$ кожної з складних несумісних подій N_i, що визначають вибір певного числа A при першому підкиданні грального кубика – подія N_i, певного числа B при другому підкиданні грального кубика – подія N_i^{II}, та певного числа C при третьому підкиданні грального кубика – подія N_i^{III} внаслідок незалежності цих подій рівна добутку їх імовірностей:

$P(N_i) = P(N_i^{\ I} \cdot N_i^{\ II} \cdot N_i^{\ III}) = P(N_i^{\ I}) \cdot P(N_i^{\ II}) \cdot P(N_i^{\ III})$, і оскільки імовірності вибору будь-якого числа рівна 1/6, то $P(N_i) = \left(\frac{1}{6}\right)^3$. Отже, $P(B_4) = 8 \cdot \frac{1}{6^3}$.

5) $B_5 - B = 5$ ($B^2 = 25$). Нерівність $25 \geq 4 \cdot A \cdot C$ справджується при відбутті однієї з чотирнадцяти несумісних подій $F_i (i = \overline{1,14})$, де в подіях $F_1, \ldots F_8$, варіанти вибору A і C такі ж як у подіях $E_1 \ldots E_8$ відповідно. Решта подій розшифровуються таким чином: $F_9(A = 1, B = 5, C = 5)$, $F_{10}(A = 5, B = 5, C = 1)$, в яких 25 > 20; $F_{11}(A = 1, B = 5, C = 6)$, $F_{12}(A = 6, B = 5, C = 1)$, $F_{13}(A = 2, B = 5, C = 3)$, $F_{14}(A = 3, B = 5, C = 2)$, в яких 25 > 24.

Таким чином, $P(B_5) = 14 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$.

6) $B_6 - B = 6$ ($B^2 = 36$). Нерівність $36 \geq 4 \cdot A \cdot C$ справджується при відбутті однієї з сімнадцяти подій $K_i (i = \overline{1,17})$, де в подіях $K_1, \ldots K_{14}$, варіанти вибору A і C такі ж як у подіях $F_1 \ldots F_{14}$. Розшифровка решти подій така: $K_{15}(A = 2, B = 6, C = 4)$, $K_{16}(A = 4, B = 6, C = 2)$, в яких 36 > 32; $K_{17}(A = 3, B = 6, C = 3)$, в якій відбувається рівність 36 = 36.

Отже, $P(B_6) = 17 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$.

Таким чином, остаточно імовірність події, яка полягає в тому, що $B^2 \geq 4AC$ рівна:

$$P(B^2 \geq 4AC) = P(B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6) = P(B_1) +$$
$$+ P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) + P(B_6) = 0 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 +$$
$$+ 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 14 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 17 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 43 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{43}{216}.$$

б) Щоб рівняння $Ax^2 + Bx + C = 0$ мало раціональні корені, необхідно, щоб $B^2 - 4AC = k^2$, де $k = 0, 1, 2...$

Отже, потрібно обчислити імовірність події $B^2 - 4AC = k^2$: $P(B^2 - 4AC = k^2)$. Для цього розглянемо всі події, для яких справджується рівняння $B^2 - 4AC = k^2$:

$B = 2$ – подія $B_2(k = 0)$; $B = 3$ – події $D_2(k = 1)$ і $D_3(k = 1)$; $B = 4$ – події $E_4(k = 0)$, $E_5(k = 2)$, $E_6(k = 2)$, $E_7(k = 0)$, $E_8(k = 0)$; $B = 5$ – події $F_4(A = 2, C = 2; (k = 3))$, $F_7(A = 1, C = 4; (k = 3))$, $F_8(A = 4, C = 1; (k = 3))$, $F_{11}(k = 1)$, $F_{12}(k = 1)$, $F_{13}(k = 1)$, $F_{14}(k = 1)$; $B = 6$ – події $K_9(A = 1, C = 5; (k = 4))$, $K_{10}(A = 5, C = 1; (k = 4))$, $K_{15}(k = 2)$, $K_{16}(k = 2)$, $K_{17}(k = 0)$.

Імовірність кожної події рівна $\frac{1}{6^3}$.

Отже, $P(B^2 - 4AC = K^2) = P(B = 2) + P(B = 3) +$

$$+ P(B = 4) + P(B = 5) + P(B = 6) = (1 + 2 + 5 + 7 + 5) \cdot \frac{1}{6^3} =$$

$$= \frac{20}{216} = \frac{5}{54}.$$

2.1.24. При одному циклі огляду радіолокаційної станції, що стежить за космічним об'єктом, об'єкт буде виявлено з імовірністю p. Виявлення об'єкта в кожному циклі відбувається незалежно від інших. Проведено n циклів огляду.

Яка ймовірність того, що об'єкт буде виявлено?

Розв’язок.

Нехай подія A полягає у виявленні об’єкту. Об’єкт буде виявлено, якщо його буде виявлено хоч би в одному циклі з імовірністю p. Для обчислення $P(A)$ скористуємось формулою появи хоч би однієї з подій: $P(A) = 1 - (1 - p)^n$.

2.1.25. Для підвищення надійності приладу він дублюється другим таким самим приладом; надійність кожного з них дорівнює p. При виході з ладу першого приладу відбувається миттєве перемикання на другий.

Знайти надійність:

а) цієї системи приладів;

б) системи, якщо пристрій перемикання працює з надійністю p_i.

Розв'язок.

а) Надійність системи з двох приладів рівна імовірності того, що буде працювати хоч би один прилад. Тому використаємо формулу для обчислення імовірності – відбуття хоч би однієї з подій: $P(A)=1-(1-p)(1-p)=1-(1-p)^2$.

б) Імовірність роботи основного приладу рівна p, імовірність роботи дубльованого приладу рівна p_1p. Тоді надійність системи рівна імовірності настання хоч би однієї з двох подій: $P(A)=1-(1-p)(1-p_1p)$.

2.1.26. Електричне коло зібране за схемою, поданою на рисунках 2.1.4а-д.

Нехай A_i – подія, яка полягає в тому, що за час T вийде i-й елемент кола; $P(A_i)=p_i$. Різні елементи кола виходять з ладу незалежно один від одного. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що коло вийде з ладу за час T. Для кожної із схем (*а-д*) виразити подію A через події A_i і обчислити ймовірність події A.

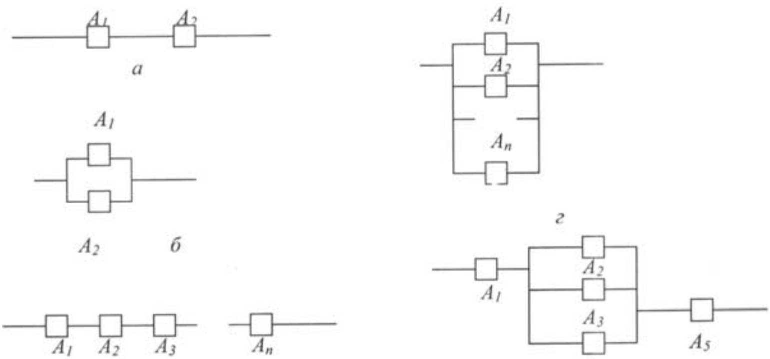


Рис. 2.1.4.

Розв'язок.

Нехай A – подія, яка полягає в тому, що електричне коло вийде з ладу за час T; A_i – подія, яка полягає в тому, що вийде з ладу i – елемент кола, ймовірності виходу з ладу i-того елемента $P(A_i) = p_i$.

а) Послідовне сполучення. Коло вийде з ладу (подія A), якщо вийде з ладу хоч би один з елементів: A_1 – (подія A_1) чи A_2 (подія A_2), тобто

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2).$$

б) Паралельне сполучення елементів. Коло вийде з ладу (подія A), якщо одночасно вийдуть з ладу елемент A_1 (подія A_1) і елемент A_2 (подія A_2), тобто подія A рівна добутку подій A_1 і A_2: $A = A_1 \cdot A_2$. Ймовірність $P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(A_2) = p_1 \cdot p_2$, оскільки події A_1 і A_2 незалежні.

в) Послідовне сполучення. Коло вийде з ладу (наступить подія A), якщо вийде з ладу хоч би один з елементів A_i, де i=1, 2...n, тобто $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \ldots \cdot \overline{A}_i \ldots \cdot \overline{A}_n) = 1 - P(\overline{A}_1) \times$
$\times P(\overline{A}_2) \ldots \cdot \ldots P(\overline{A}_i) \ldots \cdot \ldots P(\overline{A}_n) = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \ldots \times$
$\times \ldots (1 - p_i) \ldots \cdot \ldots (1 - p_n).$

г) Паралельне сполучення елементів. Коло вийде з ладу, якщо вийдуть з ладу усі n елементів одночасно, тобто:

$$A = A_1 \cdot A_2 \ldots \cdot \ldots A_n.$$

Імовірність події A: $P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \ldots \cdot \ldots A_n) = P(A_1) \times$
$\times P(A_2) \ldots \cdot \ldots P(A_n) = p_1 \cdot p_2 \ldots \cdot \ldots p_n$ – оскільки події A_i, $i = 1, \cdot n$ незалежні між собою.

д) Послідовне сполучення елемента A_1, блоку B, в якому елементи A_2, A_3, A_4 сполучені паралельно і елемента A_5.

Блок B вийде з ладу (подія B), якщо вийдуть з ладу всі елементи A_2, A_3, A_4, тобто наступить подія $B = A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$. Тоді $P(B) = P(A_2 \cdot A_3 \cdot A_4)$.

Електричне коло вийде з ладу (подія A), якщо вийде з ладу хоч би один з елементів A_1 (подія A_1), B (подія B) чи A_5

(подія A_5). Отже, імовірність цієї події A рівна імовірності настання хоч би однієї з подій: $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{B} \cdot \overline{A}_5) = 1 -$

$$- P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{A}_5) = 1 - (1 - p_1)P(\overline{A_2 A_3 A_4})(1 - p_5).$$

Протилежною подією $\overline{A_2 A_3 A_4}$ до події $A_2 A_3 A_4$ (наступлять всі події одночасно) є подія, яка полягає в тому, що не наступить хоч би одна з подій A_2, A_3, A_4. Отже, імовірність такої події:

$$P(\overline{A_2 A_3 A}) = 1 - P(\overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4) = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4).$$

Остаточно,

$$P(A) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_5)[1 - (1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4)].$$

2.1.27. Багаторазово вимірюють деяку фізичну величину. Ймовірність того, що при зчитуванні показів приладу допущена помилка, рівна p. Знайти найменше число вимірювань, яке необхідно провести, щоб з ймовірністю $P > \alpha$ можна було очікувати, що хоча б один результат вимірювань виявиться невірним.

Розв'язок.

Нехай подія A полягає у допущенні помилки хоч би у одному випробуванні. Імовірність допущення помилок в окремому випробуванні рівна p. Якщо випробувань є n, то ймовірність настання події A обчислюється згідно формули: $P(A) = 1 - (1 - p)^n$. Звідси $(1 - p)^n = 1 - P(A)$. Але за умовою n повинно бути таким, щоб виконувалась нерівність $P(A) \geq \alpha$, звідки $(1 - p)^n \leq 1 - \alpha$. Прологарифмувавши ліву і праву частини і врахувавши те, що $\lg(1 - p) \leq 0$, отримаємо $n \geq \dfrac{\log(1-\alpha)}{\log(1-p)} = E\left[\dfrac{\log(1-\alpha)}{\log(1-p)}\right] + 1$, де $E[N]$ – ціла частина числа N.

2.1.28. Скільки разів потрібно кинути гральний кубик, щоб поява п'яти очок хоча б один раз мала ймовірність, більшу за 0,85?

Розв’язок.

Використаємо розв’язок попередньої задачі (див.2.1.27), поклавши імовірність появи “5” очок рівною $p = \frac{1}{6}$; $P = 0{,}85$. Отже,

$$n \geq \frac{\log(1-P)}{\log(1-p)} = \frac{\log(1-0{,}85)}{\log(1-\frac{1}{6})} = \frac{\log 0{,}15}{\log \frac{5}{6}} = \frac{(-0{,}82390874)}{(-0{,}0791812)} = 10{,}41.$$

Отже, $n \geq 10+1 = 11$; $n = 11$.

2.1.29. (Див. 1.4.2) Визначити умову, при якій буде економічно вигідно проводити поштучний контроль певних деталей, якщо в механізм (крім інших) встановлюється 2 такі деталі. Вартість механізму – N грн., вартість поштучного контролю 1 деталі – M грн., ймовірність виготовлення бракованої деталі p. Механізм виходить з ладу, якщо в ньому буде хоча б одна бракована деталь.

Чи буде економічно вигідно проводити поштучний контроль деталей, якщо вартість механізму N = 2 грн., вартість контролю кожної деталі M = 1 коп., а ймовірність виготовлення бракованої деталі рівна: а) 0,1; б) 0,01; в) 0,001?

Розв’язок.

Механізм вийде з ладу – подія A, якщо вийде з ладу хоч би одна з двох встановлених деталей. Отже, $P(A) = 1 - (1-p)^2$.

З умови ймовірності виходу механізму з ладу знаходимо число деталей n: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{n}$, $n = \frac{2}{P(A)}$.

Оскільки вартість перевірки однієї деталі рівна M, то вартість перевірки всього механізму рівна $S = n \times M =$

$= \dfrac{2}{1-(1-p)^2} M$. Умовою економічної доцільності проведення контролю є виконання нерівності: $S < N$:

$$\frac{2}{1-(1-p)^2} M < N, \quad \text{звідси} \quad p > 1 - \sqrt{1 - \frac{2M}{N}} \quad \text{або}$$

$$M < \frac{N}{2}\left[1-(1-p)^2\right].$$

Підставивши N = 200; M = 1, отримуєм $p > 1 - \sqrt{0{,}99} =$ $= 0{,}005$.

Отже, при: а) p = 0,1 – контроль проводити вигідно;

б) p = 0,01 – контроль проводити вигідно;

в) p = 0,001 – контроль проводити недоцільно.

2.1.30. Вимірювальний пристрій складається з двох приладів. Ймовірність безвідмовної роботи k-го приладу за певний період часу рівна 1 – $_k$ (k = 1, 2). Знайти ймовірність p того, що обидва прилади будуть працювати:

а) якщо неполадки виникають незалежно;

б) якщо нічого невідомо про залежність між неполадками цих приладів.

Розв’язок.

а) Нехай подія C означає безвідмовну роботу обох приладів, тобто першого – подія A і другого – подія B. Отже, C = $= A{\cdot}B$ і, оскільки, події A і B незалежні, то $P(C) = P(A{\cdot}B) =$ $= P(A){\cdot}P(B) = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)$, де $P(A) = 1 - \alpha_1$, $P(A) = 1 - \alpha_2$ – ймовірності безвідмовної роботи першого і другого приладів.

б) Згідно формули імовірності суми двох сумісних подій імовірність того, що хоч би один прилад буде працювати, рівна: $P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A{\cdot}B)$, і оскільки $P(A+B) \ge 0$, то $P(A \cdot B) \le P(A) + P(B)$, аналогічно $P(\overline{A} \cdot \overline{B}) \le P(\overline{A}) + P(\overline{B})$.

Події “C – хоч би один прилад буде працювати” і “ $\overline{A}\cdot\overline{B}$ – обидва прилади не працюють протилежні” і утворюють повну групу. Отже, $P(C)+P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1$, звідки $P(C)=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B})\geq$ $\geq 1-[P(\overline{A})+P(\overline{B})]=1-\alpha_1-\alpha_2$.

2.1.31. Винищувач атакує бомбардувальник і дає по ньому дві незалежні черги. Ймовірність того, що бомбардувальник збитий першою чергою рівна 0,2, другою – 0.3. Якщо бомбардувальник не збито, то він веде по винищувачу стрільбу і збиває його з ймовірністю 0,25.

Знайти ймовірність того, що в результаті повітряного бою буде збито бомбардувальник або винищувач (див. 2.1.9).

Розв’язок.

II спосіб.

Введемо позначення: подія A_1 – перша черга пошкодила бомбардувальник; A_2 – друга черга пошкодила бомбардувальник; A – бомбардувальник збито; B – збито винищувач. За умовою задачі $A=A_1+A_2$; $p(A_1)=0{,}2$; $p(A_2)=0{,}3$; $p(B/\overline{A})=0{,}25$.

Ймовірність того, що збитий бомбардувальник знаходимо, враховуючи, що події A_1 і A_2 сумісні і незалежні:

$$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)+$$
$$+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2)=0{,}2+0{,}3-0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}5-0{,}06=0{,}44.$$

Ймовірність того, що бомбардувальник не збито можна обчислити або як подію протилежну до події A, або через добуток ймовірностей протилежних подій до A_1 і A_2.

$$P(\overline{A})=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)=(1-0{,}2)(1-0{,}3)=0{,}56.$$

Ймовірність того, що збито винищувач становить

$$P(B)=P(\overline{A})\cdot P(B/\overline{A})=0{,}56\cdot 0{,}25=0{,}14.$$

Так як події A і B несумісні, бо збитий бомбардувальник не може збити винищувач, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}44+0{,}14=0{,}58.$$

2.1.32. Електричне коло складене з елементів A_k, $k = 1, 2, ..., 5$ за схемою, наведеною на рис. 2.1.5. При виході з ладу будь-якого елементу коло в місці його вмикання розривається. Ймовірність виходу з ладу за даний період елементу A_k дорівнює p_k, $k = 1, 2, ..., 5$. Припускається, що елементи виходять або не виходять з ладу незалежно один від одного.

Знайти ймовірність події C = {за розглянутий період по колу може проходити струм}.

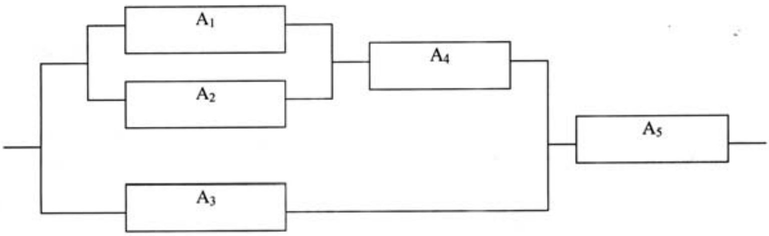


Рис. 2.1.5.

Розв'язок.

Позначимо через C подію, яка полягає в тому, що по колу може проходити струм. Введемо у розгляд події: B – струм проходить через I вітку, що містить елементи A_1, A_2, A_4; D – струм проходить через II вітку, що містить елемент A_3.

Якщо імовірність виходу з ладу елемента A_k рівна p_k, де $k = 1, 2, ...5$, то імовірність його роботи рівна $q_k = 1 - p_k$.

Для того, щоб струм проходив по I вітці (подія B), необхідно, щоб він проходив через елемент A_1 (подія A_1) або через елемент A_2 (подія A_2), або через обидва елементи разом (добуток подій $A_1 \cdot A_2$) і елемент A_4. Оскільки проходження струму по одній з віток (відбуття однієї з подій) не заперечує проходження струму по іншій (відбуття другої події), то події A_1 і A_2 – сумісні. Отже, подія $B = (A_1 + A_2) \cdot A_4$, де $A_1 + A_2$ – сума сумісних подій. Тому $P(B) = P[(A_1 + A_2) \cdot A_4] = P(A_1 + A_2) \cdot P(A_4)$, оскільки події $(A_1 + A_2)$ і A_4, A_1 і A_2 – незалежні (елементи виходять з ладу чи працюють незалежно один від одного). Імовірність суми сумісних подій A_1 і A_2 рівна:

$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) + P(A_2) -$

$-P(A_1)P(A_2) = q_1 + q_2 - q_1 \cdot q_2 = q_1 + q_2(1 - q_1) = q_1 + p_1 q_2;$

$P(A_4) = q_4.$

Отже, $P(B) = q_4(q_1 + p_1 q_2).$

Для того, щоб струм проходив по колу (подія C), необхідно, щоб він проходив через I вітку (подія B), або через II вітку (подія D), або через обидві вітки разом ($B \cdot D$), тобто маємо суму сумісних подій ($B+D$) і через елемент A_5 (подія A_5). Отже, подія $C = (B + D) \cdot A_5$, і її імовірність $P(C) = P[(B+D) \cdot A_5] = P(B+D) \cdot P(A_5)$, оскільки події $B + D$ і A_5 – незалежні.

Імовірність $P(D) = P(A_3) = q^3$, імовірність суми сумісних подій B і D:

$P(B + D) = P(B) + P(D) - P(BD) = P(B) + P(D) -$
$- P(B) \cdot P(D) = q_4 \cdot (q_1 + p_1 q_2) + q_3 - q_3 q_4 \cdot (q_1 + p_1 \cdot q_2) = q_3 +$
$+ q_4 \cdot [q_1 + p_1 q_2 - q_3 \cdot (q_1 + p_1 q_2)] = q_3 + q_4 \cdot (q_1 + p_1 \cdot q_2)(1 - q_3) =$
$= q_3 + q_4 \cdot (q_1 + p_1 q_2) p_3 = q_3 + p_3 \cdot q_4 \cdot (q_1 + p_1 \cdot q_2).$

Отже, $P(C) = q_5[q_3 + p_3 q_4(q_1 + p_1 q_2)].$

2.1.33. Дані три попарно незалежні події A, B, C, які в той же самий час одночасно відбутися не можуть.

Припускаючи, що всі вони мають одну і ту ж ймовірність p, знайти найбільш можливе значення p.

Розв’язок.

За умовою задачі $P(A) = P(B) = P(C) = p$. Якщо кожні три події попарно незалежні, то імовірності їх добутків рівні:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = p^2; P(BC) = P(B) \cdot P(C) = p^2;$$

$$P(AC) = P(A) \cdot P(C) = p^2.$$

Оскільки події A, B, C одночасно відбутися не можуть, то імовірність їх добутку рівна нулю: $P(ABC) = 0$. Імовірність суми сумісних подій A, B, C рівна:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) -$$
$$- P(AC) + P(ABC) = p + p + p - p^2 - p^2 - p^2 + 0 =$$
$$= 3p - 3p^2 = f(p).$$

Для обчислення значення p при якому імовірність суми максимальна, візьмемо першу похідну від $f(p)$ і прирівняємо її до 0.

Отже, $\frac{\partial f(p)}{\partial p} = 3 - 3 \cdot 2p = 0$, звідки $p = \frac{1}{2}$.

2.1.34. Кинули монету і гральну кістку. Визначити, залежні чи незалежні події:

A = {Випав "тризуб"};

B = {Випало парне число очок}.

Розв'язок.

Події A і B незалежні, оскільки між ними нема причинного зв'язку.

2.1.35. По повітряній кулі незалежно один від одного стріляють чотири стрільці, імовірності влучень кожного з яких відповідно рівні 0,7; 0,75; 0,8; 0,9. Знайти імовірність знищення кулі.

Розв'язок.

І спосіб.

Нехай подія A полягає у знищенні кулі. Куля буде знищена, коли буде принаймні одне влучання, тобто наступить одна з незалежних подій A_i, $i = \overline{1,4}$. Тоді $P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) \times (1 - p_4)$, де $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}75$; $p_3 = 0{,}8$; $p_4 = 0{,}9$ – ймовірності влучання першого, другого, третього та четвертого стрільців. Отже, $P(A) = 1 - (1 - 0{,}7) \cdot (1 - 0{,}75) \cdot (1 - 0{,}8) \times (1 - 0{,}9) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 1 - 0{,}0015 = 0{,}9985$.

ІІ спосіб.

Оскільки незалежні події A_i – влучання i-того стрільця (i = 1,4) є сумісними і подія A є їх сумою: $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, то $P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - P(A_1 \cdot A_2) - P(A_1 \cdot A_3) -$

$$-P(A_1\cdot A_4)-P(A_2\cdot A_3)-P(A_2\cdot A_4)-P(A_3\cdot A_4)+P(A_1\cdot A_2\times$$
$$\times A_3)+P(A_1\cdot A_2\cdot A_4)+P(A_2\cdot A_3\cdot A_4)+P(A_1\cdot A_3\cdot A_4)-$$
$$-P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)-$$
$$-P(A_1)\cdot P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_3)-P(A_1)\cdot P(A_4)-P(A_2)\times$$
$$\times P(A_3)-P(A_2)\cdot P(A_4)-P(A_3)\cdot P(A_4)+P(A_1)\cdot P(A_2)\times$$
$$\times P(A_3)+P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_4)+P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot P(A_4)+$$
$$+P(A_1)\cdot P(A_3)\cdot P(A_4)-P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot P(A_4)=$$
$$=0{,}7+0{,}75+0{,}8+0{,}9-0{,}7\cdot 0{,}75-0{,}7\cdot 0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}9-$$
$$-0{,}75\cdot 0{,}8-0{,}75\cdot 0{,}9-0{,}8\cdot 0{,}9+0{,}7\cdot 0{,}75\cdot 0{,}8+0{,}7\cdot 0{,}75\times$$
$$\times 0{,}9+0{,}75\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9+0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9-0{,}7\cdot 0{,}75\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=$$
$$=3{,}15-0{,}525-0{,}56-0{,}63-0{,}6-0{,}675-0{,}72+0{,}42+$$
$$+0{,}4725+0{,}54+0{,}504-0{,}378=0{,}9985\,.$$

2.1.36. Довести, що $P_A(B)\geq 1-\dfrac{P(\overline{B})}{P(A)}$.

Розв'язок.

Оскільки події B і $\overline{B}$ протилежні (утворюють повну групу подій), то $P(B)+P(\overline{B})=1$, і $P_A(B)+P_A(\overline{B})=1$. Отже, $P_A(B)=1-P_A(\overline{B})$; але $P(A\cdot\overline{B})=P(A)\cdot P_A(\overline{B})=P(\overline{B})\times$ $\times P_{\overline{B}}(A)$, звідки $P_A(\overline{B})=\dfrac{P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}{P(A)}$.

Отже, $P_A(B)=1-\dfrac{P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}{P(A)}$.

Але $P(\overline{B})\geq P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$, оскільки $P_{\overline{B}}(A)\leq 1$. Замінивши в останньому рівнянні чисельник на більше значення $P(\overline{B})$, отримаємо нерівність: $P_A(B)\geq 1-\dfrac{P(\overline{B})}{P(A)}$.

2.1.37. Нехай відомо, що $P_B(A) > P(A)$. Довести тоді, що $P_A(B) > P(B)$.

Розв'язок.

Використаємо формулу імовірності добутку двох залежних подій: $P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$, звідки

$$\frac{P(A)}{P_B(A)} = \frac{P(B)}{P_A(B)}.$$

За умовою $P_A(B) < P(B)$, отже, дріб зліва менший 1, тому й дріб справа менший 1:

$\dfrac{P(B)}{P_A(B)} < 1$. Звідси $P(B) < P_A(B)$, або $P_A(B) > P(B)$.

2.1.38. Довести, що якщо події A і B незалежні, то події A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і B, $\overline{A}$ і $\overline{B}$ також незалежні.

Розв'язок.

Подію A можна подати як суму двох подій, що перетинаються $A \cdot B$ і $A \cdot \overline{B}$: $A = A \cdot \overline{B} + A \cdot B$. Оскільки події A і B незалежні, то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. Тоді $P(A) = = P(A \cdot \overline{B}) + P(A \cdot B) = P(A \cdot \overline{B}) + P(A) \cdot P(B)$. Але $P(B) + + P(\overline{B}) = 1$, як сума імовірностей протилежних подій.

Звідси, $P(A \cdot \overline{B}) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)\left[1 - P(B)\right] = = P(A) \cdot P(\overline{B})$.

Але імовірність добутку двох подій дорівнює добутку їх імовірностей, якщо ці події незалежні. Отже, A і $\overline{B}$ – незалежні події. Аналогічно подамо подію B, як суму двох подій, що перетинаються AB і $\overline{A} \cdot B$: $B = A \cdot B + \overline{A} \cdot B$. Імовірність події B рівна: $P(B) = P(A \cdot B) + P(\overline{A} \cdot B) = = P(A) \cdot P(B) + P(\overline{A} \cdot B)$, звідки $P(\overline{A} \cdot B) = P(B) - P(A) \times \times P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B) \cdot P(\overline{A})$. Отже, події A і $\overline{B}$ – незалежні.

Подамо подію $\overline{A}$ як суму двох подій, що перетинаються: $\overline{A} = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$. Імовірність події $P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cdot \overline{B}) + P(\overline{A} \cdot B)$, звідси $P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cdot B) = P(\overline{A}) - P(\overline{A}) \cdot P(B) = P(\overline{A})[1 - P(B)] = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$, як доведено вище, отже, $\overline{A}$ і $\overline{B}$ також незалежні.

2.1.39. Кинуто два гральних кубики. Всі комбінації рівноймовірні.

Знайти умовну ймовірність того, що випали дві п'ятірки, якщо відомо, що сума очок, що випали, ділиться на п'ять.

Розв’язок.

Сума очок, що випали, ділиться на п’ять, якщо відбудуться такі наслідки випробувань:

Кількість очок на I кубику	1	4	2	3	4	6	5
Кількість очок на II кубику	4	1	3	2	6	4	5

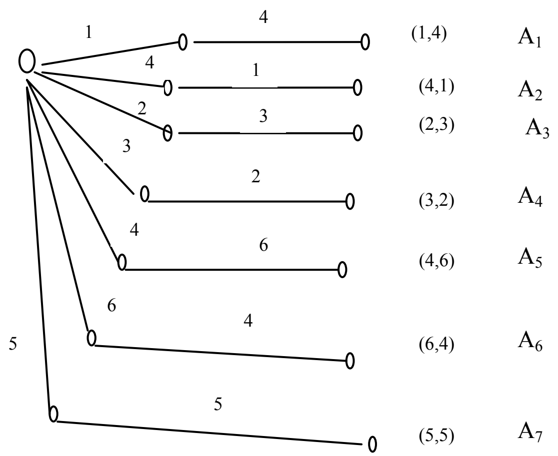


Рис. 2.1.6.

Це можна зобразити графічно на дереві імовірностей (рис. 2.1.6):

Нехай подія A означає, що сума очок ділиться на 5. Вона може відбутися при настанні однієї з несумісних подій: $A_1,\dots A_7$.

Подія B – означає, що випали дві п'ятірки. Це відповідає лише одній події A_7. Тоді умовна імовірність події B $P_A(B) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{7}$.

2.1.40. З множини всіх родин, які мають двох дітей, обрано одну родину. Всі елементарні події однаково ймовірні.

Яка ймовірність того, що:

а) в цій родині два хлопчики, якщо відомо, що в ній є один хлопчик?

б) в родині два хлопчики, якщо відомо, що старша дитина – хлопчик?

Розв'язок.

Простір елементарних подій має вигляд:

$\Omega = \{DD, DX, XD, XX\}$. Зобразимо їх на дереві імовірностей (рис. 2.1.7):

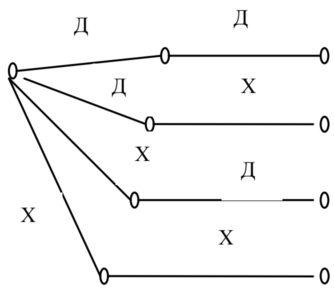


Рис. 2.1.7.

Нехай $A = \{XX\}$ – подія, яка полягає в тому, що в родині є два хлопчики, $B = \{DX, XD, XX\}$ – подія, яка полягає в тому, що в родині є хоч би один хлопчик; $C = \{XD, XX\}$ – подія, яка полягає в тому, що старша дитина – хлопчик.

Тоді:

а) Через залежні події дана імовірність шукається так:

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3}$; або $P_B(A) = \dfrac{1}{3}$ – лише один наслідок $\{XX\}$ випробувань з усіх трьох можливих $\{DX, XD, XX\}$ відповідає даній події.

б) $P_C(A) = \dfrac{P(A \cdot C)}{P(C)} = \dfrac{1/4}{2/4} = \dfrac{1}{2}$; або $P_C(A) = \dfrac{1}{2}$ – лише один наслідок $\{XX\}$ – випробувань з двох можливих $\{XD, XX\}$ відповідає даній події.

2.1.41. З 100 карточок з числами 00, 01,...., 98, 99 випадково вибирається одна. Нехай η_1 і η_2 відповідно сума і добуток цифр на вибраній карточці. Знайти $P\{\eta_1 = i \mid \eta_2 = 0\}$, i = 0, 1, ..., 18.

Розв'язок.

Нехай подія $A = \{\eta_2 = 0\}$ означає, що добуток цифр на вибраній карточці рівний 0. Даній події відповідає такий набір з 19 чисел: {00; 01; 02; 03; 04; 05; 06; 07; 08; 09; 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90}.Подія $B_i = \{\eta_1 = i\}$ означає, що сума цифр вибраного числа рівна i. Тоді події $C_i = \{\eta_1 = 0 \mid \eta_2 = 0\}$ – яка означає, що сума цифр вибраного числа рівна нулю за умови, що їх добуток рівний нулю, відповідає одне число "00". Тому імовірність події C_0 рівна, $P(C_0) = P_A(B_0) = \dfrac{1}{19}$.

Події $C_i = \{\eta_1 = 1 \mid \eta_2 = 0\}$ відповідають два числа: “01” і “10”. Отже $P(C_1) = P_A(B_1) = \dfrac{2}{19}$. Аналогічно, $C_i = \{\eta_1 = i \mid \eta_2 = 0\}$ і $P(C_i) = P_A(B_i) = \dfrac{2}{9}$ для i = 1, 2,... 9. Оскільки, нема жодного з перерахованих вище чисел, у яких би сума була більшою 10 ($\eta_1 \geq 10$), то $P(C_i) = P_A(B_i) = 0$, для i=10, 11, ...18.

2.1.42. Серед усіх родин з двома дітьми обрано одну.

Описати простір елементарних подій і випадкові події: *A* “в родині є хлопчик і дівчинка”, *B* – “в родині не більше однієї дівчинки”. Всі елементарні події однаково ймовірні.

Обчислити *P(A)*, *P(B)*, *P(A B)* і довести, що події *A* і *B* залежні.

Розв’язок.

Простір елементарних подій $\Omega = \{DD, DX, XD, XX\}$.

Нехай $A = \{DX, XD\}$ – подія, яка полягає в тому, що в родині є дівчинка і хлопчик, $B = \{DX, XD, XX\}$ – подія, яка полягає в тому, що в родині не більше однієї дівчинки (включає подію *XX* – в родині немає жодної дівчинки). Тоді $P(A) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}, \quad P(B) = \dfrac{3}{4}$, добуток подій $A \cdot B = \{DX, XD\}$. Тому $P(A) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Для визначення того, чи події *A* і *B* є залежними, перевіримо виконання рівності: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. Якщо рівність справджується, то події є незалежними, якщо не справджується, то події є залежними.

Але $P(A\cdot B)=\frac{1}{2}$ і $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$. Отже, $\frac{1}{2}\neq\frac{3}{8}$ або $P(A\cdot B)\neq P(A)\cdot P(B)$, тому події A і B є залежними.

II спосіб.

Визначимо умовні імовірності подій:

$$P_B(A)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}=\frac{2/4}{3/4}=\frac{2}{3};\ \text{отже,}$$

$$P(A)=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{3}=P_B(A)\ .$$

Отже, події A і B – залежні.

$$P_A(B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(A)}=\frac{2/4}{2/4}=1;\ \ P(B)=\frac{3}{4}\neq 1=P_A(B)\ .$$

Отже, події A і B – залежні.

III спосіб.

Позначимо події: A_1 – першою народилася дівчинка; A_2 – другою народилася дівчинка; B_1 – першим народився хлопчик; B_2 – хлопчик народився другим.

Простір елементарних подій: $A_1A_2+B_1B_2+A_1B_2+B_1A_2$.

Подія $A=A_1B_2+B_1A_2=A_1B_2\cup B_1A_2$ і, оскільки

$$P(A_1)=P(A_2)=P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2},\ \text{то}$$

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Подія $B=B_1B_2\cup A_1B_2\cup B_1A_2$. Отже, $P(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$; тому $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$. Але $P(A\times B)=P(A)P(B/A)$, де $P(B/A)=P_A(B)=P(B)$, якщо A і B незалежні і $P(B/A)=P_A(B)=1$ у даному випадку.

Тому $P(A \times B) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ і $P_A(B / A) \neq P(B)$, оскільки $1 \neq \frac{3}{8}$ і $P(A \times B) \neq P(A) \cdot P(B)$, оскільки $\frac{1}{2} \neq \frac{3}{8}$.

Отже, події A і B залежні.

2.1.43. Серед усіх родин з трьома дітьми обрали одну.

Описати простір елементарних подій і випадкові події: A "в родині є хлопчик і дівчинка", B – "в родині не більше однієї дівчинки". Всі елементарні події однаково ймовірні.

Обчислити *P(A)*, *P(B)*, *P(A B)* і довести, що події A і B незалежні.

Розв'язок.

Простір елементарних подій такий:

$\Omega = \{XXX, XDD, DXD, DDX, DDD, XXD, XDX, DXX\}$.

Нехай $A = \{XXD, XDX, DXX, XDD, DXD, DDX\}$ – подія, яка полягає в тому, що в родині є хлопчик і дівчинка, тоді $P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Нехай $B = \{XXX, XXD, XDX, DXX\}$ – подія, яка полягає в тому, що в родині не більше однієї дівчинки, звідки $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Добуток подій A і B такий: $A \times B = \{XDX, DXX, XXD\}$, звідки, $P(A \times B) = \frac{3}{8}$. Обчислимо добуток імовірностей $P(A) \times P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$. Отже, $P(A \times B) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{8}$, а така рівність можлива, коли події A і B незалежні.

2.1.44. Кинуті послідовно три монети. Розглядаються події:

A={ випадання "тризуба" на першій монеті};

B={ випадання хоча б одного "тризуба"};
C={ випадання хоча б одного номіналу};
D={ випадання номіналу на другій монеті};
E={ випадання "тризуба" на другій монеті};
Визначити залежні чи незалежні пари подій:
1) A і C; 2) A і D; 3) B і D; 4) B і C; 5) B і E; 6) A і E; 7) C і D.

Розв'язок.

Імовірність випадання „тризуба" рівна $p=\frac{1}{2}$, "номіналу" $q=\frac{1}{2}$. Отже, $P(A)=P(D)=P(E)=\frac{1}{2}$. Тоді імовірність випадання хоча б одного "тризуба" $P(B)=1-$ $-(1-p)(1-p)(1-p)=1-\frac{1}{2^3}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$. Аналогічно, імовірність випадання хоча б одного "номіналу" рівна:

$$P(C)=1-(1-q)(1-q)(1-q)=1-(1-q)^3=1-\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}.$$

Тоді: 1) $P_A(C)=1-(1-q)(1-q)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ або

$P(AC)=P(A)\cdot P_A(C)$, звідки $P_A(C)=\dfrac{P(AC)}{P(A)}=\dfrac{3/8}{4/8}=\dfrac{3}{4}$,

отже, $P(C)\neq P_A(C)$ і події A і C – залежні.

2) $P(D)=\frac{1}{2}$; $P_D(A)=\frac{1}{2}$; $P(A)=\frac{1}{2}$; $P_A(D)=\frac{1}{2}$; отже, $P(A)=P_D(A)$; $P(D)=P_A(D)$, а тому події A і D – незалежні.

3) Зобразимо простір усіх елементарних подій:

$\Omega=(T_1T_2T_3, H_1H_2H_3, T_1T_2H_3, T_1H_2T_3, H_1T_2T_3, H_1H_2T_3,$ $H_1T_2H_3, T_1H_2H_3)$.

Тоді простір подій B – випадання хоча б одного "тризуба" зобразиться так: $\Omega_1=(T_1T_2T_3, T_1T_2H_3, T_1H_2T_3, H_1T_2T_3, H_1H_2T_3,$

$H_1T_2H_3, T_1H_2H_3)$, отже, $P(B)=\frac{7}{8}$, серед яких настанню події D – "випадання номіналу на другій монеті" буде відповідати простір подій $\Omega_2=(T_1H_2T_3, H_1H_2T_3, T_1H_2H_3)$. Таким чином, $P_B(D)=\frac{3}{7}$, отже, $P_B(D)\neq P(D)$. Але $P_D(B)=1-(1-p)(1-p)=1-(1-q)^2=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$ або $P(DB)=$ $=P(D)\cdot P_D(B)$, звідки $P_D(B)=\frac{P(DB)}{P(D)}=\frac{3/8}{4/8}=\frac{3}{4}$. Отже, $P_D(B)\neq P(B)$; тому події B і D залежні.

4) Для обчислення ймовірності $P_C(B)$ зобразимо простір Ω_3 подій C – "випадання хоча б одного номіналу":

$$\Omega_3=(H_1H_2H_3, T_1T_2H_3, T_1H_2T_3, H_1T_2T_3, H_1H_2T_3, H_1T_2H_3,$$

$T_1H_2H_3)$, отже, $P(C)=\frac{7}{8}$, серед яких настанню події B – "випадання хоча б одного тризуба" буде відповідати простір подій: $\Omega_4=(T_1T_2H_3, T_1H_2T_3, H_1T_2T_3, H_1H_2T_3, H_1T_2H_3, T_1H_2H_3)$.

Отже, $P_C(B)=\frac{6}{7}$, звідки, $P_C(B)\neq P(B)$, а, отже, події B і C залежні.

5) $P_E(B)=1$, отже, $P_E(B)\neq P(B)$; $P_B(E)=\frac{4}{7}$, $P_B(E)\neq P(E)$, тому – події B і E залежні.

6) $P(A)=\frac{1}{2}$;, $P(E)=\frac{1}{2}$; $P_E(A)=\frac{1}{2}$; $P_A(E)=\frac{1}{2}$, отже, $P(A)=P_E(A)$; $P(E)=P_A(E)$, тому події A і E незалежні.

7) $P_C(D)=\frac{4}{7}$; $P(D)=\frac{1}{2}$, тому $P_C(D)\neq P(D)$;

$P_D(C) = 1$, $P(C) = \frac{7}{8}$; отже, $P_D(C) \neq P(C)$, тому події D і C залежні.

2.1.45. Підкидають два гральні кубики. Розглянемо випадкові події:

A_1 – на першому кубику випало парне число очок;

A_2 – на першому кубику випало непарне число очок;

A_3 – сума очок на кубиках непарна. Довести, що події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні, але не є незалежними в сукупності.

Розв'язок.

Можлива кількість очок, що можуть випасти, знаходиться в межах від 1 до 6, з них $m_1 = 3$ парні і $m_2 = 3$ непарні. Отже, $P(A_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Розглянемо добуток подій $A_1 \cdot A_2$ – на першому кубику випало парне число очок з одночасним випаданням непарного числа очок на другому. Число випадків, що сприяють настанню події $A_1 \cdot A_2$ є $m = m_1 \cdot m_2 = 3 \cdot 3 = 9$. Загальне ж число усіх можливих наслідків випробування, що утворюють повну групу подій, є $n = n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 6 = 36$. Отже, $P(A_1 \cdot A_2) = \frac{m}{n} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Добуток імовірностей подій A_1 і A_2 рівний: $P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Таким чином, $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$, що можливе у випадку незалежності подій A_1 і A_2.

Подія A_3, може відбутися за умови, що на першому кубику випало парне число очок, а на другому непарне (подія $A_1 \cdot A_2$) і навпаки (подія $A_2 \cdot A_1$).

Тоді число випробувань, що сприяють настанню події A_3 є $m = m_1 m_2 + m_2 m_1 = 2 \times 9 = 18$, загальне ж число усіх можливих наслідків випробувань, що утворюють повну групу подій рівне n = 36, так що $P(A_3)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{18}{36}=\dfrac{1}{2}$. Імовірність настання події $A_1 \cdot A_3$ рівна $P(A_1\cdot A_3)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$. Добуток імовірностей подій A_1 і A_3 рівний: $P(A_1)\cdot P(A_3)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$. Отже, $P(A_1\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_3)$, що показує на незалежність подій A_1 і A_3.

Аналогічно, $P(A_2A_3)=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$; $P(A_2)P(A_3)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$.

Отже, $P(A_2\cdot A_3)=P(A_2)\cdot P(A_3)$, тобто події A_2 і A_3 є також незалежними.

Розглянемо подію $A_1\cdot A_2\cdot A_3$. Якщо настає подія $A_1\cdot A_2$, то обов’язково настає подія A_3. Число випробувань, що сприяють настанню події $A_1\cdot A_2\cdot A_3$ рівне $m=m_1\cdot m_2=$ $=3\cdot 3=9$, загальне число усіх можливих наслідків випробувань рівне n = 36. Отже, $P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$. Добуток імовірностей подій A_1, A_2, A_3 рівний: $P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=$ $=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$.

Отже, $P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)\neq P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$, що означає, що попарно незалежні події A_1, A_2, A_3 не є незалежними в сукупності.

2.1.46. Згідно даних перепису населення (1891 р.) в Англії і Уельсу встановлено: темноокі батьки і темноокі сини $(A\times B)$ склали 5% обстежених, темноокі батьки і світлоокі сини ($A\times\overline{B}$) – 7.9%, світлоокі батьки і темноокі сини

($\overline{A} \times B$) – 8.9%, світлоокі батьки і світлоокі сини ($\overline{A} \times \overline{B}$) – 78.2%.

Знайти зв'язок між кольором очей батька і сина.

Розв’язок.

Нехай події: A – темноокий батько, B – темноокий син, $\overline{A}$ – світлоокий батько, $\overline{B}$ – світлоокий син.

Згідно умови $P(A \times B) = 0{,}05; P(A \times \overline{B}) = 0{,}079;$

$P(\overline{A} \times B) = 0{,}089; P(\overline{A} \times \overline{B}) = 0{,}782.$

Використовуємо формулу:

$P(A \times B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A),$

де $P(A) = P(A \cdot \overline{B}) + P(A \cdot B);$ $P(B) = P(\overline{A} \cdot B) + P(A \cdot B).$

Звідси, умовна імовірність того, що син темноокий, якщо батько темноокий:

$$P_A(B) = \frac{P(A \times B)}{P(A)} = \frac{P(A \times B)}{P(A \times \overline{B}) + P(A \times B)} = \frac{0{,}05}{0{,}079 + 0{,}05} = 0{,}3876 \cdot$$

Тоді умовна імовірність того, що син світлоокий, якщо батько темноокий:

$$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0{,}3876 = 0{,}6124.$$

Умовна імовірність того, що батько темноокий, якщо син темноокий:

$$P_B(A) = \frac{P(A \times B)}{P(B)} = \frac{P(A \times B)}{P(\overline{A} \times B) + P(A \times B)} = \frac{0{,}05}{0{,}089 + 0{,}05} = 0{,}3597.$$

Отже, умовна імовірність того, що батько світлоокий, якщо син темноокий:

$$P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A) = 1 - 0{,}3597 = 0{,}6403.$$

Використовуємо формулу:

$P(\overline{A} \times \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B}) = P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(\overline{A}),$ де $P(\overline{A}) =$ $= P(\overline{A} \times \overline{B}) + P(\overline{A} \times B),$ $P(\overline{B}) = P(\overline{A} \times \overline{B}) + P(A \times \overline{B})$.

Звідси умовна імовірність того, що син світлоокий, якщо батько світлоокий, рівна:

$$P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\times\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A}\times\overline{B})}{P(\overline{A}\times\overline{B})+P(\overline{A}\times B)}=\frac{0{,}782}{0{,}782+0{,}089}=0{,}89782.$$

Отже, умовна імовірність того, що син темноокий, якщо батько світлоокий рівна: $P_{\overline{A}}(B)=1-P_{\overline{A}}(\overline{B})=1-0{,}89782=$ $=0{,}10218.$

Умовна імовірність того, що батько світлоокий, якщо син світлоокий:

$$P_{\overline{B}}(\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\times\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A}\times\overline{B})}{P(\overline{A}\times\overline{B})+P(A\times\overline{B})}=\frac{0{,}782}{0{,}782+0{,}079}=0{,}9082.$$

Тоді умовна імовірність того, що батько темноокий, якщо син світлоокий, рівна:

$$P_{\overline{B}}(A)=1-P_{\overline{B}}(\overline{A})=1-0{,}9082=0{,}09175.$$

2.1.47. Дитина грається з чотирма буквами розрізної азбуки А, А, М, М. Яка ймовірність того, що при випадковому розміщенні букв в ряд вона одержить слово “МАМА”?

Розв’язок.

ІІ спосіб (див. 1.4.11).

Дану імовірність можна обчислити використовуючи формулу залежних подій:

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1\cdot A_2}(A_3)\times$$
$$\times P_{A_1\cdot A_2\cdot A_3}(A_4),$$

де A_1 – подія, яка полягає в тому, що перша буква “М”, A_2 – подія, яка полягає в тому, що друга буква “А”, A_3 – подія, яка полягає в тому, що третя буква “М”, A_4 – подія, яка полягає в тому, що четверта буква “А”.

Відповідні імовірності рівні: $P(A_1)=\dfrac{2}{4}$; $P_{A_1}(A_2)=\dfrac{2}{3}$; $P_{A_1A_2}(A_3)=\dfrac{1}{2}$; $P_{A_1A_2A_3}(A_4)=1$. Остаточно, $P(A)=$ $=\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{6}.$

2.1.48. Дано: $P(A/B) = 0{,}7$, $P(A/\overline{B}) = 0{,}3$, $P(B/A) = 0{,}6$. Обчислити $P(A)$.

Розв'язок.

$P_B(A) = 0{,}7;$ $P_{\overline{B}}(A) = 0{,}3;$ $P_A(B) = 0{,}6.$ $P(A) = ?$	Розглянемо несумісні події AB, $A \cdot \overline{B}$, $\overline{A} \cdot B$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$. Вони утворюють повну групу подій, а імовірність повної групи подій рівна 1: $P(AB + A\overline{B} + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A} \cdot B) + P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 \quad (1).$

Розглянемо подію $A \to (AB) + (A \cdot \overline{B}) \quad (2).$

Застосуємо оператор імовірності до події A:

$$P(A) = P(AB) + P(A \cdot \overline{B}) \quad (3).$$

Тоді з врахуванням (3) вираз (1) запишеться у вигляді:

$$P(A) + P(\overline{A}B) + P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 \quad (4).$$

Звідки, $P(A) = 1 - \left[P(\overline{A}B) + P(\overline{A} \cdot \overline{B})\right] \quad (5).$

Розпишемо добутки залежних подій:

$$P(\overline{A} \cdot B) = P(B) \cdot P_B(\overline{A}) = P(B) \cdot \left[1 - P_B(A)\right] = P(B) \cdot (1 - 0{,}7) = 0{,}3P(B) \quad (6);$$

$$P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \left[1 - P(B)\right] \cdot \left[1 - P_{\overline{B}}(A)\right] = \left[1 - P(B)\right] \cdot (1 - 0{,}3) = 0{,}7\left[1 - P(B)\right] \quad (7).$$

Вираз в квадратних дужках (5) рівний:

$$P(\overline{A} \cdot B) + P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 0{,}3P(B) + 0{,}7\left[1 - P(B)\right] = 0{,}7 - 0{,}4P(B) \quad (8).$$

Розпишемо добуток $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$; отже, $0{,}6 \cdot P(A) = 0{,}7 \cdot P(B) \quad (9).$

Звідси, $P(B) = \dfrac{0{,}6P(A)}{0{,}7} \quad (10).$

Підставимо (10) у (8):

$$P(\overline{A}\cdot B)+P(\overline{A}\cdot\overline{B})=0{,}7-\frac{0{,}4\cdot 0{,}6P(A)}{0{,}7}.$$

Тоді вираз (5) матиме вигляд:

$P(A)=1-\left(0{,}7-\dfrac{0{,}4\cdot 0{,}6P(A)}{0{,}7}\right)$ або після спрощень:

$P(A)=0{,}3+\dfrac{0{,}24\cdot P(A)}{0{,}7}$; $0{,}46P(A)=0{,}21$. Отже,

$$P(A)=\frac{0{,}21}{0{,}46}=0{,}45652.$$

2.1.49. Букви, які утворюють слово “ОДЕССА” написані по одній на шести картках; картки перемішані і покладені в пакет.

Чому дорівнює ймовірність того, що, витягуючи картки по одній і записуючи відповідні букви в ряд зліва направо ми прочитаємо слово (кількість витягнутих карток рівна числу букв в слові):

а) САД;

б) АСС;

в) СОДА.

г) ОДЕССА. Яка ймовірність того, що вибравши три букви, з них можна скласти слово “ОДА”?

Вказівка. Задачу розв’язати двома способами: а) за схемою повернених і б) неповернених куль.

(Див. 1.4.12.) ІІ спосіб. Через залежні події.

Розв’язок.

І) Букви повертають назад. а) Імовірність складання слова “САД” – подія A рівна імовірності добутку таких подій: витягання з шести букв першої букви “С” з двох “С” – подія A_1, другої букви “А” – подія A_2, третьої букви “Д” – подія A_3. Оскільки події A_1, A_2, A_3 – незалежні, то імовірність події A рівна добутку імовірностей цих подій:

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{6^3} = \frac{1}{108}.$$

б) Аналогічно, імовірність складання слова “*АСС*” рівна:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{6^3} = \frac{1}{54},$$

де $P(A_1) = \frac{1}{6}$ – імовірність витягання букви “*А*”, імовірність витягання букви “*С*” $P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{6}$.

в) Імовірність складання слова “СОДА” рівна:

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3 A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{6^4} = \frac{1}{648}.$$

г) Імовірність складання слова “ОДЕССА” рівне:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6^6} = \frac{1}{11664}.$$

ІІ. Букви не повертають. Нехай *А* – описана подія.

а) Імовірність *P(A)* можна виразити через залежні події A_1, A_2, A_3 – витягання букв С, А, Д відповідно за І, ІІ і ІІІ разом:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_i A_2}(A_3) =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{60}.$$

б) Імовірність події *А* – складання слова “АСС” через залежні події виразиться таким чином:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{60}.$$

в) Імовірність події *А* – складання слова “СОДА” через залежні події рівна:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot P_{A_1 A_2 A_3}(A_4) =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{180}.$$

г) Імовірність складання слова “ОДЕССА” через залежні події виразиться таким чином:

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4\cdot A_5\cdot A_6)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\times$$
$$\times P_{A_1A_2}(A_3)\cdot P_{A_1A_2A_3}(A_4)\cdot P_{A_1A_2A_3A_4}(A_5)\cdot P_{A_1A_2A_3A_4A_5}(A_6)=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{2!}{6!}=\frac{1}{360}.$$

Імовірність вибору букв О, Д, А для складання слова “ОДА” рівна $P(A)=P_3\cdot P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=3!P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\times$ $\times P_{A_1A_2}(A_3)=6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$. Тут імовірність події $A_1\cdot A_2\cdot A_3$ помножена на число перестановок P_3 з трьох елементів О, Д, А, оскільки вказані букви можуть бути вибрані в будь-якому порядку, а лише потім з них складають слово “ОДА”.

2.1.50. Абонент забув останню цифру номера телефону і тому набирає її навмання.

Знайти ймовірність того, що йому доведеться дзвонити не більше, ніж в чотири місця.

Розв’язок.

Нехай A – описана подія. Її імовірність рівна сумі імовірностей несумісних подій B_1,B_2,B_3,B_4: B_1 – цифра набрана вірно з першого разу, $P(B_1)=\frac{1}{10}$; B_2 – цифра набрана вірно з другого разу, отже з першого разу вона не вгадана – $B_2=\overline{A_1}\cdot A_2$. Оскільки події $\overline{A_1}$ і A_2 залежні, то $P(B_2)=$ $=P(\overline{A_1}\cdot A_2)=P(\overline{A_1})\cdot P_{\overline{A_1}}(A_2)=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$, оскільки

$$P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

B_3 – цифра набрана вірно з третього разу, тоді $B_3=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3$ і $P(B_3)=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3)=P(\overline{A_1})\cdot P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\times$

$$\times P_{\overline{A_1}\times\overline{A_2}}(A_3)=\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{10},\qquad \text{оскільки}\qquad P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})=1-$$

$$-P_{\overline{A_1}}(A_2)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.$$

B_4 – цифра, набрана вірно з четвертого разу, отже

$$P(B_4)=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4)=P(\overline{A_1})\cdot P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\cdot P_{\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}}(\overline{A_3})\times$$

$$\times P_{\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}}(A_4)=\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{10}.$$

Звідси, $P(A)=P(B_1+B_2+B_3+B_4)=P(B_1)+P(B_2)+$

$$+P(B_3)+P(B_4)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=0{,}4.$$

2.1.51. З ящика, який вміщує три білети з номерами 1, 2, 3, виймають по одному всі білети. Припускається, що всі послідовності номерів білетів мають однакові ймовірності.

Знайти ймовірність того, що хоч у одного білета порядковий номер співпаде з власним.

Розв'язок.

Шукана подія A рівна сумі несумісних подій: $A_1+A_2+A_3$, де A_1 – один з порядкових номерів білетів співпаде з власним; A_2 – два порядкові номери білетів співпадуть з власними; A_3 – три порядкові номери білетів співпадуть з власними. Тому $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$, де $P(A_1)=\frac{1}{3}$; $P(A_2)=$

$=P(A_2'\cdot A_2'')=P(A_2')\cdot P_{A_2'}(A_2'')$, де $P(A_2')=\frac{1}{3}$ – ймовірність співпадання першого порядкового номера з власним, $P_{A_2'}(A_2'')=\frac{1}{2}$ – умовна ймовірність співпадання другого порядкового номера білета з власним за умови співпадання першого порядкового номера з власним;

$$P(A_3)=P(A_3^{/}\cdot A_3^{//}\cdot A_3^{///})=P(A_3^{/})\cdot P_{A_3^{/}}(A_3^{//})\cdot P_{A_3^{/}A_3^{//}}(A_3^{///})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1.$$

Отже, $P(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{2}{3}$.

2.1.52. Товариство складається з n чоловіків і $2n$ жінок. Знайти імовірність того, що при випадковому групуванні по три в кожній групі буде чоловік.

Розв’язок.

Нехай A – подія, імовірність якої треба знайти. У товаристві $n + 2n = 3n$ людей. З $3n$ людей можна створити n пар або груп по троє людей в групі. Нехай подія A_k ($k = 1, 2, \ldots n$) означає, що k-та пара людей складається з 1 чоловіка і 2 жінок.

Така шукана подія $A=A_1\cdot A_2\cdot A_3\ldots\cdot A_k\ldots\cdot A_n$, де $A_2, A_3,\ldots.A_{k,}\ldots A_n$ – залежні події. Отже, $P(A)=P(A_1\cdot A_2\times$ $\times A_3\ldots\cdot A_k\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\ldots\cdot P_{A_1A_2\ldots A_{k-1}}(A_k)\ldots\times$ $\times P_{A_1A_2\ldots A_k\ldots A_{n-1}}(A_n)$,

де $P(A_1)=\dfrac{C_n^1\cdot C_{2n}^2}{C_{3n}^3}$ – імовірність першої пари;

$P_{A_1}(A_2)=\dfrac{C_{n-1}^1\cdot C_{2n-2}^2}{C_{3n-3}^3}$ –імовірність другої пари;

$P_{A_1A_2}(A_3)=\dfrac{C_{n-2}^1\cdot C_{2n-4}^2}{C_{3n-6}^3}$ – імовірність третьої пари;

$P(A_k)=\dfrac{C_{n-(k-1)}^1\cdot C_{2n-2(k-1)}^2}{C_{3n-3(k-1)}^3}$ –імовірність k-тої пари;

$P(A_n)=\dfrac{C_1^1\cdot C_2^2}{C_3^3}$ –імовірність останньої пари.

Остаточно,

$$P(A)=\frac{n\cdot(2n)!\cdot 3!\cdot(3n-3)!\cdot(n-1)\cdot(2n-2)!\cdot 3!\cdot(3n-6)!\cdot(n-2)\cdot(2n-4)!\cdot 3!\cdot(3n-9)!\cdot}{2!\cdot(2n-2)!\cdot(3n)!\cdot 2!\cdot(2n-4)!\cdot(3n-3)!\cdot 2!\cdot(2n-6)!\cdot(3n-6)!\cdot}\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\frac{(n-k+1)\cdot[2n-2(k-1)]!\cdot 3!\cdot(3n-3k)!\cdot\ldots 1\cdot 1}{2!\cdot(2n-2k)!\cdot[3n-3(k-1)]!\cdot 1}=$$

$$=\frac{(2n)!\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots(n-k+1)\cdot\ldots 1\cdot 2!\cdot 3\cdot 2!\cdot 3\cdot 2!\cdot 3}{(3n)!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}=\frac{(2n)!\cdot n!\cdot 3^n}{(3n)!}.$$

Відповідь. $P(A)=\dfrac{(2n)!\cdot n!\cdot 3^n}{(3n)!}$.

2.1.53. В урні n білих, n червоних і n чорних куль. Всі кулі з урни витягують трійками, причому витягнуті кулі назад не повертають. Яка імовірність того, що всі трійки складаються з куль різного кольору?

Розв’язок.

Нехай A – подія, імовірність якої треба обчислити. В урні всього $n_б + n_{черв} + n_{чорн} = 3n$ куль, з яких можна створити n трійок по 3 різні кулі в кожній.. Нехай подія A_k ($k = 1, 2, \ldots n$) означає, що k-та трійка складається з 1 білої, 1 червоної і 1 чорної куль. Тоді шукана подія A рівна добутку подій, з яких всі крім A_1, є залежними: $A = A_1\cdot A_2\cdot A_3\ldots\cdot A_k\ldots\cdot A_n$. Тоді:

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\ldots\cdot A_k\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\ldots\times$$

$$\times P_{A_1A_2\ldots A_{k-1}}(A_k)\ldots\cdot P_{A_1A_2\ldots A_k\ldots A_{n-1}}(A_n),$$

де $P(A_1)=\dfrac{C_n^1\cdot C_n^1\cdot C_n^1}{C_{3n}^3}$ – імовірність першої трійки;

$P(A_2)=\dfrac{C_{n-1}^1\cdot C_{n-1}^1\cdot C_{n-1}^1}{C_{3n-3}^3}$ – імовірність другої трійки;

$P(A_3)=\dfrac{C_{n-2}^1\cdot C_{n-2}^1\cdot C_{n-2}^1}{C_{3n-6}^3}$ – імовірність третьої трійки;

$P(A_k)=\dfrac{C_{n-k+1}^1\cdot C_{n-k+1}^1\cdot C_{n-k+1}^1}{C_{3n-(k-1)\cdot 3}^3}$ – імовірність k-тої трійки;

$P(A_n)=\dfrac{C_1^1\cdot C_1^1\cdot C_1^1}{C_3^3}$ – імовірність останньої трійки.

Таким чином,

$$P(A)=\frac{n\cdot n\cdot n}{\dfrac{(3n)!}{3!\cdot(3n-3)!}}\cdot\frac{(n-1)(n-1)\cdot(n-1)}{\dfrac{(3n-3)!}{3!\cdot(3n-6)!}}\times$$

$$\times\frac{(n-2)(n-2)(n-2)}{\dfrac{(3n-6)!}{3!\cdot(3n-9)!}}\ldots\cdot\frac{(n-k+1)(n-k+1)(n-k+1)}{\dfrac{[3n-(k-1)3]!}{3!(3n-3k)!}}\ldots\times$$

$$\times\ldots\frac{1\cdot1\cdot1}{1}=\frac{[n\cdot(n-1))(n-2))\ldots\cdot(n-k+1)\ldots\cdot1]^3}{(3n)!}\cdot(3!)^n=$$

$$=\frac{(n!)^3\cdot 6^n}{(3n)!}.$$

Відповідь. $P(A)=\dfrac{(n!)^3\cdot 6^n}{(3n)!}$.

2.1.54. На п'яти картках написано по одній цифрі із набору 1, 2, 3, 4, 5. Навмання вибираються одна за одною дві картки. Яка ймовірність того, що цифра на другій картці виявиться більшою, ніж на першій?

Розв'язок.

Нехай A – шукана подія. Подія A може відбутися при настанні однієї з несумісних подій: *B, C, D, E*.

Подія B: на першій картці вибрана цифра "1" – подія B_1, а на другій – будь-яка інша цифра, більша за цифру на першій картці, тобто за "1"(подія B_2). Отже, подія B дорівнює добутку залежних подій $B=B_1\cdot B_2$ і її імовірність рівна $P(B)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(B_2)$.

Імовірність витягання цифри “1” за першим разом рівна $P(B_1) = \frac{1}{5}$. Оскільки будь-яка наступна цифра більша за “1”, то $P_{B_1}(B_2) = 1$. Таким чином, $P(B) = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$.

Подія *C*: на першій картці вибрана цифра “2” – подія C_1, а на другій – будь-яка з трьох цифр 3, 4, 5, що більша за цифру 2 – подія C_3, при цьому цифра “1” не вибирається – подія C_2. Імовірність такої складної події *C* рівна: $P(C) =$ $= P(C_1 \cdot C_2 \cdot C_3) = P(C_1) \cdot P_{C_1}(C_2) \cdot P_{C_1C_2}(C_3)$, оскільки події C_1, C_2, C_3 – залежні. Тут $P(C_1) = \frac{1}{5}$. Імовірність витягання цифри “1”, коли вийнята цифра “2”, рівна $\frac{1}{4}$. Тоді імовірність невитягання цифри “1” рівна $P_{C_1}(C_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Оскільки кожна з цифр “3”, “4”, “5”, що може бути витягнута, більша за цифру “2”, то $P_{C_1C_2}(C_3) = 1$.

Отже, $P(C) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{20}$.

Подія *D*: на першій картці вибрана цифра “3” – подія D_1, а на другій картці не вибрані цифра “1” – подія D_2 і цифра “2” – подія D_3, але вибрана одна з двох цифр “4” або “5”, що більша за “3” – подія D_4.

Імовірність події *D* рівна:

$$P(D) = P(D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \cdot D_4) = P(D_1) \cdot P_{D_1}(D_2) \cdot P_{D_1D_2}(D_3) \times$$
$$\times P_{D_1D_2D_3}(D_4),$$

Тут $P(D_1) = \frac{1}{5}$.

Імовірність невитягнення цифри “1”, коли витягнута одна цифра “3” рівна $P_{D_1}(D_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Імовірність невитягання цифри “2”, коли витягнута цифра “3” і не витягається цифра “1” з імовірністю рівною $\frac{3}{4}$, тобто не розглядаються дві цифри, рівна: $P_{D_1 D_2}(D_3) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Імовірність $P_{D_1 D_2 D_3}(D_4) = 1$.

Отже, $P(D) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{10}$.

Подія *E*: на першій картці вибирається цифра “4” – подія E_1, а на другій – не вибираються цифри “1” – подія E_2, “2” – подія E_3, “3” – подія E_4, але вибирається цифра “5”, яка більше цифри “4” – подія E_5. Імовірність події *E* рівна:

$$P(E) = P(E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot E_4 \cdot E_5) = P(E_1) \cdot P_{E_1}(E_2) \times$$

$$\times P_{E_1 E_2}(E_3) \cdot P_{E_1 E_2 E_3}(E_4) \cdot P_{E_1 E_2 E_3 E_4}(E_5).$$

Тут $P(E_1) = \frac{1}{5}$; $P_{E_1}(E_2) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$; $P_{E_1 E_2}(E_3) =$

$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; $P_{E_1 E_2 E_3}(E_4) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $P_{E_1 E_2 E_3 E_4}(E_5) = 1$.

Отже, $P(E) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$.

Остаточно, $P(A) = \frac{1}{5} + \frac{3}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

2.1.55. З ящика, де є 3 білих кулі, 5 чорних і 2 червоних, два гравці почергово дістають по одній кулі без повернення. Перемагає той, хто першим вийме білу кулю. Якщо виймуть червону кулю, то оголошується нічия. Нехай A_1 = {виграє гравець, який розпочав гру}, A_2 = {виграє другий гравець}, B = {гра закінчується внічию}. Знайти $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(B)$.

Розв'язок.

Подія A_1 може наступити при відбутті однієї з несумісних подій:

$A_{1,1}$ – виграє перший гравець, що розпочав гру за першим разом (у першому випробуванні);

$A_{1,3}$ – виграє перший гравець за другим разом у третьому випробуванні;

$A_{1,5}$ – виграє перший гравець за третім разом у п'ятому випробуванні.

Отже, подія A_1 є сумою цих подій: $A_1 = A_{1,1} + A_{1,3} + A_{1,5}$ і її імовірність рівна:

$P(A_1) = P(A_{1,1}) + P(A_{1,3}) + P(A_{1,5})$.

Тут $P(A_{1,1}) = \dfrac{3}{3+5+2} = \dfrac{3}{10}$;

$$P(A_{1,3}) = P(\overline{A}_1^1 \cdot \overline{A}_2^2 \cdot A_1^3) = P(\overline{A}_1^1) \cdot P_{\overline{A}_1^1}(\overline{A}_2^2) P_{\overline{A}_1^1 \cdot \overline{A}_2^2}(\overline{A}_1^3),$$

де $P(\overline{A}_1^1) = \dfrac{5}{10}$ – імовірність програшу першого гравця, що рівнозначно імовірності витягання ним чорної кулі: $P_{\overline{A}_1^1}(\overline{A}_2^2) = \dfrac{4}{9}$ – імовірність програшу другого гравця за умови витягання чорної кулі в попередньому випробуванні; $P_{\overline{A}_1^1 \overline{A}_2^2}(A_1^3)$ – імовірність виграшу першого гравця (витягання білої кулі) в третьому випробуванні за умови витягання чорних кульок в двох попередніх випробуваннях.

$$P(A_{1,5}) = P(\overline{A}_1^1 \cdot \overline{A}_2^2 \cdot \overline{A}_1^3 \cdot \overline{A}_2^4 \cdot A_1^5) = P(\overline{A}_1^1) \cdot P_{\overline{A}_1^1}(\overline{A}_2^2) \times$$

$$\times P_{\overline{A}_1^1 \cdot \overline{A}_2^2}(\overline{A}_1^3) \cdot P_{\overline{A}_1^1 \cdot \overline{A}_2^2 \cdot \overline{A}_1^3}(\overline{A}_2^4) \cdot P_{\overline{A}_1^1 \cdot \overline{A}_2^2 \cdot \overline{A}_1^3 \cdot \overline{A}_2^4}(A_1^5) -$$

імовірність виграшу (витягання білої кулі) першого гравця за третім разом у п'ятому випробуванні за умови витягання чорної кулі у попередніх випробуваннях. Оскільки $P(\overline{A}_3^1)=\frac{5}{10}$;

$P_{\overline{A}_3^1}(\overline{A}_3^2)=\frac{4}{9}$; $P_{\overline{A}_3^1\cdot\overline{A}_3^2}(\overline{A}_3^3)=\frac{3}{8}$; $P_{\overline{A}_3^1\cdot\overline{A}_3^2\cdot\overline{A}_3^3}(\overline{A}_3^4)=\frac{2}{3}$;

$P_{\overline{A}_3^1\cdot\overline{A}_3^2\cdot\overline{A}_3^3\cdot\overline{A}_3^4}(A_3^5)=\frac{3}{6}$, то $P(A_{1,5})=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{6}$.

Остаточно, $P(A_1)=\frac{3}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{83}{210}\approx$ $\approx 0{,}3952$.

Подія A_2 може наступити при виконанні однієї з несумісних подій.

$A_{2,2}$ – виграє другий гравець за першим разом у другому випробуванні; $A_{2,4}$ – виграє другий гравець за другим разом у четвертому випробуванні; $A_{2,6}$ – виграє другий гравець за третім разом у шостому випробуванні.

Тоді $P(A_2) = P(A_{2,2}) + P(A_{2,4}) + P(A_{2,6})$,

де $P(A_{2,2})=P(\overline{A}_1^1\cdot A_2^2)=P(\overline{A}_1^1)\cdot P_{\overline{A}_1^1}(\cdot A_2^2)$ і оскільки імовірність програшу (витягнення чорної кулі) першого гравця $P(\overline{A}_1^1)=\frac{5}{10}$, то імовірність виграшу (витягнення білої кулі) другого гравця $P_{\overline{A}_1^1}(A_2^2)=\frac{3}{10-1}=\frac{3}{9}$. Отже, $P(A_{2,2})=\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{9}$.

Аналогічно, $P(A_{2,4})=P(\overline{A}_1^1\cdot\overline{A}_2^2\cdot\overline{A}_1^3\cdot A_2^4)=P(\overline{A}_1^1)\times$ $\times P_{\overline{A}_1^1}(\overline{A}_2^2)\cdot P_{\overline{A}_1^1\cdot\overline{A}_2^2}(\overline{A}_1^3)\cdot P_{\overline{A}_1^1\cdot\overline{A}_2^2\cdot\overline{A}_1^3}(A_2^4)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{7}$;

$$P(A_{2,6})=P(\overline{A}_1^1\cdot\overline{A}_2^2\cdot\overline{A}_1^3\cdot\overline{A}_2^4\cdot\overline{A}_1^5\cdot A_2^6)=P(\overline{A}_1^1)\cdot P_{\overline{A}_1^1}(\overline{A}_2^2)\times$$

$$\times P_{\overline{A}_1^1\cdot\overline{A}_2^2}(\overline{A}_1^3)\cdot P_{\overline{A}_1^1\cdot\overline{A}_2^2\cdot\overline{A}_1^3}(\overline{A}_2^4)\cdot P_{\overline{A}_1^1\cdot\overline{A}_2^2\cdot\overline{A}_1^3\cdot\overline{A}_2^4}(\overline{A}_1^5)\times$$

$$\times P_{\overline{A}_1^1\cdot\overline{A}_2^2\cdot\overline{A}_1^3\cdot\overline{A}_2^4\cdot\overline{A}_1^5\cdot}(A_2^6)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}.$$

Остаточно, $P(A_2)=\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\times$ $\times\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{43}{210}=0{,}2047.$ Оскільки події A_1, A_2, B є несумісними і утворюють повну групу, то $P(A_1+A_2+B)=P(A_1)+P(A_2)+P(B)=1$. Звідси, $P(B)=1-P(A_1)-P(A_2)=1-\frac{83}{210}-\frac{43}{210}=$ $=\frac{84}{210}=\frac{4}{10}=0{,}4$.

2.1.56. Підкидають три гральних кубики. Яка ймовірність того, що принаймні один раз випаде шістка, якщо на всіх трьох кубиках випали різні грані?

Розв'язок.

Нехай подія A полягає у випаданні принаймні однієї “6”, $\overline{A}$ – жодного разу не випаде “6” на трьох кубиках. Оскільки події A і $\overline{A}$ протилежні, то $P(A)+P(\overline{A})=1$. Звідки, $P(A)=$ $=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)\cdot P_{\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2}(\overline{A}_3)$, де залежні події $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3$ означають, що “6” не випала ні на першому, ні на другому, на ні третьому кубиках. Імовірність випадання “6” рівна $p=P(A_1)=\frac{1}{6}$; тоді $P(\overline{A}_1)=1-P(A_1)=$ $=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. Оскільки на другому гральному кубику випадає інше число очок, воно може бути одним з п'яти можливих, а ймовірність випадання “6”, рівна:

$$P_{A_1}(A_2)=\frac{1}{5},\text{ отже } P_{A_1}(A_2)=1-P_{A_1}(A_2)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}.$$

Оскільки і на третьому кубику випадає інше число очок, ніж на I і II, то воно може бути одним з чотирьох. Отже, імовірність випадання “6” на III кубику рівна $P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{1}{4}$,

отже $P_{\overline{A_1}\overline{A_2}}(\overline{A_3})=1-P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{3}{4}$.

Остаточно, $P(A)=1-\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

2.1.57. З ящика, де є M білих і $N-M$ чорних куль, по одній без повернення дістаються всі кулі. Використовуючи означення випадкового вибору в термінах умовних ймовірностей, знайти ймовірність подій:

$A(k)$ = {k-та куля – біла},

$B(k, l)$ = {k-та і l-та куля – білі},

$C(k, l)$ = {k-та куля чорна, а l-та біла}.

Розв’язок.

а) Нехай подія $A(k)$ – {k-та куля біла}.

Усіх куль N, M – білих та $(N-M)$ чорних. Можливі значення $k = 1, 2, 3, ...N$.

Нехай $k = 1$, тоді $P(A_1)=\frac{m}{n}=\frac{M}{N}$;

$k = 2$, тоді $A_2=B_1+B_2$, де B_1 – подія {I куля чорна, а II куля біла}, B_2 – подія {I куля біла і II куля біла}. Оскільки B_1 і B_2 несумісні, то $P(A_2)=P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2)=$

$$=\frac{N-M}{N}\cdot\frac{M}{N-1}+\frac{M}{N}\cdot\frac{M-1}{N-1}=\frac{M(N-1)}{N(N-1)}=\frac{M}{N};$$

$k = 3$, тоді $A_3=C_1+C_2+C_3+C_4$, де C_1 – подія {I куля чорна, II куля чорна, III куля біла}, C_2 – подія {I куля чорна, II куля біла, III куля біла}, C_3 – подія {I куля біла, II куля чорна, III куля біла}, C_4 – подія {I куля біла, II куля біла, III куля біла}. Оскільки події C_i $(i=\overline{1,4})$ несумісні, то

$$P(A_3)=P(C_1+C_2+C_3+C_4)=\frac{N-M}{N}\cdot\frac{N-M-1}{N-1}\cdot\frac{M}{N-2}+$$

$$+\frac{N-M}{N}\cdot\frac{M}{N-1}\cdot\frac{M-1}{N-2}+\frac{M}{N}\cdot\frac{N-M}{N-1}\cdot\frac{M-2}{N-2}+\frac{M}{N}\cdot\frac{M-1}{N-1}\times$$

$$\times\frac{M-2}{N-2}=\frac{M(N^2-3N+2)}{N(N-1)(N-2)}=\frac{M(N-1)(N-2)}{N(N-1)(N-2)}=\frac{M}{N}.$$

$k=4$, тоді $A_4=D_1+D_2+D_3+D_4+D_5+D_6+D_7+D_8$, де

D_1 – подія {I куля біла, II біла, III біла, IV біла},
D_2 – подія {I куля чорна, II чорна, III чорна, IV біла},
D_3 – подія {I куля чорна, II чорна, III біла, IV біла},
D_4 – подія {I куля чорна, II біла, III чорна, IV біла},
D_5 – подія {I куля біла, II чорна, III біла, IV біла},
D_6 – подія {I куля біла, II біла, III чорна, IV біла},
D_7 – подія {I куля чорна, II біла, III біла, IV біла},
D_8 – подія {I куля біла, II чорна, III чорна, IV біла},

Оскільки події C_i ($i=\overline{1,8}$) несумісні, то

$$P(A_4)=P(D_1)+P(D_2)+P(D_3)+P(D_4)+P(D_5)+P(D_6)+$$

$$+P(D_7)+P(D_8)=\frac{M}{N}\cdot\frac{M-1}{N-1}\cdot\frac{M-2}{N-2}\cdot\frac{M-3}{N-3}+\frac{N-M}{N}\times$$

$$\times\frac{N-M-1}{N-1}\cdot\frac{N-M-2}{N-2}\cdot\frac{M-3}{N-3}+\frac{N-M}{N}\cdot\frac{N-M-1}{N-1}\cdot\frac{M}{N-2}\times$$

$$\times\frac{M-1}{N-3}+\frac{N-M}{N}\cdot\frac{M}{N-1}\cdot\frac{N-M-1}{N-2}\cdot\frac{M-1}{N-2}+\frac{M}{N}\cdot\frac{N-M-1}{N-1}\times$$

$$\times\frac{M-1}{N-2}\cdot\frac{M-2}{N-3}+\frac{M}{N}\cdot\frac{M-1}{N-1}\cdot\frac{N-M}{N-2}\cdot\frac{M-2}{N-3}+\frac{N-M}{N}\cdot\frac{M}{N-1}\times$$

$$\times\frac{M-1}{N-2}\cdot\frac{M-2}{N-3}+\frac{M}{N}\cdot\frac{N-M}{N-1}\cdot\frac{N-M-1}{N-2}\cdot\frac{M-1}{N-3}=\frac{M}{N}.$$

Таким чином, по індукції $P(A_k)=\frac{M}{N}$. Оскільки імовірність появи білої кулі при будь-якому витяганні пропорційна кількості білих куль, то імовірність події $\{B_{k,l}\}$ рівна добутку залежних подій: B_k – при k-тому витяганні з'являється біла куля і B_l – при l-тому витяганні з'являється біла куля:

$P(B_{k,\ell}) = P(B_k)\cdot P_{B_k}(B_\ell) = \frac{M}{N}\cdot\frac{M-1}{N-1}$, оскільки $P(B_k) = \frac{M}{N}$,

$P_{B_k}(B_\ell) = \frac{M-1}{N-1}$.

Аналогічно, імовірність події $\{C_{k,l}\}$ рівна добутку імовірностей залежних подій: C_k – при k-тому витяганні з'являється чорна куля і C_l – при l-тому витяганні з'являється біла куля: $P(C_{k,\ell}) = P(C_k)\cdot P_{C_k}(C_\ell)$. Оскільки $P(C_k) = \frac{N-M}{N}$ – пропорційна кількість чорних куль і $P_{C_k}(C_\ell) = \frac{M}{N-1}$, то

$P(C_{k,\ell}) = \frac{N-M}{N}\cdot\frac{M}{N-1}$.

Задачу можна розв'язати також способом наведеним в задачі 2.2.15.

2.1.58. З ящика, де є N_1 білих куль, N_2 чорних і N_3 червоних, послідовно без повернення виймають кулі до того часу, поки не з'явиться червона куля.

Знайти ймовірності наступних подій:

а) вийнято n_1 білих куль і n_2 чорних,

б) не вийнято жодної білої кулі,

в) всього вийнято k куль.

Розв'язок.

а) Всього в ящику є N_1(б) + N_2(чорн) + N_3(черв) = N куль. Необхідно обчислити імовірність складної події A, яка полягає в тому, що одночасно вийнято n_1(б) і n_2(чорн) – подія A_1 і після цього – одна червона куля – подія A_2. Отже, $P(A) =$ $= P(A_1\cdot A_2) = P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)$,оскільки події A_1 і A_2 – залежні.

Тут $P(A_1) = \frac{C_{N_1}^{n_1}\cdot C_{N_2}^{n_2}}{C_{N_1+N_2+N_3}^{n_1+n_2}}$, $\quad P_{A_1}(A_2) = \frac{N_3}{N-n_1-n_2}$.

Тому $P(A) = \frac{C_{N_1}^{n_1} \cdot C_{N_2}^{n_2}}{C_N^{n_1+n_2}} \cdot \frac{N_3}{N - n_1 - n_2} = *$

Використавши формулу $(M - m)C_M^m = MC_{M-1}^m$ вираз у знаменнику $C_N^{n_1+n_2} \cdot (N - n_1 - n_2)$ зведемо до вигляду $NC_{N-1}^{n_1+n_2}$.

$$* = \frac{C_{N_1}^{n_1} \cdot C_{N_2}^{n_2} \cdot N_3}{NC_{N-1}^{n_1+n_2}} = \frac{N_3 \cdot C_{N_1}^{n_1} \cdot C_{N_2}^{n_2}}{N \cdot C_{N-1}^{n_1+n_2}} = **$$

Розпишемо $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ і підставимо у попередній вираз:

$$= ** \frac{N_3}{N} \cdot \frac{N_1!}{n_1!(N_1 - n_1)!} \cdot \frac{N_2!}{n_2!(N_2 - n_2)!} \cdot \frac{(n_1 + n_2)!(N - 1 - n_1 - n_2)!}{(N-1)!} = ***$$

Але $C_N^n = \frac{N(N-1)(N-2) \cdot ... (N - n + 1)}{n!} = \frac{N^{[n]}}{n!} = \frac{A_N^n}{n!}$.

Тому вираз зведемо до вигляду:

$$= *** \frac{N_3 \cdot N_1^{[n_1]} \cdot N_2^{[n_2]}(n_1 + n_2)!}{N \cdot n_1! n_2! (N-1)^{[n_1+n_2]}}.$$

Але $C_{n_1+n_2}^{n_1} = \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1!(n_1 + n_2 - n_1)!} = \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} = \frac{N_3 \cdot N_1^{[n_1]} \cdot N_2^{[n_2]} \cdot C_{n_1+n_2}^{n_1}}{N \cdot (N-1)^{[n_1+n_2]}}$

Розпишемо $N \cdot (N-1)^{[n_1+n_2]} = C_{N-1}^{n_1+n_2} \cdot (n_1 + n_2)! \cdot N =$

$$= \frac{(N-1)!(n_1 + n_2)! \cdot N}{(n_1 + n_2)!(N - 1 - n_1 - n_2)!} = \frac{N!}{(N - n_1 - n_2 - 1)!} = N^{[n_1 + n_2 + 1]},$$

або $N(N-1)^{[n_1+n_2]} = N(N-1)(N-2)(N-3) \cdot ... (N - n_1 - - n_2 - 1 + 1) = A_N^{n_1+n_2+1}$.

Остаточно вираз $P(A)$ набере вигляду:

$$P(A) = \frac{C_{n_1+n_2}^{n_1} \cdot N_1^{[n_1]} \cdot N_2^{[n_2]} \cdot N_3}{N^{[n_1+n_2+1]}} = \frac{C_{n_1+n_2}^{n_1} \cdot A_{N_1}^{n_1} \cdot A_{N_2}^{n_2}}{A_N^{n_2+n_1+1}}.$$

б) Подія A полягає в тому, що не вийнято жодної білої кулі, тобто за кожним i-тим випробуванням вийнята чорна куля – події A_i ($i = 1, ...N_2$) і після цього вийнята одна червона куля – подія D.

Подія A може відбутися при настанні однієї з несумісних подій:

B_0 – перша вийнята куля – червона: $B_0 = D$;

B_1 – вийняті 1 чорна і 1 червона кулі: $B_1 = A_1 \cdot D$;

B_2 – вийняті 2 чорні і 1 червона кулі: $B_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot D$;

B_i – вийняті i чорних і 1 червона кулі: $B_i = A_1 \cdot A_2 ... \cdot A_i \cdot D$;

B_{N_2} – вийняті N_2 чорних і 1 червона кулі: $B_{N_2} = A_1 \cdot A_2 ... \times$
$\times A_{N_2} \cdot D$.

Імовірності цих подій, які є добутками залежних подій, рівні:

$$P(B_0) = \frac{N_3}{N}; \quad P(B_1) = P(A_1 \cdot D) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(D);$$

$$P(B_2) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot D) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(D);$$

$$P(B_i) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... A_i \cdot D) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \times$$
$$\times ... P_{A_1 A_2 A_{i-1}}(A_i) \cdot P_{A_1 A_2 ... A_i}(D);$$

$$P(B_{N_2}) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... A_{N_2} \cdot D) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot ... \times$$
$$\times P_{A_1 A_2 ... N_2 - 1}(A_{N_2}) \cdot P_{A_1 A_2 ... N_2}(D).$$

Тоді: $P(A) = P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) + ... P(B_i) + ... P(B_{N_2}) =$

$$= \frac{N_3}{N} + \frac{N_2}{N} \cdot \frac{N_3}{N-1} + \frac{N_2}{N} \cdot \frac{N_2 - 1}{N-1} \cdot \frac{N_3}{N-2} + ... \frac{N_2}{N} \cdot \frac{N_2 - 1}{N-1} \times$$
$$\times \frac{N_2 - 2}{N-2} ... \cdot \frac{N_2 - i + 1}{N - i + 1} \cdot \frac{N_3}{N-i} + ... + \frac{N_2}{N} \cdot \frac{N_2 - 1}{N-1} \cdot \frac{N_2 - 2}{N-2} \times$$
$$\times ... \frac{1}{N - N_2 + 1} \cdot \frac{N_3}{N - N_2} = N_3 \left[\frac{1}{N} + \frac{N_2}{N(N-1)} + \right.$$

$$+\frac{N_2(N_2-1)}{N(N-1)(N-2)}+\frac{N_2(N_2-1)(N_2-2)\cdot...(N_2-i)}{N(N-1)(N-2)...\cdot...(N-i)(N-i-1)}+$$

$$\left.+...\frac{N_2(N_2-1)(N_2-2)\cdot...1}{N(N-1)(N-2)\cdot(N-N_2-1)(N-N_2)}\right]=$$

$$=N_3\left[\frac{A_{N_2}^0}{A_N^1}+\frac{A_{N_2}^1}{A_N^2}+\frac{A_{N_2}^2}{A_N^3}+...\frac{A_{N_2}^i}{A_N^{i+1}}+...\frac{A_{N_2}^{N_2}}{A_N^{N_2+1}}\right]=N_3\sum_{m\geq 0}^{N_2}\frac{A_{N_2}^m}{A_N^{m+1}}.$$

в) Якщо всього вийнято k куль, а остання куля червона, то попередні ($k-1$) куль є білими і чорними. В цьому полягає подія A. Вона може відбутися при настанні однієї з несумісних подій:

B_0 – вийнято 0 білих і ($k-1$) чорних куль;

B_1 – вийнята 1 біла і ($k-2$) чорних куль;

B_2 – вийнято 2 білих і ($k-3$) чорних куль;

B_i – вийнято і білих і ($k-i-1$) чорних куль;

B_k – вийнято ($k-1$) білих і 0 чорних куль.

Таким чином, імовірність події A рівна:

$$P(A)=P(B_0)+P(B_1)+P(B_2)+...P(B_i)+...P(B_k)=*$$

Кожну з імовірностей обчислимо за класичним означенням.

$$=*\left(\frac{C_{N_1}^0\cdot C_{N_2}^{k-1}}{C_N^{k-1}}+\frac{C_{N_1}^1\cdot C_{N_2}^{k-2}}{C_N^{k-1}}+\frac{C_{N_1}^2\cdot C_{N_2}^{k-3}}{C_N^{k-1}}...+\frac{C_{N_1}^i\cdot C_{N_2}^{k-i-1}}{C_N^{k-1}}..+\frac{C_{N_1}^{k-1}\cdot C_{N_2}^0}{C_N^{k-1}}\right)\times$$

$$\times\frac{N_3}{N-k+1}=\frac{N_3}{(N-k+1)C_N^{k-1}}\cdot(C_{N_1}^0\cdot C_{N_2}^{k-1}+C_{N_1}^1\cdot C_{N_2}^{k-2}+C_{N_1}^2\cdot C_{N_2}^{k-3}+$$

$$+C_{N_1}^i\cdot C_{N_2}^{k-i-1}+C_{N_1}^{k-1}\cdot C_{N_2}^0)=**$$

До виразу в дужках використаємо рівність $\sum_{m=0}^{r}C_{M-1}^m\times$ $\times C_{N-M}^{r-m}=C_{N-1}^r$, яка застосована до такої суми $\sum_{m=0}^{k-1}C_{N_1}^m\cdot C_{N_2}^{k-1-m}$.

Тут, $M-1=N_1$, отже $M=N_1+1$, $N-N-N-M=N_2=N-N_1-$ -1, звідки $N=N_1+N_2+1$.

Таким чином, $\sum\limits_{m=0}^{k-1} C_{N_1}^{m} \cdot C_{N_2}^{k-1-m} = C_{N_2+N_1+1-1}^{k-1} = C_{N_1+N_2}^{k-1}$

$$= ** \frac{N_3 \cdot C_{N_2+N_1}^{k-1}}{(N-k+1)C_N^{k-1}} = ***$$

До знаменника застосуємо рівність $(M-m)C_M^m = = MC_{M-1}^m$, так що, $(N-k+1)\cdot C_N^{k-1} = NC_{N-1}^{k-1}$.

$$= *** \frac{N_3 \cdot C_{N_1+N_2}^{k-1}}{NC_{N-1}^{k-1}} = \frac{N_3 \cdot A_{N_1+N_2}^{k-1} \cdot (k-1)!(N-k)!}{N(k-1)!(N-1)!} =$$

$$= \frac{N_3 \cdot A_{N_1+N_2}^{k-1} (N-k)!}{N!} = \frac{N_3 \cdot A_{N_1+N_2}^{k-1}}{A_N^k} = \frac{N_3 \cdot (N_1+N_2)^{[k-1]}}{N^{[k]}},$$

оскільки $\dfrac{N!}{(N-k)} = A_N^k = N^{[k]}$.

Остаточно $P(A) = \dfrac{N_3 (N_1+N_2)^{[k-1]}}{N^{[k]}}$.

2.2. Формула повної імовірності. Формули Байєса.

Теорема. Імовірність події A, яка може відбутися тільки разом з появою однієї з несумісних подій $B_1, B_2, \ldots B_n$, які утворюють повну групу, дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну імовірність події A:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \ldots P(B_n)\cdot P_{B_n}(A) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P_{B_i}(A) \qquad (2.2.1).$$

Це формула ***повної імовірності***. Випадкові події B_1, B_2 ... B_n називаються гіпотезами. Нехай в результаті випробування подія A уже відбулася. Тоді безумовні імовірності гіпотез

$P(B_i)$ переходять в умовні імовірності $P_A(B_i)$ і знаходяться з ***формули Байєса***:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \ldots P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)} =$$

$$= \frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)} \qquad (2.2.2).$$

Задачі

2.2.1. Брак в продукції заводу внаслідок дефекту A становить 5%, причому серед забракованої по означці A продукції в 6% випадків зустрічається дефект B, а в продукції вільної від дефекту A, дефект B зустрічається в 2% випадків.

Знайти ймовірність зустріти дефект B в усій продукції.

Розв’язок.

Нехай подія B полягає у наявності дефекту B в усій продукції. Дефект B може бути у забракованій продукції внаслідок дефекту A – гіпотеза A, і у вільній від дефекту A продукції – гіпотеза $\overline{A}$. Імовірності цих гіпотез: $P(A) = 0{,}05;$ $P(\overline{A}) = = 1 - P(A) = 1 - 0{,}5 = 0{,}95.$ Умовні імовірності $P_A(B) = 0{,}06;$ $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}02.$ Тоді за формулою повної імовірності $P(B) = = P(A)\cdot P_A(B) + P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(B) = 0{,}05\cdot 0{,}06 + 0{,}95\cdot 0{,}02 = 0{,}022.$

2.2.2. В партії з 50 деталей число бракованих не може перевищувати двох, при цьому всі значення (0, 1, 2) числа бракованих деталей однаково можливі.

Знаючи, що п'ять навмання взятих деталей виявилися придатними, знайти ймовірність того, що всі деталі, що залишилися, також є придатними.

Розв’язок.

Нехай подія A полягає в тому, що п’ять навмання взятих деталей є придатними. Це може відбутися при настанні таких гіпотез: H_1 – серед 50 деталей є 0 бракованих, тобто всі деталі придатні; H_2 – серед 50 деталей є 1 бракована, H_3 – серед 50 деталей є 2 браковані. Оскільки ці гіпотези рівноможливі, то $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$. Умовні імовірності події A при настанні цих гіпотез відповідно рівні: $P_{H_1}(A) = 1$; $P_{H_2}(A) = \frac{C_{49}^5}{C_{50}^5}$; $P_{H_3}(A) = \frac{C_{48}^5}{C_{50}^5}$.

Отже, $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \times \times P_{H_3}(A) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{C_{49}^5}{C_{50}^5} + \frac{C_{48}^5}{C_{50}^5}\right)$. Тоді умовна імовірність:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3}\left(1 + \frac{49! \cdot 5! \cdot 45!}{5! \cdot 44! \cdot 50!} + \frac{48! \cdot 5! \cdot 45!}{5! \cdot 43! \cdot 50!}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3}\left(1 + \frac{49! \cdot 44! \cdot 45!}{49! \cdot 50 \cdot 44!} + \frac{48! \cdot 43! \cdot 44 \cdot 45}{48! \cdot 49 \cdot 50 \cdot 43!}\right)} = \frac{490}{1327} \approx 0{,}3693.$$

2.2.3. Є три партії деталей по 20 деталей в кожній. Число стандартних деталей в першій, другій і третій партіях відповідно рівні 20, 15, 10. З довільно вибраної партії навмання витягається деталь, що виявилась стандартною. Деталь повертають в партію і повторно з тієї ж партії навмання вибирають деталь, яка також виявляється стандартною.

Знайти ймовірність того, що деталі були вийняті з третьої партії.

Розв'язок.

I партія: 20 = 20ст; II партія: 20 = 15ст + 5нест; III партія: 20 = 10ст + 10нест. Нехай подія A полягає в тому, що два рази навмання вибирають стандартну деталь. Для обчислення імовірності події A скористуємося формулою повної імовірності:

$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A),$ де $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \dfrac{1}{3}$ – імовірності вибору I, II, III партій відповідно. Умовні імовірності настання події A при виконанні гіпотез B_1, B_2, B_3 відповідно рівні:

$$P_{B_1}(A) = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \left(\frac{20}{20}\right)^2 = 1^2 = 1; \quad P_{B_2}(A) = \left(\frac{15}{20}\right)^2 = \frac{9}{16};$$

$$P_{B_3}(A) = \left(\frac{10}{20}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Отже, $P(A) = \dfrac{1}{3} \cdot 1 + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{9}{16} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{29}{48}.$

Тоді $P_A(B_3)$ обчислимо згідно формули Байєса:

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{29/48} = \frac{4}{29}.$$

2.2.4. Подія A може з’явитися при умові появи однієї з несумісних подій (гіпотез) B_1, B_2, ..., B_n, що складають повну групу подій. Після появи події A були переоцінені ймовірності гіпотез, тобто були знайдені умовні ймовірності $P_A(B_i)$ ($i = 1, 2, ..., n$).

Довести, що $\sum_{i=1}^{n} P_A(B_i) = 1$.

Розв’язок.

Умовні імовірності гіпотез B_i після появи події A згідно формули Байєса рівні: $P_A(B_i) = \dfrac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}$, тоді

$$\sum_{i=1}^{n} P_A(B_i) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} + \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} + \dots \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)} + \dots$$

$$\ldots\frac{P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}{P(A)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1.$$

2.2.5. Три стрільці здійснюють по одному пострілу по одній і тій же мішені. Ймовірність попадання для першого стрільця рівна 0,6, для другого – 0,5, для третього – 0,4. В результаті проведених пострілів в мішені виявилось дві пробоїни.

Знайти ймовірність того, що в мішень попали другий і третій стрільці.

Розв'язок.

Позначимо через B_1, B_2, B_3 – події, які полягають у тому, що в мішень попав перший, другий та третій стрільці, відповідно. Тоді подія A – "в мішені є два попадання" може відбутися при настанні однієї з гіпотез, що утворюють повну групу подій: $H_1 = B_1 \times B_2 \times \overline{B_3}$; $H_2 = B_1 \times \overline{B_2} \times B_3$; $H_3 = \overline{B_1} \times B_2 \times B_3$.
Оскільки події B_1, B_2, B_3 незалежні, їх імовірності рівні:

$$P(H_1) = P(B_1 \times B_2 \times \overline{B_3}) = P(B_1) \times P(B_2) \times P(B_3) =$$

$$= p_1 \times p_2 \times (1 - p_3) = 0{,}6 \times 0{,}5 \times (1 - 0{,}4) = 0{,}18;$$

$$P(H_2) = P(B_1) \times P(\overline{B}_2) \times P(B_3) = p_1 \times (1 - p_2) \times p_3 =$$

$$= 0{,}6 \times (1 - 0{,}5) \times 0{,}4 = 0{,}12;$$

$$P(H_3) = P(\overline{B_1}) \times P(B_2) \times P(B_3) = (1 - p_1) \times p_2 \times p_3 =$$

$$= (1 - 0{,}6) \times 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}08.$$

Умовні імовірні настання події A при виконанні гіпотез H_1, H_2, H_3, H_4 рівні

$$P_{H_1}(A) = P_{H_2}(A) = P_{H_3}(A) = 1.$$

Тоді згідно формули повної імовірності:

$$P(A) = P(H_1) \times P_{H_1}(A) + P(H_2) \times P_{H_2}(A) + P(H_3) \times P_{H_3}(A) =$$

$$= 0{,}18 + 0{,}12 + 0{,}08 = 0{,}38.$$

Імовірності $P_A(H_2)$ і $P_A(H_3)$ обчислимо згідно формули Байєса:

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \times P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}12}{0{,}38} = \frac{6}{19}.$$

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3) \times P_{H_3}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}08}{0{,}38} = \frac{4}{19}.$$

2.2.6. По цілі проводяться три незалежні постріли. Ймовірність попадання в ціль при першому пострілі рівна 0,1, при другому – 0,2, при третьому – 0,3. Для збиття цілі достатньо двох попадань. При одному попаданні ціль збивається з ймовірністю 0,6.

Знайти ймовірність збиття цілі.

Розв'язок.

Згідно умови $p_1 = 0{,}1;\ \ p_2 = 0{,}2;\ \ p_3 = 0{,}3;$ тоді $q_1 = 0{,}9;$ $q_2 = 0{,}8;\ \ q_3 = 0{,}7.$ Ціль може бути збита (настання події A може відбутися) при одному попаданні – гіпотеза B_1, при двох попаданнях – гіпотеза B_2, при трьох попаданнях – гіпотеза B_3.

Імовірності гіпотез B_i рівні:

$$P(B_1) = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 = 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 +$$
$$+ 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}398;$$

$$P(B_2) = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 +$$
$$+ 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}092;$$

$$P(B_3) = p_1p_2p_3 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006.$$

Якщо доповнити ці гіпотези B_1, B_2, B_3 гіпотезою B_0 – нема жодного влучання, імовірність якої $P(B_0) = q_1q_2q_3 = 0{,}9 \times$ $\times 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504$, то вони утворять повну групу подій: $P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 0{,}504 + 0{,}398 + 0{,}092 + 0{,}006 = 1.$

Умовні імовірності настання події A при виконанні цих гіпотез такі:

$$P_{B_0}(A) = 0;\ \ P_{B_1}(A) = 0{,}6;\ \ P_{B_2}(A) = 1;\ \ P_{B_3}(A) = 1.$$

Тоді згідно формули повної імовірності отримаємо:

$$P(A) = P(B_0)P_{B_0}(A) + P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) +$$

$$+ P(B_3)P_{B_3}(A) = 0{,}504 \cdot 0 + 0{,}398 \cdot 0{,}6 + 0{,}092 \cdot 1 + 0{,}006 \cdot 1 =$$

$$= 0{,}3368.$$

2.2.7. В першій урні знаходиться одна біла і 9 чорних куль, а в другій – одна чорна і 5 білих куль. З кожної урни за схемою випадкового вибору без повернення вийняли по одній кулі. Кулі, що залишилися, вкинули в третю урну.

Знайти ймовірність того, що куля, вийнята з третьої урни, буде білою.

Розв'язок.

Розглянемо гіпотези:

H_1 – з І урни витягнули одну білу кулю, її імовірність $P(H_1) = \dfrac{1}{10}$;

H_2 – з І урни витягнули одну чорну кулю, $P(H_2) = \dfrac{9}{10}$;

H_3 – з ІІ урни витягнули одну білу кулю, $P(H_3) = \dfrac{5}{6}$;

H_4 – з ІІ урни витягнули одну чорну кулю, $P(H_4) = \dfrac{1}{6}$.

Тоді подія B_1 полягає в тому, що обидві кулі білі: $B_1 = H_1H_3$, і оскільки події H_1 і H_3 незалежні, то $P(B_1) = P(H_1H_3) = P(H_1) \cdot P(H_3) = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{12}$.

Подія B_2 полягає в тому, що обидві кулі чорні: $B_2 = H_2H_4$ і

$$P(B_2) = P(H_2H_4) = P(H_2) \cdot P(H_4) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{20}.$$

Подія B_3 полягає в тому, що одна куля біла і одна чорна: $B_3 = H_1H_4 + H_2H_3$, тому $P(B_3) = P(H_1H_4) + P(H_2H_3)$ – як

сума імовірностей несумісних подій. Оскільки події $H_i\,(i=\overline{1,4})$ незалежні, то $P(B_3)=P(H_1)P(H_4)+P(H_2)P(H_3)=$
$=\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{23}{30}$.

Умовні імовірності “витягання білої кулі з III урни – подія A” при настанні подій $B_i\,(i=\overline{1,3})$ рівні:

$$P_{B_1}(A)=\frac{1+5-2}{10+6-2}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7};\quad P_{B_2}(A)=\frac{1+5}{10+6-2}=\frac{6}{14};$$

$$P_{B_3}(A)=\frac{1+5-1}{10+6-2}=\frac{5}{14}.$$

Тоді імовірність події A згідно формули повної імовірності рівна:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{7}+\frac{3}{20}\cdot\frac{6}{14}+\frac{23}{30}\cdot\frac{5}{14}=\frac{38}{105}.$$

2.2.8. Спрощена схема контролю виробів складається з двох незалежних перевірок. В результаті k-ої перевірки (k = 1, 2) виріб, який задовольняє стандарту, забраковується з ймовірністю $_k$, а бракований виріб приймається з ймовірністю $_k$. Виріб приймається, якщо він пройшов обидві перевірки.

Припускаючи, що кожен виріб задовольняє стандарту з ймовірністю p, знайти наступні ймовірності:

а) ймовірність того, що виріб, який поступив на перевірку, не буде забракований;

б) ймовірність того, що незабракований виріб задовольняє стандарту.

Розв’язок.

а) Виріб, який поступив на перевірку, не буде забракований – подія A, за умови виконання гіпотез:

1) B_1 – виріб, який поступив на перевірку є бракованим, імовірність бракованого виробу $P(B_1)=(1-p)$. Імовірність

того, що забракований виріб пройде обидві перевірки рівна $P_{B_1}(A) = \alpha_1 \cdot \alpha_2$.

2) B_2 – виріб, який поступив на перевірку є стандартним, імовірність $P(B_2) = p$. Імовірність того, що стандартний виріб пройде обидві перевірки рівна:

$$P_{B_2}(A) = (1 - \beta_1)(1 - \beta_2).$$

Імовірність події A обчислимо згідно формули повної імовірності:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) =$$
$$= (1 - p) \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 + p \cdot (1 - \beta_1) \cdot (1 - \beta_2).$$

б) Умовну імовірність події $P_A(B_2)$ обчислимо згідно формули Байєса:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{p \cdot (1 - \beta_1) \cdot (1 - \beta_2)}{(1 - p) \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 + p \cdot (1 - \beta_1) \cdot (1 - \beta_2)}.$$

2.2.9. Відділ технічного контролю (ВТК) проводить сортування приладів, які випускає завод. Кожен прилад незалежно від інших має дефекти з ймовірністю p. При перевірці у ВТК наявність дефектів виявляють з ймовірністю ; крім того, з ймовірністю справний прилад при перевірці може вести себе як дефектний. Всі прилади, в яких виявлені відхилення від стандарту, забраковуються.

Знайти ймовірність q_0 того, що незабракований прилад має дефекти, і ймовірність q_1 того, що забракований прилад має дефекти. При яких умовах $q_0 > q_1$?

Розв'язок.

Позначимо через $\overline{A}$ подію, яка полягає в тому, що прилад буде визнано дефектним і забраковано. Це може відбутися при настанні однієї з гіпотез:

1) B_1 – прилад дійсно має дефект, імовірність наявності якого (гіпотеза B_1): $P(B_1) = p$ і при цій гіпотезі B_1 з

імовірністю при перевірці він буде виявлений, тобто $P_{B_1}(\overline{A}) = \alpha$.

2) B_2 – прилад справний, тоді імовірність $P(B_2) = 1 - p$; при цій гіпотезі B_2 при перевірці імовірність визнати справний прилад дефектним рівна , тобто $P_{B_2}(\overline{A}) = \beta$.

Згідно формули повної імовірності:

$$P(\overline{A}) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(\overline{A}) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(\overline{A}) = p\alpha + (1-p)\beta .$$

Умовна імовірність q_1 того, що забракований прилад дійсно має дефекти рівна $P_{\overline{A}}(B_1)$:

$$P_{\overline{A}}(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{\alpha p}{\alpha p + \beta(1-p)}.$$

Подія A – прилад буде визнано справним, можлива при виконанні таких гіпотез: $B_1^{/}$ – прилад дійсно справний, імовірність $P(B_1^{/}) = 1 - p$. При цій гіпотезі $B_1^{/}$ справний прилад веде себе при перевірці як справний рівна $P_{B_1^{/}}(A) = (1-\beta)$;

$B_2^{/}$ – прилад дефектний, імовірність $P(B_2^{/}) = p$.

При цій гіпотезі $B_2^{/}$ при перевірці імовірність визнати дефектний прилад справним рівна $P_{B_2^{/}}(A) = (1-\alpha)$.

Згідно формули повної імовірності: $P(A) = P(B_1^{/}) \cdot P_{B_1^{/}}(A) +$

$+ P(B_2^{/}) \cdot P_{B_2^{/}}(A) = (1-p)(1-\beta) + p(1-\alpha)$.

Умовна імовірність q_0 того, що незабракований прилад має дефект, рівна $P_A(B_2^{/})$ і обчислюється згідно формули Байєса: $P_A(B_2^{/}) = \dfrac{P(B_2^{/}) \cdot P_{B_2^{/}}(A)}{P(A)} = \dfrac{p(1-\alpha)}{p(1-\alpha) + (1-p)(1-\beta)}$.

Щоб виконувалась нерівність $q_0 > q_1$ необхідно, щоб $\beta > \alpha$.

2.2.10. Кожна з k_1 урн містить m_1 білих і n_1 чорних куль, а кожна з k_2 урн містить m_2 білих і n_2 чорних куль. З навмання взятої урни вийняли кулю, яка виявилася білою.

Яка ймовірність того, що кулю взято з першої групи урн?

Розв’язок.

Позначимо через A подію “вийнята куля – біла”. Біла куля може бути вийнята з: I групи урн – гіпотеза H_1; з II групи урн – гіпотеза H_2.

Імовірності цих гіпотез $P(H_1)=\dfrac{k_1}{k_1+k_2}$; $P(H_2)=\dfrac{k_2}{k_1+k_2}$.

При настанні цих гіпотез умовні імовірності витягання білої кулі такі:

$$P_{H_1}(A)=\frac{m_1}{m_1+n_1};\quad P_{H_2}(A)=\frac{m_2}{m_2+n_2}.$$

Згідно формули повної імовірності:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=$$

$$=\frac{k_1}{k_1+k_2}\cdot\frac{m_1}{m_1+n_1}+\frac{k_2}{k_1+k_2}\cdot\frac{m_2}{m_2+n_2}.$$

Оскільки подія A відбулась – витягнута куля виявилась білою, переоцінимо $P_A(H_1)$ згідно формули Байєса:

$$P_A(H_1)=\frac{\dfrac{k_1}{k_1+k_2}\cdot\dfrac{m_1}{m_1+n_1}}{\dfrac{k_1}{k_1+k_2}\cdot\dfrac{m_1}{m_1+n_1}+\dfrac{k_2}{k_1+k_2}\cdot\dfrac{m_2}{m_2+n_2}}=$$

$$=\frac{k_1m_1(m_2+n_2)}{k_1m_1(m_2+n_2)+k_2m_2(m_1+n_1)}.$$

2.2.11. З урни, яка містить m білих ($m > 3$) і n чорних куль, загублено одну кулю. Для того щоб визначити склад куль в урні, з урни взяли дві кулі, які виявилися білими.

Обчислити ймовірність того, що загублена куля – біла.

Розв’язок.

Нехай подія A полягає в тому, що взяті дві кулі є білими. Подія A може відбутися при настанні таких гіпотез: H_1 – загублена біла куля; H_2 – загублена чорна куля.

$$P(H_1)=\frac{m}{m+n};P(H_2)=\frac{m}{m+n}.$$

Умовні імовірності події A при цих гіпотезах:

$$P_{H_1}(A)=\frac{m-1}{m+n-1}\cdot\frac{m-2}{m+n-2};$$

$$P_{H_2}(A)=\frac{m}{m+n-1}\cdot\frac{m-1}{m+n-2}.$$

Згідно формули повної імовірності:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=\frac{m}{m+n}\times$$

$$\times\frac{m-1}{m+n-1}\cdot\frac{m-2}{m+n-2}+\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m}{m+n-1}\cdot\frac{m-1}{m+n-2}.$$

Умовну імовірність гіпотези $P_A(H_1)$ обчислимо згідно формули Байєса:

$$P(H_1)=\frac{\frac{m}{m+n}\cdot\frac{m-1}{m+n-1}\cdot\frac{m-2}{m+n-2}}{P(A)}=$$

$$=\frac{m(m-1)(m-2)}{m(m-1)(m-2+n)}=\frac{m-2}{m+n-2}.$$

2.2.12. Три мисливці одночасно вистрілили у вовка. Ймовірність попадання кожним з мисливців однакова і рівна $p=0{,}4$.

Знайти ймовірність того, що вовка буде вбито, якщо відомо, що при одному попаданні мисливці вбивають вовка з ймовірністю 0,2, при двох – з ймовірністю 0,5, і при трьох – з ймовірністю 0,8.

Розв'язок.

Нехай подія A полягає у тому, що вовка буде вбито. Подія A може відбутися при одному попаданні – гіпотеза H_1, при двох – гіпотеза H_2, при трьох – гіпотеза H_3. Оскільки $H_1 = B_1 + B_2 + B_3$, де подія B_1 – вовка вбито I мисливцем, B_2 – II мисливцем, B_3 – III мисливцем, то $P(H_1) = P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$ – як сума імовірностей несумісних подій. Отже, $P(H_1) = p(1-p)(1-p) + (1-p)p \times (1-p) + (1-p)(1-p)p = 3p(1-p)^2$.

$H_2 = B_1' + B_2' + B_3'$ – де подія B_1' – вовка вбито I і II мисливцем, B_2' –I і III мисливцем, B_3' –II і III мисливцем. Оскільки події B_1', B_2', B_3' – несумісні, то $P(H_2) = P(B_1' + B_2' + B_3') = P(B_1') + P(B_2') + P(B_3') = pp(1-p) + p(1-p)p + (1-p)pp = 3p^2(1-p)$.

$H_3 = B_1''' \cdot B_2''' \cdot B_3'''$ – де події B_1''', B_2''', B_3''' – вовка вбив I, II і II мисливець одночасно . Оскільки події B_1''', B_2''', B_3''' – незалежні, то $P(H_3) = P(B_1''' \cdot B_2''' \cdot B_3''') = P(B_1''') \cdot P(B_2''') \times P(B_3''') = p \cdot p \cdot p = p^3$.

Умовні імовірності події A при настанні гіпотез рівні:

$$P_{H_1}(A) = 0{,}2; \quad P_{H_2}(A) = 0{,}5; \quad P_{H_3}(A) = 0{,}8.$$

Підставивши дані у формулу повної імовірності, отримаєм:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) = 3p(1-p)^2 \cdot 0{,}2 + 3p^2(1-p) \cdot 0{,}5 + p^3 \cdot 0{,}8 = 3 \cdot 0{,}4(1-0{,}4)^2 \times 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}4^2(1-0{,}4) \cdot 0{,}5 + 0{,}4^3 \cdot 0{,}8 = 0{,}0864 + 0{,}144 + 0{,}0512 = 0{,}2816.$$ (Тут покладено $p = 0{,}4$).

Імовірності гіпотез H_1, H_2 можна обчислити простіше використавши формулу Бернуллі (див. 3.1):

$$P(H_1) = P_3(1) = C_3^1 p^1 (1-p)^3 = 3p(1-p)^2;$$

$$P(H_2) = P_3(2) = C_3^2 p^2 (1-p)^3 = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} p^2 (1-p) = 3p^2(1-p).$$

2.2.13. В першій урні є 1 біла і 4 червоних кулі, а в другій – 1 біла і 7 червоних. В першу урну додають дві кулі, випадково вибраних з другої урни.

а) Знайти ймовірність того, що куля, вибрана з поповненої першої урни, буде білою.

б) Нехай з поповненої першої урни за схемою випадкового вибору з поверненням виймають k куль. Знайти ймовірність того, що всі вони будуть білими.

Розв'язок.

Початковий склад урн такий – I урна: 5 = 1 *біла* + 4 *чорні*; II урна: 8 = 1 *біла* + 7 *чорних*.

Використаємо формулу повної імовірності:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A).$$

а) Розглянемо гіпотези: H_1 – з II урни вибрані 1 біла і 1 чорна кулі; тоді $P(H_1) = \dfrac{C_1^1 \cdot C_1^7}{C_8^2} = \dfrac{1\cdot 7\cdot 1\cdot 2}{8\cdot 7} = \dfrac{1}{4}$;

H_2 – з II урни вибрані 2 чорні кулі; тоді $P(H_2) = \dfrac{C_2^7}{C_8^2} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 2!}{2!\cdot 8\cdot 7} = \dfrac{3}{4}$.

Тоді імовірність події A – „куля вибрана з першої поповненої урни є білою" рівна при гіпотезі H_1:

$$P_{H_1}(A) = \frac{2}{5+2} = \frac{2}{7}; \quad H_2:\ P_{H_2}(A) = \frac{1}{5+2} = \frac{1}{7}.$$

Отже, $P(A) = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{7} + \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{7} = \dfrac{5}{28}$.

б) Нехай подія A полягає в тому, що k куль витягнутих з першої поповненої урни є білими, якщо вони витягаються з поверненням.

Тоді $P_{H_1}(A) = \left(\frac{2}{7}\right)^k$; $P_{H_2}(A) = \left(\frac{1}{7}\right)^k$.

Отже, $P_{H_1}(A) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^k + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^k$.

2.2.14. Студент знає не всі екзаменаційні білети.

В якому випадку ймовірність витягнути невивчений білет буде для нього найменшою: коли він тягне білет першим чи останнім?

Розв'язок.

Нехай усіх білетів є N, з них M – кількість білетів, які студент не знає і $(N - M)$ – кількість білетів, які студент знає.

Якщо студент тягне білет першим, то ймовірність витягнути невивчений ним білет (подія A) рівна $P(A) = \frac{M}{N}$.

Якщо студент тягне білет останнім, то для нього може залишитись невитягненим попередніми студентами один: а) невивчений ним білет – подія або гіпотеза H_1. Отже, попередніми студентами були витягнуті $(N - 1)$ білетів, з яких $(M - 1)$ білетів студент не знав і $(N - M)$ білетів студент знав. Імовірність цієї гіпотези рівна: $P(H_1) = \frac{C_M^{M-1} \cdot C_{N-M}^{N-M}}{C_N^{N-1}}$.

Умовна імовірність події A – витягнення невивченого білета останнім студентом при цій гіпотезі рівна 1: $P_{H_1}(A) = 1$.

б) вивчений студентом білет – подія або гіпотеза H_2. Отже, з попередньо витягнутих $N - 1$ білетів витягнуто M білетів, які студент не знав і $(N - 1 - M)$ білетів, які студент знав; імовірність гіпотези H_2 рівна: $P(H_2) = \frac{C_M^M \cdot C_{N-M}^{N-M-1}}{C_N^{N-1}}$.

Умовна імовірність події A (витягнення невивченого ним білета) при цій гіпотезі рівна 0. Згідно формули повної імовірності імовірність витягнення невивченого білета, коли студент тягне білет останнім рівна:

$$P(A)=\frac{C_M^{M-1}\cdot C_{N-M}^{N-M}}{C_N^{N-1}}\cdot 1+\frac{C_M^{M}\cdot C_{N-M}^{N-M-1}}{C_N^{N-1}}\cdot 0=\frac{C_M^{M-1}\cdot 1}{C_N^{N-1}}=$$

$$=\frac{M!(N-1)!(N-N+1)!}{(M-1)!(M-M+1)!N!}=\frac{(M-1)!M\cdot(N-)!\cdot 1!}{(M-1)!\cdot 1!(N-1)!N!}=\frac{M}{N}.$$

Для всіх решти проміжних витягувань білетів імовірність витягнення невивченого білета стала і рівна $P(A)=\frac{M}{N}$ (задача розв'язана в 2.2.15).

2.2.15. З урни, де є M білих і $N-M$ чорних куль, загублено r куль.

Порівняти ймовірності виймання білої кулі:

а) до втрати;

б) після втрати при $r=1$;

в) після втрати при $r>1$.

Розв'язок.

Усіх кульок є N, M – білих і $(N-M)$ – чорних.

а) Ймовірність витягнення білої кулі до втрати рівна $P(A)=\frac{M}{N}$.

б) Загублена куля може бути білою – гіпотеза H_1, або чорною – гіпотеза H_2. Ймовірність гіпотези H_1: $P(H_1)=\frac{M}{N}$; при відбутті гіпотези H_1 ймовірність витягання білої кулі рівна $P_{H_1}(A)=\frac{M-1}{N-1}$. Ймовірність гіпотези H_2: $P(H_2)=\frac{N-M}{N}$. Ймовірність витягання білої кулі при відбутті гіпотези H_2: $P_{H_2}(A)=\frac{M}{N-1}$. Ймовірність витягання білої кулі обчислимо згідно формули повної ймовірності:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=\frac{M}{N}\cdot\frac{M-1}{N-1}+$$

$$+\frac{N-M}{N}\cdot\frac{M}{N-1}==\frac{M(M-1)+(N-M)M}{N(N-1)}=\frac{M(N-1)}{N(N-1)}=\frac{M}{N}.$$

в) $r\le M$ загублених куль за кольором можуть розподілитись таким чином:

$r = 0$ *білих* + r *чорних* – гіпотеза H_1;

$r = 1$ *біла* + $(r-1)$ *чорних* – гіпотеза H_2;

$r = 2$ *білих* + $(r-2)$ *чорних* – гіпотеза H_3;

…………………………………………………….

$r = (r-1)$ *білих* + 1 *чорна* – гіпотеза H_r;

$r = r$ *білих* + 0 *чорних* – гіпотеза H_{r+1}.

Ймовірності гіпотез і умовні імовірності події A при їх настанні обчислимо згідно класичного означення ймовірності:

$$P(H_1)=\frac{C_M^0\cdot C_{N-M}^r}{C_N^r};P_{H_1}(A)=\frac{M-0}{N-r};$$

$$P(H_2)=\frac{C_M^1\cdot C_{N-M}^{r-1}}{C_N^r};P_{H_2}(A)=\frac{M-1}{N-r};$$

$$P(H_3)=\frac{C_M^2\cdot C_{N-M}^{r-2}}{C_N^r};P_{H_3}(A)=\frac{M-2}{N-r};$$

$$P(H_r)=\frac{C_M^{r-1}\cdot C_{N-M}^1}{C_N^r};P_{H_r}(A)=\frac{M-r+1}{N-r};$$

$$P(H_{r+1})=\frac{C_M^r\cdot C_{N-M}^r}{C_N^r};P_{H_{r+1}}(A)=\frac{M-r}{N-r};$$

Тоді імовірність події A згідно формули повної імовірності рівна:

$$P(A)=\frac{C_M^0\cdot C_{N-M}^{r-0}}{C_N^r}\cdot\frac{M-0}{N-r}+\frac{C_M^1\cdot C_{N-M}^{r-1}}{C_N^r}\cdot\frac{M-1}{N-r}+\frac{C_M^2\cdot C_{N-M}^{r-2}}{C_N^r}\times$$

$$\times\frac{M-2}{N-r}+\ldots\frac{C_M^{r-1}\cdot C_{N-M}^1}{C_N^r}\cdot\frac{M-r+1}{N-r}+\frac{C_M^r\cdot C_{N-M}^0}{C_N^r}\cdot\frac{M-r}{N-r}=$$

$$=\frac{(M-0)\cdot C_M^0\cdot C_{N-M}^{r-0}+(M-1)\cdot C_M^1\cdot C_{N-M}^{r-1}+(M-2)\cdot C_M^2\cdot C_{N-M}^{r-2}+\ldots}{C_N^r}$$

$$\frac{+(M-r+1)\cdot C_M^{r-1}\cdot C_{N-M}^1+(M-r)\cdot C_M^r\cdot C_{N-M}^0}{}=*$$

Використаємо рівність $(M-m)C_M^m=MC_{M-1}^m$.

$$=*\frac{MC_{M-1}^0\cdot C_{N-M}^{r-0}+MC_{M-1}^1\cdot C_{N-M}^{r-1}+MC_{M-1}^2\cdot C_{N-M}^{r-2}+\ldots MC_{M-1}^{r-1}\cdot C_{N-M}^1+MC_{M-1}^r\cdot C_{N-M}^0}{C_N^r(N-r)}=$$

$$=\frac{M(C_{M-1}^0\cdot C_{N-M}^{r-0}+C_{M-1}^1\cdot C_{N-M}^{r-1}+C_{M-1}^2\cdot C_{N-M}^{r-2}+\ldots C_{M-1}^{r-1}\cdot C_{N-M}^1+C_{M-1}^r\cdot C_{N-M}^0)}{C_N^r(N-r)}=**$$

До виразу в дужках використаємо рівність:

$$\sum_{m=0}^{r}C_{M-1}^mC_{N-M}^{r-m}=C_{N-1}^r;\quad\sum_{m=0}^{r}C_{n_1}^mC_{N-n_1}^{r-m}=C_N^r;$$

$$M-1=n_1;\quad N-1=N^1;$$

$$**=\frac{M\cdot\sum_{m=0}^{r}C_{M-1}^mC_{N-M}^{r-m}}{C_N^r(N-r)}=\frac{M\cdot C_{N-1}^r}{(N-r)\cdot C_N^r}=\frac{M\cdot C_{N-1}^r}{N\cdot C_{N-1}^r}=\frac{M}{N}.$$

Нехай $r>M$, тоді

$$P(A)=\frac{C_M^M\cdot C_{N-M}^{r-M}\cdot(M-M)+C_M^{M-1}\cdot C_{N-M}^{r-[M-1]}\cdot[M-(M-1)]+}{C_N^r(M-r)}$$

$$\frac{+C_M^{M-2}\cdot C_{N-M}^{r-[M-2]}\cdot[M-(M-2)]+C_M^{M-3}\cdot C_{N-M}^{r-[M-3]}\cdot[M-(M-3)]+}{}$$

$$\frac{+C_M^{M-(N-r-1)}\cdot C_{N-M}^{r-[M-(N-r-1)]}\cdot\{M-[M-(N-r-1)]\}+}{}$$

$$\frac{+C_M^{M-(N-r)}\cdot C_{N-M}^{r-[M-(N-r)]}\cdot\{M-[M-(N-r)]\}}{}=$$

$$= \frac{M[C_{M-1}^{M-1}\cdot C_{N-M}^{r-[M-1]} + C_{M-1}^{M-2}\cdot C_{N-M}^{r-[M-2]} + C_{M-1}^{M-3}\cdot C_{N-M}^{r-[M-3]} + \ldots}{NC_{N-1}^{r}}$$

$$\frac{\ldots + C_{M-1}^{M-(N-r-1)}\cdot C_{N-M}^{r-[M-(N-r-1)]} + C_{M-1}^{M-(N-r)}\cdot C_{N-M}^{r-[M-(N-r)]}]}{} =$$

$$= \frac{M\sum\limits_{m=0}^{r} C_{M-1}^{m}\cdot C_{N-M}^{r-m}}{NC_{N-1}^{r}} = \frac{MC_{N-1}^{r}}{NC_{N-1}^{r}} = \frac{M}{N}.$$

2.2.16. В урні є 3 чорні і 2 білі кулі. Перший гравець за схемою без повернення виймає 3 кулі. Назад він повертає чорну кулю, якщо серед вийнятих куль було більше чорних; в протилежному випадку повертається біла куля. Другий гравець після цього виймає одну кулю і за її кольором повинен вгадувати число білих куль серед трьох куль, вийнятих першим гравцем.

Знайти умовну ймовірність того, що в першого гравця було:

а) 0 білих;

б) 1 біла;

в) 2 білих кулі,

якщо другий гравець вийняв білу кулю.

Розв’язок.

Позначимо через A подію, яка полягає в витягненні другим гравцем білої кулі. Подія A може відбутися при виконанні однієї з гіпотез, що утворюють повну групу подій: H_1 – першим гравцем витягнуто 3 чорні кулі; H_2 – першим гравцем витягнуто 1 біла і 2 чорні кулі; H_3 – першим гравцем витягнуто 2 білі і 1 чорна кулі.

Імовірності цих гіпотез відповідно рівні:

$$P(H_1) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{5\cdot 4\cdot 3} = \frac{1}{10};$$

$$P(H_2)=\frac{C_2^1\cdot C_3^2}{C_5^3}=\frac{2\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 5\cdot 4\cdot 3}=\frac{6}{10};$$

$$P(H_3)=\frac{C_2^2\cdot C_3^1}{C_5^3}=\frac{1\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{5\cdot 4\cdot 3}=\frac{3}{10}.$$

Перевірка: $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=\frac{1}{10}+\frac{6}{10}+\frac{3}{10}=1.$

Якщо відбувається гіпотеза H_1, то за умовою гри перший гравець повертає назад в урну одну чорну кулю, так що в урні стає: 2 *білі* + 1 *чорна куля* = 3 *кулі*. Тоді умовна імовірність витягнення білої кулі другим гравцем рівна: $P_{H_1}(A)=\frac{2}{3}.$ Якщо відбувається гіпотеза H_2, то в урні залишається 1 чорна і 1 біла кулі і в урну повертають 1 чорну кулю, так що там стане 2 чорних і 1 біла кулі. Тоді: $P_{H_2}(A)=\frac{1}{3}.$ Якщо відбувається подія H_3, то в урну повертається 1 біла куля, так що в урні стане 2 чорних і 1 біла кулі. Умовна імовірність: $P_{H_3}(A)=\frac{1}{3}.$ Імовірність події A обчислимо підставивши відповідні дані у формулу повної імовірності:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{3}+\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{30}.$$

Подія A відбулася. Тоді умовні імовірності гіпотез $P_A(H_1), P_A(H_2), P_A(H_3)$ обчислимо за формулами Байєса:

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)};$$

а) $P_A(H_1) = \dfrac{\dfrac{2}{30}}{\dfrac{11}{30}} = \dfrac{2}{11}$; б) $P_A(H_2) = \dfrac{\dfrac{6}{30}}{\dfrac{11}{30}} = \dfrac{6}{11}$;

в) $P_A(H_3) = \dfrac{\dfrac{3}{30}}{\dfrac{11}{30}} = \dfrac{3}{11}$.

2.2.17. В одній урні є 1 біла і 2 чорних кулі, а в другій – 2 білих і 3 чорних куль. В третю урну кладуть дві кулі, випадково взятих з першої урни, і дві кулі, випадково взятих з другої.

а) Яка ймовірність того, що куля, взята з третьої урни, буде білою?

б) Знайти імовірність того, що при виборі з поверненням з третьої урни двох куль одна з них буде білою, а друга – чорною.

в) Знайти ту ж імовірність, що й в п. б) для схеми вибору без повернення.

Розв'язок.

Введемо у розгляд події (гіпотези):

H_1 – з першої урни вибирають 1 білу і 1 чорну кулі;

H_2 – з першої урни вибирають дві чорні кулі;

H_3 – з другої урни вибирають 1 білу і 1 чорну кулі;

H_4 – з другої урни вибирають дві білі кулі;

H_5 – з другої урни вибирають дві чорні кулі.

Імовірності цих подій обчислюємо згідно формул:

$$P(H_1) = \frac{C_1^1 \cdot C_2^1}{C_3^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{5}; \; P(H_2) = \frac{C_2^2}{C_3^2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot} = \frac{1}{3};$$

$$P(H_3) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^1}{C_5^2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2}{5 \cdot 4} = \frac{3}{51};$$

$$P(H_4)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1\cdot 2}{5\cdot 4}=\frac{1}{10};\ \ P(H_5)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 1\cdot 2}=\frac{3}{10}.$$

З цих простих подій випливають такі гіпотези:

B_i – одночасно відбуваються незалежні події H_j і H_k, $(i=\overline{1,6};\ j=1,2;\ k=\overline{1,3})$ тобто:

$B_1=H_1\cdot H_3$, тоді

$$P(B_1)=P(H_1\cdot H_3)=P(H_1)\cdot P(H_3)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5};$$

$B_2=H_1\cdot H_4$,

$$P(B_2)=P(H_1\cdot H_4)=P(H_1)\cdot P(H_4)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{15};$$

$B_3=H_1\cdot H_5$,

$$P(B_3)=P(H_1\cdot H_5)=P(H_1)\cdot P(H_5)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{5};$$

$B_4=H_2\cdot H_3$,

$$P(B_4)=P(H_2\cdot H_3)=P(H_2)\cdot P(H_3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{5};$$

$B_5=H_2\cdot H_4$,

$$P(B_5)=P(H_2\cdot H_4)=P(H_2)\cdot P(H_4)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{30};$$

$B_6=H_2\cdot H_5$,

$$P(B_6)=P(H_2\cdot H_5)=P(H_2)\cdot P(H_5)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{10}.$$

Події B_1, B_2, ...B_6 утворюють повну групу подій, так що

$$\sum_{i=1}^{6} B_i=\frac{2}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}+\frac{1}{10}=1.$$

Якщо відбувається подія:

B_1 – то в третю урну покладені 2 білі і 2 чорні кулі;

B_2 – в третю урну покладені 3 білі і 1 чорна кулі;
B_3 – в третю урну покладені 1 біла і 3 чорні кулі;
B_4 – в третю урну покладені 1 біла і 3 чорні кулі;
B_5 – в третю урну покладені 2 білі і 2 чорні кулі;
B_6 – в третю урну покладені 4 чорні кулі.

а) Позначимо через A подію – куля взята з третьої урни є білою. Тоді умовні імовірності настання події A при здійсненні гіпотез $B_1,...B_6$ є такими:

$$P_{B_1}(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\ P_{B_2}(A)=\frac{3}{4};\ P_{B_3}(A)=\frac{1}{4};\ P_{B_4}(A)=\frac{1}{4};$$

$$P_{B_5}(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\ \ P_{B_6}(A)=0.$$

Згідно формули повної імовірності:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{6} P(B_i)P_{B_i}(A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{15}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+$$

$$+\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cdot 0=\frac{11}{30}.$$

б) Подія A полягає в тому, що з третьої урни витягають дві кулі: одну білу і одну чорну. Це може відбутися, якщо куля виявляється білою – подія C_i : її повертають назад в урну, вміст перемішують і знову витягають другу кулю, яка повинна бути чорною – подія D_i, тобто відбувається подія $A^I = C_i \cdot D_i$. Може бути навпаки, тобто витягують спочатку чорну кулю – подія D_i, а потім білу – подія C_i, тобто відбувається подія $A^{II} = D_i \cdot C_i$.

Оскільки $A = A^I + A^{II}$ і події A^I і A^{II} – несумісні, то $P(A) = P(A^I + A^{II}) = P(A^I) + P(A^{II})$.

Події C_i і D_i незалежні, їх імовірності залежать від вмісту третьої урни, тобто гіпотез B_i. Умовні імовірності події A рівні:

$$P_{B_i}(A)=P_{B_i}(C_i\cdot D_i+D_i\cdot C_i)=P_{B_i}(C_iD_i)+P_{B_i}(D_iC_i)=$$

$$=2P_{B_i}(C_iD_i)=2P_{B_i}(C_i)P_{B_i}(D_i).$$

де $P_{B_i}(C_i)$ рівні обчисленим $P_{B_i}(A)$ в пункті а):

$$P_{B_1}(C_1)=\frac{1}{2};\ P_{Bi}(D_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\ P_{B_i}(A)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2};$$

$$P_{B_2}(C_2)=\frac{3}{4};\ P_{B_2}(D_2)=\frac{1}{4};\ P_{B_2}(A)=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8};$$

$$P_{B_3}(C_3)=\frac{1}{4};\ P_{B_3}(D_3)=\frac{3}{4};\ P_{B_3}(A)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8};$$

$$P_{B_4}(C_4)=\frac{1}{4};\ P_{B_4}(D_4)=\frac{3}{4};\ P_{B_4}(A)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8};$$

$$P_{B_5}(C_5)=\frac{1}{2};\ P_{B_5}(D_5)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\ P_{B_5}(A)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{2};$$

$$P_{B_6}(C_6)=0;\ P_{B_6}(D_6)=1;\ P_{B_6}(A)=2\cdot 0\cdot 1=0.$$

Підставивши отримані дані у формулу повної імовірності маємо:

$$P(A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{15}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cdot 0=\frac{47}{120}.$$

в) A – подія, яка полягає в тому, що з третьої урни витягають першу кулю, яка виявляється білою – подія C_i, відкладають її і витягують другу кулю, яка виявляється чорною – подія D_i, тобто відбувається подія $A^I=C_i\cdot D_i$ або подія $A^{II}=D_i\cdot C_i$ – перша куля чорна (D_i), а друга куля біла (C_i).

Оскільки $A=A^I+A^{II}$ і A^I і A^{II} – несумісні, то $P(A)=P(A^I)+P(A^{II})$.

Умовні імовірності події A рівні:

$$P_{B_i}(A)=P_{B_i}(C_i\cdot D_i+D_i\cdot C_i)=P_{B_i}(C_iD_i)+P_{B_i}(D_iC_i)=$$

$=2P_{B_i}(C_iD_i)$, оскільки $P_{B_i}(C_iD_i)=P_{B_i}(D_iC_i)$.

Тут $P_{B_i}(C_i)$ рівні обчисленим $P_{B_i}(A)$ в пункті а):

$$P_{B_1}(C_1)=\frac{1}{2};\quad P_{B_1C_1}(D_1)=\frac{2}{3};\quad P_{B_1}(A)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3};$$

$$P_{B_2}(C_2)=\frac{3}{4};\quad P_{B_2C_2}(D_2)=\frac{1}{3};\quad P_{B_2}(A)=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2};$$

$$P_{B_3}(C_3)=\frac{1}{4};\quad P_{B_3C_3}(D_3)=1;\quad P_{B_3}(A)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{2};$$

$$P_{B_4}(C_4)=\frac{1}{4};\quad P_{B_4C_4}(D_4)=1;\quad P_{B_4}(A)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{2};$$

$$P_{B_5}(C_5)=\frac{1}{2};\quad P_{B_5C_5}(D_5)=\frac{2}{3};\quad P_{B_5}(A)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3};$$

$$P_{B_6}(C_6)=0;\quad P_{B_6C_6}(D_6)=1;\quad P_{B_6}(A)=0\cdot 1=0.$$

Підставивши отримані значення у формулу повної імовірності, отримаємо:

$$P(A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{30}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{10}\cdot 0=\frac{47}{90}.$$

2.2.18. В будівельному загоні 70% першокурсників і 30% студентів другого курсу. Серед першокурсників – 10% дівчат, а серед студентів другого курсу – 5% дівчат. Всі дівчата за списком чергують на кухні. Знайти ймовірність того, що в випадково вибраний день на кухні чергує першокурсниця.

Розв’язок.

Для наочності побудуємо схему будівельного загону.

Першокурсники
70%

Студенти II курсу
30%

дівчат
10%

хлопців
90%

дівчат
5%

хлопців
95%

Позначимо через A подію – “на кухні відбувається чергування”. Оскільки на кухні чергують лише дівчата, то дана подія A може відбутися при настанні однієї з гіпотез (подій), які утворюють повну групу подій:

B_1 – на кухні чергує І курс (дівчата);

B_2 – на кухні чергує II курс (дівчата);

Згідно умови $P(B_1) = 0{,}7$; $P(B_2) = 0{,}3$. Тоді умовні імовірності настання події A рівні: $P_{B_1}(A) = 0{,}1$; $P_{B_2}(A) = 0{,}05$.

Використаємо формулу повної імовірності для обчислення $P(A)$:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}05 = 0{,}085.$$

Чергування відбулося – подія A наступила. З формули Байєса визначимо умовну імовірність гіпотези H_1:

$$P_A(H_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}1}{0{,}085} = \frac{14}{17} \approx 0{,}82352 .$$

2.2.19. В урну, яка містить *n* кульок, опущена біла кулька, після чого навмання вийнято одну кульку.

Знайти ймовірність того, що вийнята кулька виявиться білою, якщо всі припущення про початковий склад кульок (за кольором) рівноможливі.

Нехай навмання вийнята з урни куля виявилась білою. Обчислити ймовірності всіх припущень про склад куль в урні. Яке припущення найбільш ймовірне?

Розв’язок.

Нехай подія *A* – “вийнята з урни куля є білою”. Введемо у розгляд події H_i^I, що описують початковий склад куль в урні і H_i – після опущення білої кулі:

H_1^I – 0 *білих* і *n небілих*; H_1 – 1 *біла* і *n небілих*;

H_2^I – 1 *біла* і (*n* – 1) *небілих*; H_1 – 2 *білих* і (*n* – 1) *небілих*;

H_3^I – 2 *білих* і (*n* – 2) *небілих*; H_1 – 3 *білих* і (*n* – 2) *небілих;*

H_n^I – (*n* – 1) *біла* і 1 *небіла*; H_n – *n білих* і 1 *небіла*;

H_{n+1}^{I} – *n білих* і 0 *небілих*; H_{n+1} – (n + 1) *білих* і 0 *небілих*.

Оскільки всі n + 1 припущень про початковий склад куль (за кольором) рівноможливі, то

$$P(H_1) = P(H_2) = \ldots P(H_i) = \ldots P(H_{n+1}) = \frac{1}{n+1}.$$

Тоді умовні імовірності події A рівні:

$$P_{H_1}(A) = \frac{1}{n+1}; \; P_{H_2}(A) = \frac{2}{n+1}; \;\; P_{H_i}(A) = \frac{i}{n+1};$$

$$P_{H_{n+1}}(A) = \frac{n+1}{n+1}.$$

Остаточно імовірність події A згідно формули повної імовірності рівна:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \ldots P(H_i) \times$$

$$\times P_{H_i}(A) + \ldots P(H_{n+1}) \cdot P_{H_{n+1}}(A) = \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1\ldots} + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{n+1\ldots} + \ldots \frac{n+1}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1+n+1}{2} \cdot (n+1) = \frac{n+2}{2(n+1)},$$

як сума членів арифметичної прогресії.

Тоді умовні імовірності гіпотез H_i при здійсненні події A рівні:

$$P_A(H_i) = \frac{\frac{1}{n+1} \cdot \frac{i}{n+1}}{\frac{n+2}{2(n+1)}} = \frac{2i}{(n+1)(n+2)}.$$

Імовірність гіпотези H_{n+1} є максимальною:

$$P_A(H_{n+1}) = \frac{2}{n+2}.$$

2.2.20. Кидаються дві гральні кістки. Яка імовірність того, що на першій кістці випала 1, якщо відомо, що на другій кістці випало число очок більше, ніж на першій?

Розв’язок.

Нехай подія A полягає в тому, що на другій кістці випаде число очок більше, ніж на першій. Дана подія може наступити при виконанні таких гіпотез:

H_1 – на першій кістці випала “1” (подія $H_1^/$), а на другій – одна з цифр “2”, “3”, “4”, :5”, “6” (подія $H_1^{//}$); тому $H_1 = H_1^I \cdot H_1^{II}$;

H_2 – на першій кістці випала “2” (подія H_2^I), а на другій – одна з цифр “3”, “4”, “5”, “6” (подія H_2^{II}), тому $H_2 = H_2^I \cdot H_2^{II}$;

H_3 – на першій кістці випала “3” (подія H_3^I), а на другій – одна з цифр “4”, “5”, “6” (подія H_3^{II}), тому $H_3 = H_3^I \cdot H_3^{II}$;

H_4 – на першій кістці випала “4” (подія H_4^I), а на другій – “5” або “6” (подія H_4^{II}), тому $H_4 = H_4^I \cdot H_4^{II}$;

H_5 – на першій кістці випала “5” (подія H_5^I), а на другій – цифра “6” (подія H_5^{II}), тому $H_5 = H_5^I \cdot H_5^{II}$.

Події H_i^I – випадання певної цифри на першій кістці і H_i^{II} – випадання більшої цифри на другій кістці – незалежні, тому $P(H_i) = P(H_i^I \cdot H_i^{II}) = P(H_i^I) \cdot P(H_i^{II}) = \frac{1}{6} P(H_i^{II})$,

оскільки $P(H_i^/) = \frac{1}{6}$; $P(H_i^{//}) = \frac{m}{n}$, де $n = 6$, m – кількість можливих цифр на другій кістці.

Отже, $P(H_1) = \frac{1}{6} P(H_1^{II}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 5 \cdot \frac{1}{6^2}$;

$$P(H_2) = \frac{1}{6} P(H_2^{II}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = 4 \cdot \frac{1}{6^2};$$

$$P(H_3)=\frac{1}{6}P(H_3^{II})=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=3\cdot\frac{1}{6^2};$$
$$P(H_4)=\frac{1}{6}P(H_4^{II})=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=2\cdot\frac{1}{6^2};$$
$$P(H_5)=\frac{1}{6}P(H_5^{II})=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=1\cdot\frac{1}{6^2}.$$

При виконанні гіпотез $P(H_i)$ умовна імовірність настання події $P_{H_i}(A)=1,$ тому згідно формули повної імовірності:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{5}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)=5\cdot\frac{1}{6^2}\cdot 1+4\cdot\frac{1}{6^2}\cdot 1+3\cdot\frac{1}{6^2}\cdot 1+$$
$$+2\cdot\frac{1}{6^2}\cdot 1+1\cdot\frac{1}{6^2}\cdot 1=\frac{1}{6^2}(5+4+3+2+1)=\frac{15}{6^2}.$$

Тоді умовну імовірність настання гіпотези H_1 при відбутті події A знайдемо з формули Байєса:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{5\cdot\frac{1}{6^2}}{15\cdot\frac{1}{6^2}}=\frac{1}{3}.$$

2.2.21. Під час випробувань було встановлено, що ймовірність безвідмовного спрацьовування реле при відсутності перешкод дорівнює 0,99, при перегріві – 0,95, при вібрації – 0,9, при вібрації і перегріві – 0,8.

Знайти ймовірність P_1 відмови цього реле при роботі в спекотних країнах (ймовірність перегріву дорівнює 0,2, ймовірність вібрації – 0,1) та ймовірність P_2 відмови при роботі в пересувній лабораторії (ймовірність перегріву – 0,1 і вібрації – 0,3), вважаючи перегрів і вібрацію незалежними подіями.

Розв’язок.

Введемо у розгляд події: A – реле буде працювати, $\overline{A}$ – реле не буде працювати (імовірність відмови), B – на реле діє перегрів, C – на реле діє вібрація. Реле буде працювати у випадку настання таких подій або гіпотез:

H_1 – $\overline{B} \cdot \overline{C}$ – одночасна відсутність обох перешкод: перегріву і вібрації;

H_2 – $\overline{B} \cdot C$ – наявність лише вібрації (а, отже, відсутність перегріву);

H_3 – $B \cdot \overline{C}$ – наявність перегріву і відсутність вібрації;

H_4 – $B \cdot C$ – наявність вібрації і перегріву одночасно.

Імовірності цих подій задані: $P(BC) = 0{,}8$; $P(B\overline{C}) = 0{,}95$; $P(\overline{B}C) = 0{,}9$; $P(\overline{B}\,\overline{C}) = 0{,}99$.

1. Нехай відбувається гіпотеза H_1, і оскільки події $\overline{B}$ і $\overline{C}$ незалежні, то імовірність події A при настанні гіпотези H_1 рівна добутку імовірностей подій $\overline{B}$ і $\overline{C}$: $P_{H_1}(A) = P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})$. Аналогічно, $P_{H_2}(A) = P(\overline{B}) \cdot P(C)$, $P_{H_2}(A) = P(B) \cdot P(\overline{C})$, $P_{H_3}(A) = P(B) \cdot P(C)$.

Імовірності подій B і C задані:

а) $P(B) = 0{,}2$ і $P(C) = 0{,}1$ – при роботі в спекотних країнах;

б) $P(B) = 0{,}1$ і $P(C) = 0{,}3$ – при роботі в пересувній лабораторії.

Тому: а) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}8$; $P(\overline{C}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$;

б) $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$; $P(\overline{C}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

Для обчислення імовірності події A використаємо формулу повної імовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = P(\overline{B} \cdot \overline{C}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) +$$

$$+ P(\overline{B}C) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(C) + P(B\overline{C}) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C}) + P(BC) \times$$

$$\times P(B) \cdot P(C),$$

яка в числових даних буде мати вигляд для випадку:

а) $P_1(A) = 0{,}99 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}95 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}9718$; тому імовірність відмови $P_1(\overline{A}) = 1 - P_1(A) = 1 - 0{,}9718 = 0{,}0282$;

б) $P_2(A) = 0{,}99 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}3 + 0{,}95 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}9572$; тому імовірність відмови $P_2(\overline{A}) = 1 - 0{,}9572 = 0{,}0428$.

Імовірність відмови реле можна обчислити безпосередньо за формулою повної імовірності:

$$P(\overline{A}) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(\overline{A}) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(\overline{A}) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(\overline{A}) + P(H_4) \cdot P_{H_4}(\overline{A}) = P(\overline{B} \cdot \overline{C}) \cdot P\left(\overline{\overline{B} \cdot \overline{C}}\right) + P(\overline{B} \cdot C) \cdot P\left(\overline{\overline{B} \cdot C}\right) + P(B \cdot \overline{C}) \cdot P\left(\overline{B \cdot \overline{C}}\right) + P(B \cdot C) \cdot P\left(\overline{B \cdot C}\right) = P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) \times P\left(\overline{\overline{B} \cdot \overline{C}}\right) + P(\overline{B}) \cdot P(C) \cdot P\left(\overline{\overline{B} \cdot C}\right) + P(B) \cdot P(\overline{C}) \cdot P\left(\overline{B \cdot \overline{C}}\right) + P(B) \cdot P(C) \cdot P\left(\overline{B \cdot C}\right),$$

де $P(\overline{\overline{B} \cdot \overline{C}}) = 1 - P(\overline{B} \cdot \overline{C}); P(\overline{\overline{B} \cdot C}) = 1 - P(\overline{B} \cdot C)$,

$P(\overline{B\overline{C}}) = 1 - p(B\overline{C})$; $P(\overline{BC}) = 1 - p(BC)$, яка в числах буде мати вигляд:

а) $P(\overline{A}) = 0{,}8 \cdot 0{,}9(1 - 0{,}99) + 0{,}8 \cdot 0{,}1(1 - 0{,}9) + 0{,}2 \cdot 0{,}9 \times (1 - 0{,}95) + 0{,}2 \cdot 0{,}1(1 - 0{,}8) = 0{,}0282$;

б) $P(\overline{A}) = 0{,}9 \cdot 0{,}7(1 - 0{,}99) + 0{,}8 \cdot 0{,}1(1 - 0{,}9) + 0{,}2 \cdot 0{,}9 \times (1 - 0{,}95) + 0{,}2 \cdot 0{,}1(1 - 0{,}8) = 0{,}0428$.

2. Нехай події B і C – залежні, тоді $P(BC) = P(B) \times P_B(C) = P(C) \cdot P_C(B)$.

Оскільки, $0 \le P_B(C) \le 1; 0 \le P_C(B) \le 1$, то $0 \le P(BC) \le P(B)$; $0 \le P(BC) \le P(C)$. Нехай $P(B) \ge P(C)$; тоді $0 \le P(AB) \le P(C)$, тобто $0 \le P(BC) \le \min[P(B), P(C)]$. Позначимо $P(BC) = x$, тоді:

$$P(B)=P(B\cdot\overline{C})+P(B\cdot C)=P(B\cdot\overline{C})+x;$$

$$P(C)=P(\overline{B}\cdot C)+P(B\cdot C)=P(\overline{B}\cdot C)+x.$$

Звідси: $P(B\cdot\overline{C})=P(B)-x;\quad P(\overline{B}\cdot C)=P(C)-x$.

Але події $BC, \overline{B}C, B\overline{C}, \overline{B}\cdot\overline{C}$ – утворюють повну групу подій, отже,

$P(BC)+P(\overline{B}\cdot C)+P(B\overline{C})+P(\overline{B}\cdot\overline{C})=1$, звідки

$$P(\overline{B}\cdot\overline{C})=1-[P(BC)+P(\overline{B}\cdot C)+P(B\cdot\overline{C})+P(B\cdot C)]=$$
$$=1-[P(C)-x+P(B)-x+x]=1+x-P(B)-P(C).$$

Для обчислення імовірності відмови використаємо формулу повної імовірності:

$$P(\overline{A})=P(\overline{B}\cdot\overline{C})\cdot P\left(\overline{\overline{B}\cdot\overline{C}}\right)+P(\overline{B}\cdot C)\cdot P\left(\overline{\overline{B}\cdot C}\right)+$$
$$+P(B\cdot\overline{C})\cdot P\left(\overline{B\cdot\overline{C}}\right)+P(B\cdot C)\cdot P\left(\overline{B\cdot C}\right)=[1+x-P(B)-$$
$$-P(C)]\cdot[1-P(\overline{B}\cdot\overline{C})]+[P(C)-x]\cdot[1-P(\overline{B}\cdot C)]+$$
$$+[P(B)-x]\cdot[1-P(B\cdot\overline{C})]+x\cdot[1-P(BC)]=0{,}01[1+$$
$$+x-P(B)-P(C)]+0{,}1[P(C)-x]+0{,}05[P(B)-x]+0{,}2\cdot x.$$

Оскільки $0\le x\le\min[P(B),P(C)]$, то для випадків:

а) $0\le x\le\min(0{,}1;0{,}2)=0{,}1$; б) $0\le x\le\min(0{,}1;0{,}3)=0{,}1$, отже $0\le x\le 0{,}1$ для обох випадків.

Для обчислення верхньої межі імовірності відмови $P_{\max}(\overline{A})$ покладаємо x = 0,1; для обчислення нижньої межі $P_{\min}(\overline{A})$ покладаємо x = 0.

Отже, випадок а):

$$P_{1\max}(\overline{A})=0{,}01(1+0{,}1-0{,}2-0{,}1)+0{,}1(0{,}1-0{,}1)+0{,}05(0{,}2-$$
$$-0{,}1)+0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}033;$$

$$P_{1\min}(\overline{A})=0{,}01(1+0-0{,}2-0{,}1)+0{,}1(0{,}1-0)+0{,}05(0{,}2-$$
$$-0)+0{,}2\cdot 0=0{,}027.$$

Тому $0{,}027\le P_1(\overline{A})\le 0{,}033$.

Аналогічно для випадку б):

$P_{2\max}(\overline{A}) = 0{,}01(1+0{,}1-0{,}1-0{,}3)+0{,}1(0{,}3-0{,}1)+0{,}05(0{,}1-$
$-0{,}1)+0{,}2\cdot 0{,}1 = 0{,}047;$

$P_{2\min}(\overline{A}) = 0{,}01(1+0-0{,}1-0{,}3)+0{,}1(0{,}3-0)+0{,}05(0{,}1-$
$-0)+0{,}2\cdot 0 = 0{,}041.$

Тому $0{,}041 \le P_{2\min}(\overline{A}) \le 0{,}047.$

2.2.22. Кожен з виробів протягом року може проржавіти з імовірністю 0,01. Перевірено 5 виробів з однаковим терміном зберігання, який може дорівнювати 1, 2,...10 рокам з однаковою імовірністю. З перевірених виробів 2 виявилось проржавілими. Яка імовірність того, що термін зберігання виробів не менше 8 років?

Розв'язок.

Нехай подія A полягає в тому, що 2 вироби з 5 з однаковим терміном зберігання ржавіють. Вироби можуть проржавіти, якщо вони зберігаються 1, 2,...10 років. Введемо у розгляд події: H_i – термін зберігання виробів i років; $i = \overline{1{,}10}$. За умовою H_i – рівноможливі, тобто $H_i = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$. Якщо ймовірність проржавіння за 1 рік зберігання рівна $p_1 = 0{,}01$, то за 2 роки зберігання ця імовірність рівна $p_2 = 0{,}02$, як імовірність суми двох несумісних подій: за I рік $p_1 = 0{,}01$, за II рік $p_1 = 0{,}01$, отже, за 2 роки $p_2 = 0{,}02$. Аналогічно за 3 роки $p_3 =$ $= 0{,}03$, за 4 роки $p_4 = 0{,}04$, за 5 років $p_5 = 0{,}05$, за 6 років $p_6 =$ $= 0{,}06$, за 7 років $p_7 = 0{,}07$, за 8 років $p_8 = 0{,}08$, за 9 років – 0,09, за 10 років – 0,1.

Ймовірність того, що в n випробуваннях подія A настає k разів (див. формула Бернуллі § 3.1) рівна $P_n^k(A) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Отже, умовна імовірність події A при виконанні гіпотези H_i рівна $P_{H_i}(A) = C_5^2 p_i^2 q_i^3$, де $q_i = 1 - p_i$.

Для визначення ймовірності настання події A використаємо формулу повної імовірності:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{10}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A).$$

Ймовірність того, що термін зберігання не менше 8 років обчислимо з формули Байєса:

$$P_A(H_8)+P_A(H_9)+P_A(H_{10})==\frac{P(H_8)\cdot P_{H_8}(A)+P(H_9)\cdot P_{H_9}(A)+P(H_{10})\cdot P_{H_{10}}(A)}{P(A)}$$

$$=\frac{0{,}1C_5^2(p_8^2q_8^3+p_9^2q_9^3+p_{10}^2q_{10}^3)}{0{,}1C_5^2(p_1^2q_1^3+p_2^2q_2^3+p_3^2q_3^3+p_4^2q_4^3+p_5^2q_5^3+p_6^2q_6^3+p_7^2q_7^3+p_8^2q_8^3+p_9^2q_9^3+p_{10}^2q_{10}^3)}=$$

$$=\frac{0{,}08^2\cdot 0{,}92^3+0{,}09^2\cdot 0{,}91^3+0{,}1^2\cdot 0{,}9^3}{0{,}01^2\cdot 0{,}99^3+0{,}02^2\cdot 0{,}98^3+0{,}03^2\cdot 0{,}97^3+0{,}04^2\cdot 0{,}96^3+0{,}05^2\cdot 0{,}95^3+0{,}06^2\cdot 0{,}94^3+0{,}07^2\cdot 0{,}93^3+0{,}08^2\cdot 0{,}92^3+0{,}09^2\cdot 0{,}91^3+0{,}1^2\cdot 0{,}9^3}=\frac{0{,}063229957}{0{,}0750153364}=0{,}842$$

2.2.23. Імовірність того, що певна книжка знаходиться у шкільній бібліотеці рівна p. При цьому вона може знаходитись на будь-якій з 20-ти полиць з однаковою імовірністю. а) Перевірили 19 полиць – книжки не знайшли. Яка імовірність того, що книжка знаходиться на 20-ій полиці? б) Перевірили 18 полиць – книжки не знайшли, яка імовірність того, що книжка знаходиться на двадцятій полиці?

Розв'язок.

І спосіб.

а) Нехай подія A – "на дев'ятнадцяти полицях книжки нема". Ця подія A може одночасно відбутися з однією з несумісних подій: H_1 – книжка знаходиться на двадцятій полиці і H_2 – книжки в бібліотеці нема. Очевидно, що $P(H_1)=p$, $P(H_2)=1-p$, оскільки $P(H_1)+P(H_2)=1$.

Якщо книга в бібліотеці є, то вона знаходиться на двадцятій полиці з імовірністю $\frac{1}{20}$. Отже, $P_{H_1}(A)=\frac{1}{20}$. Або імовірність того, що книжка знаходиться на дев'ятнадцяти полицях, рівне $19/20$. Тоді умовна імовірність того, що її там нема, рівна $P_{H_1}(A)=1-\frac{19}{20}=\frac{1}{20}$.

Якщо книги в бібліотеці нема, то її нема і на дев'ятнадцяти полицях, тобто $P(H_2) = 1$.

Тоді згідно формули повної імовірності

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = p \cdot \frac{1}{20} + (1-p) \cdot 1 .$$

Отже, умовна імовірність події H_1 за умови, що книга знаходиться на двадцятій полиці згідно формули Байєса рівна:

$$P_A(H_1) = \frac{\frac{p}{20}}{\frac{p}{20} + (1-p) \cdot 1} = \frac{p}{20 - 19p} .$$

II спосіб.

Нехай подія A – книга знаходиться на дев'ятнадцяти полицях. Розглянемо несумісні події, які утворюють повну групу:

H_1 – книга знаходиться на I-ій полиці;

H_i – книга знаходиться на i-тій полиці;

H_{20} – книга знаходиться на XX-ій полиці;

H_{21} – книги в бібліотеці нема.

Оскільки події H_i, $i = \overline{1,20}$, рівно можливі, то $P(H_i) = \frac{p}{20}$, $i = \overline{1,20}$ і $P(H_{21}) = 1 - p$.

Оскільки події H_i, $i = \overline{1,21}$ утворюють повну групу подій, то $\sum\limits_{i=1}^{19} P(H_i) + P(H_{20}) + P(H_{21}) = 1$.

Подія A – "книга знаходиться на дев'ятнадцяти полицях" є протилежною до події $\overline{A}$ – "книга не знаходиться на дев'ятнадцяти полицях", тобто "знаходиться" – подія H_{20} або "не знаходиться" – подія H_{21} на двадцятій полиці.

Тобто, $A = H_1 + H_2 + \ldots + H_{19} = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{19}$,

$\overline{A} = H_{20} + H_{21} = H_{19} \cup H_{20}$.

Оскільки $P(A)+P(\overline{A})=1$, то $P(\overline{A})=1-P(A)=$
$=1-P(H_1+H_2+...+H_{19})=1-[P(H_1)+P(H_2)+...+P(H_{19})]=$
$=1-\left[\frac{p}{20}+\frac{p}{20}+...+\frac{p}{20}\right]=1-\frac{p}{20}\cdot 19$.

Тоді згідно формули Байєса:

$$P_{\overline{A}}(H_{20})=P(H_{20}\,|\,\overline{H_1\cup...\cup H_{19}})=$$

$$=\frac{P(H_{20}\cap(\overline{H_1\cup...\cup H_{19}}))}{P(\overline{H_1\cup H_2\cup...\cup H_{19}})}=\frac{P(H_{20}\cap(\overline{H}_1\cap\overline{H}_2\cap...\cap\overline{H}_{19}))}{1-P(H_1\cup H_2\cup...\cup H_{19})}=$$

$$=\frac{P(H_{20}\cap(\overline{H}_1\cap\overline{H}_2\cap...\cap\overline{H}_{19}))}{P(\overline{A})}=\frac{P(H_{20})}{1-\frac{p}{20}\cdot 19}=\frac{\frac{p}{20}}{\frac{20-19p}{20}}=$$

$$=\frac{p}{20-19p}.$$

б) Нехай подія A – “книга знаходиться на вісімнадцяти полицях” і подія $\overline{A}$ – “книги на вісімнадцяти полицях нема”. Тоді

$$P_{\overline{A}}(H_{20})=P(H_{20}\,|\,\overline{H}_1\cup...\cup\overline{H}_{18})=$$

$$=\frac{P(H_{20}\cap(\overline{H_1\cup H_2\cup...\cup H_{18}}))}{P(\overline{H_1\cup H_2\cup...\cup H_{18}})}=\frac{P(H_{20}\cap(\overline{H}_1\cap\overline{H}_2\cap...\cap\overline{H}_{18})}{1-P(H_1\cup H_2\cup...\cup H_{18})}=$$

$$=\frac{P(H_{20}\cap(\overline{H}_1\cap\overline{H}_2\cap...\cap\overline{H}_{18})}{P(\overline{A})}=\frac{P(H_{20})}{1-\frac{p}{20}\cdot 18}=\frac{\frac{p}{20}}{1-\frac{18p}{20}}=$$

$$=\frac{p}{20-18p}.$$

2.2.24. При обстеженні хворого є підозра на одне з чотирьох захворювань: B_1 (запалення легень), B_2 (туберкульоз), B_3 (СНІД), B_4 (курячий грип). Їх імовірності при даній сукупності симптомів захворювання відповідно рівні: $P(H_1)=\dfrac{1}{2}$; $P(H_2)=\dfrac{1}{3}$; $P(H_3)=\dfrac{1}{8}$; $P(H_4)=\dfrac{1}{24}$. Для уточнення діагнозу хворому призначений аналіз, результатом якого є позитивна чи негативна реакція (тобто наявність хвороби). У випадку хвороби B_1 вважають, що позитивна реакція наступає з імовірністю $p_1 = 0{,}4$; у випадку хвороби B_2 – з імовірністю $p_2 = 0{,}45$; у випадку хвороби B_3 – з імовірністю $p_3 =$ $= 0{,}1$, у випадку хвороби B_4 – імовірністю $p_4 = 0{,}9$.

Аналіз був проведений шість разів: а) 4 рази дав позитивний результат і 2 рази негативний;

б) 6 разів дав позитивний результат і 6 разів дав негативний результат.

Обчислити імовірності кожного захворювання після проведених аналізів.

Розв'язок.

а) Введемо у розгляд подію A – пацієнт хворий і повторні аналізи дали позитивну реакцію 4 рази: H_1 – на хворобу B_1, H_2 – на хворобу B_2, H_3 – на хворобу B_3, H_4 – на хворобу B_4.

В умові задачі задані їх імовірності:

$$P(H_1)=\frac{1}{2},\ P(H_2)=\frac{1}{3},\ P(H_3)=\frac{1}{8},\ P(H_4)=\frac{1}{24}.$$

У випадку захворювання B_1 (гіпотеза H_1) імовірність події A рівна імовірності настання позитивної реакції у 4 випадках з шести.

Імовірність того, що подія C – "позитивна реакція наступає" 4 рази рівна $P(C)=p_1^4=(0{,}4)^4$, імовірність того, що подія D – "негативна реакція наступає 2 рази" рівна $P(D)=$ $=(1-p_1)^2=(1-0{,}4)^2=0{,}6^2$. Чотири позитивні реакції з 6 можуть вибиратись C_6^4 способами. Тоді за правилом множення (див. §3.1 формула Бернуллі) незалежних подій $P_{H_1}(A)=C_6^4 p_1^4 q_1^2 = C_6^4\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^2$;

для гіпотези H_2 ця імовірність рівна:

$$P_{H_2}(A)=C_6^4 p_2^4 q_2^2 = C_6^4 \cdot 0{,}45^4 \cdot 0{,}55^2;$$

для гіпотези H_3: $P_{H_3}(A)=C_6^4 p_3^4 q_3^2 = C_6^4 \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^2;$

для гіпотези H_4: $P_{H_4}(A)=C_6^4 p_4^4 q_4^2 = C_6^4 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^2.$

За формулою повної імовірності:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)+$$

$$+P(H_4)\cdot P_{H_4}(A)=\frac{1}{2}\cdot C_6^4\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^2+\frac{1}{3}\cdot C_6^4\cdot 0{,}45^4\cdot 0{,}55^2+$$

$$+\frac{1}{8}\cdot C_6^4\cdot 0{,}1^4\cdot 0{,}9^2+\frac{1}{24}\cdot C_6^4\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1^2=C_6^4\left[\frac{1}{2}\cdot 0{,}009216+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\cdot 0{,}01240441+\frac{1}{8}\cdot 0{,}000081+\frac{1}{24}\cdot 0{,}006561\right]=$$

$$=C_6^4\left[0{,}004608+0{,}00413481+0{,}0000101+0{,}0002734\right]=$$

$$=C_6^4\cdot 0{,}0090263.$$

За формулою Байєса знаходимо умовні імовірності того, що після аналізів встановлена хвороба B_i:

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)},$$

$$P_A(H_1)=\frac{C_6^4\cdot 0{,}004608}{C_6^4\cdot 0{,}009026296}=0{,}510508,$$

$$P_A(H_2)=\frac{0{,}004134796}{0{,}009026296}=0{,}45808,$$

$$P_A(H_3)=\frac{0{,}000010125}{0{,}009026296}=0{,}001122,$$

$$P_A(H_4)=\frac{0{,}000273375}{0{,}009026296}=0{,}03029.$$

Отже, виключаються хвороби B_3, B_4 внаслідок їх малої імовірності.

б) Умовні імовірності настання події A при різних гіпотезах H_i рівні:

$$P_{H_1}(A) = C_6^6 p_1^6 q_1^0 = p_1^6 = 0,4^6 = 0,004096;$$

$$P_{H_2}(A) = 0,45^6 = 0,0083038;$$

$$P_{H_2}(A) = 0,1^6 = 0,000001;$$

$$P_{H_4}(A) = 0,9^6 = 0,531441.$$

Отже,

$$P(A) = \frac{1}{2}\cdot 0,004096 + \frac{1}{3}\cdot 0,0083038 + \frac{1}{8}\cdot 0,000001 +$$

$$+\frac{1}{24}\cdot 0,531441 = 0,002048 + 0,002767922 + 0,000000125 +$$

$$+0,0221434 = 0,026959.$$

Звідси, $P_A(H_1) = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 0,004096}{0,026954} = 0,07597;$

$$P_A(H_2) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0,0083038}{0,026954} = 0,10267;$$

$$P_A(H_3) = \frac{\frac{1}{8}\cdot 0,000001}{0,026954} = 0,0000046;$$

$$P_A(H_4) = \frac{\frac{1}{24}\cdot 0,531441}{0,026954} = 0,82136.$$

Отримані результати аналізів дають вагомі докази наявності хвороби B_4.

в) Умовні імовірності настання події A рівні:

$$P_{H_1}(A) = C_6^0 q_1^6 = 0,6^6 = 0,046656;$$

$$P_{H_2}(A) = q_2^6 = 0,55^6 = 0,0276806;$$

$P_{H_3}(A) = q_3^6 = 0{,}9^6 = 0{,}531441;$

$P_{H_4}(A) = q_4^6 = 0{,}1^6 = 0{,}000001.$

Отже,

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}046656 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}0276806 + \frac{1}{8} \cdot 0{,}531441 +$$

$$+ \frac{1}{24} \cdot 0{,}000001 = 0{,}023328 + 0{,}0092269 + 0{,}066430125 +$$

$$+ 0{,}000000041 = 0{,}0989851.$$

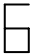
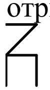
Звідки

$P_A(H_1) = 0{,}23567;\ P_A(H_2) = 0{,}6711;$

$P_A(H_3) = 0{,}09322;\ P_A(H_4) = 0{,}0000000414.$

Отримані результати аналізів дають вагомі докази наявності хвороби B_3.

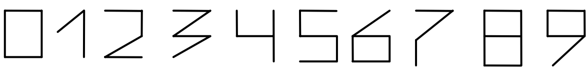
2.2.25. Датчик пристрою, що зчитує поштові індекси, приймає риску за "пустоту" і навпаки "пустоту" за риску з імовірністю 0,1. Вважається, що імовірність всіх 10 цифр одна і та ж. На виході датчика отриманий сигнал:

а)  б) 

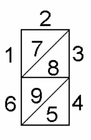
Обчислити умовні імовірності того, що була записана цифра: а) 5; 8; 6; б) 3, 6, 7.

Розв'язок.

Цифри індексу пишуться так:



Будь-яка цифра може бути записана певною комбінацією з усіх можливих елементів.

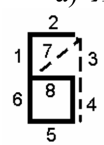


Даний на виході сигнал (подія A) може бути отриманий, якщо передавалась одна з цифр 0, 1,...9.

Введемо у розгляд гіпотези $H_1, \ldots, H_9, H_{10}$: була записана цифра 1, ..., 9, 0. Імовірності цих гіпотез $P(H_1) = P(H_2) =$ $= P(H_{10}) = \dfrac{1}{10}$ за умовою.

Нехай при зчитуванні цифр допущена помилка в k елементах, з імовірністю $(0{,}1)^k$ отже, $9 - k$ елементів зчитані вірно з імовірністю $0{,}9^{9-k}$. Імовірність такої складної події рівна добутку подій: $0{,}1^k \cdot 0{,}9^{9-k}$.

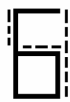
а) Якщо була записана цифра 1 (подія H_1), а отримано



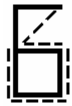
то помилка міститься в 1, 2, 3, 5, 6, 8, 7 елементах, тобто $k = 7$. Тоді умовна імовірність $P_{H_1}(A) = 0{,}1^7 \cdot 0{,}9^{9-7} =$ $= 0{,}000000081$.

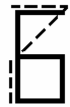
Якщо була записана цифра 2 (подія H_2), то помилка міститься в $k = 6$ елементах : $P_{H_2}(A) = 0{,}1^6 \cdot 0{,}9^{9-6} =$ $= 0{,}000001$.

Якщо була записана цифра 3, то $k = 6$: : $P_{H_3}(A) = 0{,}000001$.

Якщо була записана цифра 4 (подія H_4), то $k = 4$: : $P_{H_4}(A) = 0{,}000059$.

Якщо була записана цифра 5 (подія H_5), то $k = 1$: 
$P_{H_5}(A) = 0{,}043047.$

Якщо була записана цифра 6 (подія H_6), то $k = 3$: 
$P_{H_6}(A) = 0{,}000531.$

Якщо була записана цифра 7 (подія H_7), то $k = 5$: 
$P_{H_7}(A) = 0{,}1^5 \cdot 0{,}9^{9-5} = 0{,}000007.$

Якщо була записана цифра 8 (подія H_8), то $k = 1$: ,
$P_{H_8}(A) = 0{,}043047.$

Якщо була записана цифра 9 (подія H_9), то $k = 5$: :
$P_{H_9}(A) = 0{,}000007.$

Якщо була записана цифра 0, то $k = 2$: :
$P_{H_{10}}(A) = 0{,}004782.$

Обчислимо імовірність події A за формулою повної імовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{10} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = \frac{1}{10}(0 + 0{,}000001 + 0{,}000001 +$$

$$+0{,}000059+0{,}043047+0{,}000531+0{,}000007+0{,}043047+$$

$$+0{,}000007+0{,}004782=\frac{1}{10}\cdot 0{,}091482.$$

Обчислимо умовні імовірності $P_A(H_5)$, $P_A(H_8)$, $P_A(H_6)$ того, що на вході були записані цифри 5, 8, 6:

$$P_A(H_5)=\frac{P(H_5)\cdot P_{H_5}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}\cdot 0{,}043047}{\frac{1}{10}\cdot 0{,}091481}\approx 0{,}4706.$$

$$P_A(H_8)=P_A(H_5)=0{,}4706.$$

$$P_A(H_5)=\frac{P(H_6)\cdot P_{H_6}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}000531}{0{,}091481}\approx 0{,}07652.$$

2.2.26. На рис. 2.2.1 зображена схема доріг. Туристи вийшли з пункту O, вибираючи навмання на розгалуженні доріг один з можливих шляхів.

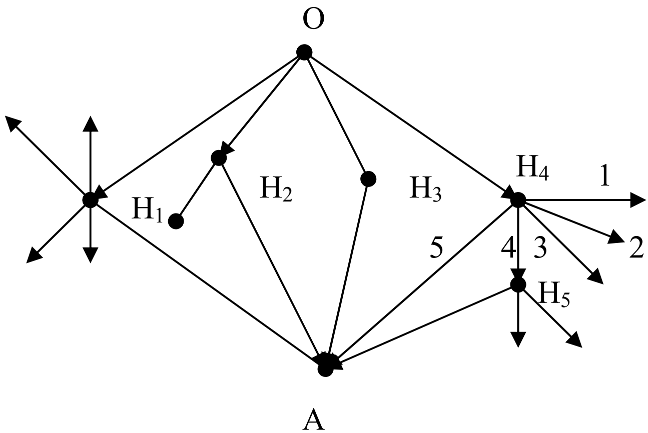


Рис. 2.2.1.

Яка ймовірність того, що вони попадуть в пункт A? Туристи попали в пункт A, яка ймовірність вибору певного маршруту?

Розв'язок.

Туристи можуть попасти в пункт A (подія A), якщо вони будуть проходити через один з вузлових пунктів H_1, H_2, H_3, H_4. Позначимо відповідні події (гіпотези) через H_1, H_2, H_3, H_4. Ці події утворюють повну групу подій, а оскільки туристи вибирають один з чотирьох можливих пунктів, то події $H_i (i = \overline{1,4})$ рівноможливі, тобто $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = = P(H_4) = \frac{1}{4}$. Якщо туристи попали в пункт H_1, вони можуть попасти в пункт A, вибравши лише одну з п'яти рівноможливих доріг, що ведуть з цього пункту. Отже, умовна імовірність події A при умові H_1: $P_{H_1}(A) = \frac{1}{5}$. Аналогічно $P_{H_2}(A) = \frac{1}{2}$ (з пункту H_2 виходять 2 дороги); $P_{H_3}(A) = 1$ (з пункту H_3 веде лише одна дорога, що обов'язково приведе до пункту A). Розглянемо пункт H_4: з нього виходять 5 доріг, імовірність вибору кожної з яких рівна $\frac{1}{5}$. Якщо туристи оберуть дороги 1, 2, 3, то умовні імовірності попасти в пункт A рівні 0; якщо оберуть шлях 4, то умовна імовірність рівна $\frac{1}{3}$; якщо оберуть шлях 5 – то умовна імовірність рівна 1. Застосуємо формулу повної імовірності для визначення імовірності попадання в пункт A з пункту H_4, позначивши вибір шляху 1, 2, 3, 4 через події B_1, B_2, B_3, B_4, B_5:

$$P_{H_4}(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) +$$
$$+ P(B_4) \cdot P_{B_4}(A) + P(B_5) \cdot P_{B_5}(A) = \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} +$$
$$+ \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{4}{15}.$$

Отже, за формулою повної імовірності

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)+$$
$$+P(H_4)\cdot P_{H_4}(A)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+1+\frac{4}{15}\right)=\frac{59}{120}.$$

Для обчислення імовірності вибору певного маршруту скористуємося формулою Байєса: $P_A(H_i)=\dfrac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}$.

Звідси, $P_A(H_1)=\dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+1+\frac{4}{15}\right)}=\dfrac{6}{59};$

$$P_A(H_2)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+1+\frac{4}{15}\right)}=\frac{15}{59};$$

$$P_A(H_3)=\frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+1+\frac{4}{15}\right)}=\frac{30}{59};$$

$$P_A(H_4,B_1)=P_A(H_4,B_2)=P_A(H_4,B_3)=0;$$

$$P_A(H_4,H_5)=\frac{P(H_4)\cdot P(B_4)\cdot P_{B_4}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{59}{30}}=\frac{2}{59};$$

$$P(H_4,H_5)=\frac{P(H_4)\cdot P(B_5)\cdot P_{B_5}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot\frac{59}{30}}=\frac{6}{59}.$$

2.2.27. По каналу зв'язку передається одна з послідовностей букв АААА, ВВВВ, СССС з ймовірностями p_1, p_2, p_3

(їх сума рівна 1). Кожна буква, що передається, приймається правильно з ймовірністю і з ймовірностями $\frac{1}{2}(1-\alpha)$ і $\frac{1}{2}(1-\alpha)$ приймається за кожну з двох інших букв. Передбачається, що букви спотворюються незалежно одна від одної.

Знайти ймовірність того, що було передано: а) АААА, б) ВВВВ, в) СССС, якщо прийнято АВСА.

Розв'язок.

Розглянемо такі гіпотези:

A – передається послідовність АААА;

B – передається послідовність ВВВВ;

C – передається послідовність СССС.

Позначимо подію *D* – прийнята послідовність АВСА. Дана послідовність (подія *D*) може бути отримана при передачі однієї з послідовностей *A, B, C* при умові спотворень (неправильної передачі деяких букв у послідовності). Імовірність гіпотези $A - P(A) = p_1$; гіпотези $B - P(A) = p_2$; гіпотези $C - P(A) = p_3$.

Якщо передається послідовність АААА, то для того, щоб отримати послідовність АВСА необхідно, щоб І буква А передалась вірно (імовірність правильної передачі), ІІ буква спотворилась, тобто замість А передалась В з імовірністю $\frac{1-\alpha}{2}$; ІІІ буква спотворилась: замість А передалась С з імовірністю $\frac{1-\alpha}{2}$; IV буква А передалась вірно з імовірністю .

Така складна подія є добутком подій. Її імовірність $P_A(D) = \alpha \cdot \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1-\alpha}{2} \cdot \alpha$.

Якщо передається послідовність ВВВВ, то для отримання послідовності *D* необхідно, щоб: І буква спотворилась, тобто замість В передалась А з імовірністю $\frac{1-\alpha}{2}$; ІІ – буква В передалась вірно з імовірністю ; III буква спотворилась: замість В передалась С з імовірністю $\frac{1-\alpha}{2}$; IV буква спотворилась: замість В передалась А з імовірністю $\frac{1-\alpha}{2}$. Імовірність

$$P_B(D)=\frac{1-\alpha}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}.$$

Аналогічно, якщо справджується гіпотеза *C*, то послідовність *D* отримується при умові спотворення I букви з імовірністю $\frac{1-\alpha}{2}$, спотворення II букви з імовірністю $\frac{1-\alpha}{2}$, вірної передачі III букви з імовірністю *α*, спотворення IV букви з імовірністю $\frac{1-\alpha}{2}$. Імовірність такої складної події:

$$P_A(D)=\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{2}.$$

Тоді ймовірність настання події *D* буде визначатись з формули повної імовірності:

$$P(D)=P(A)\cdot P_A(D)+P(B)\cdot P_A(D)+P(C)\cdot P_A(C)=$$

$$=p_1\cdot\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\alpha+p_2\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}+$$

$$+p_3\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}=\frac{\alpha\cdot(1-\alpha)}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}\times$$

$$\times\left[p_1\alpha+p_2\frac{1-\alpha}{2}+p_3\frac{1-\alpha}{2}\right]=\frac{\alpha\cdot(1-\alpha)}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}\times$$

$$\times\left[2p_1\alpha+(1-\alpha)(p_2+p_3)\right].$$

Оскільки подія *D* уже відбулася, то переоцінимо імовірність гіпотези *A* при виконанні події *D*, тобто обчислимо умовну імовірність $P_D(A)$ з формули Байєса:

$$P_D(A)=\frac{P(A)\cdot P_A(D)}{P(D)}=\frac{p_1\cdot\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\alpha}{\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}[2p_1\alpha+(1-\alpha)(p_2+p_3)]}=$$

$$=\frac{2\alpha p_1}{[2p_1\alpha+(1-\alpha)(p_2+p_3)]}.$$

Аналогічно,

$$P_D(B)=\frac{P(B)\cdot P_B(D)}{P(D)}=\frac{p_2\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}}{\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}[2p_1\alpha+(1-\alpha)(p_2+p_3)]}=$$

$$=\frac{(1-\alpha)p_2}{[2p_1\alpha+(1-\alpha)(p_2+p_3)]};$$

$$P_D(C)=\frac{P(C)\cdot P_C(D)}{P(D)}=\frac{p_3\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}}{\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}[2p_1\alpha+(1-\alpha)(p_2+p_3)]}=$$

$$=\frac{(1-\alpha)p_3}{[2p_1\alpha+(1-\alpha)(p_2+p_3)]}.$$

Перевірка:

$$P_D(A)+P_D(B)+P_D(C)=\frac{2\alpha p_1}{[2p_1\alpha+(1-\alpha)(p_2+p_3)]}+$$

$$+\frac{(1-\alpha)p_2}{[2p_1\alpha+(1-\alpha)(p_2+p_3)]}+\frac{(1-\alpha)p_3}{[2p_1\alpha+(1-\alpha)(p_2+p_3)]}=$$

$$=\frac{2\alpha p_1+(1-\alpha)(p_2+p_3)}{[2p_1\alpha+(1-\alpha)(p_2+p_3)]}=1.$$

2.2.28. Ймовірності подій *A*, *B* і *C* дорівнюють відповідно p_1, p_2, p_3. Після проведення досліду виявилось, що дві події відбулися, а одна – ні.

Довести, що ймовірність того, що подія C наступила, більша 1/2, коли $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3}>1.$

Розв'язок.

Нехай подія D полягає в тому, що відбудуться дві події. Тоді ймовірність події D рівна:

$$P(D)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(\overline{C})+P(A)\cdot P(\overline{B})\cdot P(C)+$$
$$+P(\overline{A})\cdot P(B)\cdot P(C)=p_1p_2q_3+p_1q_2p_3+q_1p_2p_3.$$

Якщо дві події відбулися, то умовна ймовірність того, що наступила подія C згідно формули Байєса рівна:

$$P_D(C)=\frac{p_1q_2p_3+q_1p_2p_3}{P(D)}=\frac{p_1q_2p_3+q_1p_2p_3}{p_1p_2q_3+p_1q_2p_3+q_1p_2p_3}.$$

За умовою $P_D(C)>\frac{1}{2}$, отже $2(p_1p_3q_2+p_2p_3q_1)>$ $>p_1p_2q_2+p_1p_3q_2+p_2p_3q_1$, або $2p_1p_3q_2+2p_2p_3q_1>$ $>p_1p_2q_2+p_1p_3q_2+p_2p_3q_1$, звідси $p_1p_3q_2+p_2p_3q_1>$ $>p_1p_2q_3$; отже, $p_1p_3q_2+p_2p_3q_1-p_1p_3q_3>0.$

Поділимо почленно нерівність на $p_1p_2p_3>0$. Отримаємо: $\frac{p_1p_3q_2}{p_1p_2p_3}+\frac{p_2p_3q_1}{p_1p_2p_3}-\frac{p_1p_2q_3}{p_1p_2p_3}>0,$ після скорочень вираз буде мати вигляд: $\frac{q_2}{p_2}+\frac{q_1}{p_1}-\frac{q_3}{p_3}>0,$

Підставивши значення $p_i=1-p_i$ у нерівність, отримаємо: $\frac{1-p_2}{p_2}+\frac{1-p_1}{p_1}-\frac{1-p_3}{p_3}>0,$ або $\frac{1}{p_2}-1+\frac{1}{p_1}-1-$ $-\frac{1}{p_3}+1>0.$ Остаточно, $\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_3}>0.$

2.2.29. Ймовірності перегоряння першої, другої, третьої, четвертої ламп рівні відповідно 0,1; 0,1; 0,3; 0,4. Ймовірність виходу з ладу приладу при перегорянні однієї лампи рівна, 0,2, двох ламп – 0,4, трьох – 0,6 і чотирьох ламп – 0,8.

Визначити ймовірність виходу приладу з ладу.

Розв'язок.

Ймовірність перегоряння першої лампи рівна $p_1 = 0{,}1$; другої – $p_2 = 0{,}1$; третьої – $p_3 = 0{,}3$; четвертої $p_4 = 0{,}4$. Ймовірності роботи ламп: $q_1 = 0{,}9;$ $q_2 = 0{,}9;$ $q_3 = 0{,}7;$ $q_4 = 0{,}6.$ Прилад може вийти з ладу – "подія A" при відбутті однієї з гіпотез:

H_0 – не перегоряє жодна лампа.

H_1 – перегоряє одна лампа, H_2 – перегоряють дві лампи, H_3 – перегоряють три лампи, H_4 – перегоряють чотири лампи.

Для визначення ймовірності події A використаємо формулу повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + P(H_3)\cdot P_{H_3}(A) +$$
$$+ P(H_4)\cdot P_{H_4}(A) + P(H_0)\cdot P_{H_0}(A),$$

де умовні імовірності настання події A рівні: $P_{H_0}(A) = 0;$ $P_{H_1}(A) = 0{,}2;$ $P_{H_2}(A) = 0{,}4;$ $P_{H_3}(A) = 0{,}6;$ $P_{H_4}(A) = 0{,}8.$

Імовірності гіпотез H_i рівні:

$$P(H_1) = p_1q_2q_3q_4 + q_1p_2q_3q_4 + q_1q_2p_3q_4 + q_1q_2q_3p_4 =$$
$$= 0{,}1\cdot 0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}6 + 0{,}9\cdot 0{,}1\cdot 0{,}7\cdot 0{,}6 + 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}3\cdot 0{,}6 +$$
$$+ 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}4 = 0{,}4482;$$

$$P(H_2) = p_1p_2q_3q_4 + p_1q_2p_3q_4 + p_1q_2q_3p_4 + q_1p_2q_3p_4 +$$
$$+ q_1p_2p_3q_4 + q_1q_2p_3p_4 = 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}7\cdot 0{,}6 + 0{,}1\cdot 0{,}9\cdot 0{,}3\cdot 0{,}6 +$$
$$+ 0{,}1\cdot 0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}4 + 0{,}9\cdot 0{,}1\cdot 0{,}7\cdot 0{,}4 + 0{,}9\cdot 0{,}1\cdot 0{,}3\cdot 0{,}6 +$$
$$+ 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}1842;$$

$$P(H_3) = p_1p_2p_3q_4 + p_1p_2q_3p_4 + p_1q_2p_3p_4 + q_1p_2p_3p_4 =$$
$$= 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}3\cdot 0{,}6 + 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}7\cdot 0{,}4 + 0{,}1\cdot 0{,}9\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4 +$$
$$+ 0{,}9\cdot 0{,}1\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}0262;$$

$$P(H_4) = p_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}0012.$$

Оскільки імовірності перегоряння ламп різні, для визначення *P(H$_i$)* можна використати твірну функцію $\varphi_n(Z) = \prod_{i=1}^{n} (q_1 + p_i z)$ (див. §3.1), яка для даного прикладу набуває вигляду :

$$\varphi_n(Z) = (0{,}9 + 0{,}1z)(0{,}9 + 0{,}1z)(0{,}7 + 0{,}3z)(0{,}6 + 0{,}4z) =$$

$$= (0{,}9 + 0{,}1)^2 (0{,}7 + 0{,}3z)(0{,}6 + 0{,}4z) = 0{,}3402 + 0{,}4482z +$$

$$+ 0{,}1842z^2 + 0{,}0262z^3 + 0{,}0012z^4.$$

Ймовірність того, що ні одна лампа не перегорить, рівна вільному члену: $P_4(0) = 0{,}3402$.

Ймовірність того, що одна лампа перегорить рівна коефіцієнту при Z: $P_4(1) = 0{,}4482$, тобто $P_4(1) = P(H_1)$.

Ймовірність того, що дві лампи перегорять рівна коефіцієнту при Z^2: $P_4(2) = 0{,}1842$, тобто $P_4(2) = P(H_2)$.

Ймовірність того, що три лампи перегорять рівна коефіцієнту при Z^3: $P_4(3) = 0{,}0262$, тобто $P_4(3) = P(H_3)$.

Ймовірність того, що чотири лампи перегорять рівна коефіцієнту при Z^4: $P_4(4) = 0{,}0012$, тобто $P_4(4) = P(H_4)$.

Перевірка: $P(H_0) + P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + P(H_4) =$ $= 0{,}3402 + 0{,}4482 + 0{,}1842 + 0{,}0262 + 0{,}0012 = 1$.

Підставивши отримані дані в формулу повної імовірності маємо:

$$P(A) = 0{,}3402 \cdot 0 + 0{,}4482 \cdot 0{,}2 + 0{,}1842 \cdot 0{,}4 + 0{,}0262 \times$$

$$\times 0{,}6 + 0{,}0012 \cdot 0{,}8 = 0{,}18.$$

2.2.30. З урни, яка вміщує 2 білі і 3 чорні кулі, навмання виймають 2 кулі і додають в урну одну білу кулю.

а) Знайти ймовірність того, що після цього навмання взята з урни куля виявиться білою.

б) Нехай з урни за схемою випадкового вибору з поверненням виймають *k* куль. Знайти ймовірність того, що всі вони білі.

в) Знайти цю ж ймовірність, що в п. б) для схеми вибору без повернення.

Розв’язок.

а) Нехай подія A полягає у витяганні білої кулі. Подія A може відбутися при здійсненні таких гіпотез, які утворюють повну групу подій:

H_1 – з урни витягають 1 білу і 1 чорну кулі;

$$P(H_1) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^1}{C_5^2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot}{5 \cdot 4} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \, ;$$

H_2 – з урни витягають 2 чорні кулі;

$$P(H_2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4} = 0{,}3 \, ;$$

H_3 – з урни витягають 2 білі кулі;

$$P(H_3) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot}{5 \cdot 4} = 0{,}1 \, .$$

Перевірка: $\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 1.$

Після витягання двох куль в урну додається одна біля куля. Тоді умовні імовірності витягання білої кулі при здійсненні гіпотез H_1, H_2, H_3 будуть такі:

$$P_{H_1}(A) = \frac{2}{4} \quad (2б + 3ч - 1б - 1ч = 2б + 2ч = 4кулі) \, ;$$

$$P_{H_2}(A) = \frac{3}{4} \quad (2б + 3ч - 2ч + 1б = 3б + 1ч = 4кулі) \, ;$$

$$P_{H_3}(A) = \frac{1}{4} \quad (2б + 3ч - 2б + 1б = 1б + 3ч = 4кулі) \, .$$

Підставляємо отримані дані в формулу повної імовірності:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) =$$

$$= 0{,}6 \cdot \frac{2}{4} + 0{,}3 \cdot \frac{3}{4} + 0{,}1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{20} = 0{,}55.$$

б) Нехай подія A полягає в витяганні k білих куль, якщо витягнуту білу кулю повертають знову в урну. Тоді умовна імовірність кожного наступного витягання білої кулі залишається тою ж самою і обчислена для різних гіпотез у попередньому пункті. Умовна імовірність того, що біла куля буде витягнута k разів рівна добутку імовірностей витягання білої кулі кожного разу:

$$P_{H_1}(A) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{4} = \left(\frac{2}{4}\right)^k, \text{ відповідно } P_{H_2}(A) = \left(\frac{3}{4}\right)^k,$$

$$P_{H_3}(A) = \left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

Підставимо отримані дані в формулу повної імовірності:

$$P(A) = 0{,}6 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^k + 0{,}3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k + 0{,}1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k, \text{ де } k = 1, 2, 3\ldots$$

в) Нехай подія A полягає у витяганні k білих куль, коли кулі в урну не повертаються.

Нехай $k = 1$; тоді $(A) = 0{,}6 \cdot \frac{2}{4} + 0{,}3 \cdot \frac{3}{4} + 0{,}1 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}55.$

$$k = 2;\ P(A) = 0{,}6 \cdot P_{H_1}(A) + 0{,}3 \cdot P_{H_2}(A) + 0{,}1 \cdot P_{H_3}(A) =$$

$$= 0{,}6 \cdot P_{H_1}(A_1 \cdot A_2) + 0{,}3 \cdot P_{H_2}(A_1 \cdot A_2) + 0{,}1 \cdot P_{H_3}(A_1 \cdot A_2) =$$

$$= 0{,}6 \cdot P_{H_1}(A_1) \cdot P_{H_1 A_1}(A_2) + 0{,}3 \cdot P_{H_2}(A_1) \cdot P_{H_2 A_1}(A_2) +$$

$$+ 0{,}1 \cdot P_{H_3}(A_1) \cdot P_{H_3 A_1}(A_2) = 0{,}6 \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + 0{,}3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} +$$

$$+ 0{,}1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{0}{3} = 0{,}25.$$

Тут подія A рівна добутку залежних подій: A_1 – I куля біла, A_2 – II куля біла;

$$k = 3;\ P(A) = 0{,}6 P_{H_1}(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) + 0{,}3 P_{H_2}(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) +$$

$$+ 0{,}1 P_{H_3}(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = 0{,}6 P_{H_1}(A_1) \cdot P_{H_1 A_1}(A_2) \cdot P_{H_1 A_1 A_2}(A_3) +$$

$$+0{,}3P_{H_2}(A_1)\cdot P_{H_2A_1}(A_2)\cdot P_{H_2A_1A_2}(A_3)+0{,}1P_{H_3}(A_1)\cdot P_{H_3A_1}(A_2)=$$

$$=0{,}6\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{0}{2}+0{,}3\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+0{,}1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{0}{3}\cdot\frac{0}{2}=\frac{0{,}3}{4}=0{,}075.$$

Тут подія A рівна добутку залежних подій: A_1 – I куля біла, A_2 – II куля біла, A_3 – III куля біла.

$$k=4;\;\; P(A)=0{,}6\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{0}{2}\cdot\frac{0}{1}+0{,}3\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{1}+$$

$$+0{,}1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{0}{3}\cdot\frac{0}{2}\cdot\frac{0}{1}=0.$$

Добуток $4\cdot3\cdot2\cdot1$ можна записати як $A_4^4=4^{[4]}$, добуток $2\cdot1=A_2^2=2^{[2]}$, відповідно, добуток $2\cdot1\cdot0=2^{[3]}$, добуток $2\cdot1\cdot0\cdot0=2^{[4]}$, $3\cdot2=3^{[2]}$, $3\cdot2\cdot1=3^{[3]}$, $3\cdot2\cdot1\cdot0=3^{[4]}$, $1\cdot0=1^{[2]}$, $1\cdot0\cdot0=1^{[3]}$.

Таким чином, в загальному вигляді формула повної імовірності буде мати вигляд:

$$P(A)=0{,}6\cdot\frac{2^{[k]}}{4^{[k]}}+0{,}3\frac{3^{[k]}}{4^{[k]}}0{,}1\frac{1^{[k]}}{4^{[k]}},\ \text{де}\ k=1{,}2{,}3{,}4.$$

2.2.31. При переливанні крові треба враховувати групу крові донора і хворого. Людині, яка має четверту групу крові, можна перелити кров будь-якої групи; людині з другою або третьою групами крові можна перелити кров тієї ж групи, або першої; людині з першою групою можна перелити тільки кров першої групи. Серед населення 33,7% мають першу, 37,5% – другу, 20,9 % – третю і 7,9 % – четверту групу крові.

Знайти ймовірність того, що переливання можна здійснити, якщо є а) один; б) два донори.

Розв’язок.

Введемо у розгляд події: A – хворому перелити кров можна, B_i – у донора i-та група крові, H_i – у хворого i-та група крові.

а) Нехай маємо одного донора. Тоді хворому можна перелити кров при виконанні таких гіпотез: H_1 – у хворого перша група крові, імовірність цієї гіпотези $P(H_1) = 0{,}337$; H_2 – у хворого друга група крові, $P(H_2) = 0{,}375$; H_3 – у хворого третя група крові, $P(H_3) = 0{,}209$; H_4 – у хворого четверта група крові, $P(H_4) = 0{,}079$. Якщо у хворого перша група крові, то йому можна перелити кров донора лише першої групи крові. Отже, умовна імовірність події A при виконанні гіпотези H_1 рівна: $P_{H_1}(A) = P(B_1) = 0{,}337$. Якщо у хворого друга група крові, то йому можна перелити кров донора з другою або першою групою крові, тобто $P_{H_2}(A) = P(B_1) + P(B_2) = P(H_1) + P(H_2) = 0{,}337 + 0{,}375 =$ $= 0{,}712$ – як сума імовірностей двох несумісних подій B_1 і B_2. Аналогічно, якщо у хворого третя група крові, то йому можна перелити кров донора тієї ж групи крові або першої, так що $P_{H_3}(A) = P(B_1) + P(B_3) = P(H_1) + P(H_3) = 0{,}337 +$ $+ 0{,}209 = 0{,}546.$

Якщо у хворого четверта група крові, то йому можна перелити кров будь-якої групи, отже, $P_{H_4}(A) = 1$.

Для обчислення імовірності події A використаємо формулу повної імовірності:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) +$$
$$+ P(H_4) \cdot P_{H_4}(A) = 0{,}337 \cdot 0{,}337 + 0{,}375 \cdot 0{,}712 + 0{,}209 \cdot 0{,}546 +$$
$$+ 0{,}079 \cdot 1 = 0{,}573683.$$

б) Нехай є два донори.

Тоді, якщо хворий з першою групою крові (подія H_1), то йому можна перелити кров донора лише першої групи, тобто якщо серед двох донорів є хоч би один з першою групою крові. Це може бути тоді, коли перший донор з першою групою крові, а другий з будь-якою, в тому ж числі і з першою – подія C_1, або другий донор з першою групою крові, а перший – з будь-якою – подія C_2. Тоді умовна імовірність події A при виконанні гіпотези H_1 рівна сумі імовірностей несумісних подій

C_1 і C_2: $A = C_1 + C_2$, кожна з яких рівна добутку незалежних подій:

$$P_{H_1}(A) = P(C_1) + P(C_2) = P(B_1)[P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) +$$
$$+ P(B_4)] + [P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4)]P(B_1) - P(B_1) \times$$
$$\times P(B_1) = 2P(B_1) - P^2(B_1) = 2 \cdot 0{,}337 - 0{,}337^2 = 0{,}560431.$$

У формулі враховано, що $P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + + P(B_4) = 1$, крім цього відняли доданок $P(B_1) \cdot P(B_1)$, щоб імовірність події $B_1 \cdot B_1$ – "у першого і в другого донора перша група крові" не повторювалась двічі.

Умовну імовірність $P_{H_1}(A)$ можна також обчислити як суму імовірностей трьох несумісних подій, що є добутками незалежних подій: $B_{1.} \cdot B_1$ – "обидва донори першої групи крові"; $B_{1.} \cdot \overline{B}_1$ – "у першого донора перша група крові, а в другого – будь-яка інша група, крім першої" і навпаки, тобто $\overline{B}_{1.} \cdot B_1$.

Таким чином, $P_{H_1}(A) = P(B_1 \cdot B_1) + 2P(B_1 \cdot \overline{B}) = P(B_1) \times$
$\times P(B_1) + 2P(B_1) \cdot P(\overline{B}_1) = 0{,}377^2 + 2 \cdot 0{,}337 \cdot (1 - 0{,}337) =$
$= 0{,}560431.$

Нехай у хворого друга група крові (подія H_2), тоді йому можна перелити кров, якщо: 1) один з двох донорів має першу групу крові, а інший – будь-яку групу, тобто маємо суму подій $C_1 + C_2$, імовірність якої рівна $P_{H_1}(A) = 0{,}560431$; 2) один з двох донорів має другу групу крові, а інший – будь-яку, крім першої, оскільки події: "один донор має першу групу крові, а інший – другу" зустрічались вже двічі в події $C_1 + C_2$. Тоді умовна імовірність події A при виконанні події A_2 (гіпотези) рівна:

$$P_{H_2}(A) = P_{H_1}(A) + P(B_2)[P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4)] +$$
$$+ [P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4)] \cdot P(B_2) - P(B_2) \cdot P(B_2) -$$

$$-2P(B_1)\cdot P(B_2)=P_{H_1}(A)+2P(B_2)-P^2(B_2)-2P(B_1)\cdot P(B_2)=$$

$$=0{,}560431+2\cdot 0{,}375-0{,}375^2-2\cdot 0{,}337\cdot 0{,}375=0{,}971056.$$

У формулі відняли доданок $P(B_1)\cdot P(B_2)$, щоб імовірність події $B_1\cdot B_2$ – "у першого і в другого донора друга група крові" не повторювалася двічі.

Якщо у хворого третя група крові (подія H_3), то йому можна перелити кров, якщо: 1) один з донорів має першу групу крові, а інший – будь-яку – подія $C_1 + C_2$, імовірність якої рівна $P_{H_1}(A)=0{,}560431$; 2) один з двох донорів має третю групу крові, а інший – будь-яку, крім першої, оскільки події "один донор має першу групу крові, а інший третю" зустрічались вже двічі в події C_1+C_2. Отже ,

$$P_{H_3}(A)=P_{H_1}(A)+P(B_3)\cdot[P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)]+$$

$$+[P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)]\cdot P(B_3)-P(H_3)\cdot P(H_3)-$$

$$-2P(H_1)\cdot P(H_3)=P_{H_1}(A)+2\cdot P(B_3)-P^2(H_3)-2P(H_1)\times$$

$$\times P(H_3)=0{,}560431+2\cdot 0{,}209-0{,}209^2-2\cdot 0{,}337\cdot 0{,}209=$$

$$=0{,}793884.$$

Якщо у хворого четверта група крові (подія H_4), то йому можна перелити кров будь-якої групи, тобто $P_{H_4}(A)=1$.

Остаточно імовірність події A дорівнює:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)+$$

$$+P(H_4)\cdot P_{H_4}(A)=0{,}337\cdot 0{,}560431+0{,}375\cdot 0{,}917056+$$

$$+0{,}209\cdot 0{,}793884+0{,}079\cdot 1=0{,}777683003.$$

2.2.32. Комерційний банк надає кредити трьом фірмам. Імовірність неповернення кредиту для І-ї фірми – 1%; для ІІ-ї – 8,2%; для ІІІ-ї – 5,4%. Визначити частки кредитів, які повинен надати комерційний банк, виходячи із умови рівності можливих обсягів неповернених кредитів відносно кожної фірми. Знайти загальний ризик неповернених кредитів комерційному банку.

Розв’язок.

Оскільки вся інформація носить імовірнісний характер, то ризик визначимо як імовірність неповернення кредиту комерційному банку від кожної фірми.

Введемо у розгляд такі події:

A – комерційному банку не повертають кредити;

B_1 – перша фірма дістає кредит від банку;

B_2 – друга фірма дістає кредит від банку;

B_3 – третя фірма дістає кредит від банку.

Відповідні їм імовірності будуть: $P(A)$, $P(B_1)$, $P(B_2)$, $P(B_3)$. Останні три імовірності рівні часткам x_1, x_2, x_3 загального кредиту, що надає банк кожній з фірм. Оскільки є три гіпотези (події), при яких може відбутися неповернення кредиту комерційного банку, то використаємо формулу повної імовірності :

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + P(B_3)\cdot P_{B_3}(A),$$

де $P_{B_1}(A) = 0{,}01;\ \ P_{B_2}(A) = 0{,}082;\ \ P_{B_3}(A) = 0{,}054$.

– умовні імовірності неповернення кредиту банку, якщо кредит був наданий відповідно I, II, III фірмі.

Позначимо через x_1 – частку загального кредиту, наданого I фірмі, x_2 – II фірмі, x_3 – III фірмі. Тоді виходячи з умови, що $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, частка кредиту, наданого III фірмі буде: $x_3 = 1 - (x_1 + x_2)$.

На основі формули Байєса і рівності ризиків з умови задачі отримуємо таку систему рівнянь :

$$\begin{cases} P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) = P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) \\ P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) = P(B_3)\cdot P_{B_3}(A) \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 \cdot 0{,}01 = x_2 \cdot 0{,}082 \\ x_1 \cdot 0{,}01 = (1 - x_1 - x_2)\cdot 0{,}054 \end{cases}$$

Виконавши елементарні перетворення над системою, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = 8{,}2x_2 \\ 6{,}4x_1 + 5{,}4x_2 = 5{,}4 \end{cases}$$

Розв'язок буде такий

$x_1 = 0{,}76503$;

$x_2 = 0{,}093286$;

$x_3 = 0{,}141674$.

Отже, $P(B_1) = 0{,}76503$; $P(B_2) = 0{,}093286$; $P(B_3) = 0{,}141674$.

Звідси, ризик неповернення кредиту кожною фірмою рівний:

$$P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) = P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) =$$
$$= 0{,}01 \cdot 0{,}76503 = 0{,}0076503.$$

Загальний ризик неповернення кредиту банку рівний

$$P(A) = 3 \cdot 0{,}0076503 = 0{,}02295.$$

Висновок. З виділеного кредиту банком загальною сумою 10000 грн. банку не буде повернуто 2295 грн.

§3. Повторні незалежні випробування

Нехай при незмінних умовах проводяться послідовні повторні випробування, в результаті яких можуть бути два можливі наслідки (дві елементарні події A і $\overline{A}$): певна подія A відбувається і не відбувається $\overline{A}$. Оскільки імовірність події A в кожному випробуванні не залежить від наслідку (результату) інших випробувань, то такі випробування називають ***незалежними***. Якщо в кожному незалежному випробуванні імовірність настання події A одна й та сама і дорівнює p $(0 < p < 1)$ і не залежить від номера випробування, то такі випробування називаються ***схемою Бернуллі***.

3.1. Формула Бернуллі

Теорема. Імовірність того, що в n повторних незалежних випробуваннях, в кожному з яких імовірність появи випадкової події A рівна p $(0 < p < 1)$, дана подія наступить (відбудеться) рівно k разів знаходиться за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (3.1.1),$$

де $q = 1 - p$ – імовірність непояви події A в кожному випробуванні.

Імовірності $P_n(k)$ ($k = 0, 1, \ldots n$) називаються ***біномними***, так як права частина формули (3.1.1) є загальним членом розкладу біному Ньютона:

$$(q+p)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = C_n^0 q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots +$$
$$+ \ldots C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^n p^n \quad (3.1.2).$$

Звідси випливає, що сума всіх біномних імовірностей рівна 1: $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^n p^n q^{n-k} = (q+p)^n = 1^n = 1$ (3.1.3).

Для обчислення імовірності появи події *A* рівно *k* разів в серії з *n* незалежних повторних випробувань, що проводяться в змінних умовах, вводять ***твірну функцію*** $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_n(x) = (q + px)^n = q^n x^0 + C_n^1 pq^{n-1}x^1 + C_n^2 p^2 q^{n-2} x^2 +$$
$$+ \ldots C_n^k p^k q^{n-k} x^k + \ldots + \ldots C_n^{n-1} p^{n-1} q x^{n-1} + p^n x^n = (q_1 + p_1 x) \times$$
$$\times (q_2 + p_2 x) \ldots (q_n + p_n x) \qquad (3.1.4).$$

Ця функція має ту властивість, що імовірність $P_n(k)$ того, що в *n* незалежних випробуваннях, в першому з яких імовірність появи події *A* рівна p_1, в другому p_2 і т. д. подія *A* з'явиться рівно *k* разів, дорівнює коефіцієнту при z^k в розкладі твірної функції по ступенях *z*.

Імовірності $P_n(k)$ при фіксованому *n* спочатку ростуть при збільшенні числа *k* від 0 до деякого значення k_0, а потім зменшуються при зменшенні числа *k* від k_0 до *n*.

Число k_0, при якому при заданому *n* відповідає максимальна біномна імовірність $P_n(k_0)$, називається ***найімовірнішим числом*** появи події *A*. Найімовірніше число k_0 задовільняє системі нерівностей:

$$np - q \le k_0 \le np + q\,, \qquad (3.1.5)$$

якщо $np - q$ неціле, то є одне значення k_0, якщо $np - q$ ціле, то таких значень є два, які будуть відрізнятися між собою на 1.

Нехай проводиться *n* незалежних випробувань, в кожному з яких може бути *m* ($m > 2$) попарно несумісних і єдино можливих результатів A_j (*j* = 1, 2, ...*m*) з відповідними імовірностями $p_j = P(A_j)$, однаковими в усіх випробуваннях і такими, що $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$. Нехай ν_j число появ A_j. Тоді імовірність того, що в n випробуваннях наслідок A_1 наступає рівно k_1 раз, наслідок A_2 - k_2 раз і т.д., наслідок A_m - k_m раз рівна: $P_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \dfrac{n!}{k_1! k_2! ... k_m!} p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_m^{k_m}$ (3.1.6).

$(k_1 + k_2 + ... + k_m = n)$

Імовірності $P_n(k_1, k_2, ..., k_m)$ називаються ***поліномними***, а схема випробувань – ***поліномною***. Частковий випадок поліномної схеми з $m = 2$ називають схемою Бернуллі.

Задачі

3.1.1. Батарея зробила 14 пострілів по об'єкту, ймовірність влучення в який дорівнює 0,2.

Обчислити:

а) найбільш ймовірне число влучень і його ймовірність;

б) ймовірність знищення об'єкту, якщо для його знищення потрібно не менше 4 влучень.

Розв’язок.

Маємо повторні незалежні випробування (постріли) в кожному з яких імовірність настання події (влучення) стала і рівна p,

$n = 14$; $p = 0{,}2$; $q = 1 - p = 0{,}8$.

а) Найімовірніше число k_0 настання події (влучень) знаходимо з формули: $np - q \le k_0 \le np + p$; або у числах: $14 \times 0{,}2 - 0{,}8 \le k_0 \le 14 \times 0{,}2 + 0{,}2$, $2 \le k_0 \le 3$. Отже, $k_0 = 2; 3$.

Для обчислення імовірності настання подій $k_0 = 2; 3$ рази в $n = 14$ випробуваннях використаємо формулу Бернуллі:

$P_{14}(2) = P_{14}(3)$; $P_{14}(2) = C_{14}^2 \times 0{,}2^2 \times 0{,}8^{12} = 0{,}25014$.

б) A – подія, яка полягає у знищенні об’єкту:

$$P(A) = P(k \ge 4) = 1 - [P(1) + P(2) + P(3)] = 1 - (0{,}15393 + $$
$$+ 0{,}25014 + 0{,}25014) = 0{,}3018,$$

де $P_{14}(1) = C_{14}^1 \times 0{,}2 \times 0{,}8^{13} = 0{,}15393$;

$$P_{14}(2) = C_{14}^2 \times 0{,}2^2 \times 0{,}8^{12} = 0{,}25014;$$
$$P_{14}(3) = C_{14}^3 \times 0{,}2^3 \times 0{,}8^{11} = 0{,}25014\,.$$

3.1.2. Якою повинна бути ймовірність влучання при одному пострілі, щоб при чотирьох пострілах $P(x = 0) = P(x = 1)$?

Розв'язок.

Використаємо формулу Бернуллі.

З умови $P_4(k=0) = P_4(k=1)$ або $C_4^{\,0} P^0 (1-p)^4 = C_4^{\,1} P^1 (1-p)^3$, звідси $1 - p = 4p$. Отже, $p = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$.

3.1.3. Оцінити імовірність p появи події A в кожному з 59 незалежних випробувань, якщо найімовірніше число появи події A в цих випробуваннях дорівнює 35.

Розв'язок.

Використовуємо формулу найімовірнішого числа:

$np - q \le k_0 \le np + p$, де $n = 59$, $k_0 = 35$.

Виразимо $q = 1 - p$ (з рівності $p + q = 1$) і підставимо в нерівність: $59p - (1-p) \le 35 \le 59p + p$, спростивши яку отримаємо: $60p - 1 \le 35 \le 60p$.

Запишемо цю нерівність як подвійну:

$$\begin{cases} 60p - 1 \le 35 \\ 60p \ge 35 \end{cases} \to \begin{cases} 60p \le 36 \\ 60p \ge 35 \end{cases} \to \begin{cases} p \le \dfrac{36}{60} \\ p \ge \dfrac{35}{60} \end{cases}$$

Отже, $\dfrac{35}{60} \le p \le \dfrac{36}{60}$, або $0{,}5833 \le p \le 0{,}6$.

3.1.4. В результаті систематичного контролю якості виготовлених деталей встановлено, що середній відсоток браку становить 5 %.

Скільки виготовлених деталей потрібно взяти, щоб найімовірніше число якісних серед них складало 60 шт.?

Розв'язок.

$q = 0{,}05$ (брак), $p = 0{,}95$ (якісні), $k_0 = 60$.

Використаємо формулу найімовірнішого числа появи події A в n випробуваннях $np - q \le k_0 \le np + p$, яка в числах набуде вигляду: $n \cdot 0{,}95 - 0{,}05 \le 60 \le n \cdot 0{,}95 + 0{,}95$. Запишемо у вигляді системи нерівностей:

$$\begin{cases} 0{,}95n - 0{,}05 \le 60 \\ 0{,}95n + 0{,}95 \ge 60 \end{cases} \to \begin{cases} 0{,}95n \le 60{,}05 \\ 0{,}95n \ge 59{,}05 \end{cases} \to \begin{cases} n \le 63{,}2 \\ n \ge 62{,}16 \end{cases}.$$

Отже, $n = 62; 63$.

3.1.5. Гральний кубик підкидають n раз.

Обчислити:

а) ймовірність того, що n_1 разів випаде одиниця, n_2 разів – двійка, ..., n_6 разів – шістка;

б) ймовірність того, що шістка не випаде жодного разу.

Розв'язок.

Ймовірність випадання будь-якої цифри рівна:

$$p_1 = p_2 = ... = p_6 = \frac{1}{6}; \; n_1 + n_2 + ... + n_6 = n.$$

а) $P\{\upsilon_1 = n_1, \upsilon_2 = n_2, ...\upsilon_6 = n_6\} = \dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3!, ... \times ... n_6!} \times$

$$\times p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_6^{n_6} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times ... n_6!} \left(\frac{1}{6}\right)^{n_1 + n_2 + ... n_6} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! ... \times n_6} \left(\frac{1}{6}\right)^{n}.$$

б) Ймовірність появи “6” рівна $p = \dfrac{1}{6}$, ймовірність непояви шістки рівна $q = 1 - p = \dfrac{5}{6}$.

Використаємо формулу Бернуллі, де $k = 0$, $p = \dfrac{1}{6}$, $q = \dfrac{5}{6}$: $P_n(0) = C_n^{\ 0} p^0 q^n = q^n = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

3.1.6. Відомо, що 1/10 частина всіх радіоламп, які надійшли у магазин на продаж, не відповідають усім характеристикам стандарту. Продавець продає 4 радіолампи із наявних 100 шт.

Визначити ймовірність того, що одна з них виявиться нестандартною.

Розв’язати задачу: а) за схемою повернених куль; б) за схемою неповернених куль.

Розв’язок.

Нехай подія A полягає в тому, що з 4 радіоламп одна є нестандартною.

а) Якщо витягнуті радіолампи повертаються назад, то імовірність витягання нестандартної лампи в кожному випробуванні постійна і рівна $p = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$. Для визначення імовірності події A скористуємось формулою Бернуллі: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

$$P_4(1) = C_4^1 (0{,}1)^1 (1 - 0{,}1)^{4-1} = 4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916.$$

б) 10% усіх ламп є бракованими, тобто їх є $0{,}10 \cdot 100 = 10$ штук, тоді 90 ламп є стандартними (як найімовірніші величини). Тоді згідно класичного означення імовірності:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{90}^3 \cdot C_{10}^1}{C_{100}^4} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97} = 0{,}300.$$

3.1.7. Проводиться випробування пристрою. При кожному випробуванні пристрій виходить з ладу з ймовірністю 0,1. Після першого виходу з ладу він ремонтується, після другого – визнається непридатним.

Знайти ймовірність того, що пристрій повністю вийде з ладу точно при шостому випробуванні.

Розв'язок.

Нехай подія A полягає у повному виході пристрою з ладу. Задана $p = 0{,}1$ – ймовірність виходу з ладу при кожному випробуванні. Подія $A = A_1 \cdot A_2$, де A_1 – подія, яка полягає в тому, що в п'яти випробуваннях пристрій виходить з ладу один раз, A_2 – подія, яка означає вихід з ладу пристрою в шостому випробуванні. Оскільки A_1 і A_2 незалежні, то

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = C_5^1 p^1 q^{5-1} \cdot p = 5 \cdot 0{,}1 \times$$
$$\times 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 = 0{,}03281.$$

3.1.8. Дано десять позицій, на кожній з яких може з'явитися 0 або 1, причому поява нуля чи одиниці на якій-небудь з них не залежить від того, що відбувається на других позиціях. Імовірності появи одиниці чи нуля на будь-якій позиції рівні відповідно p і q ($p + q = 1$). Проводиться випробування, в результаті якого всі десять позицій заповнюються нулями і одиницями. Знайти імовірність того, що на даних позиціях з'явиться вісім нулів і дві одиниці, причому не буде двох одиниць, що стоять поруч.

Розв'язок.

Загальне число перестановок з десяти елементів, серед яких є два типи елементів, що зустрічаються "1" – 2 рази і "0" – 8 раз буде:

$$P(2;8) = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{2 \cdot 1} = 45 .$$

З них $n_1 = 10 - 1 = 9$ місць буде займати блок з двох одиниць, коли вони стоять поруч. Отже, число перестановок, коли дві одиниці не стоять поруч, рівне $P(2,8) - n_1 = 45 - 9 =$
$= 36$.

Ймовірність того, що з'являться вісім нулів рівна q^8, дві одиниці – p^2, так що ймовірність шуканої події рівна $P(A) =$ $= 36 \cdot p^2 \cdot q^8$.

3.1.9. В екзаменаційному білеті є п'ять запитань. На кожне запитання дано три можливі відповіді, серед яких необхідно вибрати одну правильну.

Яка ймовірність того, що методом простого відгадування вдається відповісти щонайменше на чотири запитання?

Розв'язок.

Імовірність p вгадати правильну відповідь на одне питання з трьох рівна $\frac{1}{3}$, тоді імовірність не вгадати відповідь рівна

$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Шукана подія A рівна сумі несумісних подій $A = A_4 + A_5$, де A_4 – відгадані чотири правильні відповіді з п'яти, A_5 – відгадані всі п'ять відповідей. Отже, $P(A) =$ $= P(A_4) + P(A_5)$. Оскільки імовірність відгадування правильної відповіді на кожне запитання постійна, а число запитань $n = 5$ – невелике, імовірності подій A_4 і A_5 обчислимо згідно формули Бернуллі:

$$P_5^4(A_4) = C_5^4 p^4 q^{5-4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{10}{243} =$$

$= 0{,}04115$;

$$P_5^5(A_5) = C_5^5 p^5 q^{5-5} = p^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 0{,}004115.$$

Остаточно, $P(A) = 0{,}04115 + 0{,}004115 = 0{,}04527$.

3.1.10. На відрізок "кинуто" навмання n точок. Ймовірність попадання точки на будь-яку частину відрізка залежить тільки від довжини цієї частини і пропорційна їй.

Яка ймовірність того що, на ліву половину відрізка попаде щонайбільше дві точки?

Розв’язок.

Ймовірність того, що одна точка попаде на ліву частину відрізка рівна $\frac{1}{2}$, як відношення довжини половини відрізка до всієї його довжини: $\frac{l}{2}:l=\frac{1}{2}$. Кидання на відрізок точок – повторні незалежні випробування, імовірність настання події в кожному з яких (попадання на ліву частину) постійна і рівна $p=\frac{1}{2}$.

Нехай A – подія, імовірність якої необхідно обчислити. Подія A рівна сумі несумісних подій A_0, A_1, A_2: $A=A_0+A_1+$ $+A_2$ і її імовірність рівна $P(A)=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)$, де $i=k=0, 1, 2$ – кількість точок, що попадають на ліву частину відрізка – число настання події A_i.

Імовірність того, що в n випробуваннях подія A_i настане k разів, обчислюється згідно формули Бернуллі:

$$P_n^k(A_i)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Таким чином, $P(A)=C_n^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+$

$$+C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{1}{2^n}+n\cdot\frac{1}{2^n}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{n^2+n+2}{2^{n+1}}=$$

$$=\frac{C_n^2+n+1}{2^{n+1}}.$$

3.1.11. Знайти ймовірність того, що в $2n$ випробуваннях за схемою Бернуллі з ймовірністю успіху p і невдачі $q=1-p$ з'явиться $m+n$ успіхів, і всі випробування з парними номерами закінчаться удачею.

Розв’язок.

Нехай A – подія, імовірність якої необхідно знайти. В $2n$ випробуваннях є n випробувань з парними номерами і n випробувань з непарними. Імовірність того, що всі n випробувань з парними номерами закінчаться удачею (подія A_1) за формулою Бернуллі рівна: $P(A_1) = C_n^n p^n q^{n-n} = 1 \cdot p^n \cdot q^0 = p^n$. Якщо успіхів в усіх випробуваннях є (m + n), а на парні випробування припадає n успіхів, то на n непарних випробувань припадає m успіхів (подія A_2). Імовірність події A_2 рівна $P(A_2) = C_n^m p^m q^{n-m}$. Оскільки подія A рівна добутку незалежних подій $A_1 \cdot A_2$, то імовірність події A рівна $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) = p^n \cdot C_n^m p^m q^{n-m} = C_n^m p^{n+m} q^{n-m}$.

3.1.12. Знайти умовну ймовірність того, що в перших n випробуваннях Бернуллі герб випав при k-му випробуванні, якщо відомо, що при n випробуваннях герб випав тільки один раз.

Розв’язок.

Імовірність випадання герба в кожному випробуванні рівна $\frac{1}{2}$. Імовірність події A, яка полягає в тому, що герб випав тільки один раз згідно формули Бернуллі рівна:

$$P_n^k(A) = C_n^k p^k q^{n-k} \to P_n^1(A) = C_n^1 p^1 q^{n-1} = npq^{n-1}.$$

Оскільки події A і B залежні, то $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$. Звідки $P_A(B)$ – ймовірність того, що герб випав при k-тому випробуванні, якщо він випав один раз рівна:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{q^{k-1} p \cdot q^{n-k}}{npq^{n-1}} = \frac{pq^{n-1}}{npq^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

3.1.13. На відрізок AB довжиною a навмання кинуто 5 точок.

Знайти ймовірність того, що дві точки будуть знаходитись від точки *A* на відстані меншій *x*, а три – на відстані, більшій *x*.

Припускається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розміщення.

Розв’язок.

Імовірність того, що кожна точка може попасти на відрізок (рис. 3.1.1).

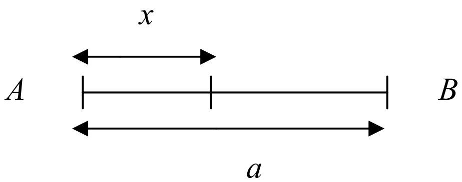


Рис. 3.1.1.

довжини *x* рівна $p = \frac{x}{a}$, тоді імовірність протилежної події $q = 1 - \frac{x}{a} = \frac{a-x}{a}$. Імовірність події *A* – на “відрізок *x* попаде дві точки з п’яти” обчислимо згідно формули Бернуллі:

$$P_5\ (2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = C_5^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{a-x}{a}\right)\right]^3.$$

Ця імовірність рівна імовірності того, що три точки попадуть на відрізок більший за *x*, тобто на відрізок *x* – *a* (подія *B*). Її теж обчислимо згідно формули Бернуллі:

$$P_5\ (3) = C_5^3 p^3 q^{5-3}, \text{ де } p = \frac{a-x}{a}; q = 1 - \frac{a-x}{a} = \frac{x}{a}.$$

Отже, $P(B) = C_5^3 \left[\left(\frac{a-x}{a}\right)\right]^3 \left(\frac{x}{a}\right)^2 = C_5^3 \left(\frac{x}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{a-x}{a}\right)\right]^3$,

оскільки, $C_n^k = C_n^{n-k}$, тобто $C_5^3 = C_5^2$. Таким чином, $P(A) = P(B)$.

3.1.14. Відрізок AB розділений точкою C у відношенні 2:1. На цей відрізок навмання кинуто 4 точки.

Знайти ймовірність того, що дві з них опиняться лівіше від точки C і дві – правіше, якщо припускається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розміщення.

Розв'язок (рис. 3.1.2).

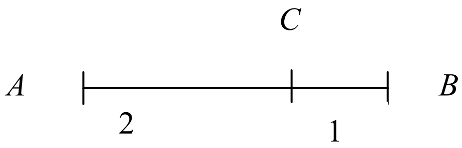


Рис. 3.1.2.

Імовірність p попадання будь-якої точки лівіше C на відрізок AC при кожному підкиданні рівна $p = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$, імовірність непопадання $q = 1 - p = \frac{1}{3}$. Таким чином, мають місце повторні незалежні випробування. Імовірність події A – на відрізок AC попаде дві точки з чотирьох, обчислимо згідно формули Бернуллі:

$$P_4^2(A) = C_4^2 p^2 q^{4-2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$$

Імовірність події A рівна імовірності події B – "на відрізок CB попадуть дві точки", яку теж обчислимо згідно формули Бернуллі, поклавши $p = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$. Отже, $P_4^2(B) =$ $= C_4^2 p^2 q^{4-2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$. Показано, що $P_4^2(A) =$ $= P_4^2(B)$.

3.1.15. Відрізок розділено на 4 рівних частини. На відрізок навмання кинуто 8 точок.

Знайти ймовірність того, що на кожну з 4-х частин відрізка попаде по дві точки.

Припускається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розміщення.

Розв'язок.

Нехай A – подія, яка полягає в тому, що на кожну з чотирьох частин відрізка попаде по дві точки. Тоді подія A рівна добутку залежних подій $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$, де A_1 – подія, яка полягає в тому, що на один з чотирьох відрізків попадає дві точки з восьми, A_2 – на один з трьох відрізків, що залишились без точок, попадає дві точки з шести (дві точки уже попали на якийсь з відрізків), A_3 –на один з двох відрізків попадає дві точки з чотирьох, A_4 –на один відрізок попадає дві точки.

Отже, імовірність події A рівна:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot P_{A_1 A_2 A_3}(A_4),$$

де: $P(A_1) = C_8^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^6$; $P_{A_1}(A_2) = C_6^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4$;

$$P_{A_1 A_2}(A_3) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2; \quad P_{A_1 A_2 A_3}(A_4) = 1.$$

Остаточно, $P(A) = C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \dfrac{3^6 \cdot 2^4}{4^2 \cdot 4^6 \cdot 3^2 \cdot 3^4 \cdot 2^2 \cdot 2^2} =$

$$= C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 \left(\frac{1}{4}\right)^8.$$

3.1.16. Кожну секунду з ймовірністю p незалежно від інших моментів часу по дорозі проїжджає автомобіль. Пішоходу для переходу дороги потрібно 3 с.

Яка ймовірність того, що пішохід який підійшов до дороги, буде чекати на можливість переходу:

а) більше 2 с;

б) 3 с;

в) більше 3 с;

г) 4 с;

д) 5 с?

Розв’язок.

Позначимо через A шукану подію. Нехай подія A_i означає, що на протязі i-тої секунди по дорозі проїжджає автомобіль, $\overline{A_i}$ – дорога вільна від автомобіля.

а) Події A – пішохід чекає більше 2-ох секунд і $\overline{A}$ – не більше 2-ох секунд – протилежні, тобто утворюють повну групу подій, тому $P(A)+P(\overline{A})=1$. Отже,

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-[P(B)+P(C)+P(D)]=$$

$$=1-[P(t=0)+P(t=1)+P(t=2)],$$

де $P(B) = P(t = 0)$ – ймовірність того, що пішохід не чекає зовсім і переходить дорогу. Щоб він міг перейти дорогу – подія B, необхідно (рис. 3.1.3.а), щоб на протязі першої (подія $\overline{A_1}$), другої (подія $\overline{A_2}$) і третьої (подія $\overline{A_3}$) секунд, необхідних для переходу дороги, на дорозі не було автомобіля, імовірність непояви якого рівна $q = 1 - p$. Отже,

$$P(B)=P(t=0)=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})=$$

$$=q\cdot q\cdot q=q^3,$$

як імовірність добутку незалежних подій.

Пішоходу для переходу дороги треба чекати одну секунду – подія C (рис. 3.1.3.б), якщо на протязі першої секунди по дорозі проїжджає автомобіль (подія A_1), а потім наступні три секунди дорога буде вільна від автомобілів (подія $\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4}$). Імовірність такої складної події рівна добутку незалежних подій $A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4}$:

$$P(C)=P(t=1)=P(A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4})=P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\times$$

$\times P(\overline{A}_3)\cdot P(\overline{A}_4)=pq^3.$

Пішоходу треба чекати дві секунди – подія D, якщо:

1) на протязі першої (подія A_1) і другої (подія A_2) секунди по дорозі буде проїжджати автомобіль, а в наступні три секунди (рис. 3.1.3.в) дорога буде вільна від машин (подія $\overline{A}_3\cdot\overline{A}_4\cdot\overline{A}_5$). Імовірність такої складної події $D^/$ рівна:

$$P(D^/)=P(A_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3\cdot\overline{A}_4\cdot\overline{A}_5)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3)\times$$
$$\times P(\overline{A}_4)\cdot P(\overline{A}_5)=p\cdot p\cdot q^3=p^2q^3.$$

2) протягом першої секунди дорога вільна (подія $\overline{A}$), другої – по дорозі проїжджає автомобіль (подія A_2) (рис. 3.1.3.г) і в наступні три секунди дорога вільна (подія $\overline{A}_3\cdot\overline{A}_4\cdot\overline{A}_5$). Імовірність такої складної події $D^{//}$ рівна:

$$P(D^{//})=P(\overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3\cdot\overline{A}_4\cdot\overline{A}_5)=P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3)\times$$
$$\times P(\overline{A}_4)\cdot P(\overline{A}_5)=q\cdot p\cdot q^3=pq^4.$$

Оскільки події $D^/$ і $D^{//}$ несумісні, то $P(D)=P(t=2)=$ $=P(D^/)+P(D^{//})=p^2q^3+pq^4$.

Остаточно,

$$P(A)=1-(q^3+pq^3+p^2q^3+pq^4)=1-q^3(1+p+p^2+$$
$$+pq)=1-q^3[1+1-q+(1-q)^2+(1-q)q]=1-q^3(3-2q)=$$
$$=1-3q^3+2q^4.$$

б) Пішоходу треба чекати три секунди – подія E (рис. 3.1.3.г), якщо на третій секунді проїжджає автомобіль (подія A_3), а наступні три секунди необхідні для переходу, дорога вільна – подія $\overline{A}_4\cdot\overline{A}_5\cdot\overline{A}_6$.

Імовірність такої складної події E рівна імовірності добутку незалежних подій:

$$P(E)=P(t=3)=P(A_3\cdot\overline{A}_4\cdot\overline{A}_5\cdot\overline{A}_6)=P(A_3)\cdot P(\overline{A}_4)\times$$
$$\times P(\overline{A}_5)\cdot P(\overline{A}_6)=pq^3.$$

Цю ж імовірність можна обчислити як суму імовірностей несумісних подій: 1) події E' – протягом першої і другої секунд дорога вільна від машин (подія $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2$), імовірність якої q^2 (рис. 3.1.3.і), на третій секунді проїжджає автомобіль (подія A_3, імовірність якої p), а в наступні три секунди потрібні для переходу, дорога вільна від машин (подія $\overline{A}_4 \cdot \overline{A}_5 \cdot \overline{A}_6$, імовір-ність якої q^3). Тоді імовірність події E' рівна добутку подій: $P(E') = q^2 \cdot p \cdot q^3$

2) E'' –рівна добутку таких подій: “протягом першої і дру-гої секунд проїжджає хоч би один автомобіль” – відбувається хоч би одна з подій A_1 чи A_2, (подія $A_{1,2}$), імовірність такої події $A_{1,2}$ рівна $(1 - q^2)$ (рис.3.1.3.г$^{\mathrm{II}}$, г$^{\mathrm{III}}$, г$^{\mathrm{IV}}$); на третій секунді теж проїжджає автомобіль (подія A_3, імовірність якої p), а в наступні три секунди дорога вільна для переходу (подія $\overline{A}_4 \cdot \overline{A}_5 \cdot \overline{A}_6$, імовірність якої q^3). Імовірність події E'' рівна:

$P(E'') = (1 - q^2)pq^3$ – як імовірність добутку незалеж-них подій. Але $E = E' + E''$ – як сума несумісних подій. Отже,

$$P(E) = P(E') + P(E'') = q^2pq^3 + (1 - q^2)pq^3 =$$
$$= (q^2 + 1 - q^2)pq^3 = pq^3.$$

в) Імовірність того, що пішохід буде чекати більше трьох секунд рівна:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - [P(t = 0) + P(t = 1) + P(t = 2) +$$
$$+ P(t = 3)] = 1 - 3q^3 + 2q^4 - pq^3 = 1 - 3q^3 + 2q^4 - (1 - q)q^3 =$$
$$= 1 - 4q^3 + 3q^4.$$

г) Пішохід змушений чекати чотири секунди – подія A (рис. 3.1.3.д$^{\mathrm{I}}$, д$^{\mathrm{VII}}$) якщо в перші три секунди по дорозі проїде хоч би один автомобіль – (подія $A_{1,2,3}$, яка полягає в тому, що відбудеться хоч би одна з подій A_1, A_2, A_3, інакше пішоходу вистачило б трьох секунд для переходу дороги). Імовірність такої події рівна $P(A_{1,2,3}) = 1 - q^3$. Автомобіль проїжджає і протягом четвертої секунди – подія A_4, а в наступні три секунди дорога вільна для переходу – подія $\overline{A}_5 \cdot \overline{A}_6 \cdot \overline{A}_7$. Таким чином, імовірність такої складної події A рівна добутку імовірностей незалежних подій:

$$P(A) = P(A_{1,2,3} \cdot A_4 \cdot \overline{A}_5 \cdot \overline{A}_6 \cdot \overline{A}_7) = P(A_{1,2,3}) \cdot P(A_4) \cdot P(\overline{A}_5) \times$$
$$\times P(\overline{A}_6) \cdot P(\overline{A}_7) = (1 - q^3)pq^3.$$

д) Пішохід буде чекати п'ять секунд для переходу дороги (подія A), якщо на протязі п'ятої секунди по дорозі буде проїжджати автомобіль – подія A_5, а на протязі шостої, сьомої і восьмої секунд дорога буде вільна від машин для переходу. Тобто відбудуться події $\overline{A}_6, \overline{A}_7, \overline{A}_8$, а на протязі перших чотирьох секунд відбудеться одна з таких подій: 1) F_1 – протягом першої секунди дорога вільна – подія $\overline{A}_1$, другої – проїжджає машина – подія A_2, третьої і четвертої вільна, тобто відбудуться події $\overline{A}_3, \overline{A}_4$ відповідно, так що $F_1 = \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \overline{A}_4$ (рис. 3.1.3.е^{I}).

2) F_2 – протягом перших двох секунд дорога вільна – події $\overline{A}_1, \overline{A}_2$, протягом третьої секунди дорогою проїжджає машина – подія A_3, протягом четвертої секунди дорога вільна – $\overline{A}_4$, так що $F_2 = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A}_4$ (рис. 3.1.3.е^{II}).

Події: F_3 – протягом першої секунди дорогою проїжджає машина, а в наступні три секунди дорога вільна (рис. 3.1.3.е^{III}) і $F_3 = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot A_4$ – протягом перших трьох секунд дорога вільна, а на четвертій секунді дорогою проїжджає машина (рис. 3.1.3.е^{IV}) не підходять, оскільки в цих подіях є підряд три секунди, протягом яких дорога вільна від машин, так що пішохід міг би перейти дорогу. 3) G – протягом перших чотирьох секунд проїжджають дві машини; 4) K – протягом перших чотирьох секунд проїжджають три машини; 5) L – протягом перших чотирьох секунд щосекунди проїжджає машина.

○ – дорога вільна
● – проїжджає автомобіль

Рис.3.1.3
а) ○ ○ ○
б) ● ○ ○ ○
в$^{\mathrm{I}}$) ● ● ○ ○ ○
в$^{\mathrm{II}}$) ○ ● ○ ○ ○
г) ○ ○ ● ○ ○ ○

д$^{\mathrm{I}}$) ● ○ ○ ● ○ ○ ○
д$^{\mathrm{II}}$) ○ ● ○ ● ○ ○ ○
д$^{\mathrm{III}}$) ○ ○ ● ● ○ ○ ○
д$^{\mathrm{IV}}$) ● ● ○ ● ○ ○ ○
д$^{\mathrm{V}}$) ● ○ ● ● ○ ○ ○
д$^{\mathrm{VI}}$) ○ ● ● ● ○ ○ ○
д$^{\mathrm{VII}}$) ● ● ● ● ○ ○ ○

г$^{\mathrm{I}}$) ○ ○ ● ○ ○ ○
г$^{\mathrm{II}}$) ● ○ ● ○ ○ ○
г$^{\mathrm{III}}$) ○ ● ● ○ ○ ○
г$^{\mathrm{IV}}$) ● ● ● ○ ○ ○

е$^{\mathrm{I}}$) ○ ● ○ ○ ● ○ ○ ○
е$^{\mathrm{II}}$) ○ ○ ● ○ ● ○ ○ ○
е$^{\mathrm{III}}$) ● ○ ○ ○ ● ○ ○ ○
е$^{\mathrm{IV}}$) ○ ○ ○ ● ● ○ ○ ○

Рис. 3.1.3. а – не чекає зовсім; б) чекає 1 секунду; в$^{\mathrm{I}}$), в$^{\mathrm{II}}$) – чекає 2 секунди; г) чекає 3 секунди і в перші дві секунди можливі різні варіанти проїзду і непроїзду, зображені на рис. г$^{\mathrm{I}}$, г$^{\mathrm{II}}$, г$^{\mathrm{III}}$, г$^{\mathrm{IV}}$; д$^{(\mathrm{I-VII})}$ – чекає чотири секунди; е$^{(\mathrm{I-IV})}$ – чекає 5 секунд.

Отже, подія A рівна добутку суми несумісних подій на добуток подій:

$A = (F_1 + F_2 + G + K + L)A_5 \cdot \overline{A}_6 \cdot \overline{A}_7 \cdot \overline{A}_8$ – імовірність якої рівна:

$$P(A) = (qpqq + qqpq + C_4^2 p^2 q^2 + C_4^3 p^3 q + p^4)pqqq =$$
$$= (2pq^3 + 6p^2q^2 + 4p^3q + p^4)pq^3 = [2(1-q)q^3 + 6(1-q)^2q^2 +$$
$$+ 4(1-q)^3 q + (1-q)^4]pq^3 = [2(1-q)q^3 + 6(1-2q+q^2)q^2 +$$
$$+ 4(1-3q+3q^2-q^3)q + 1 - 4q + 6q^2 - 4q^3 + q^4] =$$
$$= (1-2q^3+q^4)pq^3 = (1-q^3-q^3p)pq^3.$$

Граничні теореми для схеми Бернуллі.

Якщо n достатньо велике, то користуватися формулою Бернуллі досить складно, оскільки формула потребує виконання дій над величезними числами, використання ж таблиць логарифмів факторіалів дає високу похибку. Тому для достатньо великих n використовують зручні наближені (асимптотичні) формули, які дають малі відносні похибки вимірювань.

3.2. Формула Пуассона

Якщо n достатньо велике, а імовірність p події настільки мала, що число np невелике (звичайно $p \le 0{,}1$; $npq \le 10$), тобто для подій, що рідко трапляються, використовують асимптотичну формулу Пуассона.

Теорема. Якщо імовірність p появи події A в кожному випробуванні при необмеженому збільшенні числа випробувань n змінюється таким чином, що $np = \lambda$, $\lambda = \text{const}$, то імовірність того, що деяка подія A з’явиться k разів в n випробуваннях обчислюється за формулою $P_n(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ (3.2.1).

Для використання формули Пуассона немає необхідності знати окремо числа n і p, а лише їх добуток $\lambda = np$.

Найпростіший потік подій.

Потоком подій називається послідовність подій, які наступають в випадкові моменти часу. ***Найпростішим*** (пуассонівським) називають потік подій, який має такі властивості: а) стаціонарності; б) відсутності післядії; в) ординарності.

Інтенсивністю потоку λ називають середнє число подій, які з’являються за одиницю часу. Імовірність появи k подій найпростішого потоку за час тривалістю t визначається формулою Пуассона:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad (3.2.2)$$

яка відображає всі властивості найпростішого потоку.

Задачі

3.2.1. Ймовірність попадання в ціль при кожному пострілі рівна 0,001.

Знайти ймовірність попадання в ціль двох і більше куль, якщо число пострілів рівне 5000.

Розв'язок.

Нехай подія A полягає у попаданні в ціль двох і більше куль: $k \geq 2$. Протилежною подією $\overline{A}$ до даної є $k \leq 1$. Отже, $P_n(k \geq 2) + P_n(k \leq 1) = 1$.

Звідси, $P(A) = P_n(k \geq 2) = 1 - P_n(k \leq 1) = 1 - [P_n(k=0) +$ $+ P_n(k=1)]$.

Оскільки n = 5000 велике, а $p = 0{,}001 << 0{,}1$ – мала, і $\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}001 = 5 < 10$, кожну імовірність $P_n(k=0)$ і $P_n(k=1)$ обчислимо за формулою Пуассона: $P_{5000}(0) =$ $= \frac{5^0}{0!} e^{-5} = e^{-5}$; $P_{5000}(1) = \frac{5^1}{1!} e^{-5} = 5e^{-5}$. Отже, $P(A) = 1 -$ $- (e^{-5} + 5e^{-5}) = 1 - 6e^{-5} = 0{,}9596$.

3.2.2. На телефонну станцію протягом години поступає n викликів. Ймовірність появи виклику протягом будь-якого інтервалу часу, тривалість якого менша години, залежить лише від довжини цього інтервалу, пропорційна їй і не залежить від початку інтервалу.

Вважаючи виклики незалежними, знайти ймовірність того, що протягом проміжку часу t (менше години) станція отримала рівно m викликів.

Розв'язок.

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!} = \frac{(nt)^m}{m!} e^{-nt}$$, причому t виражено в годинах.

3.2.3. При роботі деякого приладу в випадкові моменти часу виникають неполадки. Потік неполадок можна вважати простим. Середнє число неполадок за добу рівне двом.

Потрібно визначити ймовірність того, що:

а) за дві доби не буде жодної неполадки;

б) за добу виникне хоча б одна неполадка;

в) за тиждень роботи приладу виникне не більше трьох неполадок.

Розв'язок.

Використаємо формулу наведену в задачі 3.2.2.. для $\lambda = 2$.

а) $t = 2$; $m = 0$; $P_2(0) = \dfrac{(2 \cdot 2)^0 e^{-2 \cdot 2}}{0!} = e^{-4} = 0{,}0183$.

б) $P_t(m = 0) + P_t(m \geq 1) = 1; \quad t = 1$, звідки

$$P_1(m \geq 1) = 1 - P_1(m = 0) = 1 - P_1(0) = 1 - \frac{(2 \cdot 1)^0 e^{-2 \cdot 1}}{0!} =$$

$$= 1 - 0{,}1353 = 0{,}8647.$$

в) $P_7(m \leq 3) = P_7(0) + P_7(1) + P_7(2) + P_7(3) = \dfrac{(14)^0 e^{-14}}{0!} +$

$$+ \frac{(14)^1 e^{-14}}{1!} + \frac{(14)^2 e^{-14}}{2!} + \frac{(14)^3 e^{-14}}{3!} \approx 0{,}000474.$$

3.2.4. Середня густина хвороботворних мікробів в одному кубічному метрі повітря рівна 100. Береться на пробу 2 дм^3. повітря.

Знайти ймовірність того, що в ньому буде виявлено хоча б один мікроб.

Розв'язок.

І спосіб. Ймовірність того, що в 1 дм^3 повітря знаходиться мікроб рівна $p = \frac{100}{1000} = 0{,}1$. Тоді ймовірність події A – "в 2 дм^3 знаходиться хоч би 1 мікроб" з використанням формули Бернулі рівна:

$$P(A) = P_2(k \geq 1) = 1 - P_2(0) = 1 - C_n^0 p^0 q^{2-0} = 1 - q^2 = 1 -$$
$$-(1-p)^2 = 1 - 0{,}9^2 = 0{,}19.$$

ІІ спосіб. Згідно формули Пуассона, оскільки $\lambda = = n \cdot p = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$:

$$P(A) = P_2(k \geq 1) = 1 - P_2(0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-0,2} = 1 -$$
$$-0{,}8187 = 0{,}1813.$$

Незважаючи на те, що наближена формула Пуассона використовується тоді, коли n велике і $p \leq 0{,}1$, порівняння результату обчисленого за нею і за формулою Бернуллі дає непогане наближення.

3.2.5. В радіоапаратурі за 10000 годин роботи замінюють десять ламп. Потрібно:

а) підрахувати ймовірність того, що радіоапаратура не вийде з ладу за 1000 годин безперервної роботи;

б) визначити збільшення надійності радіоапаратури при наявності трьох дублюючих ланцюгів.

Розв'язок.

Ймовірність виходу з ладу радіоапаратури протягом години рівна $p = \frac{10}{10000} = 0{,}001$. Ця імовірність дуже мала. Перевіримо, чи для розв'язку можна використати теорему Пуассона. Обчислимо $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1 < 10$, (тут взято

n = 1000, оскільки використовуються 1000 годин). Отже, формулу Пуассона використовувати можна.

а) Отже, імовірність того, що в n = 1000 випробуваннях радіоапаратура не вийде з ладу (k = 0) – подія A, згідно формули Пуассона рівна:

$$P_{1000}(0) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = \frac{1}{1}e^{-1} = 0{,}36788\,.$$

Отже, імовірність безперервної роботи радіоапаратури за 1000 годин рівна $p = P_{1000}(0) = 0{,}36788$.

Надійність або імовірність безперервної роботи радіоапаратури – подія A, при наявності трьох дублюючих ланцюгів рівна сумі імовірностей трьох несумісних подій: $P(A) = = P_3(1) + P_3(2) + P_3(3)$, де P_3 (1) – імовірність того, що з трьох ланцюгів працює лише один, P_3 (2) – імовірність того, що з трьох ланцюгів працюють лише два, P_3 (3) – імовірність того, що з трьох ланцюгів працюють усі три. Дані імовірності обчислимо згідно формули Бернуллі, де n = 3, p = 0,36788, q = = 1 – p = 0,63212;

$$P_3(1) = C_3^1 p^1 q^{3-1} = 3\cdot 0{,}36788\cdot 0{,}63212^2 = 0{,}44099;$$

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q^{3-2} = 3\cdot 0{,}36788^2\cdot 0{,}63212 = 0{,}256645;$$

$$P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 0{,}36788^3 = 0{,}04979.$$

Остаточно, $P(A)$ = 0,44099 + 0,256645 + 0,04979 = 0,74743.

Таким чином, збільшення надійності радіоапаратури при наявності трьох дублюючих ланцюгів рівне ΔP = 0,74743 – – 0,36788 = 0,37955.

3.2.6. Яка ймовірність того, що в групі з 40 студентів ніхто не народився в травні? Обчислити цю імовірність за точною формулою і за наближеною формулою Пуассона.

Розв’язок.

Позначимо через A подію – “ніхто не народився в травні”. Ймовірність того, що будь-хто народиться в травні становить

$p = \dfrac{1}{12}$ (12 – кількість місяців). Отже, ймовірність того, що студент не народиться в травні рівна $q = 1 - p = 1 - \dfrac{1}{12} = \dfrac{11}{12}$.

Для обчислення $P(A)$ використаємо точну формулу Бернулі для $n = 40$, $k = 0$:

$$P(A) = P_n^k(A) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_{40}^0 \left(\frac{1}{12}\right)^0 \left(\frac{11}{12}\right)^{40} = \left(\frac{11}{12}\right)^{40} =$$

$= 0{,}0128994726.$

Оскільки $p = \dfrac{1}{12} = 0{,}083333 < 0{,}1$, а $\lambda = n \cdot p = 40 \times$ $\times 0{,}083333 = 3{,}333 < 10$, то можна скористатись наближеною формулою Пуассона:

$$P(A) = P_n^k(A) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{3{,}333^0}{0!} e^{-3{,}333} = e^{-3{,}333} =$$

$= 0{,}0356733949.$

Як видно з розрахунків, результати відрізняються із-за недостатньо великого числа n для формули Пуассона.

3.2.7. Ймовірність настання деякої події A в кожному випробуванні постійна і дорівнює $p = 0{,}001$.

Знайти ймовірність настання цієї події m разів ($m = 4$) при 100 випробуваннях. Обчислення виконати з точністю до 0,0001 за формулами Бернуллі та Пуассона. Результати порівняти.

Розв’язок.

За умовою задачі $n = 100$; $m = 4$; $p = 0{,}001 << 0{,}1$. Необхідно обчислити $P_{100}(4)$. Дану імовірність обчислимо за:

а) точною формулою Бернуллі: $P_{100}(4) = C_{100}^4 (0{,}001)^4 \times$ $\times (0{,}999)^{96} = 0{,}000003562$.

б) за наближеною формулою Пуассона, оскільки число випробувань n = 100 достатньо велике, $p << 0{,}1$, $\lambda = np = 100 \cdot 0{,}001 = 0{,}1 < 10$.

$$P_{100}(4) = \frac{(0{,}1)^4 e^{-0{,}1}}{4!} = \frac{0{,}0001}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} e^{-0{,}1} \approx 0{,}00000377.$$

Як видно з обчислень, при n = 100 обидві формули дають практично один і той же результат P = 0,000004.

3.2.8. При розриві балону під час випробування на міцність утворилось 600 осколків, що рівномірно розподілились в області, площа якої 200 м^2. Всередині цієї області навмання вибирається підобласть площею 0,5 м^2. Визначити імовірність попадання в вибрану область не менше чотирьох осколків.

Розв’язок.

Імовірність попадання кожного осколка в підобласть рівна $p = \dfrac{0{,}5 м^2}{200 м^2} = 0{,}0025 << 1$, тобто дуже мала. Отже, маємо повторні незалежні випробування, імовірність настання події в яких дуже мала. Випробовується n = 600 осколків на можливість попадання в дану підобласть, причому n велике.

В задачі необхідно обчислити $P_{600}(k \geq 4)$. Події $(k \geq 4)$ і $(k < 4)$ є протилежними, тому $P_{600}(k \geq 4) + P_{600}(k < 4) = 1$, звідки $P_{600}(k \geq 4) = 1 - P_{600}(k < 4)$. Подія $(k < 4)$ є сумою несумісних подій: $(k < 4) = (k = 0) + (k = 1) + (k = 2) + (k = 3)$. Отже, $P(k < 4) = P(k = 0) + P(k = 1) + P(k = 2) + P(k = 3)$, де кожний з доданків обчислюється за формулою Пуассона, оскільки $\lambda = np = 600 \cdot 0{,}0025 = 1{,}5210 < 10$.

$$P_n^k(A) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ де } \lambda{=}1{,}5;$$

$$P_{600}(0) = \frac{(1{,}5)^0}{0!} e^{-1{,}5} \approx 0{,}22313;$$

$$P_{600}(1) = \frac{(1,5)^1}{1!} e^{-1,5} = 0,3347\,;$$

$$P_{600}(2) = \frac{(1,5)^2}{1 \cdot 2} e^{-1,5} = 0,2510\,;$$

$$P_{600}(3) = \frac{(1,5)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^{-1,5} = 0,12551\,.$$

Таким чином,

$$P_{600}(k \geq 4) = 1 - \left[P(0) + P(1) + P(2) + P(3)\right] = 1 -$$
$$- (0,22313 + 0,3347 + 0,2510 + 0,12551) = 1 - 0,9343 = 0,0657.$$

3.2.9. Скільки талановитих студентів повинно навчатись в магістратурі, якщо імовірність мати хоч би одного талановитого студента в магістратурі, є не меншою 0,995?

Розв'язок.

Використаємо теорему про суму імовірностей протилежних подій:

$P_n(k = 0) + P_n(k \geq 1) = 1$, звідки $P(A) = P_n(k \geq 1) = 1 - P_n(k = 0)$.

Оскільки наявність таланту у людини є досить рідкісною подією, для обчислення $P_n(k = 0)$ скористуємось формулою Пуассона: $P_n(0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$, де $\lambda = np$ –середнє число появ події в n випробуваннях.

Отже, $P(A) = 1 - e^{-\lambda} \geq 0,995$ за умовою задачі, звідси $e^{-\lambda} \leq 1 - 0,995 = 0,005$ або $e^{\lambda} \geq 200$. Прологарифмувавши вираз, отримуємо, $\lambda \geq 5,298$ і оскільки число студентів є цілим числом, то $\lambda \geq 5$.

3.2.10. Довести, що для найпростішого потоку подій $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{p(k\ge 1)}{p(k=1)}=1$.

Розв'язок.

Використаємо теорему про суму імовірностей протилежних подій: $P_t(k=0)+P_t(k\ge 1)=1$. Тоді

$$\lim_{t\to 0}\frac{P(k\ge 1)}{P(k=1)}=\lim_{t\to 0}\frac{1-P_t(k=0)}{P(k=1)}*=$$

Підставимо формулу $P_t(k)=\dfrac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$

$$*=\lim_{t\to 0}\frac{1-\dfrac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!}}{\dfrac{(\lambda t)^1 e^{-\lambda t}}{1!}}=\lim_{t\to 0}\frac{(1-e^{-\lambda t})}{\lambda t e^{-\lambda t}}=\ **$$

Домножимо чисельник і знаменник на $e^{\lambda t}$

$$=**\lim_{t\to 0}\frac{(e^{-\lambda t}-1)}{\lambda t e^{-\lambda t}}=***$$

Для знаходження границі використаємо правило Лопіталя

$$***=\lim_{t\to 0}\frac{\lambda e^{\lambda t}}{\lambda}=\lim_{t\to 0}e^{\lambda t}=e^0=1.$$

3.2.11. Штучний супутник Землі, який рухається по своїй орбіті протягом n діб, може випадково зіткнутися з метеоритами. Середнє число метеоритів, які стикаються з супутником протягом доби, рівне . Метеорит, що зіткнувся з супутником, пробиває його оболонку з ймовірністю p_0. Метеорит, що пробив оболонку супутника з ймовірністю p_1, виводить з ладу апаратуру супутника.

Знайти ймовірність того, що:

а) за час польоту супутника його оболонку буде пробито;

б) за час польоту його апаратура буде виведена з ладу;

в) оболонка супутника пробита, а апаратура буде діяти.

Розв'язок.

Зіткнення метеоритів з супутником Землі утворюють пуассонівський потік подій. Тому число подій, що попадає в будь-який інтервал часу $(t_0, t_0 + \tau)$, розподілене за законом Пуассона:

$P_k = \dfrac{a^k}{k!} e^{-a}$, де a – математичне сподівання числа подій, що попадають в інтервал часу. Будемо вважати потік елементарним, оскільки в задачі не задана щільність потоку зіткнень, а лише її середнє число.

Математичне сподівання числа метеоритів, що стикаються з супутником протягом n діб, рівне $a = \lambda n$; математичне сподівання числа метеоритів, що пробивають оболонку рівне $a_0 = \lambda n p_0$; математичне сподівання числа метеоритів, що пробивають оболонку і виводять апаратуру з ладу рівне $a_1 = \lambda n \cdot p_0 \cdot p_1$.

Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що за час польоту супутника його оболонку буде пробито; B – апаратура буде виведена з ладу; C – оболонка супутника пробита, а апаратура буде діяти.

Число наступання подій (зіткнень) може бути $k = 0,1,2,\ldots$ Події ($k = 0$) і ($k \geq 1$) – протилежні, тому $P(k = 0) + P(k \geq 1) = 1$, звідки $P(k \geq 1) = 1 - P(k = 0)$, де $P(k = 0)$ обчислюється за формулою Пуассона.

Отже, а) $P(A) = 1 - \dfrac{a_0^0}{0!} e^{-a_0} = 1 - e^{-\lambda n p_0}$;

б) $P(A) = 1 - \dfrac{a_1^0}{0!} e^{-a_1} = 1 - e^{-\lambda n p_0 p_1}$.

в) Подія A рівна сумі двох несумісних подій B і C: $A = B + C$, тому $P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C)$, звідки $P(C) = P(A) - P(B) = 1 - e^{-\lambda n p_0} - (1 - e^{-\lambda n p_0 p_1}) = e^{-\lambda n p_0 p_1} - e^{-\lambda n p_0}$.

3.2.12. В таблиці випадкових чисел цифри згруповані по дві. Знайти наближене значення ймовірності того, що серед 100 пар чисел пара 09 зустрінеться не менше двох разів.

Розв'язок.

Нехай подія A полягає в тому, що серед 100 пар випадкових чисел пара "09" зустрінеться не менше двох разів. Тоді імовірність цієї події $P(A) = P_{100}^{2}(2 \le k \le 100)$ знаходимо з рівняння, що виражає суму імовірностей повної групи подій: $P_{100}(0 \le k \le 1) + P_{100}(2 \le k \le 100) = 1$. Отже, $P(A) =$ $= P_{100}(2 \le k \le 100) = 1 - P_{100}(0 \le k \le 1)$.

Імовірність появи пари "09" в кожному випробуванні рівна:

$P(A_1) = P(A_1' \cdot A_1'') = P(A_1') \cdot P(A_1'') = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$, де A_1' і A_1'' – незалежні події, що полягають у появі цифр "0" і "9" відповідно, імовірності яких рівні $\dfrac{1}{10} = 0{,}1$.

Отже, необхідно обчислити імовірність появи події в n випробуваннях (n – велике) і малій імовірності ($p \le 0{,}01$) настання події в кожному випробуванні. Обчислимо параметр λ: $\lambda = np = 100 \cdot 0{,}01 = 1 < 10$.

Отже, для обчислення імовірності $P_{100}(0 \le k \le 1) =$ $= P_{100}^{0}(A) + P_{100}^{1}(A)$ можна скористатись формулою Пуассона: $P_n^k(A) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$; звідки $P_{100}^{0}(A) = \dfrac{1^0}{0!} e^{-1} = e^{-1}$; $P_{100}^{1}(A) =$ $= \dfrac{1}{1!} e^{-1} = e^{-1}$. Остаточно, $P(A) = 1 - 2e^{-1} = 0{,}26424$.

3.2.13. Нехай відомо, що при наборі книги є стала ймовірність p = 0,0001 того, що будь-яку букву буде набрано неправильно. Після набору гранки читає коректор, який виявляє кожну помилку з імовірністю q = 0, 9. Після коректора їх читає автор, який виявляє кожну помилку, що залишилася з імовірністю r = 0,5. Знайти імовірність того, що в книзі з 100000 друкованих знаків залишиться після цього не більше 5 помилок.

Розв'язок.

Нехай B – означає подію, що в 100000 друкованих знаках буде не більше 5 помилок. Подія A – "будь-яку невірно набрану букву не буде виявлено" рівна добутку подій A_1, A_2, A_3: $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, де подія A_1 – будь-яка буква набрана неправильно, імовірність якої $p(A_1) = p_1 = 0{,}0001;$ подія A_2 – кожна помилка невиявлена коректором і $p(A_2) = 1 - q = = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$ подія A_3 – кожна помилка, що залишилась, не виявлена автором і $p(A_3) = 1 - r = 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$ Оскільки події A_1, A_2, A_3 незалежні, то $P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \times \times P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}0001 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}000005$.

Оскільки $p = P(A) = 0{,}000005 < 0{,}1$, тобто імовірність настання події A в кожному випробуванні дуже мала, а число випробувань n = 100000 дуже велике, то для обчислення імовірностей застосуємо формулу Пуассона, оскільки $\lambda = np = 100000 \cdot 0{,}000005 = 0{,}5 < 10.$

Імовірність події B рівна сумі імовірностей несумісних подій: $P(B) = P_{100000}(0) + P_{100000}(1) + P_{100000}(2) + P_{100000}(3) + + P_{100000}(4) + P_{100000}(5)$, де кожний з доданків обчислюється згідно формули Пуассона:

$$P_{100000}(0) = \frac{(0{,}5)^0\, 0!}{} e^{-0{,}5} = e^{-0{,}5};$$

$$P_{100000}(1) = \frac{(0{,}5)^1}{1!} e^{-0{,}5} = \frac{1}{2} e^{-0{,}5};$$

$$P_{100000}(2) = \frac{(0{,}5)^2}{2!} e^{-0{,}5} = \frac{1}{8} e^{-0{,}5};$$

$$P_{100000}(3)=\frac{(0,5)^3}{3!}e^{-0,5}=\frac{1}{48}e^{-0,5};$$

$$P_{100000}(4)=\frac{(0,5)^4}{1!}e^{-0,5}=\frac{1}{384}e^{-0,5};$$

$$P_{100000}(5)=\frac{(0,5)^5}{1!}e^{-0,5}=\frac{1}{3840}e^{-0,5}.$$

$$P(B)=e^{-0,5}+\frac{1}{2}e^{-0,5}+\frac{1}{8}e^{-0,5}+\frac{1}{48}e^{-0,5}+\frac{1}{384}e^{-0,5}+$$

$$+\frac{1}{3840}e^{-0,5}\approx 0,99991.$$

3.2.14. Довести, що сума ймовірностей числа появи події в незалежних випробуваннях, розрахованих за законом Пуассона, рівна 1.

Припускається, що випробування проводяться нескінченне число разів.

Розв'язок.

Згідно формули Пуассона $P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, тоді сума ймовірностей рівна:

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_n(k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Розкладемо функцію λ^x згідно формули Маклорена в ряд, який збігається:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

Поклавши тут $x=\lambda$, ряд набуде вигляду:

$$e^{\lambda}=1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Підставимо $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ в суму імовірностей:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

3.2.15. Пристрій складається з великого числа незалежно працюючих елементів з однаковою (дуже малою) ймовірністю відмови кожного елементу за час *T*.

Знайти середнє число елементів, що не спрацювали за час *T*, якщо ймовірність того, що за цей час відмовить хоча б один елемент, рівна 0, 98.

Розв'язок.

Події $(k \geq 1)$ – "не спрацював хоч би один пристрій" і $(k = 0)$ – "всі пристрої спрацювали" є протилежними і утворюють повну групу подій. Тому сума їх імовірностей рівна 1: $P(k = 0) + P(k \geq 1) = 1$, тоді $P(k = 0) = 1 - P(k \geq 1) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$. Оскільки згідно умови задачі ймовірність відмови пристрою дуже мала, а число елементів *n* є дуже велике число, то можна скористуватися формулою Пуассона для подій, що рідко трапляються: $P_n^k(A) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, тому $P_n^0(A) = \dfrac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 0{,}02$. Отже, $e^{-\lambda} = \dfrac{1}{0{,}02} = 50$. Прологарифмуємо вираз: $\ln e^{-\lambda} = \ln 50$, звідки $\lambda = 3{,}912 \approx 4$. Оскільки λ – середнє число подій, що відбуваються за одиничний інтервал часу *T*, то $\lambda = 4$ – це середнє число елементів, що не спрацювали.

3.2.16. Під час виконання завдання 200 блоків системи знаходиться в завантаженому стані, 250 – в середньому, 500 – в слабо завантаженому режимі. Ймовірність відмови кожного блоку рівна відповідно 0,0075; 0,001; 0,002.

Скільки треба взяти запасних блоків, щоб замінити блоки, що відмовили, з ймовірністю не меншою 0,9 (можливістю відмови блоків, поставлених заново, для простоти можна знехтувати)?

Розв'язок.

Нехай A подія, імовірність якої задана. Оскільки імовірності настання події (відмови) малі, а число випробувань n велике, обчислимо параметр $\lambda = \sum p_i n_i = 0{,}0075 \cdot 200 + 0{,}002 \cdot 250 + 0{,}002 \cdot 500 = 3 < 10$. Отже, для обчислення імовірностей можна скористуватись формулою Пуассона: $P_n^k(A) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Відмовити може така кількість блоків: 0 – подія A_0, 1 – подія A_1, 2 – подія A_2, …i – подія A_i, …k – подія A_k. Оскільки всі ці події несумісні, то $A = A_0 + A_1 + A_{2\ldots} + \ldots A_{i\ldots} + \ldots A_k$ і $P(A) = P(A_0 + A_1 + A_{2\ldots} + \ldots A_{i\ldots} + \ldots A_k) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_i)\ldots + \ldots P(A_k)$ – як імовірність суми несумісних подій. За умовою задачі $P(A) \geq 0{,}9$. Таким чином, необхідно послідовно обчислити імовірності подій $P_n^k(A_i)$ для k = 0,1,2... при λ=3 і сумувати їх доти, поки сума стане не меншою 0,9. Необхідні дані занесені в таблицю:

k	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	0,049787	0,149361	0,224041	0,224041	0,168030	0,100819	0,050409
$\sum_{i<k} Pi$	0,049787	0,19915	0,42319	0,64723	0,81526	0,91608	0,96649

Як видно з таблиці, мінімальне число запасних блоків (число k), що задовольняє даній умові, рівне 5.

3.3. Локальна теорема Лапласа

Якщо число випробувань n достатньо велике і імовірність появи події A в кожному випробуванні не мала $p \in (0;1)$, а число $npq > 10$, то використовують теореми Муавра-Лапласа, які дають добре наближення при $n > 40$. Коли треба більш висока точність, то дані теореми використовують для $n \geq 100$.

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Якщо імовірність p появи події A в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці ($0 < p < 1$), то імовірність $P_n(k)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях рівно k разів, приблизно рівна (тим точніше, чим більше n) значенню функції

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \qquad (3.3.1)$$

при $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Функція Гауса $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (3.3.2) занесена в таблиці і має такі властивості: а) $\varphi(x)$ – визначена на всій числовій осі ($x \in k$); б) $\varphi(x)$ – парна, $\varphi(-x) = \varphi(x)$; в) $\varphi(x)$ спадає при $x > 0$; г) $\varphi(x) = 0{,}0001$ при $x \geq 4$.

Задачі

3.3.1. Монету кинуто $2N$ разів (N – велике!).

Знайти ймовірність того, що "герб" випаде рівно N разів.

Розв'язок.

Маємо повторні незалежні випробування, в кожному з яких імовірність появи "герба" рівна $p = \dfrac{1}{2}$, отже $q = 1 - p =$ $= \dfrac{1}{2}$ – імовірність непояви "герба". Оскільки за умовою число випробувань $n = 2N$ – велике, для обчислення даної імовірності скористуємось локальною формулою Лапласа:

$$P_n^k(A)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\text{ де } x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.\text{ Отже,}$$

$$P_{2N}(N)=\frac{1}{\sqrt{2N\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\varphi\left(\frac{N-2N\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{2N\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}}\varphi(0)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}}\cdot 0{,}3989=\frac{0{,}5642}{\sqrt{N}}.$$

3.3.2. Монету кинуто $2n$ разів. Знайти ймовірність того, що "герб" випаде на m разів більше, ніж напис.

Розв'язок.

Імовірність випадання "герба" і "напису" рівна $p=\frac{1}{2}$. Найімовірніше число випадань "напису" в $2n$ випробуваннях рівна $k_0=2n\cdot\frac{1}{2}=n$. Необхідно обчислити імовірність того, що в $2n$ випробуваннях "герб" випаде $k=k_0+m=n+m$. Використаємо локальну формулу Муавра-Лапласа:

$$P_{2n}(n+m)=\frac{1}{\sqrt{2n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\varphi\left(\frac{n+m-2n\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{2n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right)=\sqrt{\frac{2}{n}}\varphi\left(m\sqrt{\frac{2}{n}}\right).$$

3.3.3. В урні містяться порівну білі і чорні кулі. В одному з експериментів при 10000 витягувань з поверненням було витягнуто 5011 білих і 4989 чорних куль: а) яка ймовірність такого результату експерименту? б) якщо повторити цей експеримент, то яка імовірність того, що дістанемо більше по модулю відхилення числа витягнутих білих куль за найімовірніше число?

Розв’язок.

а) Необхідно обчислити імовірність події *A*, яка полягає в тому, що при *n* = 10000 повторних незалежних випробуваннях (оскільки кулі повертають назад в урну, то імовірність кожного витягання-випробування стала) було витягнуто 5011 білих або 4989 чорних куль. Але в урні білих і чорних куль порівну, тому імовірність витягання білої чи чорної кулі рівна 0,5.

Імовірність події *A* обчислимо за локальною формулою Лапласа:

$$P_n^k(A) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ де}$$

$n = 10000, p = 0{,}5; q = 0{,}5$. Нехай $k = 5011$, тоді

$$P_{10000}^{5011}(A) = \frac{1}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \cdot \varphi\left(\frac{5011 - 10000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) =$$

$$= 0{,}02\varphi(0{,}22) = 0{,}02 \cdot 0{,}3894 = 0{,}007788.$$

б) Спочатку обчислимо найімовірніше число появи білих куль в 10000 випробуваннях: $np - q \le k_0 \le np + p$ або в числах: $10000 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 \le k_0 \le 10000 \cdot 0{,}5 + 0{,}5$. Отже, $k_0 = 5000 = np$.

Необхідно обчислити імовірність того, що величина відхилення Δ більша за величину відхилення отриману в експерименті: $\Delta > |5011 - 5000|$, тобто $\Delta > 11$.

Перетворимо вираз $P(|m - np| < \Delta) = P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \frac{\Delta}{n}\right) =$

$$= P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Таким чином, прийшли до відомої формули імовірності величини відхилення частоти від імовірності настання події в кожному випробуванні. Підставивши необхідні дані: $\varepsilon = \dfrac{\Delta}{n} =$

$= \dfrac{11}{10000} = 0{,}0011;\ \ m = 5011;\ \ np = 5000;\ \ p = 0{,}5;\ \ q = 0{,}5$ у

формулу, отримаємо: $P\left(\left|5011 - 5000\right| < 11\right) = 2\Phi\left(0{,}0011\sqrt{\dfrac{10000}{0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) =$

$= 2\Phi\left(0{,}22\right) = 2 \cdot 0{,}087 = 0{,}1742.$

3.3.4. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі рівна 0,01.

Знайти наближене значення ймовірності того, що при 100 пострілах буде не менше 3 влучень.

Розв'язок.

p = 0,01; q = 1 – 0,01 = 0,99; $3 \le k \le 100;$ $n = 100;$ $P_{100}(3 \le k \le 100) = ?$

І спосіб. Оскільки n не є малим, скористуємось інтегральною теоремою Лапласа:

$$P_{100}(3 \le k \le 100) = \Phi\left(\frac{100 - 100 \cdot 0{,}01}{\sqrt{100 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}}\right) - \Phi\left(\frac{3 - 100 \cdot 0{,}01}{\sqrt{100 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}}\right) =$$

$= \Phi(39) - \Phi(2{,}01) = 0{,}5 - 0{,}4777 = 0{,}0223.$

ІІ спосіб. Скористуємось формулою Пуассона, оскільки $\lambda = np = 100 \times 0{,}01 = 1 \lhd 10.$

Тоді $P_{100}(3 \le k \le 100) = 1 - \left[P_{100}(k = 0) + P_{100}(k = 1) +\right.$

$\left.+ P_{100}(k = 2)\right]$, де $P_{100}(k = 0) = \dfrac{1}{0!}e^{-1} = 1 \times 0{,}367888;$

$$P_{100}(k = 1) = \frac{1!}{1!}e^{-1} = 1 \cdot 0{,}36788;$$

$$P_{100}(k = 2) = \frac{1^2}{2!}e^{-1} = \frac{1}{2}0{,}36788.$$

Отже, $P_{100}(3 \le k \le 100) = 1 - (0{,}36788 + 0{,}36788 +$

$+\frac{1}{2}0{,}36788)=0{,}0803$

III спосіб. Скористуємось точною формулою Бернуллі, де $P_{100}(k=0)=C_{100}^{0}(0{,}01)^{0}0{,}99^{100-0}=0{,}36603;$

$P_{100}(k=1)=C_{100}^{1}(0{,}01)^{1}(0{,}99)^{100-1}=100\cdot 0{,}01\cdot 0{,}36973=0{,}36973$

$P_{100}(k=2)=C_{100}^{2}(0{,}01)^{2}(0{,}99)^{100-2}=0{,}18486$

Тоді $P_{100}(3\le k\le 100)=1-\left[P_{100}(k=0)+P_{100}(k=1)+\right.$ $\left.+P_{100}(k=2)\right]=1-(0{,}36603+0{,}36973+0{,}18486)=1-$ $-0{,}92062=0{,}07938.$

Як видно з обчислень, формула Пуассона дає дуже близькі результати до точної формули Бернуллі. Результат, отриманий з інтегральної теореми Лапласа дещо відрізняється внаслідок недостатньо великого числа *n*.

3.4. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Теорема. Якщо імовірність *p* появи події *A* в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці ($0<p<1$), то імовірність $P_n(k_1\le k\le k_2)$ того, що подія *A* з'явиться в *n* випробуваннях від k_1 до k_2 разів, приблизно рівна означеному інтегралу

$$P_n(k_1\le k\le k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x_2}e^{-\frac{z^2}{2}}dz-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x_1}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi(x_2)-\Phi(x_1), \qquad (3.4.1)$$

де $x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$; $x_2=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ (3.4.2) – функція Лапласа занесена в таблиці і має такі властивості: а) $\Phi(x)$ визначена на всій числовій осі; б) $\Phi(x)$ – непарна – $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; в) $\varphi(x)$ зростає при $x > 0$ до 0,5 і спадає при $x < 0$ до –0,5; г) для $x > 5$ $\Phi(x)\approx 0{,}5$; для $x < -5$ $\Phi(x)\approx -0{,}5$.

Задачі

3.4.1. В радіоапаратурі, що містить 300 ламп, застосовуються лампи з ймовірністю придатності 80%. Знайти ймовірність того, що 400 таких ламп достатньо для того, щоб повністю укомплектувати цю радіоапаратуру.

Розв'язок.

Згідно умови задачі p = 0,80 (80%), q = 0,20, n = 400. Необхідно обчислити імовірність події, яка полягає в тому, що з 400 ламп придатними виявиться від 300 до 400 ламп. Згідно інтегральної формули Лапласа:

$$P_{400}(300\le k\le 400)=\Phi\left(\frac{400-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)-\Phi\left(\frac{300-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=$$

$$=\Phi(10)+\Phi(2{,}5)=0{,}5+0{,}4938=0{,}9938.$$

3.4.2. Ймовірність того, що із взятого яйця вилупиться півень, дорівнює 0,5. В інкубатор заклали 38 416 яєць.

Визначити ймовірність того, що серед виведених курчат число курочок буде відрізнятись від найбільш ймовірного їх числа за абсолютною величиною не більше, ніж на 208 шт.

Вказівка: використати інтегральну теорему Лапласа.

Розв'язок.

Згідно умови задачі n = 38416; p = 0,5; $q = 1 - p$ = 0,5; ε = = 2,08. Необхідно обчислити $P(|k-k_0|\le 208)$. Обчислимо найімовірніше число k_0:

$np - q \le k_0 \le np + p$;

$38416 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 \le k_0 \le 38416 \cdot 0{,}5 + 0{,}5$;

$19207{,}5 \le k_0 \le 19208{,}5$.

Отже, $k_0 = 19208$, тому необхідно обчислити імовірність події $k_0 - 208 \le k \le k_0 + 208$, або $19000 \le k_0 \le 19416$, використавши інтегральну формулу Лапласа:

$$P_{38416}(19000 \le k \le 19416) = \Phi\left(\frac{19416 - 38416 \cdot 0{,}5}{\sqrt{38416 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{19000 - 38416 \cdot 0{,}5}{\sqrt{38416 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) = \Phi\left(\frac{208}{98}\right) - \Phi\left(-\frac{208}{98}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{208}{98}\right) = 2\Phi(2{,}1224) = 2 \cdot 0{,}4831 = 0{,}9662.$$

3.4.3. В результаті перевірки якості підготовленого для посіву зерна було встановлено, що 90 % зернин проростуть.

Визначити ймовірність того, що серед відібраних 1000 зерен число пророслих буде відрізнятись від найбільш ймовірного їх числа не більше, ніж на 130 шт. в ту чи іншу сторону.

Вказівка. Прийняти найімовірніше число появ події *A* рівним математичному сподіванню числа появ цієї події.

Розв’язок.

p = 0,9 (90%); n = 1000; ε = 130; $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

$P_{1000}(M(X) - 130 \le k \le M(X) + 130)$ -?

Використаємо інтегральну формулу Лапласа

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Оскільки $M(X) = np = 0{,}9 \cdot 1000 = 900$, то $k_1 = 900 -$ $- 130 = 770$; $k_2 = 900 + 130 = 1030$; але оскільки n = 1000, то $k_2 = 1000$.

$$P_n(770 \le k \le 1000) = \Phi\left(\frac{1000 - 1000 \cdot 0{,}9}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{770 - 1000 \cdot 0{,}9}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) = \Phi\left(\frac{100}{3\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(-\frac{130}{3\sqrt{10}}\right) = \Phi(10{,}5) +$$

$$+ \Phi(13{,}7) \approx 0{,}5 + 0{,}5 = 1.$$

3.4.4. В результаті перевірки якості підготовленого для посіву зерна було встановлено, що 90 % зернин проростуть.

Визначити:

1) ймовірність того, що серед відібраних і засіяних 1000 зернин проросте:

а) від 700 до 740 шт.;

б) від 880 до 920 шт.;

Дати пояснення значній різниці в результатах в пп.. а) і б), хоч в обидвох випадках різниці між верхньою і нижньою межами однакові.

2) ймовірність того, що серед відібраних 1000 зерен число пророслих буде відрізнятись від найбільш ймовірного числа їх не більше, ніж на 30 шт. в ту чи іншу сторону.

Розв’язок.

Використаємо інтегральну теорему Лапласа:

1.а) $n = 1000$; $p = 0{,}9$; $q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$;

$k_1 = 700$; $k_2 = 740$;

$$P_{1000}(700 \le k \le 740) = \Phi\left(\frac{740 - 1000 \times 0{,}9}{\sqrt{1000 \times 0{,}9 \times 0{,}1}}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{700 - 1000 \times 0{,}9}{\sqrt{1000 \times 0{,}9 \times 0{,}1}}\right) = 0{,}5 - 0{,}5 = 0.$$

б) $P_{1000}(880 \le k \le 920) = \Phi\left(\frac{920 - 1000 \times 0{,}9}{\sqrt{1000 \times 0{,}9 \times 0{,}1}}\right) -$

$- \Phi\left(\frac{880 - 1000 \times 0{,}9}{\sqrt{1000 \times 0{,}9 \times 0{,}1}}\right) = \Phi\left(\frac{20}{3\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(-\frac{20}{3\sqrt{10}}\right) =$

$= 2\Phi(2{,}108) = 2 \times 0{,}4825 = 0{,}965.$

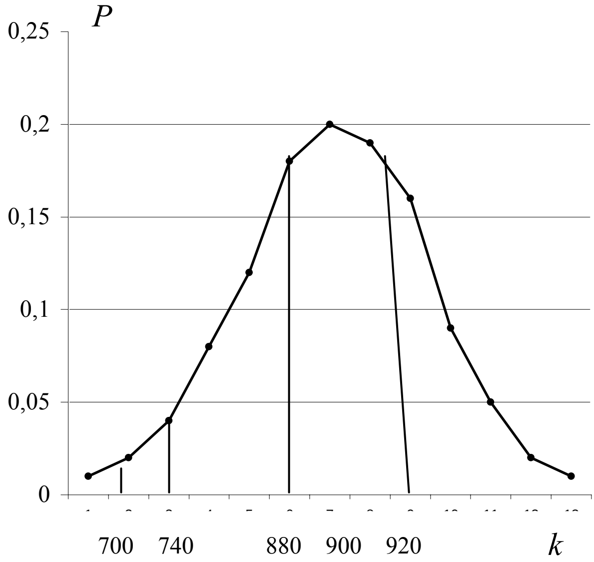


Рис. 3.4.1.

2. Обчислимо найімовірніше число k_0 настання події в 1000 випробуваннях: $np - q \le k_0 \le np + p$;

$1000 \times 0{,}9 - 0{,}1 \le k_0 \le 1000 \times 0{,}9 + 0{,}9$;

$899{,}9 \le k_0 \le 900{,}9$. Отже, $k_0 = 900$;

$M(X) = np = 1000 \times 0{,}9 = 900$.

$k_1 = 900 - 30 = 870$;

$k_2 = 900 + 30 = 930$.

$$P_{1000}(870 \le k \le 930) = \Phi\left(\frac{930 - 1000 \times 0{,}9}{\sqrt{1000 \times 0{,}9 \times 0{,}1}}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{870 - 1000 \times 0{,}9}{\sqrt{1000 \times 0{,}9 \times 0{,}1}}\right) = \Phi\left(\frac{30}{3\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(-\frac{30}{3\sqrt{10}}\right) =$$

$$= 2\Phi(3{,}1623) = 2 \times 0{,}499178 = 0{,}99845.$$

У випадку а) інтервал знаходження випадкової величини X суттєво віддалений від $M(X)$ або k_0 = 900. У випадку б) $M(X)$ і k_0 знаходяться у центрі заданого інтервалу. На графіку це відображається так (рис. 3.4.1).

3.4.5. За технічними умовами діаметр валиків, виготовлених на автоматичному верстаті, повинен бути не меншим 37.8 мм. і не більшим 37,9 мм. Верстат виробляє 98 % валиків, які відповідають встановленим стандартам.

Визначте ймовірність того, що серед 900 виготовлених валиків бракованих буде:

а) від 3% і більше;

б) від 2% і менше.

Розв'язок.

а) Нехай A – шукана подія. Обчислимо нижню межу інтервалу k_1, в якому за умовою можуть знаходитись браковані валики: k_1 = 0,03 $\cdot$ 900 = 27, верхня межа рівна кількості k_2 = 900 валиків. Імовірність шуканої події A – це імовірність того, що в n = 900 повторних незалежних випробуваннях в кожному з яких імовірність настання події – появи бракованого валика постійна і рівна p = 1 – 0,98 = 0,02. Число появи бракованих валиків знаходиться в межах від 27 до 900 разів. Цю імовірність обчислимо за інтегральною теоремою Лапласа:

$$P(k_1 \le k \le k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{900 - 900 \cdot 0{,}02}{\sqrt{900 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}}\right) - \Phi\left(\frac{27 - 900 \cdot 0{,}98}{\sqrt{900 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}}\right) = \Phi\left(\frac{882}{4{,}2}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{27-18}{4{,}2}\right) = 0{,}5 - \Phi(2{,}1429) = 0{,}5 - 0{,}4839 = 0{,}0161.$$

б) Нехай A – шукана подія, яка полягає в тому, що число бракованих валиків серед 900 знаходиться в межах від $k_1 = 0$ до $k_2 = 900 \cdot 0{,}02 = 18$.

Згідно інтегральної теореми Лапласа ця імовірність рівна:

$$P(0 \le k \le 18) = \Phi\left(\frac{18 - 900 \cdot 0{,}02}{\sqrt{900 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{0 - 900 \cdot 0{,}002}{\sqrt{900 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}}\right) = \Phi(0) - \Phi(-4{,}2857) =$$

$$= 0 + 0{,}49999 \approx 0{,}5.$$

3.4.6. Нехай ${}_N$ – сумарне число появ “5” і “6” в N підкиданнях гральної кості. При $N = 1800$ знайти ймовірність того, що ${}_N \ge 620$.

Розв’язок.

Імовірність $P(\eta_i)$ – сумарного числа появ “5” і “6” в кожному i-тому підкиданні дорівнює сумі імовірностей несумісних подій – появи “5” (подія B) або появи “6”, а (подія C):

$$P(\eta_i) = P(B) + P(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \text{ тоді } q(\eta_i) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Тоді шукану імовірність обчислюємо за інтегральною теоремою Лапласа:

$$P(620 \le \eta_n \le 1800) = \Phi\left(\frac{1800 - 1800 \cdot \frac{1}{3}}{1800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}\right) - \Phi\left(\frac{620 - 1800 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{1800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right) =$$

$$= \Phi(60) - \Phi(1) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587.$$

3.4.7. Ймовірність проростання насіння дорівнює $p = 0{,}85$.

Визначити, скільки потрібно посіяти зерен n, щоб з ймовірністю 0,999 можна було стверджувати, що число пророслих насінин буде відрізнятись від найбільш ймовірного числа їх m_0 не більше, ніж на 300 шт.

Розв’язок.

Використаємо інтегральну теорему Лапласа, поклавши $p = 0{,}85$; $q = 1 - p = 0{,}15$; $P = 0{,}999$;

$$m_0 = np = 0{,}85n;$$

$$k_1 = m_0 - 300 = 0{,}85n - 300;$$

$$k_2 = m_0 + 300 = 0{,}85n + 300.$$

Тоді $P_n\left(0{,}5n - 300 \le k \le 0{,}5n + 300\right) = *$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0{,}85n + 300 - 0{,}5n}{\sqrt{n \times 0{,}85 \times 0{,}15}} = \frac{300}{\sqrt{n \times 0{,}85 \times 0{,}15}};$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0{,}5n - 300 - 0{,}85n}{\sqrt{n \times 0{,}85 \times 0{,}15}} = -\frac{300}{\sqrt{n \times 0{,}85 \times 0{,}15}}$$

$$= *\Phi\left(\frac{300}{\sqrt{n \times 0{,}85 \times 0{,}15}}\right) - \Phi\left(-\frac{300}{\sqrt{n \times 0{,}5 \times 0{,}15}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{300}{\sqrt{n \times 0{,}85 \times 0{,}15}}\right) = 0{,}999.$$

Отже, $\Phi\left(\frac{300}{\sqrt{n \times 0{,}85 \times 0.15}}\right) = \frac{0{,}999}{2} = 0{,}4995.$

З таблиць інтегральної функції знаходимо значення $t =$ $= 3{,}30$, при якому $\Phi(t) = 0{,}4995$;

отже, $\frac{300}{\sqrt{n \times 0{,}85 \times 0{,}15}} = 3{,}30.$

Звідси, $n = \dfrac{90000}{10 \times 89 \times 0{,}85 \times 0{,}15} = 64819$.

3.4.8. В таблиці випадкових чисел кожна цифра з'являється незалежно від інших з ймовірністю 0,1.

Скільки треба набрати таких випадкових чисел, щоб з ймовірністю 0,999 серед них з'явилось не менше 100 нулів.

Розв’язок.

За умовою імовірність того, що серед n випадкових чисел (n випробувань) буде не менше 100 нулів рівна 0,999:

$P_n(100 \le k \le n) = 0{,}999$.

Розпишемо цю імовірність згідно інтегральної теореми Лапласа, де імовірність появи нуля $p = 0{,}1$, тоді $q = 0{,}9$:

$$P_n(100 \le k \le n) = \Phi\left(\frac{n - 0{,}1n}{\sqrt{n \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right) - \Phi\left(\frac{1 - n \cdot 0{,}1}{\sqrt{n \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{100 - n \cdot 0{,}1}{0{,}3\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(0{,}3\sqrt{n}\right) - \Phi\left(\frac{100 - 0{,}1n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) =$$

$$= 0{,}5 - \Phi\left(\frac{100 - 0{,}1n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) = 0{,}999.$$

Оскільки $n > 100$, то $\Phi\left(0{,}3\sqrt{n}\right) = \Phi(30) \approx 0{,}5$. Отже, $\Phi\left(\dfrac{100 - 0{,}1n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) = 0{,}499.$

З таблиць інтегральної функції враховуючи її непарність знаходимо значення параметра $x = -3{,}1061$, при якому $\Phi(x) = -0{,}499$.

Отже, $\dfrac{100 - 0{,}1n}{0{,}3\sqrt{n}} = -3{,}1061$ або $100 - 0{,}1n = -3{,}1061 \times \times 0{,}3\sqrt{n}$.

Спрощуючи, отримуємо рівняння $n - 9{,}3183\sqrt{n} - 1000 = 0$ розв’язок, якого $\sqrt{n} = 36{,}6233$. Отже, n = 1342.

3.4.9. По каналу зв'язку передаються повідомлення з нулів і одиниць. Через перешкоди ймовірність правильної передачі знаку рівна 0,55. Для підвищення ймовірності правильної передачі кожен знак повідомлення повторюють n разів. Вважають, що послідовності з n прийнятих знаків в повідомленні відповідають знаку, який складає в ній більшість.

а) Знайти ймовірність правильної передачі одного знаку при n-кратному повторенні, якщо $n = 5$.

б) Підібрати n так, щоб імовірність правильної передачі знаку була не меншою за 0,99.

Розв’язок.

а) Нехай подія A полягає в правильності передачі знаку.

Переданий знак приймається за “нуль” чи “одиницю”, якщо в послідовності з n знаків він зустрічається більше, ніж $\frac{n}{2}$ рази і є цілим числом. Тобто, якщо $n = 5$, то перше ціле число $k_1 \geq \frac{n}{2} = \frac{5}{2} = [2{,}5] = 3$ (подія A_1); друге ціле число k_2=4 (подія A_2), третє ціле число $k_3 = 4$ (подія A_3). Події A_1, A_2, A_3 несумісні, так, що $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$. Кожну з імовірностей обчислимо за формулою Бернуллі: $P_n^k = C_n^k p^k q^{n-k}$, де p = = 0,55; q = 0,45;

$$P(A_1) = P_5^3(A) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} 0{,}55^3 \cdot 0{,}45^2 = 0{,}336909;$$

$$P(A_2) = P_5^4(A) = C_5^4 p^4 q = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 0{,}55^4 \cdot 0{,}45 = 0{,}20589;$$

$$P(A_3) = P_5^5(A_3) = 0{,}55^5 = 0{,}050328.$$

Підставляємо отримані дані в формулу і отримуємо $P(A)$ = 0,336909 + 0,20589 + 0,050328 = 0,593127.

б) Нехай A – шукана подія, імовірність якої згідно умови більша 0,99: $P\left(\frac{n}{2} \le k \le n\right) \ge 0{,}99.$ Оскільки імовірність 0,99 дуже висока, то n, очевидно, принаймні не менше кількох десятків, так що для обчислення імовірності можна використати інтегральну теорему Муавра-Лапласа:

$$P\left(\frac{n}{2} \le k \le n\right) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де, $$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{n(1-p)}{\sqrt{npq}} = \frac{nq}{\sqrt{npq}} = \sqrt{\frac{nq}{p}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n \cdot 0{,}45}{0{,}55}} = 0{,}90453\sqrt{n}\ ;$$

$$x_1 = \frac{\frac{n}{2} - np}{\sqrt{npq}} = \frac{n - 2np}{2\sqrt{npq}} = \frac{n - 1{,}1n}{2\sqrt{n \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}45}} = -0{,}1005\sqrt{n}\ .$$

Таким чином, $\Phi(0{,}90453\sqrt{n}) + \Phi(0{,}1005\sqrt{n}) \ge 0{,}99$. При $n \ge 36$, $\Phi(0{,}90453\sqrt{n}) \approx \Phi(5{,}43) = 0{,}5$.

Отже, $\Phi(0{,}1005\sqrt{n}) \ge 0{,}99 - 0{,}5 = 0{,}49$ або $\Phi(x) \ge 0{,}49.$

З таблиць інтегральної функції знаходимо значення $x =$ $= 2{,}327$, при якому $\Phi(x) = 0{,}49$. Враховуючи те, що інтегральна функція $\Phi(x)$ зростаюча, $x \ge 2{,}327$.

Отже, $0{,}1005\sqrt{n} \ge 2{,}327$; $\sqrt{n} \ge 23{,}154$, $n \ge 536.$

Відповідь: $n \ge 536$.

3.4.10. Ймовірність появи позитивного результату в кожному з n дослідів рівна 0,9.

Скільки потрібно провести дослідів, щоб з ймовірністю $P \ge 0{,}98$ можна було очікувати, що не менше 150 дослідів дадуть позитивний результат.

Розв’язок.

Імовірність настання події в кожному з випробувань (дослідів) рівна $p = 0{,}9$, $q = 1 - p = 0{,}1$. Число випробувань (дослідів) $n > 150$, тобто велике, так що $npq = 150 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = = 13{,}5 > 9$. Оскільки в задачі задана $P_n(150 \le k \le n) \ge 0{,}98$, то для знаходження числа випробувань n використаємо інтегральну формулу Лапласа:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right);$$

$$0{,}98 \le \Phi\left(\frac{n - n \cdot 0{,}9}{\sqrt{n \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right) - \Phi\left(\frac{150 - n \cdot 0{,}9}{\sqrt{n \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right) = \Phi\left(\frac{n}{3\sqrt{n}}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{150 - n \cdot 0{,}9}{0{,}3\sqrt{n}}\right).$$

Оскільки $\Phi\left(\frac{n}{3\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)$ при $n > 150$ рівна $\Phi\left(\frac{\sqrt{150}}{3}\right) = 0{,}499972 \approx 0{,}5$, то $\Phi\left(\frac{150 - n \cdot 0{,}9}{0{,}3\sqrt{n}}\right) \le 0{,}5 - - 0{,}98 \le -0{,}48$. Користуючись таблицями інтегральної функції і враховуючи те, що інтегральна функція непарна і зростаюча, знаходимо значення параметра $t \le -2{,}054$ при якому $\Phi(t) \le -0{,}48$. При цьому застосовувалась лінійна інтерполяція.

Отже, $\frac{150 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}} \le -2{,}054$.

Після спрощень отримуємо квадратне рівняння відносно невідомої n:

$0{,}9n - 0{,}6162\sqrt{n} - 150 = 0$, розв’язавши яке, отримуємо $\sqrt{n} = 13{,}2568$ (від’ємне значення кореня відкидаємо, як неможливе). Остаточно $n = (13{,}2568)^2 = 175{,}74$.

Оскільки n – ціле число, то $n \geq 176$.

3.4.11. Проектується система з n = 6000 вузлів зв'язку, що може бездоганно працювати при відмові будь-яких k = 150 з них. Допустима ймовірність відмови системи 0,0015.

Чому дорівнює максимально допустима ймовірність p відмови окремого вузла? (відмови вузлів незалежні).

Розв’язок.

Випробовується n = 6000 вузлів зв’язку (n = 6000 повторних незалежних випробувань), імовірність відмови кожного з яких рівна p (імовірність настання події в кожному випробуванні рівна p). Якщо відмовить k < 150 вузлів, то система буде бездоганно працювати. Якщо $k \geq 150$, то система відмовить. Імовірність відмови, тобто імовірність настання події $P_{6000}(150 \leq k \leq 6000) = 0{,}0015$. Запишемо дану рівність згідно інтегральної теореми Муавра-Лапласа:

$$P_{6000}(151 \leq k \leq 6000) = \Phi\left(\frac{6000 - 6000 \cdot p}{\sqrt{6000pq}}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{150 - 6000p}{\sqrt{6000pq}}\right) = 0{,}0015.$$

Оскільки $\dfrac{6000 - 6000 \cdot p}{\sqrt{6000pq}} > \dfrac{150 - 6000p}{\sqrt{6000pq}}$, то при ймовірності відмови P < 0,99 значення $\Phi\left(\dfrac{6000 - 6000 \cdot p}{\sqrt{6000pq}}\right) =$

$$= \Phi\left(\frac{150 - 6000 \cdot 0{,}9}{\sqrt{6000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) \geq \Phi(5) = 0{,}5.$$

Отже, $0{,}5-\Phi\left(\frac{150-6000p}{\sqrt{6000\cdot p(1-p)}}\right)=0{,}0015$, $\quad p+q=1$; $q=1-p$.

Тому $\Phi\left(\frac{150-6000p}{\sqrt{6000\cdot p(1-p)}}\right)=0{,}5-0{,}0015=0{,}9985$ або $\Phi(t)=0{,}9985$. З таблиць інтегральної функції знаходимо t = = 2,96.

Отже, $\frac{150-6000p}{\sqrt{6000\cdot p(1-p)}}=2{,}96$.

Після спрощень отримуємо квадратне рівняння; $36052569{,}6p^2-1852569{,}7p+22500=0$, розв'язавши яке отримуємо p = 0,03169. Від'ємний корінь відкидаємо, як такий, що не задовільняє умову $p\geq 0$.

3.4.12. У великому місті за рік народжується 20000 дітей. Приймаючи за ймовірність народження хлопчика p = 0,51, знайти таке число t, щоб з ймовірністю 0,99 можна було б стверджувати, що серед народжених протягом року в цьому місті дітей число хлопчиків перевищує число дівчаток не менше, ніж на t.

Розв'язок.

Позначимо через n_x – кількість хлопчиків і $n_д$ – кількість дівчаток серед 20000. Отже n_x + $n_д$ = 20000, звідси n_x = 20000 – $n_д$; але $n_x-n_д\geq t$ – за умовою, або $20000-n_д-n_д\geq$ $\geq t\to 20000-2n_д\geq t$, звідси $n_д\leq\frac{20000-t}{2}$; $n_д\leq 10000-$ $-\frac{t}{2}$ і $n_д\geq 0$.

Параметр t знаходимо з умови заданої імовірності 0,99 виконання нерівності $(0 \le n_{\partial} \le 10000 - \frac{t}{2})$, використавши інтегральну функцію Лапласа:

$$P(0 \le n_{\partial} \le 10000 - \frac{t}{2}) = \Phi\left(\frac{10000 - \frac{t}{2} - 20000 \cdot 0{,}49}{\sqrt{20000 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}51}}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{0 - 20000 \cdot 0{,}49}{\sqrt{20000 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}51}}\right) = 0{,}99,$$

або

$$\Phi\left(\frac{200 - \frac{t}{2}}{70{,}6965}\right) - \Phi(-138{,}62065) = \Phi\left(\frac{200 - \frac{t}{2}}{70{,}6965}\right) + 0{,}5 = 0{,}99.$$

Отже, $\Phi\left(\frac{200 - \frac{t}{2}}{70{,}6965}\right) = 0{,}99$.

З таблиць інтегральної функції знаходимо значення $x =$ $= 2{,}327$ при якому $\Phi(x) = 0{,}49$; або $\frac{200 - \frac{t}{2}}{70{,}6965} = 2{,}327$. Звідси $t = 70{,}97 \approx 71$.

3.4.13. Керуюча ЕОМ обслуговує 1000 виробничих установок. Ймовірність того, що дана установка в даний момент часу потребує обслуговування дорівнює а) 0,1; б) 0,01.

Скільки каналів обслуговування r необхідно мати, щоб ймовірність наявності каналу для кожної установки, що потребує обслуговування в даний момент часу, була не меншою 0,9?

Розв’язок.

Каналів обслуговування може бути від 0 до r. Імовірність такої події за умовою задачі не менша 0,9: $P_{1000}(0 \le k \le r) \ge$ $\ge 0{,}9$. Згідно інтегральної теореми Лапласа

$$P_n(0 \le k \le r) = \Phi\left(\frac{r - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{r - np}{\sqrt{npq}}\right) -$$

$$- \Phi\left(-\frac{np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{r - np}{\sqrt{npq}}\right) + \Phi\left(\frac{np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Підставимо у дану формулу значення а) $n = 1000$, $p = 0{,}1$, $q = 1 - p = 0{,}9$, отримуємо:

$$\Phi(t) + \Phi\left(\frac{1000 \cdot 0{,}1}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right) \ge 0{,}9, \text{ де } t = \frac{r - 1000 \cdot 0{,}1}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}}.$$

Оскільки $\Phi\left(\frac{1000 \cdot 0{,}1}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right) = \Phi(10{,}541) = 0{,}5$, то $\Phi(t) \ge 0{,}4$. За таблицями інтегральної функції Лапласа враховуючи те, що вона є зростаючою, знаходимо $t \ge 1{,}28$, тому $\frac{r - 100}{9{,}4868} \ge 1{,}28$, звідки $r \ge 112{,}14$. Отже, умова задачі задовольняється при $r \ge 112$.

б) $n = 1000$, $p = 0{,}01$, $q = 1 - p = 0{,}99$, отримуємо:

$$\Phi(t) + \Phi\left(\frac{1000 \cdot 0{,}01}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}}\right) \ge 0{,}9, \quad \text{або} \quad \Phi(t) +$$

$+ \Phi(3{,}1782) \ge 0{,}9$. Оскільки $\Phi(3{,}1782) \approx 0{,}49931$, то $\Phi(t) \ge$ $\ge 0{,}40069$. За таблицями знаходимо $t \ge 1{,}28$, тому $\frac{r - 10}{3{,}14643} \ge 1{,}28$, звідки $r \ge 10 + 3{,}14643 \cdot 1{,}28 = 14{,}027$. Отже, умова задачі задовольняється при $r \geq 14$. Оскільки імовірність $p = 0{,}01 < 0{,}1$ і $\lambda = 1000 \cdot 0{,}01 = 10$, то для знаходження r можна скористуватись формулою Пуассона за методикою наведеною в задачі 3.2.16. Умова задачі $\sum\limits_{i=k} \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$ $= 0{,}9349 \geq 0{,}9$ задовольняється при $k = r = 13$; при $k = r = 15$ $\sum \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 0{,}99$.

3.4.14. В селищі *A* 2500 жителів. Кожний з них приблизно 6 разів на місяць їде у поїзді в місто *B*, вибираючи дні поїздок за випадковими мотивами незалежно від решти жителів.

Яку найменшу місткість повинен мати поїзд, щоб він переповнювався в середньому не частіше одного разу на 100 днів? (Поїзд йде один раз на добу).

Розв'язок.

Імовірність того, що будь-який з 2500 жителів їздить у поїзді в місто *B* рівна $p = \dfrac{6}{30} = 0{,}2$ (кількість днів у місяці прийнята за 30) і $q = 1 - p = 0{,}8$. Ймовірність того, що поїзд буде переповнюватись не частіше одного разу на 100 днів рівна $P \leq 0{,}01$. Найбільша гранична місткість поїзда може бути рівна кількості жителів у селищі, тобто 2500 ($k_2 = n$). Найменша кількість місць у поїзді k_1 може бути знайдена з інтегральної формули Лапласа:

$$P(k_1 \leq k \leq k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) \leq 0{,}01.$$

Отже, $P(k_1 \leq k \leq 2500) = \Phi\left(\dfrac{2500 - 2500 \cdot 0{,}2}{\sqrt{2500 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) -$

$$-\Phi\left(\frac{k_1-2500\cdot 0{,}2}{\sqrt{2500\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\right)=\Phi(100)-\Phi\left(\frac{k_1-500}{20}\right)\le 0{,}01.$$

Оскільки інтегральна функція $\Phi(100) = 0{,}5$, то $\Phi\left(\frac{k_1-500}{20}\right)\ge 0{,}49$.

З таблиць інтегральної функції знаходимо значення t, при якому здійснюється $\Phi(t) = 0{,}49$. Це значення, $t = 2{,}327$. Оскільки інтегральна функція $\Phi(t)$= зростаюча, то $\frac{k_1-500}{20}\ge$ $\ge 2{,}327$. Звідки $k_1 \ge 2{,}327\cdot 20+500=547$.

Отже, найменша місткість поїзда повинна становити 547 місць.

3.5. Імовірність відхилення відносної частоти події від її постійної імовірності

Теорема. Якщо імовірність p появи події A в кожному з n повторних незалежних випробувань постійна і відмінна від 0 і 1 ($0 < p < 1$), і число випробувань досить велике, то імовірність того, що відхилення відносної частини $\frac{m}{n}$ події від її імовірності p за абсолютною величиною не перевищить якого завгодно малого додатного числа ε знаходиться за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \qquad (3.5.1).$$

Задачі

3.5.1. При встановленому технологічному процесі ймовірність бракованих виробів дорівнює 0,015.

Визначити ймовірність того, що частота бракованих виробів серед 1000 виготовлених штук буде відрізнятися від ймовірності виготовлення бракованого виробу не більше, ніж на 0,005 в ту чи іншу сторону.

Як зміниться результат, якщо замість 1000 шт. взяти 625?

Розв'язок.

Згідно формули Лапласа дана імовірність рівна:

$$P=\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Підставивши числові дані: ε = 0,005; p = 0,015; q = 0,985; n_1 = 1000; n_2 = 625, отримаємо:

$$P_1\left(\left|\frac{m}{1000}-0{,}015\right|\le 0{,}005\right)=2\Phi\left(0{,}005\sqrt{\frac{1000}{0{,}015\cdot 0{,}985}}\right)=$$

$$=2\Phi(1{,}30079)=2\cdot 0{,}4033=0{,}807;$$

$$P_2\left(\left|\frac{m}{625}-0{,}015\right|\le 0{,}005\right)=2\Phi\left(0{,}005\sqrt{\frac{625}{0{,}015\cdot 0{,}985}}\right)=$$

$$=2\Phi(1{,}0284)=2\cdot 0{,}3481=0{,}6962\,.$$

3.5.2. Французький вчений Бюффон (XVII ст.) кинув монету 4040 разів, причому "герб" з'явився 2048 разів.

Знайти ймовірність того, що при повторенні досліду Бюффона відносна частота появи "герба" відхилиться від ймовірності появи "герба" за абсолютною величиною не більшою, ніж в досліді Бюффона.

Розв'язок.

Згідно умови задачі n = 4040; m = 2048, p = 1/2 – імовірність випадань "герба", q = 1/2 – імовірність невипадань "герба". Величина відхилення ε відносно частоти $\frac{m}{p}$ від імовірності p в досліді Бюффона рівна

$$\varepsilon = \left|\frac{m}{n} - p\right| = \left|\frac{2048}{4040} - 0{,}5\right| = |0{,}5069 - 0{,}5| = 0{,}0069.$$

Тоді шукану імовірність обчислимо згідно формули $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$. Підставивши необхідні дані, отримаємо:

$$P\left(\left|\frac{m}{2048} - 0{,}5\right| \le 0{,}0069\right) = 2\Phi\left(0{,}0069\sqrt{\frac{2048}{0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) =$$

$$= 2\Phi(0{,}8771) = 2 \cdot 0{,}30976 = 0{,}6195.$$

3.5.3. В ящику містяться білі і чорні кульки у співвідношенні 4:1. Після вилучення кульки реєструється її колір і кулька повертається в ящик.

Чому дорівнює найменше число вилучень *n*, при якому з ймовірністю 0,95 можна сподіватися, що абсолютна величина відхилення відносної частоти появи білої кульки від її ймовірності буде не більшою, ніж 0,01.

Розв’язок.

Імовірність появи білої кульки в кожному вилученні рівна $p = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5} = 0{,}8$. Використаємо формулу:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \beta .$$

У задачі p = 0,8, q = 0,2; ε = 0,01. Отже,

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}8\right| \le 0{,}01\right) = \beta = 0{,}95 .$$

Тоді, $\Phi(t) = \frac{\beta}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$. З таблиць інтегральної функції знаходимо t = 1,96.

Отже, $\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}=t$, звідки $n=\dfrac{t^2pq}{\varepsilon^2}=\dfrac{1{,}96^2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}{0{,}012}=$
$=6146{,}56\approx 6147.$

3.5.4. При штампуванні отримуємо 60% деталей першого гатунку, 30% – другого і 10% – третього.

Визначити, скільки потрібно взяти відштампованих деталей, щоб з ймовірністю – 0,8, можна було б стверджувати, що частка деталей першого сорту буде відрізнятись від ймовірності виготовлення деталей першого гатунку за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,005.

Розв'язок.

Вказівка: $p=0{,}6;\ q=0{,}4;\ \varepsilon=0{,}005;$

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}6\right|\le 0{,}005\right)=0{,}8.$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=0{,}8.$$

$\Phi(x)=\dfrac{0{,}8}{0{,}2}=0{,}4\to\Phi(x)=0{,}4$. З таблиці інтегральної функції знаходимо x = 1,281.

Отже, $0{,}005\sqrt{\dfrac{n}{0{,}6\cdot 0{,}4}}=1{,}281$, звідки $n=15766$.

3.5.5. Для космічного корабля імовірність зіткнення протягом однієї години з метеоритом, маса якого не менше від m_0, дорівнює 0,001. Знайти практично вірогідні межі числа зіткнень з такими метеоритами протягом трьох місяців польоту з 1 червня по 31 серпня, якщо імовірність практичної вірогідності приймається в цьому випадку рівною 0,9995.

Розв'язок.

Кількість годин у трьох місяцях з 1 червня по 31 серпня складає $n = 24 \cdot 92 = 2208$. Це і буде число повторних незалежних випробувань. Імовірність настання події (зіткнення) в кожному випробуванні (протягом години) рівна p = 0,001, отже $q = 1 - p = 0{,}999$.

Тоді згідно інтегральної теореми Маура-Лапласа імовірність того, що частота події відхилиться від її імовірності в кожному випробуванні не більше, ніж на ε, рівна:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \beta.$$

Користуючись таблицею інтегральної функції, знайдемо таке t, щоб $\Phi(t) = \dfrac{\beta}{2}$. Тоді, згідно з формулою, дістанемо:

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = t \text{, звідки } \varepsilon = t\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Згідно умови задачі β=0,9995. Отже, $\Phi(t) = \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{0{,}9995}{2} = 0{,}49975$. З таблиць знаходимо t = 3,5, звідки

$$\varepsilon = 3{,}5\sqrt{\frac{0{,}001 \cdot 0{,}999}{2208}} = 0{,}0023542.$$

З нерівності $\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon)$ випливає $p - \varepsilon \le \dfrac{m}{n} \le p + \varepsilon$ або $n(p - \varepsilon) \le m \le n(p + \varepsilon)$.

Підставивши необхідні дані, отримаємо межі, в яких знаходиться число настання події m:

$$2208(0{,}001 - 0{,}0023542) \le m \le 2208(0{,}001 + 0{,}0023542)$$

або $0 \le m \le 7$.

3.5.6. У ставок було випущено 100 мічених риб. Невдовзі після цього із ставка було виловлено 400 риб, серед яких виявилось 5 мічених. Оцінити загальну кількість риб у ставку з імовірністю: а) 0,9; б) 0,6.

Розв'язок.

Згідно з інтегральною теоремою Муавра-Лапласа:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}=0{,}9$ (пункт а) і $P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}=0{,}6$ (пункт б).

Тут, m = 5, n = 400, $p=\frac{M}{N}$, де M = 100, N – шукана величина.

а) З таблиць інтегральної функції знаходимо значення t = = 1,645, при якому $\Phi(t)=\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=\frac{0{,}9}{2}=0{,}45$. Таким чином, $1{,}645=\varepsilon\sqrt{\frac{400}{pq}}$. Імовірність p відрізняється від частоти $\frac{m}{n}=\frac{5}{400}=\frac{1}{80}$ на величину ε, значення яких поки що невідомі, але які можна знайти, розв'язавши квадратне рівняння. Нехай $p=\frac{m}{n}-\varepsilon=\frac{1}{80}-\varepsilon=0{,}0125-\varepsilon,$ тоді $q=1-p=1-$ $-\frac{1}{80}+\varepsilon=\frac{79}{80}+\varepsilon=0{,}9875+\varepsilon$ і рівняння має вигляд:

$$\varepsilon=t\cdot\sqrt{\frac{(0{,}0125-\varepsilon)(0{,}9875+\varepsilon)}{400}}\text{ або}$$

$$400\varepsilon^2=t^2(0{,}012344-0{,}975\varepsilon-\varepsilon^2).$$

Спростивши вираз, отримуємо: $402{,}706025\varepsilon^2 +$ $+\,2{,}638374\varepsilon - 0{,}0334903 = 0,$ звідки ε =0,006403.

Отже, $\left|\dfrac{100}{N} - 0{,}0125\right| \le 0{,}006403,$ що рівнозначно:

$0{,}0125 - 0{,}006403 \le \dfrac{100}{N} \le 0{,}0125 + 0{,}006403$ або

$0{,}006097 \le \dfrac{100}{N} \le 0{,}018903$. Тому значення N знаходиться в межах: $5290{,}17 \le N \le 16402$.

Нехай $p = \dfrac{m}{n} + \varepsilon = 0{,}0125 + \varepsilon;\;\; q = 0{,}9875 - \varepsilon.$

Тоді рівняння має вигляд:

$$\varepsilon = t \cdot \sqrt{\frac{(0{,}0125 + \varepsilon)(0{,}9875 - \varepsilon)}{400}};$$

або $402{,}706025\varepsilon^2 - 2{,}638374\varepsilon - 0{,}033403 = 0,$ звідки ε =0,012955.

Тоді $\left|\dfrac{100}{N} - 0{,}0125\right| \le 0{,}012955,$ або $0{,}0125 - 0{,}012955 \le$ $\le \dfrac{100}{N} \le 0{,}012955 + 0{,}0125$ звідки $N \ge 3929$. Враховуючи обидві нерівності остаточно отримуємо: $5290 \le N \le 16409$.

Аналогічно для пункту б) знаходимо $t = 0{,}8418$, для якого $P\left\{\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right) = 0{,}6.$

Для $p = \dfrac{m}{n} - \varepsilon = 0{,}0125 - \varepsilon$ і $q = 0{,}9875 + \varepsilon$, рівняння має вигляд:

$400{,}70861\varepsilon^2 + 0{,}6908948\varepsilon - 0{,}008747082 = 0,$ звідки ε =0,0038889.

Тоді $\left|\frac{100}{N} - 0{,}0125\right| \le 0{,}0038889,$ або $0{,}0086111 \le$ $\le \frac{100}{N} \le 0{,}0163889$, звідки $6102 \le N \le 11613.$

Для $p = \frac{m}{n} + \varepsilon = 0{,}0125 + \varepsilon$ і $q = 0{,}9875 - \varepsilon$, рівняння має вигляд: $400{,}70861\varepsilon^2 - 0{,}6908948\varepsilon - 0{,}00874708 = 0,$ звідки ε =0,005613.

Тоді $\left|\frac{100}{N} - 0{,}0125\right| \le 0{,}005613,$ або $0{,}006887 \le$ $\le \frac{100}{N} \le 0{,}018133$, звідки $5521 \le N \le 14521.$ Враховуючи обидві нерівності, весь діапазон значень N буде такий: $5521 \le N \le 14521.$ чи $6102 \le N \le 11613.$

Частина II
Випадкові величини

§4. Дискретні випадкові величини і їх числові характеристики

Випадковою величиною називається величина, яка в результаті випробувань може прийняти те чи інше значення, причому наперед невідомо, яке саме. Випадкові величини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх можливі значення відповідними малими літерами. Наприклад: $X(x_1, x_2, ... x_n)$, $U(u_1, u_2, \dots u_n)$.

Дискретною називають випадкову величину, якщо значення, які вона може набувати з певними імовірностями, утворюють тільки скінченну або зчисленну множину. Вона характеризується значеннями і відповідними імовірностями: $p_i = P(X = X_i)$.

Неперервною називають випадкову величину, яка може прийняти всі значення з деякого скінченного чи нескінченного проміжку.

4.1. Закони розподілу дискретних випадкових величин. Їх числові характеристики

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають відповідність між можливими значеннями і їх імовірностями. Його задають таблично, графічно чи аналітично (у виді формул). Сума імовірностей закону розподілу дорівнює 1: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ або $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, якщо множина можливих значень дискретної випадкової величини зліченна.

Дві випадкові величини називаються ***незалежними***, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення прийняла друга величина. В протилежному випадку випадкові величини є ***залежними***. Декілька випадкових величин називаються ***взаємно незалежними***, якщо закони розподілу будь-якого числа з них не залежать від того, які можливі значення набула решта величин.

Добутком незалежних випадкових величин X та Y називають випадкову величину XY, можливі значення якої рівні всеможливим добуткам співмножників X і Y. Імовірності цих добутків рівні добуткам імовірностей відповідних співмножників. Якщо деякі добутки X_iY_i рівні між собою, то імовірність цього добутку рівна сумі імовірностей цих добутків.

Сумою випадкових величин X і Y називають випадкову величину $X + Y$, можливі значення якої рівні всеможливим сумам з доданків X та Y. Імовірності цих сум рівні добуткам імовірностей доданків; для залежних величин – добуткам імовірностей одного доданку на умовну імовірність другого, якщо деякі суми рівні між собою, то імовірність такої суми рівна сумі відповідних імовірностей доданків.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків всіх її можливих значень на їх імовірності:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i \qquad (4.1.1).$$

Якщо дискретна випадкова величина X приймає зліченну множину можливих значень, то $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i$ при умові, що ряд збігається абсолютно. Математичне сподівання приблизно рівне середньому арифметичному спостережних значень випадкової величини: $M(X) \approx \overline{X}$.

Властивості математичного сподівання:

1. Математичне сподівання сталої величини є сама ця стала: $M(C) = C$.

2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання: $M(CX) = CM(X)$.

3. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань: $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Наслідок. Математичне сподівання добутку декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань: $M(XYZ...U) = M(X)M(Y)M(Z)\ldots M(U)$.

4. Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань: $M(X + Y) =$ $= M(X) + M(Y)$.

Наслідок 1. Математичне сподівання суми скінченного числа випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ...M(X_n).$$

Наслідок 2. Математичне сподівання різниці двох випадкових величин дорівнює різниці їх математичних сподівань: $M(X - Y) = M(X) - M(Y)$.

Для визначення міри розсіяння (розкиданості) значень випадкової величини навколо її математичного сподівання вводять поняття дисперсії.

Дисперсією $D(X)$ випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання $M(X)$: $D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2$ (4.1.2).

Використання властивостей математичного сподівання приводить до розрахункової формули для обчислення дисперсії:

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2 = \sum x_i^2 p_i - \left(\sum x_i p_i\right)^2 \quad (4.1.3).$$

Дисперсія має розмірність квадратних одиниць вимірюваної величини. Щоб отримати розмірність міри розсіювання в одиницях вимірюваної величини розглядають квадратний корінь з дисперсії $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ (4.1.4), який називають ***середнім квадратичним відхиленням***, або ***стандартом***.

Властивості дисперсії:

1. Дисперсія будь-якої випадкової величини невід'ємна: $D(X) \geq 0$.

Наслідок. Для будь-якої випадкової величини $(M(X))^2 \le M(X^2)$.

2. Дисперсія сталої дорівнює нулю: $D(C) = 0$.

3. Сталий множник можна винести за знак дисперсії, піднісши його до квадрату: $D(CX) = C^2D(X)$.

4. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Наслідок 1. Дисперсія суми попарно незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \dots X_n$ незалежних у сукупності, дорівнює сумі їх дисперсій: $D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$.

Наслідок 2. Дисперсія суми постійної величини і випадкової дорівнює дисперсії випадкової величини: $D(C + X) = D(X)$.

5. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій: $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

Теорема. Середнє квадратичне відхилення суми скінченного числа взаємно незалежних випадкових величин дорівнює квадратному кореню з суми квадратів середніх квадратичних відхилень цих величин:

$$\sigma(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + ... + \sigma^2(X_n)} \quad (4.1.5).$$

Якщо декілька випадкових величин мають однакові розподіли, то їх числові характеристики (математичне сподівання, дисперсія, і т. д.) однакові.

1. Математичне сподівання середнього однаково розподілених взаємнонезалежних випадкових величин дорівнює математичному сподіванню a кожної з величин:

$$M(\overline{X}) = a.$$

Дисперсія середнього арифметичного n однаково розподілених взаємно незалежних випадкових величин в n раз менше дисперсії $D(X_i)$ кожної з величин: $D(\overline{X}) = \dfrac{D(X_i)}{n}$ (4.1.6).

Задачі

4.1.1. Довести: а) $M(Y) = aM(X) + b$, якщо $Y = aX + b$; б) $M(Y) = a_1M(x_1) + ... + a_nM(x_n) + b$, якщо $Y = a_1x_1 + ... + a_nx_n + b$.

Розв'язок.

а) Нехай $Y = ax + b$, тоді $M(Y) = M(ax + b) = M(ax) + M(b) = aM(x) + b$.

б) $Y = ax_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b$, тоді

$$M(Y) = M(a_1x_1 + a_2x_2 ... + ... a_nx_n + b) = M(a_1x_1) + M(a_2x_2) + \\ + ... + M(a_nx_n) + M(b) = a_1M(x_1) + a_2M(x_2) ... + ... a_nM(x_n) + b.$$

Тут використано такі властивості математичного сподівання: 1) математичне сподівання суми дорівнює сумі математичних сподівань; 2) сталий множник виноситься за знак математичного сподівання; 3) математичне сподівання сталої рівне сталій.

4.1.2. Знайти математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення випадкової величини Z, якщо відомо, що X і Y – незалежні дискретні випадкові величини, і $Z = 4X - 7Y - 100$; $M(X) = 5$; $M(Y) = 6$; $D(X) = 2$; $D(Y) = 1$.

Розв'язок.

$$M(Z) = M(4X - 7Y - 100) = M(4X) + M(-7Y) + M(-100) = \\ = 4M(X) - 7M(Y) - 100.$$

Тут використано такі властивості математичного сподівання:

$$M(X + Y + ...U) = M(X) + M(Y) + ...M(U);$$

$$M(CX) = CM(X);\ M(C) = C.$$

Підставивши числові дані, отримаємо:

$$M(Z) = 4 \cdot 5 - 7 \cdot 6 - 100 = -122.$$

$$D(Z) = D(4X - 7Y - 100) = D(4X) + D(-7Y) + D(-100) = \\ = 4^2 D(X) + (-7)^2 D(Y) + 0 = 16 \cdot 2 + 49 \cdot 1 = 81.$$

Отже, $\sigma(Z) = \sqrt{D(Z)} = \sqrt{81} = 9$.

Тут використано такі властивості дисперсії:
$D(X+Y+...U)=D(X)+D(Y)+...D(U)$;
$D(CX)=C^2D(X)$; $D(C)=0$.

4.1.3. Вивести формулу математичного сподівання частки двох незалежних випадкових величин *X* і *Y*: $M\left(\frac{X}{Y}\right)$.

Розв'язок.

Нехай задані розподіли випадкових величин *X* і *Y*. Для простоти доведення обмежимось трьома їхніми значеннями.

X	x_1	x_2	x_3
P	p_2	p_2	p_3

Y	y_1	y_2	y_3
G	g_1	g_2	g_3

Тоді розподіл $\frac{X}{Y}$ буде мати вигляд:

$Z=\frac{X}{Y}$	$\frac{x_1}{y_1}$	$\frac{x_1}{y_2}$	$\frac{x_1}{y_3}$	$\frac{x_2}{y_1}$	$\frac{x_2}{y_2}$	$\frac{x_2}{y_3}$	$\frac{x_3}{y_1}$	$\frac{x_3}{y_2}$	$\frac{x_3}{y_3}$
PG	p_1g_1	p_1g_2	p_1g_3	p_2g_1	p_2g_2	p_2g_3	p_3g_1	p_3g_2	p_3g_3

Обчислимо математичне сподівання *Z:*

$$M(Z)=\frac{x_1}{y_1}\cdot p_1g_1+\frac{x_1}{y_2}\cdot p_1g_2+\frac{x_1}{y_3}\cdot p_1g_3+\frac{x_2}{y_1}\cdot p_2g_1+\frac{x_2}{y_2}\cdot p_2g_2+$$

$$+\frac{x_2}{y_3}\cdot p_2g_3+\frac{x_3}{y_1}\cdot p_3g_1+\frac{x_3}{y_2}\cdot p_3g_2+\frac{x_3}{y_3}\cdot p_3g_3=$$

$$=g_1\left(\frac{x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3}{y_1}\right)+g_2\left(\frac{x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3}{y_2}\right)+$$

$$+g_3\left(\frac{x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3}{y_3}\right)=g_1\frac{M(x)}{y_1}+g_2\frac{M(x)}{y_2}+g_3\frac{M(x)}{y_3}=$$

$$=M(x)\left[\frac{1}{y_1}\cdot g_1+\frac{1}{y_2}\cdot g_2+\frac{1}{y_3}\cdot g_3\right]=M(X)\cdot M\left(\frac{1}{Y}\right).$$

Або $M\left(\frac{X}{Y}\right)=M\left(X\cdot\frac{1}{Y}\right)=M(X)\cdot M\left(\frac{1}{Y}\right)$.

Наприклад:

X	2	4	6
P	0,2	0,5	0,3

$У$	10	15	30
G	0,4	0,4	0,2

$M(X)=2\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}5+6\cdot 0{,}3=4{,}2;$

$M(Y)=10\cdot 0{,}4+15\cdot 0{,}4+30\cdot 0{,}2=16;$

$M\left(\frac{1}{Y}\right)=\frac{1}{10}\cdot 0{,}4+\frac{1}{15}\cdot 0{,}4+\frac{1}{30}\cdot 0{,}2=0{,}04+0{,}02666+$
$+0{,}006666=0{,}07333$;

$M\left(\frac{1}{X}\right)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}2+\frac{1}{4}\cdot 0{,}5+\frac{1}{6}\cdot 0{,}3=0{,}1+0{,}125+0{,}05=$
$=0{,}275$;

Отже,

$M\left(\frac{Y}{X}\right)=M(Y)\cdot M\left(\frac{1}{X}\right)=16\cdot 0{,}275=4{,}4$;

$\frac{M(Y)}{M(X)}=\frac{16}{4{,}2}=3{,}81$; $M\left(\frac{Y}{X}\right)\neq\frac{M(Y)}{M(X)}$.

$M\left(\frac{X}{Y}\right)=4{,}2\cdot 0{,}07333=0{,}307997172$;

$\frac{M(X)}{M(Y)}=\frac{4{,}2}{16}=0{,}2625$; $M\left(\frac{X}{Y}\right)\neq\frac{M(X)}{M(Y)}$.

4.1.4. Закон розподілу випадкової величини X поданий в таблиці:

Значення (x)	– 1	0	2
Ймовірність (p)	0,6	0,3	0,1

Знайти дисперсії випадкових величин $2x$ та $x + x$. Чи можна до $z = x + x$ застосувати теорему про дисперсію суми $D(u+v) = D(u) + D(v)$?

Розв'язок.

Задано розподіл:

X	-1	0	2
P	0,6	0,3	0,1

$M(X) = -1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}1 = -0{,}4$;

$D(X) = (-1)^2 \cdot 0{,}6 + 2^2 \cdot 0{,}1 - (-0{,}4)^2 = 0{,}84$.

Тоді розподіл випадкової величини Z = (X + X) буде мати вигляд:

Z=X+X	–1–1= =–2	–1+0= =–1	–1+2=1	0–1=–1	0+0=0	0+2=2	2-1=1
P	0,6·0,6= = 0,36	0,6·0,3= = 0,18	0,6·0,1= = 0,06	0,6·0,3= =0,18	0,3·0,3= =0,09	0,3·0,1= =0,03	0,6·0,1= =0,06

0+2=2	2+2=4
0,1·0,3=0,03	0,1·0,1=0,01

або

Z=X+X	-2	-1	0	1	2	4
P	0,36	0,36	0,09	0,12	0,06	0,01

$M(X+X) = -2 \cdot 0{,}36 - 1 \cdot 0{,}36 - 0 \cdot 0{,}09 + 1 \cdot 0{,}12 +$
$+ 2 \cdot 0{,}06 + 4 \cdot 0{,}01 = -0{,}8$.

$D(X+X) = (-2)^2 \cdot 0{,}36 + (-1)^2 \cdot 0{,}36 + 0^2 \cdot 0{,}09 +$
$+ 1^2 \cdot 0{,}12 + 2^2 \cdot 0{,}06 + 4^2 \cdot 0{,}01 - (-0{,}8)^2 = 1{,}68$.

Розподіл випадкової величини $2X$ має вигляд:

$2X$	$2 \cdot (-1) = -2$	$2 \cdot 0 = 0$	$2 \cdot 2 = 4$
P	0,6	0,3	0,1

$M(2X) = -2 \cdot 0{,}6 + 0 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 = -0{,}8$;

$D(2X) = (-2)^2 \cdot 0{,}6 + 0^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}1 - (-0{,}8)^2 = 3{,}36$.

$M(X+X) = M(X) + M(X) = 2M(X) = M(2X) = 2M(X)$;

що й підтверджується розрахунками.

$D(2X) = 2^2 D(X) = 4D(X); \; D(2X) = 4 \cdot 0{,}84 = 3{,}36$;

$D(2X) \neq D(X + X)$.

$D(u + x) = D(u) + D(x)$, але $D(X + X) \neq D(X) + D(X)$, що й підтверджується розрахунками: $3{,}36 \neq 0{,}84 + 0{,}84 = = 1{,}68$. Теорему про дисперсію суми $D(u + v) = D(u) + D(v)$ до $z = x + x$ застосувати не можна.

4.1.5. Довести, що якщо ζ і η – незалежні випадкові величини, то $D(\zeta \cdot \eta) \geq D(\zeta) \cdot D(\eta)$.

Розв'язок.

Використаємо розрахункову формулу для обчислення дисперсії:

$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$, Отже:

$$D(\zeta \cdot \eta) = M(\zeta \cdot \eta)^2 - M^2(\zeta \cdot \eta) = M(\zeta^2 \cdot \eta^2) -$$

$$-[M(\zeta \cdot \eta)]^2 = M(\zeta)^2 \cdot M(\eta)^2 - M^2(\zeta) \cdot M^2(\eta).$$

Підставивши у формулу $M(\zeta^2) = D(\zeta) + M^2(\zeta)$ і $M(\eta^2) = D(\eta) + M^2(\eta)$, отримуємо:

$$D(\zeta \cdot \eta) = [D(\zeta) + M^2(\zeta)][D(\eta) + M^2(\eta)] - M^2(\zeta) \cdot M^2(\eta) =$$

$$= D(\zeta) \cdot D(\eta) + M^2(\eta) \cdot D(\zeta) + M^2(\zeta) \cdot D(\eta) + M^2(\zeta) \cdot M^2(\eta) -$$

$$- M^2(\zeta) \cdot M^2(\eta) = D(\zeta) \cdot D(\eta) + M^2(\eta) \cdot D(\zeta) + M^2(\zeta) \cdot D(\eta).$$

Оскільки II і III доданки ≥ 0, то $D(\zeta \cdot \eta) \geq 0$.

4.1.6. Випадкові величини ζ_i, $i = 1, \ldots n$, незалежні, $M\zeta_i = a_i$, $D\zeta_i = \sigma_i^2$. Обчислити дисперсію $D\eta_n$, де $\eta_n = \zeta_1 \cdot \zeta_2 \ldots \zeta_n$.

Розв'язок.

Для обчислення дисперсії випадкової величини η_n використаємо розрахункову формулу:

$$D(\eta_n) = D(\zeta_1 \cdot \zeta_2 \ldots \zeta_i \cdot \ldots \zeta_n) = M(\zeta_1^2 \cdot \zeta_2^2 \ldots \zeta_i^2 \cdot \ldots \zeta_n^2) -$$

$$-M^2(\zeta_1\cdot\zeta_2 ... \zeta_i\cdot ... \zeta_n)=M(\zeta_1^2)\cdot M(\zeta_2^2)\cdot ... M(\zeta_i^2) ...\cdot M(\zeta_n^2)-$$
$$-\left[M(\zeta_1)\cdot M(\zeta_2) ...\cdot M(\zeta_i) ...\cdot M(\zeta_n)\right]^2.$$

Але $\quad D(\zeta_i)=M(\zeta_i^{\,2})-M^2(\zeta_i)=M(\zeta_i^{\,2})-a_i^2=\sigma_i^2,$
звідки $M(\zeta_i^{\,2})=\sigma_i^2+a_i^2$.

Підставимо це значення у попередній вираз, отримаємо:
$$D(\eta_n)=(\sigma_1^2+a_1^2)(\sigma_2^2+a_2^2) ...\cdot(\sigma_i^2+a_i^2) ...\cdot(\sigma_n^2+a_n^2)-$$
$$-[a_1^2\cdot a_2^2\cdot ... a_i^2 ...\cdot a_n^2]=\prod_{i=1}^{n}(\sigma_i^2+a_i^2)-\prod_{i=1}^{n}a_i^2.$$

4.1.7. Невід'ємні випадкові величини $\zeta_1, ...\zeta_n$ незалежні і однаково розподілені. Знайти математичне сподівання $M\eta_k$ випадкової величини $\eta_k=\dfrac{\zeta_k+\alpha}{\sum\limits_{i=1}^{n}\zeta_i+n\alpha}$, де $\alpha\geq 0$ константа.

Розв'язок.

Оскільки випадкові величини незалежні і однаково розподілені, то $\sum\limits_{i=1}^{n}\zeta_i=n\zeta_k$ Підставимо це значення у вираз для математичного сподівання:
$$M(\eta_k)=M\left(\frac{\zeta_k+\alpha}{\sum\limits_{i=1}^{Sn}\zeta_i+n\alpha}\right)=M\left(\frac{\zeta_k+\alpha}{n\zeta_k+n\alpha}\right)=$$
$$=M\left(\frac{\zeta_k+\alpha}{n(\zeta_k+\alpha)}\right)=\frac{1}{n}M\left(\frac{\zeta_k+\alpha}{\zeta_k+\alpha}\right)=\frac{1}{n}M(1)=\frac{1}{n}.$$

4.1.8. Обчислити математичне сподівання і дисперсію визначника

$$_2 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{13} & X_{14} \end{vmatrix},$$

елементи якого X_{ij} – незалежні випадкові величини з $M(X_{ij}) = 0$ і $D(X_{ij}) = \sigma^2$.

Розв'язок.

Для обчислення дисперсії визначника скористуємося розрахунковою формулою: $D(\Delta_2) = M(\Delta_2^2) - M^2(\Delta_2)$.

Обчислимо математичне сподівання визначника:

$$M(\Delta_2) = M(\zeta_{11} \cdot \zeta_{22} - \zeta_{21} \cdot \zeta_{12}) = M(\zeta_{11} \cdot \zeta_{22}) - M(\zeta_{21} \cdot \zeta_{12}) =$$
$$= M(\zeta_{11}) \cdot M(\zeta_{22}) - M(\zeta_{21}) \cdot M(\zeta_{12}) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0,$$

оскільки за умовою $M(X_{ij}) = 0.$

Обчислимо квадрат визначника Δ_2^2 як добуток визначників:

$$\Delta_2^2 = \Delta_2 \cdot \Delta_2 = \begin{vmatrix} \zeta_{11} \cdot \zeta_{12} \\ \zeta_{21} \cdot \zeta_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \zeta_{11} \cdot \zeta_{12} \\ \zeta_{21} \cdot \zeta_{22} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \zeta_{11} \cdot \zeta_{11} + \zeta_{12} \cdot \zeta_{21}; \zeta_{11} \cdot \zeta_{12} + \zeta_{12} \cdot \zeta_{22} \\ \zeta_{21} \cdot \zeta_{11} + \zeta_{22} \cdot \zeta_{21}; \zeta_{21} \cdot \zeta_{12} + \zeta_{22} \cdot \zeta_{22} \end{vmatrix} =$$
$$= (\zeta^2{}_{11} + \zeta_{12} \cdot \zeta_{21})(\zeta_{21} \cdot \zeta_{12} + \zeta_{22}^2) - (\zeta_{21} \cdot \zeta_{11} + \zeta_{22} \cdot \zeta_{21}) \times$$
$$\times (\zeta_{11} \cdot \zeta_{12} + \zeta_{12} \cdot \zeta_{22}) = \zeta^2{}_{11} \cdot \zeta^2{}_{22} + \zeta^2{}_{12} \cdot \zeta^2{}_{21} - 2\zeta_{11} \cdot \zeta_{22} \cdot \zeta_{12} \cdot \zeta_{21}.$$

Тоді $M(\Delta_2^2) = M(\zeta^2{}_{11}) \cdot M(\zeta^2{}_{22}) + M(\zeta^2{}_{12}) \cdot M(\zeta^2{}_{21}) -$
$- 2M(\zeta_{11}) \cdot M(\zeta_{22}) \cdot M(\zeta_{12}) \cdot M(\zeta_{21}) = \sigma^2 \cdot \sigma^2 + \sigma^2 \cdot \sigma^2 -$
$- 2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 2\sigma^4$, оскільки $M(\zeta_{ij}^2) = \sigma^2$, $M(\zeta_{ij}) = 0.$

Таким чином, дисперсія визначника рівна: $D(\Delta_2) =$ $= 2\sigma^4 - 0 = 2\sigma^4$.

4.1.9. Нехай випадкова величина ζ набуває скінченне число невід'ємних значень $x_1, x_2 \dots, x_к$. Довести, що а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M(\zeta^{n+1})}{M(\zeta^{n})}=\max\limits_{1\le i\le k}x_i$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}{}^{n}\sqrt{M(\zeta^{n})}=\max\limits_{1\le i\le k}x_i$.

в) Випадкові величини $\zeta_1\cdot\zeta_2,...,\zeta_n$ набувають додатніх значень і однаково розподілені. Довести, що

$$M\left(\frac{\zeta_1+\zeta_2+...\zeta_k}{\zeta_1+\zeta_2+...\zeta_n}\right)=\frac{k}{n}\quad \text{при}\quad k\le n.$$

Розв'язок.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M(\zeta^{n+1})}{M(\zeta^{n})}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1^{n+1}\cdot p_1+x_2^{n+1}\cdot p_2+...x_k^{n+1}\cdot p_k}{x_1^{n}\cdot p_1+x_2^{n}\cdot p_2+...x_k^{n}\cdot p_k}=$

(поділимо на x_i^{n+1})

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^{n+1}\cdot p_1+\left(\frac{x_2}{x_i}\right)^{n+1}\cdot p_2+...\left(\frac{x_i}{x_i}\right)^{n+1}\cdot p_i+...\left(\frac{x_k}{x_i}\right)^{n+1}\cdot p_k}{\left(\frac{x_1^n}{x_i^{n+1}}\right)\cdot p_1+\left(\frac{x_2^n}{x_i^{n+1}}\right)\cdot p_2+...\left(\frac{x_i^n}{x_i^{n+1}}\right)\cdot p_i+...\left(\frac{x_k^n}{x_i^{n+1}}\right)\cdot p_k}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^{n+1}\cdot p_1+\left(\frac{x_2}{x_i}\right)^{n+1}\cdot p_2+...1\cdot p_i+...\left(\frac{x_k}{x_i}\right)^{n+1}\cdot p_k}{\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^{n}\cdot\frac{1}{x_i}\cdot p_1+\left(\frac{x_2}{x_i}\right)^{n}\cdot\frac{1}{x_i}\cdot p_2+...\left(\frac{1}{x_i}\right)\cdot p_i+...\left(\frac{x_k}{x_i}\right)^{n}\cdot\frac{1}{x_i}\cdot p_k}=*$$

Нехай x_i – максимальне, тоді $\dfrac{x_1}{x_i},\dfrac{x_2}{x_i},...\dfrac{x_k}{x_i}\le 1;$ так що

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^{n}\to 0;...\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^{n+1}\to 0 \text{ і т. д.}$$

$$*=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^{n+1}\cdot p_1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_2}{x_i}\right)^{n+1}\cdot p_2...+1\cdot p_i...+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_k}{x_i}\right)^{n+1}\cdot p_k}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^{n}\cdot\frac{1}{x_i}\cdot p_1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_2}{x_i}\right)^{n}\cdot\frac{1}{x_i}\cdot p_2...+...\left(\frac{1}{x_i}\right)\cdot p_i...+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_k}{x_i}\right)^{n}\cdot\frac{1}{x_i}\cdot p_k}=$$

$$=\frac{0+0+...+p_i...+0}{0\cdot\frac{1}{x}p_i...+\frac{p_i}{x_i}...+0}=\frac{p_i\cdot x_i}{p_i}=x_i,\text{ де } x_i=\max_{1\le i\le k}x_i.$$

б) Вираз під знаком кореня поділимо і домножимо на $\max\limits_{1\le i\le k} x_i^n$: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1^n p_1+x_2^n p_2+...x_i^n p_i+...x_k^n p_k}=$

$$=\lim_{n\to\infty}x_i\sqrt[n]{\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^n p_1+...\left(\frac{x_i}{x_i}\right)^n p_i+...\left(\frac{x_k}{x_i}\right)^n p_k}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}x_i\cdot\sqrt[n]{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^n p_1...+\lim_{n\to\infty}(1\cdot p_i)+...\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_k}{x_i}\right)^n p_k}=$$

$$=x_i\lim_{n\to\infty}\sqrt{0...+p_i...+0}=x_i\lim_{n\to\infty}(p_i)^{\frac{1}{n}}=x_i\cdot 1=x_i.$$

Тут враховано, що скільки $\frac{x_1}{x_i}\le 1,\ \frac{x_2}{x_i}\le 1,...\frac{x_k}{x_i}\le 1,$ то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^n=0,...\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_k}{x_i}\right)^n=0$ і оскільки $p_i\le 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(p_i)^{\frac{1}{n}}=1.$

в) $M\left(\frac{\xi_1+\xi_2+...\xi_k}{\xi_1+\xi_2+...\xi_n}\right)=M\left(\frac{k\zeta_i}{n\zeta_i}\right)=\frac{k}{n}M\left(\frac{\zeta_i}{\zeta_i}\right)=\frac{k}{n}M(1)=\frac{k}{n}.$

Тут враховано, що оскільки випадкові величини однаково розподілені, то $M(\zeta_1)=M(\zeta_2)=M(\zeta_i)=M(\zeta_n)$.

4.1.10. Дискретна випадкова величина X має тільки 3 можливих значення: $x_1 = 1$, x_2 і x_3, причому $x_1 < x_2 < x_3$. Ймовірність того, що X прийме значення x_1 і x_2, відповідно дорівнює 0,3 і 0,2.

Скласти закон розподілу величини X, знаючи її математичне сподівання $M(X) = 2,2$ і дисперсію, яка рівна 0,76.

Розв’язок.

Згідно умови задачі $p_1 = 0,3;$ $p_2 = 0,2;$ $x_1 = 1;$ $M(X) = 2,2;$ $D(X) = 0,76$. Необхідно обчислити p_3, x_2, x_3. Оскільки випадкова величина задана своїм законом розподілу, то в ньому сума імовірностей дорівнює 1:
$p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Отже, $p_3 = 1 - (p_1 + p_2) = 1 - (0,3 + 0,2) = = 0,5$.

Розпишемо вирази для математичного сподівання і дисперсії:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3;$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 - M^2(X).$$

Підставивши необхідні дані, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0,3 \cdot 1 + 0,2 \cdot x_2 + 0,5 \cdot x_3 = 2,2 \\ 0,3 \cdot 1^2 + 0,2 \cdot x_2^2 + 0,5 \cdot x_3^2 - (2,2)^2 = 0,76. \end{cases}$$

Після спрощень система набуває вигляду:

$$\begin{cases} 0,2x_2 + 0,5x_3 = 1,9 \to x_2 = \dfrac{19 - 5x_3}{2}; \\ 0,2x_2 + 0,5x_3^2 = 5,3 \to 7x_3^2 - 38x_3 + 51 = 0. \end{cases}$$

Звідки $x_3 = 3,$ $x_2 = 2$.

Отже, розподіл випадкової величини має вигляд:

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,2	0,5

4.1.11. Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Ймовірність того, що X прийме значення x_1, рівна 0,2. Знайти закон розподілу X, знаючи, що математичне сподівання $M(X) = 2,6$ та середнє квадратичне відхилення рівне 0,8.

Розв’язок.

$x_1 < x_2$; $p_1 = 0,2$; $M(X) = 2,6$; $\sigma(X) = 0,8$.

$p_2 = ?$ $x_1 = ?$ $x_2 = ?$

Якщо випадкова величина X задана своїм законом розподілу, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, отже, $p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Розпишемо вирази $M(X)$ і $D(X)$:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 = 2{,}6\,;$$

$$\sigma^2(X) = D(X) = M(X^2) - M^2(X) = (0{,}8)^2\,.$$

Підставивши дані, отримаємо:

$$\begin{cases} 0{,}2x_1 + 0{,}8x_2 = 2{,}6; \\ 0{,}2x_1^2 + 0{,}8x_2^2 = (0{,}8)^2 + (2{,}6)^2 = 7{,}4; \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 13; \quad x_1 = 13 - 4x_2\,; \\ (13 - 4x_2)^2 + 4x_2^2 = 37, \end{cases}$$

або $5x_2^2 - 26x_2 - 33 = 0$. Розв'язавши рівняння, отримуємо: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$.

Розв'язок $x_1 = 4{,}2$, $x_2 = 2{,}2$ не підходять, оскільки за умовою задачі $x_1 < x_2$.

4.1.12. Є перелік можливих значень дискретної випадкової величини X: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, а також відомі математичні сподівання цієї величини і її квадрату: $M(X) = 2{,}3$; $M(X^2) = 5{,}9$.

Знайти ймовірності, що відповідають можливим значенням X.

Розв'язок.

$x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $M(X) = 2{,}3$; $M(X^2) = 5{,}9$.

p_1, p_2, p_3 – ?

Для знаходження імовірностей складемо систему рівнянь:

$$\begin{matrix} \sum_{i=1}^{3} p_i = 1 \rightarrow \\ M(X) \rightarrow \\ M(X^2) \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 2{,}3 \\ 1^2 p_1 + 2^2 p_2 + 3^2 p_3 = 5{,}9 \end{cases}$$

Підставивши дані, отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} p_1+2p_2+3p_3&=2{,}3\\ p_1+4p_2+9p_3&=5{,}9\\ p_1+p_2+p_3&=1 \end{aligned}\right\}- \quad \text{або} \quad \left.\begin{aligned} 3p_2+8p_3&=4{,}9\\ p_2+2p_3&=1{,}3 \end{aligned}\right|_{\times(-3)}$$

$$2p_3=1;\ p_3=\frac{1}{2}=0{,}5;\ \ p_2=1{,}3-2\cdot p_3=0{,}3;$$

$$p_1=1-(0{,}5+0{,}3)=0{,}2.$$

Отже, $p_1=0{,}2;\ \ p_2=0{,}3;\ \ p_3=0{,}5$.

4.1.13. Розподіл дискретної випадкової величини *X* визначається формулами:

$$P\{X=k\}=\frac{4}{k\times(k+1)\times(k+2)},\ k=1,\ 2,\ ...$$

Знайти математичне сподівання випадкової величини *X*.

Розв'язок.

Задамо даний розподіл таблицею:

x_i	1	2	3	...	к
p_i	$\frac{4}{1(1+1)(1+2)}$ $\frac{4}{1\cdot2\cdot3}$	$\frac{4}{2(2+1)(2+2)}$ $\frac{4}{2\cdot3\cdot4}$	$\frac{4}{3(3+1)(3+2)}$ $\frac{4}{3\cdot4\cdot5}$	...	$\frac{4}{k(k+1)(k+2)}$

Математичне сподівання випадкової величини *X* обчислимо за формулою:

$$M(X)=\sum x_ip_i=4\left[1\cdot\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+2\cdot\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+3\cdot\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\right.$$

$$\left.+...k\cdot\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}\right]=4\cdot\left[\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}\right].$$

Розкладемо кожен з доданків $\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}$ на суму двох дробів: $\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{A}{k+1}+\frac{B}{k+2}$, або $A(k+2)+B(k+1)=1$, отже, $(A+B)k+2A+B=1$, і отримуємо систему рівнянь: $\begin{cases} A+B=0; \\ 2A+B=1 \end{cases}$ розв'язавши яку, знаходимо: A = 1, B = – 1.

Отже, $\dfrac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}$. Підставимо отриманий вираз у математичне сподівання $M(X)$:

$$M(X)=4\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right]=$$

$$=4\cdot\left[\frac{1}{2}--\frac{1}{k+2}\right]=2-\frac{4}{k+2}.$$

4.1.14. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X – кількість появ події A в двох незалежних випробуваннях, якщо ймовірності появи події в цих випробуваннях однакові і відомо, що $M(X)$ = 0,9.

Розв'язок.

Згідно умови задачі n = 2, $M(X)$ = 0,9. Використаємо формулу математичного сподівання для повторних незалежних випробувань: $M(X) = np$ або 0,9 = 2p; звідки p = 0,45. Тоді $D(X)=npq=2\cdot 0{,}45(1-0{,}45)=0{,}495$.

4.1.15. Проводяться незалежні випробування з однаковою ймовірністю появи події A в кожному випробуванні.

Знайти ймовірність появи події A, якщо дисперсія числа появ події в 3 незалежних випробуваннях рівна 0,63.

Розв'язок.

Згідно умови задачі n = 3, $D(X)$ = 0,63. Використаємо формулу дисперсії для повторних незалежних випробувань: $D(X) = npq = np(1-p)$; 0,63 = 3p(1 – p), або $p^2-p+0{,}21=0$. Розв'язавши квадратне рівняння, отримуємо: $p_1=0{,}3$; $p_2=0{,}7$.

4.1.16. Знайти середнє квадратичне відхилення числа появ події в чотирьох повторних незалежних випробуваннях, якщо математичне сподівання числа появ цієї події в п'яти незалежних випробуваннях рівне 7.

Розв'язок.

Для повторних незалежних випробувань математичне сподівання і дисперсія числа появ події відповідно рівні $M(X) = n_1 p$ і $D(X) = n_2 pq$, де $n_1 = 5$; $n_2 = 4$. Підставивши в формулу математичного сподівання $M(X) = 4$, $n_1 = 5$ ($4 = 5p$) отримаємо значення $p = 0{,}8$. Тоді $q = 1 - p = 0{,}2$. Отже, $D(X) = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}64$, звідки $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} =$ $= \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

4.1.17. Три стрільці виконують по чотири постріли. Ймовірність влучення кожного з пострілів для першого становить 0,8, для другого – 0,9, для третього – 0,85. Знайти математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення загального числа пробоїн у мішені.

Розв'язок.

Нехай X_i – число пробоїн у мішені зроблене i-тим стрільцем, де $i = 1, 2, 3$; X – загальне число пробоїн. Тоді $X = \sum_{i=1}^{3} X_i = X_1 + X_2 + X_3$. Отже, математичне сподівання:

$$M(X) = M(\sum_{i=1}^{3} X_i) = \sum_{i=1}^{3} M(X_i) = M(X_1 + X_2 + X_3) =$$
$$= M(X_1) + M(X_2) + M(X_3).$$

Враховуючи, що для повторних незалежних випробувань $M(X_i) = n_i p_i$, де $n_i = 4$; $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}9$; $p_3 = 0{,}85$, отримаємо:

$$M(X) = 4 \cdot 0{,}85 + 4 \cdot 0{,}9 + 4 \cdot 0{,}85 = 4(0{,}8 + 0{,}9 + 0{,}85) =$$
$$= 4 \cdot 2{,}55 = 10{,}2.$$

Дисперсія $D(X) = D\sum_{i=1}^{3} X_i = \sum_{i=1}^{3} D(X_i) = D(X_1 + X_2 + X_3) =$
$= D(X_1) + D(X_2) + D(X_3)$.

Оскільки $D(X_i) = n_i p_i q_i$, де $q_1 = 1 - p_1 = 0{,}2$; $q_2 = 1 -$
$- p_2 = 0{,}1$; $q_3 = 1 - p_3 = 0{,}15$, то $D(X) = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 +$
$+ 4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15 = 4(0{,}16 + 0{,}09 + 0{,}1275 =$
$= 4 \cdot 0{,}3775 = 1{,}51$.

Звідки $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1{,}51} = 1{,}229$.

Отже, $M(X) = 10{,}2$; $\sigma(X) = 1{,}23$.

4.1.18. Дисперсія кожної з 25 однаково розподілених взаємно незалежних випадкових величин дорівнює 6,25. Обчислити середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного цих величин.

Розв’язок.

$n = 25$; $D(X) = 625$.

$\sigma(\overline{X}) = \sqrt{D(\overline{X})}$, але

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_i + ... + X_n}{n}\right) =$$
$$= \frac{D(X_1 + X_2 + ... + X_i + ... + X_n)}{n^2}.$$

Оскільки випадкові величини однаково розподілені, то $D(X_1) = D(X_2) = ...D(X_i)$.

$$D(\overline{X}) = \frac{nD(X_i)}{n^2} = \frac{D(X_i)}{n} = \frac{625}{25} = 25.$$ Звідси, $\sigma(X) =$
$= \sqrt{25} = 5$.

4.1.19. Кидають *n* гральних кісток. Знайти математичне сподівання таких кидків, в кожному з яких випадає рівно *m* шісток, якщо загальне число кидків *N*.

Розв’язок.

Імовірність P того, що в одному підкиданні випаде рівно m шісток обчислимо за формулою Бернуллі:

$$P = C_n^{\ m} p^m q^{n-m} = C_n^{\ m}\left(\frac{1}{6}\right)^m \left(\frac{5}{6}\right)^{n-m},$$

оскільки імовірність випадання „6” рівна

$p = \dfrac{1}{6}$, то $q = 1 - p = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.

Нехай N – число таких підкидань. Оскільки всі підкидання незалежні між собою і імовірності появи m шісток в кожному досліді рівні $p = \dfrac{1}{6}$, то математичне $M(X)$ сподівання числа X рівне $M(X) = NP = NC_n^{\ m}\left(\dfrac{1}{6}\right)^m \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-m}$, де N – число підкидань.

4.1.20. Двічі кидають монету. Описати простір елементарних подій.

Нехай X – число появ “тризуба”. Знайти розподіл випадкової величини, математичне сподівання $M(X)$ та дисперсію $D(X)$.

Розв’язок.

Простір елементарних подій такий:

Ω = {“цифра-цифра”, “цифра-тризуб”, “тризуб-цифра”, “тризуб-тризуб”}.

Нехай X – число появ “тризуба”. Тоді:

$$P(x=0) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4};\ P(x=1) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4};\ P(x=2) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4}.$$

Отже, даний закон розподілу має вигляд:

X_i	0	1	2
P_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\sum p_i = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1;$$

$$M(X) = \sum x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1;$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{2}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} - 1^2 = \frac{1}{2}.$$

4.1.21. Випадкова величина *X* має розподіл:

X	–1	–0,5	–0,1	0	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5	2
P	0,005	0,012	0,074	0.102	0,148	0,231	0,171	0,160	0,081	0,016

Обчислити: $P\left\{|x| \le \frac{1}{2}\right\}$.

Розв'язок.

$$P\left\{|x| \le \frac{1}{2}\right\} = 0{,}012 + 0{,}074 + 0{,}102 + 0{,}148 + 0{,}231 + 0{,}171 =$$

$= 0{,}738$ – як сума імовірностей несумісних подій:
$(x = -0{,}5) + (x = -0{,}1) + (x = 0) + (x = 0{,}1) + (x = 0{,}2) + (x = 0{,}5)$.

4.1.22. На фінансовому ринку представлені акції трьох видів (*A*, *B*, *C*). Норма прибутку акцій залежить від ринкової кон'юнктури (%). Проаналізувати ситуацію і вибрати тип акції, що найбільш приваблива для інвестора з точки зору міри її ризику. За величину ризику прийняти коефіцієнт варіації.

Види проектів	Оцінка можливого результату					
	Песимістична		Стримана		Оптимістична	
	Прибуток R_{1i}	Ймовірність P_{1i}	Прибуток R_{2i}	Ймовірність P_{2i}	Прибуток R_{3i}	Ймовірність P_{3i}
A	59	0,25	29	0,53	19	0,22
B	49	0,3	39	0,45	29	0,25
C	39	0,27	29	0,5	19	0,23

Розв'язок.

1. Визначимо сподівану норму прибутку $m(R)$ для кожного виду акцій:

$$M(R) = m(R) = \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot p_i .$$

$M(R_A) = 59\cdot0{,}25 + 29\cdot0{,}53 + 19\cdot0{,}22 = 17{,}75 + 15{,}37 + 4{,}18 =$
$= 34{,}3$ (%);

$M(R_B) = 49\cdot0{,}3 + 39\cdot0{,}45 + 29\cdot0{,}25 = 39{,}5$ (%);

$M(R_C) = 39\cdot0{,}27 + 29\cdot0{,}5 + 19\cdot0{,}23 = 29{,}4$ (%).

2. Визначимо варіацію $V(R)$ (дисперсію) норм прибутку кожного виду акцій за формулою:

$V(R) = D(R) = M(R^2) - (M(R))^2$.

$V(R_A) = 59^2\cdot0{,}25 + 29^2\cdot0{,}53 + 19^2\cdot0{,}22 - (34{,}3)^2 =$
$= 218{,}91\ (\%)^2$;

$V(R_B) = 42^2\cdot0{,}3 + 39^2\cdot0{,}45 + 29^2\cdot0{,}25 - (39{,}5)^2 = 54{,}75\ (\%)^2$;

$V(R_C) = 39^2\cdot0{,}27 + 29^2\cdot0{,}25 + 19^2\cdot0{,}.23 - (29{,}4)^2 =$
$= 49{,}84\ (\%)^2$.

3. Визначимо середні квадратичні відхилення $\sigma(R)$ від сподіваних норм прибутків кожної акції або їх ризики за формулою:

$\sigma(R) = \sqrt{D(R)}$.

$$\sigma(R_A) = \sqrt{218{,}91} = 14{,}8(\%);$$

$$\sigma(R_B) = \sqrt{54{,}75} = 7{,}4(\%);$$

$$\sigma(R_C) = \sqrt{49{,}84} = 7{,}06(\%).$$

4. Обчислимо коефіцієнти варіацій CV, як величину ризику, що припадає на одиницю прибутку за формулою :

$$CV = \frac{\sigma(R)}{m(R)}.$$

$$CV(R_A) = \frac{14{,}8}{34{,}3} = 0{,}432;$$

$CV(R_B) = \dfrac{7{,}4}{39{,}5} = 0{,}187;$

$CV(R_C) = \dfrac{7{,}06}{29{,}4} = 0{,}24.$

Висновок: Потрібно вибрати акцію виду *B*, оскільки для неї коефіцієнт варіації, а отже і ризик, найменший.

4.2. Початкові і центральні теоретичні моменти.

Для того, щоб краще врахувати вплив на математичне сподівання тих можливих значень випадкових величин, значення яких є великими в порівнянні з іншими елементами розподілу, але є малоймовірними, переходять до величин X^2, X^3, X^4 і т. д. Це стосується як дискретних, так і неперервних випадкових величин.

Початковим моментом *k*-того порядку випадкової величини *X* називають математичне сподівання величини X^k:

$\nu_k = M(X^k)$ (4.2.1).

Отже $\nu_1 = M(X)$; $\nu_2 = M(X^2)$ і

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \nu_2 - \nu_1^2$.

Центральним моментом *k*-того порядку випадкової величини *X* називають математичне сподівання величини $[X - M(X)]^k$: $\mu_k = M[(X - M(X)]^k$ (4.2.2).

Отже, $\mu_1 = M[(X - M(X)] = 0$,

$\mu_2 = M[(X - M(X)^2] = D(X)$.

Мають місце такі співвідношення: $\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$ (4.2.3);

$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3$ (4.2.4);

$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4$ (4.2.5).

Модою $Mo(X)$ дискретної випадкової величини X називають таке її можливе значення, для якого імовірність його настання найвища. Якщо випадкова величина має кілька мод, то вона називається ***полімодальною***.

Задачі

4.2.1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	0,1	0,4	0,6
P	0,2	0,3	0,5

Знайти центральні моменти 1, 2, 3 і 4 порядків.

Розв'язок.

Центральний момент І-го порядку дорівнює нулю.

Покажемо це:

$$\nu_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0,1 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 = 0,44\,;$$

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \nu_1) = 0,2 \cdot (0,1 - 0,44) + 0,3 \cdot (0,4 - 0,44) +$$
$$+ 0,5(0,6 - 0,44) = 0\,.$$

Центральний момент другого порядку – це дисперсія:

$$\mu_2 = D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \nu_1)^2 \cdot p_i = 0,2 \cdot (0,1 - 0,44)^2 + 0,3 \times$$
$$\times (0,4 - 0,44)^2 + 0,5 \cdot (0,6 - 0,44)^2 = 0,02312 + 0,00048 +$$
$$+ 0,01280 = 0,0364\,;$$

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \nu_1)^3 \cdot p_i = 0,2(0,1 - 0,44)^3 + 0,3 \cdot (0,4 - 0,44)^3 +$$
$$+ 0,5 \cdot (0,6 - 0,44)^3 = -0,0078608 - 0,0000192 + 0,0020480 =$$
$$= -0,005832\,;$$

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \nu_1)^4 \cdot p_i = 0,2 \cdot (0,1 - 0,44)^4 + 0,3 \cdot (0,4 - 0,44)^4 +$$

$+0{,}5\cdot(0{,}6-0{,}44)^4 \approx 0{,}0026726+0{,}0000007+0{,}0003276 \approx$
$\approx 0{,}0030009 \approx 0{,}003$.

4.3. Неперервні випадкові величини і їх числові характеритики

Неперервну випадкову величину X в повній мірі можна задати диференціальною функцією або щільністю імовірності $f(x)=F'(x)$ (4.3.1), яка визначає щільність розподілу імовірності для кожної точки x. Знаючи щільність розподілу $f(x)$, можна обчислити інтегральну функцію розподілу $F(x)$ за формулою:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \qquad (4.3.2).$$

Теорема. Імовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде значення з інтервалу $[a, b]$ дорівнює означеному інтегралу від щільності розподілу, взятому в межах від a до b: $P(a<X<b)=\int_{a}^{b} f(x)dx$ (4.3.3).

1. Щільність розподілу – невід'ємна функція: $f(x)\geq 0$. Графік щільності розподілу – крива розподілу розташована або над віссю $0x$, або на цій осі.

2. Невласний інтеграл від щільності розподілу в межах від $-\infty$ до ∞ дорівнює 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ (4.3.4).

Геометрично це означає, що вся площа криволінійної трапеції, що обмежена віссю $0x$ і кривою розподілу, рівна 1.

Модою $Mo(X)$ для неперервної випадкової величини X називають таке її можливе значення, при якому існує максимум густини розподілу.

Медіаною $Me(X)$ неперервної випадкової величини X називають таке її можливе значення, для якого виконується рівність: $P(X < Me(X)) = P(X > Me(X)) = \frac{1}{2}$. Оскільки, $P(X < Me(X) = F(Me(X))$, то $F(Me(X)) = \frac{1}{2}$ (4.3.5).

Математичне сподівання неперервної випадкової величини X, означеної на всій числовій осі, рівне невласному інтегралу: $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ (4.3.6).

Для того, щоб математичне сподівання існувало, необхідно, щоб цей інтеграл збігався абсолютно. Якщо ж функція щільності симетрична і має моду $Mo(X)$ та медіану $Me(X)$, але невласний інтеграл розбігається, то за математичне сподівання приймають їх значення.

Якщо можливі значення випадкової величини X належать інтервалу $[a, b]$, то її математичне сподівання рівне визначеному інтегралу: $M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx$ (4.3.7).

Дисперсією неперервної випадкової величини X називають математичне сподівання квадрату її відхилення від математичного сподівання. Отже, якщо можливі значення X належать всій числовій осі $0x$, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 \quad (4.3.8);$$

якщо $X \in [a, b]$, то

$$D(X) = \int_{a}^{b} [x - M(X)]^2 f(x)dx = \int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 \quad (4.3.9).$$

Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини визначається, як і для дискретної, рівністю:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,.$$

Задачі

4.3.1. Величина *X* має щільність розподілу *f(x)*. *f(x)* – парна функція.

Обчислити її математичне сподівання.

Розв'язок.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини рівне $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=0$, оскільки $f(x)$ – парна функція, то $x\cdot f(x)$ – є непарною функцією, а інтеграл від непарної функції з симетричними межами рівний 0.

4.3.2. Студент пам'ятає, що щільність показникового розподілу має вигляд $f(x)=C\cdot e^{-\lambda x}$ при $x\geq 0$, але він забув, чому рівна постійна С. Потрібно знайти С.

Розв'язок.

Використаємо властивість щільності розподілу:

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ або $\int\limits_{0}^{\infty} ce^{-\lambda x}dx=c\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx=1$, звідки

$$c=\frac{1}{\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx}=*$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}d(-\lambda x)=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{\infty}^{0}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda\cdot 0}-\frac{1}{e^{\lambda\infty}}\right)=\frac{1}{\lambda}(1-0)=\frac{1}{\lambda}.$$

$$*=\frac{1}{1/\lambda}=\lambda.$$

Отже, $c=\lambda$.

4.3.3. Випадкова величина X при $x \geq 0$ задана щільністю ймовірності (розподіл Вейбулла):

$$f(x) = \frac{n}{x_0} \cdot x^{n-1} e^{-\frac{x^n}{x_0}}.$$

Знайти моду X.

Розв'язок.

Мода – це значення випадкової величини X, при якому диференціальна функція щільності $f(x)$ має максимум.

Для цього обчислимо першу похідну по x і прирівняємо її до 0.

$$f^I(x) = \frac{n}{x_0}\left[(n-1)x^{n-2}e^{-\frac{x^n}{x_0}} + x^{n-1}e^{-\frac{x^n}{x_0}}\left(-\frac{nx^{n-1}}{x_0}\right)\right] = 0.$$

Винесемо за дужки $e^{-\frac{x^n}{x_0}} x^{n-2}$, отримаємо: $\frac{n}{x_0} e^{-\frac{x^n}{x_0}} x^{n-2} \times$

$$\times\left(n-1-\frac{x \cdot x^{n-1} \cdot n}{x_0}\right) = \frac{n}{x_0} e^{-\frac{x^n}{x_0}} x^{n-2}\left(n-1-\frac{n \cdot x^n}{x_0}\right) = 0.$$

Отже, $\frac{(n-1)x_0}{n} = x^n$ або $x = \left[\frac{n-1}{n} x_0\right]^{\frac{1}{n}}$. Таким чином,

$$Mo(x) = \left[\frac{n-1}{n} x_0\right]^{\frac{1}{n}}.$$

4.3.4. Випадкова величина X в інтервалі (0; 1) задана щільністю розподілу $f(x) = 2x$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$.

Знайти початкові і центральні моменти 1, 2, 3 і 4 порядків.

Розв'язок.

Початкові моменти знайдемо згідно формули:

$$v_k = \int\limits_a^b x^k \cdot f(x)dx$$. Отже,

$$v_1 = \int\limits_0^1 x \cdot 2xdx = 2\int\limits_0^1 x^2 dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3};$$

$$v_2 = \int\limits_0^1 x^2 \cdot 2xdx = 2\int\limits_0^1 x^3 dx = 2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2};$$

$$v_3 = \int\limits_0^1 x^3 \cdot 2xdx = 2\int\limits_0^1 x^4 dx = 2\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{2}{5};$$

$$v_4 = \int\limits_0^1 x^4 \cdot 2xdx = 2\int\limits_0^1 x^5 dx = \frac{2}{6}x^6\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Центральні моменти обчислимо через початкові:

$$\mu_1 = 0;$$

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18};$$

$$\mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3 = \frac{2}{5} - 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{5} - 1 +$$

$$+\frac{16}{27} = \frac{54 + 80 - 135}{135} = -\frac{1}{135};$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_1v_3 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4 = \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + 6\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} -$$

$$-3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} - \frac{16}{15} + \frac{4}{3} - \frac{16}{27} = \frac{45 - 144 + 180 - 80}{3 \cdot 5 \cdot 9} = \frac{1}{135}.$$

4.3.5. Випадкова величина X в інтервалі (-1; 1) задана щільністю розподілу $f(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$.

Знайти моду та медіану X.

Розв’язок.

а) Моди X нема (щільність розподілу не має максимуму).

б) $M(X) = 0$ (крива розподілу симетрична відносно $x = 0$);

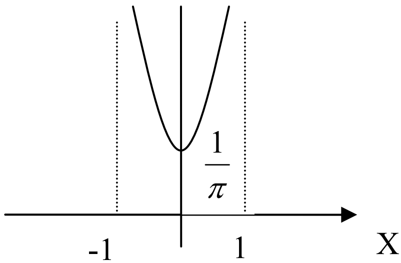


Рис. 4.3.1.

$x=0; f(x)=\dfrac{1}{\pi};.\ \lim\limits_{x\to\pm1} f(x)\to\infty$ (див. рис. 4.3.1).

4.3.6. Випадкова величина X задана щільністю ймовірності (розподіл Лапласа) $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$. Знайти математичне сподівання величини X.

Розв’язок.

$M(X)=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|}dx=0$, як інтеграл від непарної функції з симетричними межами.

4.3.7. Випадкова величина X задана щільністю ймовірності (розподіл Лапласа) $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$. Знайти дисперсію величини X.

Розв'язок.

$$D(X)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot e^{-|x|}dx - M^2(X)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot e^{-|x|}dx=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} x^2e^{-x}dx=-\int\limits_{0}^{\infty} x^2e^{-x}d(-x)=-\int\limits_{0}^{\infty} \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{d(e^{-x})}_{dv}=\int\limits_{\infty}^{0} x^2d(e^{-x})=$$

$$=\left|\begin{matrix} x^2=u; \quad du=2xdx; \\ dv=d(e^{-x}); \quad v=e^{-x}; \\ \int udv=u\cdot v-\int vdu \end{matrix}\right|=x^2\cdot e^{-x}\Big|_{\infty}^{0}-2\int\limits_{\infty}^{0} xe^{-x}dx=2\int\limits_{\infty}^{0} \underbrace{x}_{u}\underbrace{d(e^{-x})}_{dv}=$$

$$=2\left(xe^{-x}\Big|_{\infty}^{0}-\int\limits_{\infty}^{0} e^{-x}dx\right)=2\int\limits_{\infty}^{0} e^{-x}d(-x)=2e^{-x}\Big|_{\infty}^{0}=2e^0-2\cdot\lim_{x\to\infty}e^{-x}=2.$$

Тут враховано, що $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0;\ \lim\limits_{x\to\infty}xe^{-x}=0.$

4.3.8. Щільність розподілу неперервної випадкової величини X в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ рівна $f(x)=\frac{2}{\pi}\cos^2 x$; поза цим інтервалом $f(x)=0$.

Знайти ймовірність того, що в трьох незалежних випробуваннях X двічі прийме значення, яке належить інтервалу $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

Розв’язок.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x\ , \quad x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right);\\ 0, \qquad \text{поза інтервалом.}\end{cases}$$

Імовірність того, що задана випадкова величина X знаходиться в заданому інтервалі, рівна:

$$P\left(0\le X\le\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\pi}\cos^2 xdx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx=\left|\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\right|=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{2}{\pi\cdot 2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx+\frac{2}{\pi\cdot 2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx=\frac{1}{\pi}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\pi\cdot 2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}(1-0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}=\frac{\pi+2}{4\pi}.$$

Тоді імовірність описаної події A знайдемо за формулою Бернуллі:

$$P_n^k(A)=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{де} \quad p=p\left(0\le X\le\frac{\pi}{4}\right), \quad q=1-p,$$

$$q=1-p=1-\frac{\pi+2}{4\pi}=\frac{4\pi-\pi-2}{4\pi}=\frac{3\pi-2}{4\pi}.$$

Отже, $P_3(2)=C_3^2\left(\dfrac{\pi+2}{4\pi}\right)^2\left(\dfrac{3\pi-2}{4\pi}\right)^{3-2}=$

$$=3\cdot\left(\frac{\pi+2}{4\pi}\right)^2\left(\frac{3\pi-2}{4\pi}\right).$$

4.3.9. Щільність розподілу неперервної випадкової величини X в інтервалі (0; 1) рівна $f(x) = C\text{arctg}x$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$.

Знайти постійний параметр C.

Розв'язок.

Шуканий параметр C знайдемо з рівності:

$\int\limits_a^b f(x)dx = 1;$ або $\int\limits_0^1 C arctgx dx = 1;$ звідки

$C = \dfrac{1}{\int\limits_0^1 arctgx dx}$. Обчислимо знаменник: $\int\limits_0^1 arctgx dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} arctgx = u; \quad du = \dfrac{dx}{1+x^2}; \\ dx = dv; \quad v = x; \\ \int udv = u \cdot v - \int udv \end{array} \right| = x \cdot arctgx \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= 1 \cdot arctg1 - 0 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi - 2\ln 2}{4} = \frac{\pi - \ln 4}{4}.$$

Отже, $C = \dfrac{1}{\dfrac{\pi - \ln 4}{4}} = \dfrac{4}{\pi - \ln 4}$.

4.3.10. Випадкова величина X в інтервалі (-3; 3) задана щільністю розподілу $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$.

а) Знайти моду та медіану X.

б) знайти дисперсію X;

в) що імовірніше: в результаті випробування виявиться $X < 1$ чи $X > 1$?

Розв'язок.

а) $\lim\limits_{x\to\pm3} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm3} \dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}} \to \infty;\;\; f(0) = \dfrac{1}{3\pi}(\min).$

Функція існує при $(-3 < X < 3)$.

Функція щільності немає максимуму, тому моди теж немає.

Крива щільності симетрична відносно прямої $x = 0$, тому $Me = 0$, $M(X) = 0$. Останнє випливає з формули: $M(X) = = \int\limits_{-3}^{3} x\dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}dx = 0$ як інтеграл від непарної підінтегральної функції з симетричними межами.

б) Дисперсія $D(X) = \int\limits_{-3}^{3} x^2\dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} x = 3\sin t; dx = 3\cos t dt; \\ t = \arcsin\dfrac{x}{3}; \\ t_1 = \dfrac{\pi}{2}; t_2 = 0 \end{array} \right| = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-3}^{3} \frac{9\sin^2 t}{\sqrt{9-9\sin^2 t}} \cdot 3\cos t dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{3} \frac{9\sin^2 t \cdot 3\cos t dt}{3\cos t} = \frac{2\cdot 9}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \left| \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} \right| =$$

$$= \frac{9}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt = \frac{9}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} dt - \frac{9}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{9}{\pi}t\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{9}{2\pi}\times$$

$$\times \sin 2t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{9}{2\pi}\left(\sin 2\cdot\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

в) Обчислимо імовірність $P(X<1)=P(-3<X<1)=$

$$=\int_{-3}^{1} f(x)dx=\int_{-3}^{1} \frac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}dx=\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{3}\Big|_{-3}^{1}=\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{3}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\arcsin(-1)=\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+0{,}5.$$

$$P(X>1)=P(1<X<3)=\int_{1}^{3} \frac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{3}\Big|_{1}^{3}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\arcsin 1-\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)=0{,}5-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right).$$

Отже, $P(X<1)>P(X>1)$.

4.3.11. Випадкова величина *X* в інтервалі (3; 5) задана щільністю розподілу $f(x)=-(3/4)x^2+6x-45/4$, поза цим інтервалом $f(x)=0$. Знайти моду, математичне сподівання і медіану *X*.

Розв'язок.

Виділимо в функції щільності повний квадрат:

$$f(x)=-\frac{3}{4}x^2+6x-\frac{45}{4}=-\left[\left(\frac{3}{4}\right)x^2-6x+\frac{45}{4}\right]=$$

$$=-\frac{3}{4}\left[x^2-2\cdot 4x+15\right]=-\frac{3}{4}\left[x^2-2\cdot 4x+16-1\right]=$$

$$=-\frac{3}{4}\left[(x-4)^2-1\right]=-\frac{3}{4}(x-4)^2+\frac{3}{4}.$$

Як видно з цього виразу, при $x = 4$ щільність розподілу досягає максимуму; отже, $Mo(X) = 4$. Оскільки крива розподілу симетрична відносно $x = 4$, то $M(X) = 4$, $Me(X) = 4$: $M(X) = Mo(X) = Me(X) = 4$.

4.3.12. Величина *X* має щільність розподілу *f(x)*.

Обчислити її математичне сподівання:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x-1| & \text{, якщо } x \in [0;\ 2], \\ 0 & \text{, якщо } x > 2. \end{cases}$$

Розв'язок.

Графік функції щільності поданий на рис 4.3.2.

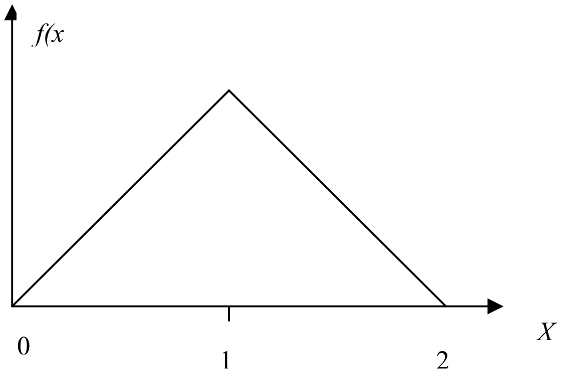


Рис. 4.3.2.

Розіб'єм інтервал x є [0;2] на два інтервали [0;1] і [1;2], так що:

$$M(X) = \int_0^2 x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x \cdot f(x)dx + \int_1^2 x \cdot f(x)dx =$$

$$= \int_0^1 x[1-(1-x)]dx + \int_1^2 x[1-(1-x)]dx = \int_0^1 x \cdot xdx +$$

$$+ \int_1^2 (2-x)xdx = \int_0^1 x^2 dx + 2\int_1^2 xdx - \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 2\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 -$$

$$- \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + 4 - 1 - \frac{1}{3}(8-1) = 1.$$

Отже, $M(X) = 1$, що й видно з малюнка.

4.3.13. Випадкова величина X має щільність ймовірності:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x & \text{при } |x|\le\dfrac{\pi}{2},\\[2ex] 0 & \text{при } |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайти $M(X)$ і $D(X)$.

Розв'язок.

Математичне сподівання $M(X)$ рівне:

$$M(X)=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cdot\frac{2}{\pi}\cos^2 xdx=0,$$ оскільки підінтегральна функція непарна з симетричними відносно початку координат межами.

Дисперсія рівна:

$$D(X)=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot\frac{2}{\pi}\cos^2 xdx-0^2=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 xdx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx==\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2dx+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2xdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\approx 0{,}3225.$$

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 xdx=\left|\begin{array}{l} x^2=u;\ \cos 2xdx=dv;\\ du=2xdx;\ v=\int\cos 2xdx=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2x\cdot 2xdx=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\pi-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin(-\pi)-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cdot 2\sin 2xdx=$$

$$=\begin{vmatrix} x=u;\sin 2xdx=dv; \\ dx=du;v=\int\sin 2xdx=-\dfrac{1}{2}\cos 2x\end{vmatrix}=\frac{x}{2}\cdot\cos 2x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+$$

$$=+\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\pi+\frac{\pi}{2}cos(-\pi)+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi-\frac{1}{4}\sin(-\pi)=-\frac{\pi}{2}.$$

4.3.14. Нижче подано функцію, яка залежить від певних параметрів:

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{ax+b}, & d\le x\le\infty \\ 0, & x<d\end{cases}$;

б) $f(x)=\begin{cases}cx^{\alpha}e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x<0\end{cases}$;

в) $f(x)=ce^{\alpha(x-b)^2}$;

г) $f(x)=\begin{cases}k\times|x-a|, & c\le x\le d \\ 0 & x\in[c,d]\end{cases}$;

д) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & ax^2 + bx + c \ge 0 \\ 0, & ax^2 + bx + c < 0 \end{cases}$;

е) $f(x) = \dfrac{d}{a + bx + cx^2}$.

Визначити значення параметрів, для яких ця функція буде щільністю розподілу.

Розв'язок.

а) Графік функції $f(x) = \dfrac{c}{ax + b}, (d \le x \le \infty)$ має вигляд (див. рис. 4.3.3а).

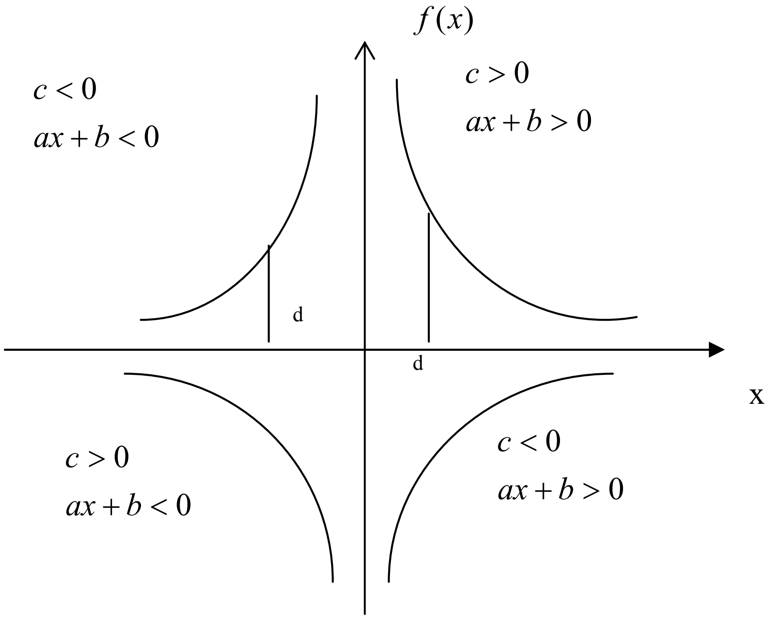


Рис. 4.3.3а.

Оскільки функція щільності невід'ємна функція, тобто лежить вище осі X, необхідно, щоб параметр C був додатний

(c > 0) при $d > -\dfrac{b}{a}$ і від'ємним $(c < 0)$ при $ax + b < 0$, і $d < -{b}/{a}$. Для визначення інших параметрів, для яких ця функція могла б бути щільністю розподілу, використаємо рівність $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, яка для даної області існування функції буде мати вигляд:

$$\int\limits_{d}^{\infty} \frac{c}{ax+b}dx = \frac{c}{a}\int\limits_{d}^{\infty} \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{c}{a}\ln|ax+b|\Big|_{a}^{\infty} = \frac{c}{a}\lim_{x\to\infty}|ax+b| -$$

$$-\frac{c}{a}\ln|ax+b| \to \infty .$$

Таким чином, інтеграл розбігається і дана функція щільністю не є.

б) Для невід'ємності функції необхідно, щоб $c > 0$, оскільки при додатному *x:* $x^{\alpha} > 0, e^{-\lambda x} > 0.$

Для визначення інших параметрів скористуємось рівністю:

$$\int\limits_{0}^{\infty} cx^{\alpha}e^{-\lambda x}dx = 1 \text{ або } c\int\limits_{0}^{\infty} x^{\alpha}e^{-\lambda x}dx = 1,\text{ звідки}$$

$c = \dfrac{1}{\int\limits_{0}^{\infty} x^{\alpha}e^{-\lambda x}dx}$. Обчислимо:

$$\int\limits_{0}^{\infty} x^{\alpha}e^{-\lambda x}dx = \left| \begin{array}{l} \lambda x = z \to x = \dfrac{z}{\lambda}; \\ dx == \dfrac{dz}{\lambda}; \\ x \to 0, z \to 0; \\ x \to \infty, z \to \infty; \end{array} \right| = \int\limits_{0}^{\infty} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\alpha} e^{-z}\frac{dz}{\lambda} =$$

$$=\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\int_0^{\infty} z^{\alpha}e^{-z}dz.$$

Оскільки $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ – гамма функція, то

$\int_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1)$, звідки $c=\frac{1}{\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1)}=$

$=\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}$, $c>0$.

в) Для невід'ємності функції необхідно, щоб $c>0$. Для визначення інших параметрів скористаємось рівністю:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} ce^{\alpha(x-b)^2}dx=c\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-b)^2}dx=1$, звідки

$c=\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-b)^2}dx}$. Щоб $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha(x-b)^2}dx$ був збіжним, необхідно,

щоб параметр a був від'ємним: $-|a|<0$.

Отже, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|a|(x-b)^2}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{|a|}(x-b)=t, dt=\sqrt{|a|}dx;\\ dx=\frac{1}{\sqrt{|a|}}dt; x\to-\infty, t\to-\infty;\\ x\to\infty, t\to\infty;\end{array}\right|=$

$$=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\cdot 2\cdot\int_0^{\infty} e^{t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|a|}},$$

звідки $c=\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{\pi}}$; $c>0$.

г) Графік функції $y = k|x-a|$ зображений на рис.4.3.3б, причому при $k > 0$ графік знаходиться над віссю *X*, при $k < 0$ – під віссю *X*. Оскільки задана функція повинна бути функцією щільності, а отже, додатньою $\left(f(x) \ge 0\right)$, $k > 0$.

Нехай $a < c < d$. Тоді умовою функції щільності є рівність: $\int\limits_c^d k|x-a|dx = 1$, або $\int\limits_c^d k(x-a)dx = 1$. Отже,

$$k\int\limits_c^d (x-a)dx = k\left[\left(\int\limits_c^d xdx - a\int\limits_c^d dx\right) = k\left(\frac{x^2}{2}\Big|_c^d - ax\Big|_c^d\right) = \right.$$

$$\left. k\left(\frac{d^2-c^2}{2} - a(d-c)\right)\right] == k(d-c)\left(\frac{d+c}{2} - a\right) = 1, \text{ звідки,}$$

$$k = \frac{1}{(d-c)\left(\frac{d+c}{2} - a\right)}.$$

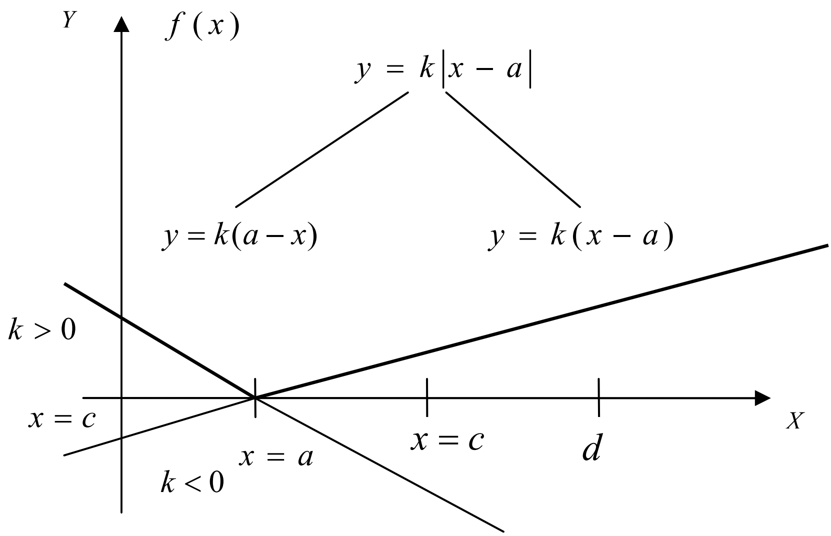


Рис. 4.3.3б.

Якщо $c < d < a$, то $\int\limits_c^d k|x-a|dx = k\int\limits_c^d (a-x)dx =$

$$= (c-d)\left(\frac{d+c}{2} - a\right)\cdot k, \text{ звідки, } k = \frac{1}{(c-d)\left(\frac{d+c}{2} - a\right)}.$$

Якщо $c < a < d$, то $\int\limits_c^d f(x)dx = k\int\limits_c^d |\ x-a)|dx =$

$$= k\left[\int\limits_c^a (a-x)dx + \int\limits_a^d (x-a)dx\right] = k\left[a\int\limits_c^a dx - \int\limits_c^a xdx + \int\limits_a^d xdx -\right.$$

$$\left. - a\int\limits_a^d dx\right] == k\left[ax\Big|_c^a - \frac{x^2}{2}\Big|_c^a + \frac{x^2}{2}\Big|_c^a - ax\Big|_c^a\right] =$$

$$= k\left[a(a-c) - \left(\frac{a^2-c^2}{2}\right) + \frac{d^2-a^2}{2} - a(d-a)\right] =$$

$$= k\left[\frac{2a^2 - 2ac + c^2 + d^2}{2}\right] = k\,\frac{(a-c)^2 + (d-a)^2}{2}, \qquad \text{звідки,}$$

$$k = \frac{2}{(a-c)^2 + (d-a)^2}.$$

д) Графіком функції $f(x) = ax^2 + bx + c$ є парабола, яка в залежності від знаку параметра a і дискримінанта D має вигляд, зображений на рисунку 4.3.3в, г, д.

Оскільки функція щільності є додатньою, то інтеграл по області (α,β), де функція $f(x) \geq 0$ дорівнює 1: $\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx = 1$.

Але інтеграли від функцій, зображених на рис. 4.3.3в, г є розбіжними. Тому використаємо дану властивість до функції, зображеної на рис. в) по області $x \in (x_1, x_2)$, де x_1, x_2 – корені рівняння $f(x) = 0$. У функції $f(x)$ виділимо повний квадрат.

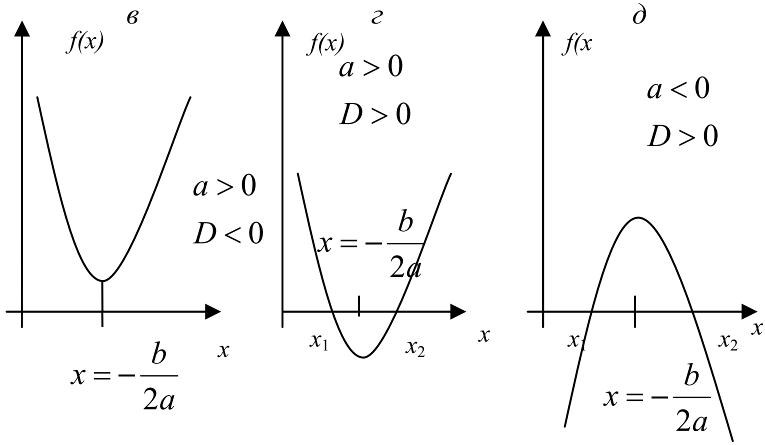


Рис. 4.3.3в, г, д.

Отже,

$$\int_{x_1}^{x_2}(ax^2+bx+c)dx = a\int_{x_1}^{x_2}\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)dx\right]=$$

$$=a\int_{x_1}^{x_2}\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]dx = a\int_{x_1}^{x_2}\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)\right]dx = a\left[\int_{x_1}^{x_2}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2dx+\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)dx\right]=1,$$

звідки $a=\dfrac{1}{\left[\int_{x_1}^{x_2}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2dx+\int_{x_1}^{x_2}\frac{4ac-b^2}{4a^2}dx\right]}$. Обчислимо знаменник даного виразу, прийнявши до уваги, що $x_{1/2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 dx = \left| \begin{array}{l} x+\frac{b}{2a}=t;\ x_1+\frac{b}{2a}=t_1; \\ x_2+\frac{b}{2a}=t_2;\ dx=dt; \end{array} \right| = \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt =$$

$$= \frac{t^3}{3}\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{t_2^3-t_1^3}{3} = \frac{\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{b}{2a}\right)^3-\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{b}{2a}\right)^3}{3} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^3-\left(-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^3}{3} = \frac{\left(b^2-4ac\right)^{3/2}}{12a^3};$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{4ac-b^2}{4a^2}dx = \frac{4ac-b^2}{4a^2}x\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{4ac-b^2}{4a^2}\times$$

$$\times\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}+b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a} = \frac{4ac-b^2}{4a^2}\cdot\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} =$$

$$= -\frac{(b^2-4ac)^{3/2}}{4a^3}.$$

Отже, $a = \dfrac{1}{\dfrac{(b^2-4ac)^{3/2}}{12a^3}-\dfrac{(b^2-4ac)^{3/2}}{4a^3}} = -\dfrac{6a^3}{(b^2-4ac)^{3/2}}$,

або $1 = -\dfrac{6a^2}{(b^2-4ac)^{3/2}}$, де знак “-” вказує на те, що $a < 0$.

Тому опустимо його, щоб не прийти до протиріччя, адже $6a^2 > 0$ є додатнім числом, і вираз $(b^2-4ac)^{3/2} > 0$. Отже, $6a^2 = (b^2-4ac)^{3/2}$ при $a < 0, b^2 > 4ac$.

Приклад. Нехай $a = -2$, $c = -1$, тоді $6a^2 = 6(-2)^2 = 24$, $4ac = 8$ і умова щільності функції запишеться так:

$24=(b^2-8)^{3/2}$. З цього рівняння знайдемо b: $24^2=(b^2-8)^3$, або $576=(b^2-8)^3$, або $8{,}320033529=b^2-8$, звідки b^2 = = 16,320033529 і b = $\pm 4{,}03984347$. Таким чином, функція щільності має вигляд: $f_1(x)=-2x^2+4{,}03984347x-1$. $(b=4{,}03984347)$ або $f_2(x)=-2x^2-4{,}03984347x-1$. $(b=-4{,}03984347)$.

Перевіримо, що при даному співвідношенні параметрів $f_1(x)$ є щільністю, тобто $\int\limits_{x_1}^{x_2} f_1(x)dx=1$. Маємо:

$$-2\int\limits_{x_1}^{x_2} x^2dx+4{,}03984347\int\limits_{x_1}^{x_2} xdx-\int\limits_{x_1}^{x_2} dx=-2\frac{x^3}{3}\Big|_{x_1}^{x_2}+$$

$$+4{,}03984347\frac{x^2}{2}\Big|_{x_1}^{x_2}-x\Big|_{x_1}^{x_2}=\left|x_{1/2}=\frac{4{,}03984347\pm\sqrt{8{,}320033529}}{4}=\right.$$

$$=\left|\begin{matrix}x_1=0{,}288836083\\ x_2=1{,}73108565\end{matrix}\right\|=-\frac{2}{3}\left[1{,}73108565^3-0{,}288836083^3\right]+$$

$$+\frac{4{,}03984347}{2}\left[1{,}73108565^2-0{,}288836083^2\right]-1{,}44224957=$$

$$=1{,}00000.$$

Аналогічно: $\int\limits_{x_1}^{x_2} f_2(x)dx=1$, маємо:

$$-2\int\limits_{x_1}^{x_2} x^2dx-4{,}03984347\int\limits_{x_1}^{x_2} xdx-\int\limits_{x_1}^{x_2} dx=$$

$$=\left|x_1=-1{,}731085651;\ x_2=-0{,}288836083;\right|=$$

$$=-\frac{2}{3}\left[(-0{,}288836083)^3-(-1{,}731085651)^3\right]-\frac{4{,}03984347}{2}\times$$

$$\times\left[(-0{,}288836083)^2-(-1{,}731085651)^2\right]-(-0{,}288836083+$$

$+1{,}731085651) = -3{,}442249555 + 5{,}884499112 -$
$-1{,}442249568 = 1{,}0000.$

е) Графік функції $f(x) = \dfrac{d}{ax^2 + bx + c}$ в залежності від знаку параметра d і дискримінанта D має вигляд (рис. 4.3.3є-і):

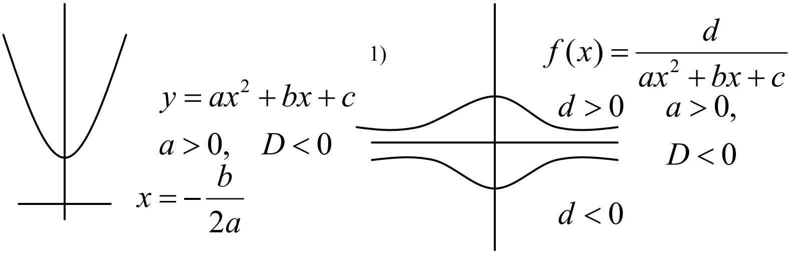


Рис. 4.3.3е

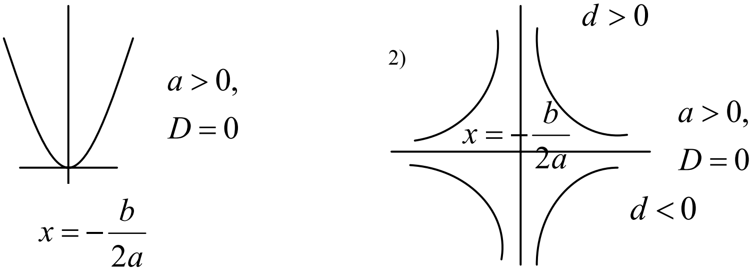


Рис. 4.3.3є

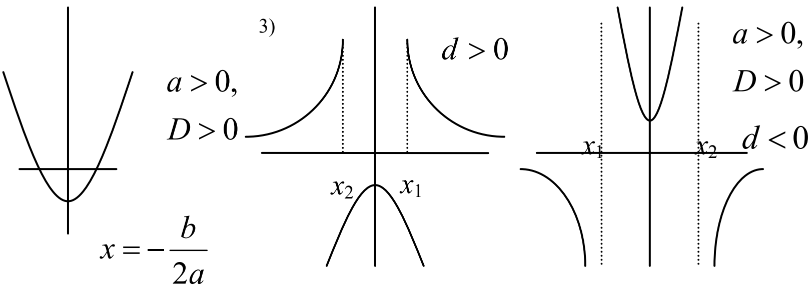


Рис. 4.3.3ж

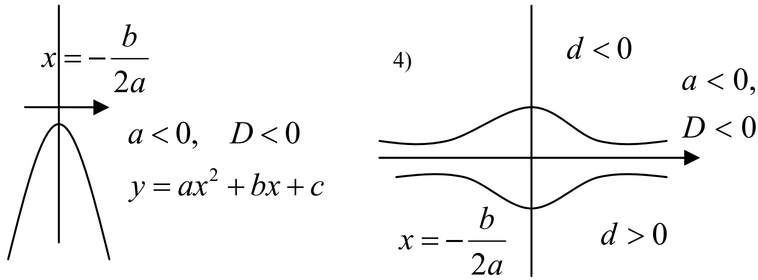


Рис. 4.3.3з

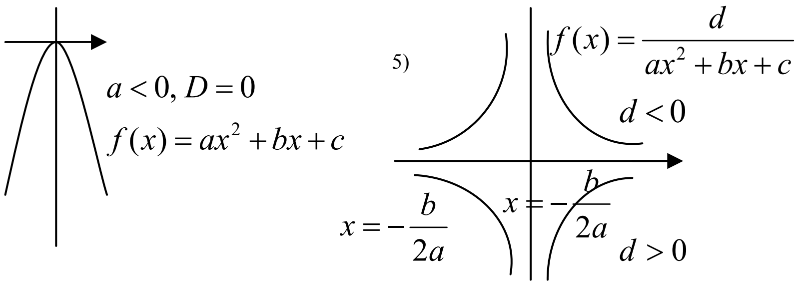


Рис. 4.3.3и

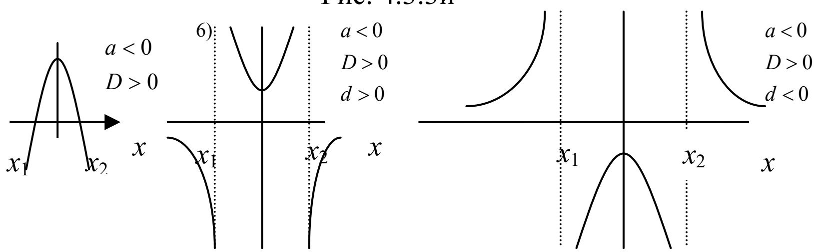


Рис. 4.3.3і

Оскільки функція щільності додатня, то нас будуть цікавити ті випадки, де функція розташована над віссю X. Виділимо повний квадрат у знаменнику і використаємо властивість функції щільності:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ax^2+bx+c}dx = d\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]} =$$

$$= \left| \begin{matrix} x+\dfrac{b}{2a}=t;\ dx=dt; \\ x\to\infty; t\to\infty;\ x\to-\infty; t\to-\infty \end{matrix} \right| = d\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{a\left[t^2\pm k^2\right]} =$$

$$= \frac{d}{a}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2\pm k^2},$$ де позначено $\dfrac{4ac-b^2}{4a^2} = \pm k^2.$

Знак плюс береться тоді, коли $\dfrac{4ac-b^2}{4a^2} > 0$, тобто $D < 0$, а отже, корені тричлена $ax^2 + bx + c$ – комплексні; знак мінус береться тоді, коли $\dfrac{4ac-b^2}{4a^2} < 0$, тобто $D > 0$, тобто корені тричлена $ax^2 + bx + c$ – дійсні.

1. Нехай $D < 0$ (рис 4.3.3е: $a > 0$, $d > 0$ і рис 4.3.3з: $a < 0$, $d < 0$), тоді:

$$d\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{d}{a}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^2\pm k^2} = \frac{d}{a}\cdot\frac{1}{k}arctg\frac{t}{k}\Big|_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= \frac{d}{a\cdot k}\left(\lim_{t\to\infty} arctg\frac{t}{k} - \lim_{t\to-\infty} arctg\frac{t}{k}\right) = \frac{d}{a\cdot k}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{d}{a\cdot k}\cdot\pi = 1.$$

Звідки, $d = \dfrac{a\cdot k}{\pi} = \dfrac{a}{\pi}\cdot\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2\pi}$;

$d = \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2\pi}$, причому a і d одного знаку.

Приклад. Обчислити значення параметра d при якому функція $f(x)=\dfrac{d}{-2x^2+3x-3}$ є щільністю.

У знаменнику виділимо повний квадрат винісши параметр $a = 2$ за дужки.

$$d\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{-2\left[x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right]}=-\frac{d}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+\frac{3}{2}}=$$

$$=-\frac{d}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}=-\frac{d}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}=$$

$$=-\frac{d}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^2+k^2}=-\frac{d}{2\sqrt{\frac{15}{16}}}arctg\frac{t}{\sqrt{\frac{15}{16}}}\Big|_{-\infty}^{\infty}=$$

$$=-\frac{2d}{\sqrt{15}}arctg\frac{4t}{\sqrt{15}}\Big|_{-\infty}^{\infty}=-\frac{2d}{\sqrt{15}}\cdot\left(\lim_{t\to\infty}arctg\frac{4t}{\sqrt{15}}-\right.$$

$$\left.-\lim_{t\to-\infty}arctg\frac{4t}{\sqrt{15}}\right)=-\frac{2d}{\sqrt{15}}\cdot\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-\frac{2d}{\sqrt{15}}\cdot\pi=1.$$

Звідки $d=-\dfrac{\sqrt{15}}{2\pi}$, параметри a і d – від'ємні.

2. Нехай $D > 0$ (рис 4.3.3ж: $a > 0$, $d > 0$ і рис 4.3.3і: $a < 0$, $d < 0$), тоді:

$$d\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{ax^2+bx+c}=d\cdot\left[\int_{-\infty}^{x_1}\frac{dx}{ax^2+bx+c}+\int_{x_2}^{\infty}\frac{dx}{ax^2+bx+c}\right]=$$

$$=\frac{d}{a}\cdot\left[\int_{-\infty}^{t_1}\frac{dt}{t^2-k^2}+\int_{t_2}^{\infty}\frac{dt}{t^2-k^2}\right]=\frac{d}{a}\cdot\left[\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|\Big|_{-\infty}^{t_1}+\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|\Big|_{t_2}^{\infty}\right].$$

Оскільки інтеграли в квадратних дужках розбіжні (не мають границь), то функція з квадратним тричленом у якого $D > 0$, диференціальною бути не може.

3. Нехай $D = 0$ (рис 4.3.3є: $a > 0$, $d > 0$ і рис 4.3.3и: $a < 0$, $d < 0$), тоді:

$$d \cdot \left[\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{dx}{ax^2 + bx + c} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \right] = d \cdot \left[\int_{-\infty}^{-\frac{b}{2a}-\varepsilon} \frac{d\left(x + \frac{b}{2a}\right)}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \int_{-\frac{b}{2a}+\varepsilon}^{\infty} \frac{d\left(x + \frac{b}{2a}\right)}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} \right] = d \cdot \left[\frac{1}{x + \frac{b}{2a}} \Bigg|_{-\frac{b}{2a}-\varepsilon}^{-\infty} + \frac{1}{x + \frac{b}{2a}} \Bigg|_{\infty}^{-\frac{b}{2a}+\varepsilon} \right].$$

Оскільки вирази в дужках не мають границь, тобто є розбіжними, то функція, тричлен якої має $D = 0$, не може бути функцією щільності.

4.3.15. Якій з трьох запропонованих лотерей $L_1(36;0{,}44;41)$, $L_2(100;0{,}8;150)$, $L_3(100;0{,}2;150)$, особа надасть перевагу, якщо її функція корисності задається формулами:

а) $U(x) = \dfrac{2x-3}{7}$;

б) $U(x) = x^4$;

в) $U(x) = \sqrt[4]{x}$?

Обчислити премію за ризик.

Вказівка. Згідно з основним положенням теорії корисності, суб’єкт керування, що приймає рішення в умовах невизначеності та породженого нею ризику, повинен максимізувати сподіване значення корисності результатів.

Розв’язок

1. Обчислимо сподіваний виграш у лотереї з дискретними виграшами за формулою:

$$M(X)=\overline{x}=\sum_{i=1}^{2}x_i p_i \ .$$

Для лотереї – L_1: $\overline{x}_1$ = 36 · 0,44+41· 0,56 = 38,8;

L_2: $\overline{x}_2$ = 100 · 0,8+150 · 0,2 =110 ;

L_3: $\overline{x}_3$ = 100 · 0,2 + 150 · 0,8 =140 .

а) 2. Обчислимо сподівану корисність участі у лотереї за формулою:

$$M(U(x))=\overline{U}(x)=\sum_{i=1}^{2}U(x_i)\cdot p_i=U(x_1)\cdot p_1+U(x_2)\cdot p_2=$$

$$=\frac{2x_1-3}{7}\cdot p_1+\frac{2x_2-3}{7}\cdot p_2 \ .$$

Для лотереї L_1: $M_1(U(x))=\overline{U_1}(x)=\dfrac{2\cdot 36-3}{7}\cdot 0{,}44+$

$$+\frac{2\cdot 41-3}{7}\cdot 0{,}56=10{,}66 \ .$$

Для лотереї L_2: $M_2(U(x))=\overline{U_2}(x)=\dfrac{2\cdot 100-8}{7}\cdot 0{,}8+$

$$+\frac{2\cdot 150-3}{7}\cdot 0{,}2=31{,}00 \ .$$

Для лотереї L_3: $M_3(U(x))=\overline{U_3}(x)=\dfrac{2\cdot 100-3}{7}\cdot 0{,}2+$

$$+\frac{2\cdot 150-3}{7}\cdot 0{,}8=39{,}57 \ .$$

Висновок. Оскільки суб’єкт керування повинен максимізувати сподіване значення корисності результатів, то він вибере лотерею L_3, оскільки для неї сподіване значення $M_3(U(x))=\overline{U_3}(x)$ – максимальне.

3. Визначимо детермінований еквівалент $\hat{x}$ (гарантовану суму $\hat{x}$, отримання якої еквівалентне участі у лотереї) лотереї L_1 за формулою:

$U(\hat{x}) = M(U(x))$.

Для лотереї L_1: $\dfrac{2\hat{x}_1 - 3}{7} = 10,657$, звідки

$\hat{x}_1 = \dfrac{10,657 \cdot 7 + 3}{2} = 38,7995 = 38,8.$

Для лотереї L_2: $\dfrac{2\hat{x}_2 - 3}{7} = 31,00$, звідки $\hat{x}_2 =$

$= \dfrac{31,00 \cdot 7 + 3}{2} = 110.$

Для лотереї L_3: $\dfrac{2\hat{x}_3 - 3}{7} = 39,5715$, звідки $\hat{x}_3 =$

$= \dfrac{39,5715 \cdot 7 + 3}{2} = = 140.$

4. Обчислимо премію π за ризик участі у лотереї за формулою: $\pi = \bar{x} - \hat{x}$.

Для лотереї L_1: $\pi_1 = 38,8 - 38,8 = 0.$

Для лотереї L_2: $\pi_2 = 110 - 110 = 0.$

Для лотереї L_3: $\pi_3 = 140 - 140 = 0.$

Висновок. Зростаюча лінійна функція корисності характеризує особу нейтральну до ризику, премія за ризик для якої дорівнює нулю. Слід вибрати лотерею L_3, оскільки для неї сподіване значення корисності виграшу максимальне.

б) $U(x) = x^4$.

2.Обчислимо сподівану корисність участі у лотереї :

L_1: $\overline{U}_1(x) = U(36)\, p_1 + U(41)\, p_2 = (36)^4 \cdot 0,44 + (41)^4 \cdot 0,56 =$
$= 2321457,2;$

L_2: $\overline{U}_2(x) = U(100)\, p_1 + \mathrm{U}(150)\, p_2 = (100)^4 \cdot 0,8 + (150)^4 \cdot 0,2 =$
$= 181250000;$

L_3: $\overline{U}_3(x) = U(100)\, p_1 + \mathrm{U}(150)\, p_2 = (100)^4 \cdot 0,2 + (150)^4 \cdot 0,8 =$
$= 425000000.$

3.Визначимо детермінований еквівалент $\hat{x}$ для лотерей:

L_1: $\hat{x}_1^4 = 2321457{,}2$; звідки $\hat{x} = 39{,}03$;

L_2: $\hat{x}_2^4 = 181250000$; звідки $\hat{x} = 116{,}03$;

L_3: $\hat{x}_3^4 = 425000000$; звідки $\hat{x} = 143{,}58$.

4. Премія за ризик для лотерей складає:
L_1: $\pi_1 = 38{,}8 - 39{,}03 = -0{,}23$;
L_2: $\pi_2 = 110 - 116{,}03 = -6{,}03$;
L_3: $\pi_3 = 140 - 143{,}58 = -3{,}58$.

Висновок. Функція корисності $U(x) = x^4$, зростаюча і увігнута вниз і оскільки $\pi < 0$, то вона характеризує особу схильну до ризику. Треба вибрати лотерею L_3, оскільки їй відповідає найбільша сподівана корисність виграшу у лотереї.

в).$U(x) = \sqrt[4]{x}$.

2. Обчислимо сподівану корисність участі у лотереї –

L_1: $\overline{U}_1(x) = \sqrt[4]{36} \cdot 0{,}44 + \sqrt[4]{41} \cdot 0{,}56 = 2{,}49$;

L_2: $\overline{U}_2(x) = \sqrt[4]{100} \cdot 0{,}8 + \sqrt[4]{150} \cdot 0{,}2 = 3{,}23$;

L_3: $\overline{U}_3(x) = \sqrt[4]{100} \cdot 0{,}2 + \sqrt[4]{150} \cdot 0{,}8 = 3{,}43$.

3. Визначимо детермінований еквівалент $\hat{x}$ для лотерей:

L_1: $\sqrt[4]{\hat{x}}_1 = 2{,}4948$; звідки $\hat{x}_1 = (2{,}4948)^4 = 38{,}74$;

L_2 : $\sqrt[4]{\hat{x}}_2 = 3{,}2297$; звідки $\hat{x}_2 = (3{,}2297)^4 = 108{,}81$;

L_3 : $\sqrt[4]{\hat{x}}_3 = 3{,}4322$; звідки $\hat{x}_3 = (3{,}4322)^4 = 138{,}77$.

4. Премія за ризик π для участі у лотереях складає:
L_1: $\pi_1 = 38{,}8 - 38{,}74 = 0{,}06$;
L_2: $\pi_2 = 110 - 108{,}8086 = 1{,}19$;
L_3: $\pi_3 = 140 - 138{,}7683 = 1{,}23$.

Висновок. Функція корисності $U(x) = \sqrt[4]{x}$ зростаюча і опукла вгору, і оскільки премія за ризик $\pi > 0$, то вона характеризує особу несхильну до ризику. Оскільки лотереї L_3 відповідає найбільша сподівана корисність виграшу, то слід обрати лотерею L_3.

4.3.16. Знайти сподіваний виграш, детермінований еквівалент та премію за ризик для лотереї, яка визначається такою щільністю розподілу ймовірностей виграшу:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{288} \cdot (24 - x), & 0 \le x \le 24, \\ 0, & x < 0, \qquad x > 24. \end{cases}$$

Корисність лотереї задається виразом:

а) $U(x) = 0{,}890x$;

б) $U(x) = 0{,}5x^2$;

в) $U(x) = 0{,}9\sqrt{x}$.

Розв'язок

1.Обчислимо сподіваний виграш $\overline{x}$ у лотереї за формулою:

$$\overline{x} = M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx .$$

$$\overline{x} = \frac{1}{288}\int_0^{24} x \cdot (24 - x)dx = \frac{24}{288}\int_0^{24} xdx - \frac{1}{288}\int_0^{24} x^2 dx =$$

$$= \frac{24}{288} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{24} - \frac{1}{288} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{24} = \frac{24^2}{96} - \frac{1 \cdot 24^2}{288 \cdot 3} = 24 - 16 = 8.$$

2. а). $U(x) = 0{,}89x$.

Сподівана корисність $\overline{U}(x)$ рівна:

$$M[U(x)] = \int_0^{24} U(x)f(x)dx = \int_0^{24} 0{,}89x \cdot \frac{1}{288}(24 - x)dx =$$

$$= \frac{0{,}89 \cdot 24}{288}\int_0^{24} xdx - \frac{0{,}89}{288}\int_0^{24} x^2 dx = 0{,}074167\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{24} -$$

$$-0{,}00309\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{24} = 21{,}36 - 14{,}239 = 7{,}122.$$

Детермінований еквівалент знаходимо з формули :

$U(\hat{x}) = M[U(x)]$; $0{,}89\hat{x} = 7{,}121$, звідки $\hat{x} = 8{,}001$.

Премія за ризик складає: $\pi = \bar{x} - \hat{x} = 8 - 8 = 0$.

Премія за ризик дорівнює 0, отже особа байдужа до ризику.

б). $U(x) = 0{,}5x^2$.

Сподівана корисність $\overline{U}(x)$ рівна :

$$M[U(x)] = \int_0^{24} 0{,}5x^2 \cdot \frac{1}{288}(24 - x)dx = 0{,}5 \cdot \frac{24}{288}\int_0^{24} x^2 dx -$$

$$-\frac{0{,}5}{288}\int_0^{24} x^3 dx = 0{,}041667\frac{x^3}{x}\Big|_0^{24} - 0{,}001736\frac{x^4}{4}\Big|_0^{24} = 192 - 144 = 48 \cdot$$

Детермінований еквівалент складає:

$0{,}5\,\hat{x}^2 = 48$; звідки $\hat{x}^2 = 96$ або $\hat{x} = 9{,}798$;

Премія за ризик:

$\pi = \bar{x} - \hat{x} = 8 - 9{,}8 = -1{,}8$, премія менша 0, тому особа схильна до ризику.

в). $U(x) = 0{,}9\sqrt{x}$.

Сподівана корисність $\overline{U}(x)$ рівна:

$$M[U(x)] = \int_0^{24} 0{,}9\sqrt{x} \cdot \frac{1}{288}(24 - x)dx = 0{,}9 \cdot \frac{24}{288}\int_0^{24} \sqrt{x}dx -$$

$$-\frac{0{,}9}{288}\int_0^{24} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{24 \cdot 2x^{\frac{3}{2}}}{320 \cdot 3}\Bigg|_0^{24} - \frac{1 \cdot 2x^{\frac{5}{2}}}{320 \cdot 3}\Bigg|_0^{24} = \frac{1}{20}\sqrt{24^3} - \frac{\sqrt{24^5}}{800} =$$

$= 5{,}87878 - 3{,}5273 = 2{,}352$.

Детермінований еквівалент складає:

$0{,}9\sqrt{\hat{x}} = 2{,}352$ або $\sqrt{\hat{x}} = 2{,}613$, звідки $\hat{x} = 6{,}829$.

Премія за ризик рівна:

$\pi = \bar{x} - \hat{x} = 8 - 6{,}82667 = 1{,}1733 > 0$,

отже особа несхильна до ризику.

4.4. Функція розподілу імовірностей випадкової величини та її властивості

Інтегральною або ***функцією розподілу*** називають функцію $F(x)$, яка визначає імовірність того, що випадкова величина X в результаті випробування набуде значення, яке строго менше, ніж x: $F(x) = P(X < x)$ (4.4.1).

1. Область визначення функції розподілу – множина всіх дійсних чисел, а область значень – відрізок [0; 1].

2. $F(x)$ – неспадна функція, тобто $F(x_2) \geq F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

Наслідок 1. Імовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $[a, b]$, дорівнює різниці інтегральних функцій на кінцях цього проміжку:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \qquad (4.4.2).$$

Наслідок 2. Імовірність того, що неперервна випадкова величина X при випробуванні набуде одне певне значення дорівнює нулю.

3. Якщо можливі значення випадкової величини X належать інтервалу $[a, b]$, то: 1) $F(x) = 0$ при $x \leq a$; 2) $F(x) = 1$ при $x \geq b$.

Наслідок. Якщо можливі значення неперервної випадкової величини X розташовані на всій числовій осі, то виконуються такі граничні співвідношення:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \ \lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \qquad (4.4.3).$$

Якщо ж неперервна випадкова величина означена в інтервалі $[a, b]$, то граничні співвідношення мають такий вигляд $\lim_{x \to a-0} F(x) = 0$, $\lim_{x \to b-0} F(x) = 1$.

Графіком інтегральної функції є крива, що обмежена прямими $y = 0$ і $y = 1$.

Задачі

4.4.1. Кидають три монети.

Потрібно:

а) задати випадкову величину X, яка рівна числу випадань "номіналу";

б) побудувати ряд розподілу і функцію розподілу $F(x)$ величини X, якщо ймовірність випадання "герба" рівна 0,5.

Розв'язок.

а) Нехай випадкова величина X – число випадань номіналу. У трьох випробуваннях $n = 3$ (підкидають три монети), номінал може випасти $X = 0, 1, 2, 3$ число разів. Відповідні імовірності обчислимо згідно формули Бернуллі:

$$P_n(x) = C_n^x p^x q^{n-x}; \quad q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5;$$

$$P(x=0) = C_3^0 p^0 q^{3-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}125;$$

$$P(x=1) = C_3^1 p^1 q^{3-1} = 3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}375;$$

$$P(x=2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}375;$$

$$P(x=3) = C_3^3 p^3 q^0 = 1 \cdot (0{,}5)^3 \cdot 1 = 0{,}125.$$

Перевірка: $\sum p_i = 0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 + 0{,}125 = 1{,}0$.

Отже, закон розподілу X має вигляд:

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

1. Якщо $x \le 0$, то $F(x) = 0$. Дійсно, значень менших числа 0 величина x не приймає. Отже, при $X < 0$ функція $F(x) = P(X \le x) = 0$.

2. Якщо $0 \le x < 1$, то $F(x) = 0{,}125$. Дійсно, X може прийняти значення 0 з імовірністю 0,125.

3. Якщо $1 \le x < 2$, то $F(x) = 0{,}5$. Дійсно, X може прийняти значення 0 з імовірністю 0,125 і значення 1 з імовірністю 0,375. Отже, одне з цих значень, байдуже яке, X може прийняти (за теоремою додавання імовірностей несумісних подій) з імовірністю 0,125 + 0,375 = 0,5.

4. Якщо $1 \le x < 3$, то $F(x) = 0{,}875$. Дійсно, X може прийняти значення 0 з імовірністю 0,125; значення 1 з імовірністю 0,375 і значення 2 з імовірністю 0,375. Отже, одне з цих значень, байдуже яке, X може прийняти (за теоремою додавання імовірностей несумісних подій) з імовірністю 0,125 + + 0,375 + 0,375 = 0,875.

5. Якщо $x > 3$, то $F(x) = 1$. Дійсно, подія $X \le 3$ – достовірна і її імовірність рівна 1.

Таким чином, інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 0{,}125 & 0 < x \le 1, \\ 0{,}5 & 1 < x \le 2, \\ 0{,}875 & 2 < x \le 3, \\ 1 & x > 3. \end{cases}$$

На рис. 4.4.1 наведений графік цієї функції:

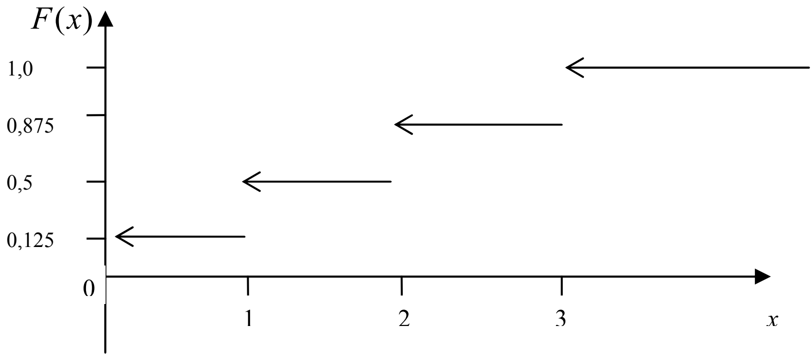


Рис. 4.4.1.

4.4.2. Випадкова величина X задана на всій осі OX функцією розподілу

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{arctgx}{\pi}.$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування величина X прийме значення з інтервалу (0; 1).

Розв'язок.

$F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{arctgx}{\pi}$. Для знаходження шуканої імовірності використаємо формулу $P(\alpha \le X \le \beta)=F(\beta)-F(\alpha)$. Отже,

$$P(0\le X\le 1)=F(1)-F(0)=\frac{1}{2}+\frac{arctg1}{\pi}-\frac{1}{2}-\frac{arctg0}{\pi}=$$

$$=\frac{\pi}{4\cdot\pi}-0=\frac{1}{4}.$$

4.4.3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le -2; \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\arcsin\frac{x}{2}}{\pi} & \text{при } -2<x\le 2; \\ 1 & \text{при } x>2. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування величина X прийме значення, яке належить інтервалу (–1; 1).

Розв'язок.

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x\le -2; \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2} \quad -2<x\le 2; \\ 1 \quad \text{при} \quad x>2. \end{cases}$$

$$P(-1\le X\le 1)=F(1)-F(-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

4.4.4. Випадкова величина X задана на всій осі OX функцією розподілу:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{\pi}.$$

Знайти можливе значення x_1, що задовольняє умову: з ймовірністю 1/4 випадкова величина X в результаті випробування прийме значення, більше x_1.

Розв'язок.

Події $(X \le x_1)$ і $(X > x_1)$ – протилежні, тому

$P(X \le x_1)+(X > x_1)=1$. Звідки $P(X > x_1)=1-(X \le x_1)=\frac{1}{6}$ згідно умови задачі. Отже, $P(X \le x_1)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. Але подія $(X \le x_1)=(X = x_1)+(X < x_1)$ – сума несумісних подій, тому $P(X \le x_1)=P(X = x_1)+P(X < x_1)=P(X < x_1)$, оскільки $P(X = x_1)=0$, як імовірність того, що неперервна випадкова величина приймає конкретне значення x. За означенням $P(X < x_1)=F(x_1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\frac{x_1}{2}$. Отже, $\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\times$ $\times arctg\frac{x_1}{2}$, або $arctg\frac{x_1}{2}=\frac{\pi}{3}$, звідки $\frac{x_1}{2}=\sqrt{3}$, або $x_1=2\sqrt{3}$.

4.4.5. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x \le 0;\\ x^2 & \text{при } 0 < x \le 1;\\ 1 & \text{при } x > 1.\end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті 4 незалежних випробувань величина X рівно 3 рази прийме значення, що належить інтервалу (0,25; 0,75).

Розв'язок.

Нехай подія A полягає в тому, що в 4 незалежних випробуваннях подія настає три рази. Обчислимо спочатку імовірність того, що випадкова величина попадає в заданий інтервал:

$$p = P(0{,}25 \le X \le 0{,}75) = F(0{,}75) - F(0{,}25) = x^2 \Big|_{0{,}25}^{0{,}75} =$$

$$= (0{,}75)^2 - (0{,}25)^2 = 0{,}5625 - 0{,}0625 = 0{,}5.$$

Тоді імовірність події A обчислимо згідно формули Бернуллі: $P_4(3) = C_4^3 p^3 q$, де $p = 0{,}5$; $q = 0{,}5$.

Отже, $P_4(3) = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

4.4.6.. Точку кидають навмання всередину кулі радіуса R. Ймовірність її попадання в будь-яку область, розташовану в середині кулі, пропорційна об'єму цієї області.

Знайти функцію розподілу, щільність ймовірності, математичне сподівання і дисперсію віддалі від точки до центру кулі.

Розв'язок.

Нехай випадкова величина X – віддаль від точки до центру кола. Згідно умови задачі $0 \le x \le R$. Тоді ймовірність того, що точка попаде всередину кулі радіуса x рівна відношенню об'ємів куль радіусів x і R:

$$P(X \le x) = \frac{\frac{4}{3}\pi x^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{x^3}{R^3}.$$

А згідно означення, це є інтегральною функцією розподілу ймовірності.

Отже, $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{R^3}, & 0<x\le R;\\ 0 \quad \text{при} & x<0;\\ 1 \quad \text{при} & x>R.\end{cases}$

Щільність ймовірності $f(x)=F^{/}(x)=\left(\dfrac{x^3}{R^3}\right)^{/}$.

Отже, $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{3x^2}{R^3}, & 0\le x\le R;\\ 0 \quad \text{при} & x\ge R.\end{cases}$

Тоді математичне сподівання $M(X)$ і дисперсія $D(X)$ віддалі від точки до центру кулі рівні:

$$M(X)=\int_0^R x\cdot f(x)dx=\frac{3}{R^3}\int_0^R x\cdot x^2dx=\frac{3}{R^3}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^R=$$

$$=\frac{3}{4R^3}R^4=\frac{3}{4}R;$$

$$D(X)=\int_0^R x^2 f(X)dx-M^2(X)=\frac{3}{R^3}\int_0^R x^2\cdot\frac{3}{R^3}x^2\cdot dx-$$

$$-\left(\frac{3}{4}R\right)^2=\frac{3}{R^3}\frac{x^5}{5}\Big|_0^R-\left(\frac{3}{4}R\right)^2=\frac{3}{5}\frac{R^5}{R^3}-\frac{9}{16}R^2=\frac{3}{80}R^2.$$

4.4.7. Випадкова величина X розподілена за законом Релея з щільністю ймовірності:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}\times e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{при } x>0 \ (\sigma>0),\\ 0 & \text{при } x\le 0.\end{cases}$$

Знайти:

а) функцію розподілу випадкової величини X;

б) моду і медіану цього розподілу.

Розв’язок.

а) Інтегральна функція розподілу визначається за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= -\int_{0}^{x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = \int_{x}^{0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Big|_{x}^{0} = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

б) Мода, як значення випадкової величини при якому функція щільності досягає максимуму знаходиться з умови $f^{/}(x) = 0$. В результаті диференціювання отримуємо вираз:

$$\frac{1}{\sigma^2}\left[e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{2x}{2\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} \left[\sigma^2 - x^2\right] = 0.$$

Отже, $x^2 = \sigma^2$, або $x = \sigma$. Таким чином, $Mo = \sigma$.

Значення медіани знаходиться з умови: $P(x \le Me) =$ $= P(x \ge Me) = \frac{1}{2}, \quad F(Me) = \frac{1}{2}.$

Підставимо $X = Me$ у вираз інтегральної функції: $1 - e^{-\frac{Me^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2}$ або $e^{-\frac{Me^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2}$.

Прологарифмуємо вираз і отримуємо:

$Me^2 = 2\sigma^2 \ln 2$, отже $Me = \sigma\sqrt{2\ln 2} \approx 1{,}18\sigma$.

в) Математичне сподівання *M(X)* випадкової величини X рівне:

$$M(X) = \int_{0}^{\infty} x \cdot \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = -\int_{0}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$=\int_{\infty}^{0} xd\left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)=xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_{\infty}^{0}-\int_{\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}\dfrac{x}{\sigma}=z;\, x=\sigma\cdot z\\ dx=\sigma dz\end{matrix}\right|=\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\sigma dz=\sigma\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sigma\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

$$\left\|\begin{matrix}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}\\ \displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\end{matrix}\right.$$ – інтеграл Пуассона;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sigma^2}{2xe^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}}=0.$$

г) Дисперсія рівна: $D(X)=\int_{0}^{\infty} x^2 f(x)dx-M^2(X);$

$$M(X^2)=\int_{0}^{\infty} x^2\cdot\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=-\int_{0}^{\infty} x^2 d\left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)=$$

$$=-x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_{0}^{\infty}+2\int_{0}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=-2\sigma^2\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)=$$

$$=2\sigma^2\int_{\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)=2\sigma^2\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_{\infty}^{0}=2\sigma^2-\lim_{x\to\infty}\frac{2\sigma^2}{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}=$$

$$=2\sigma^2-0=2\sigma^2.$$

Отже, $D(X)=2\sigma^2-\left(\dfrac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2}\right)^2=2\sigma^2-\dfrac{\sigma^2\pi}{2}=$

$$=\frac{\sigma^2(4-\pi)}{2}\approx 0{,}4292\sigma^2.$$

4.4.8. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x_0^3}{x^3} & \text{при } x\ \geq\ x_0\ (x_0>0)\\ 0 & \text{при } x_0<x\ .\end{cases}$$

Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення X.

Розв'язок.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини задається формулою : $M(X)=\int\limits_a^b f(x)dx$. Отже, необхідно від інтегральної функції $F(x)$ перейти до диференціальної:

$$f(x)=F^I(x)=\begin{cases}3\dfrac{x_0^3}{x^4} \quad \text{при} \quad x\geq x_0\ (x_0>0);\\ 0 \quad \text{при} \quad x<x_0.\end{cases}$$

Обчислимо математичне сподівання $M(X)$:

$$M(X)=\int\limits_{x_0}^{\infty} 3x\frac{x_0^3}{x^4}dx=3x_0^3\int\limits_{x_0}^{\infty}\frac{dx}{x^3}=-\frac{3x_0^3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\Big|_{x_0}^{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{3x_0^3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)+\frac{3}{2}x_0^3\cdot\frac{1}{x^2}=0+\frac{3}{2}x_0=\frac{3}{2}x_0.$$

Дисперсія $D(X)$ визначається за формулою:

$$D(X)=\int\limits_{x_0}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx-M^2(X)=3x_0^3\int\limits_{x_0}^{\infty}\frac{x^2dx}{x^4}-$$

$$-\left(\frac{3}{2}x_0\right)^2=3x_0^3\int\limits_{x_0}^{\infty}\frac{dx}{x^2}-\frac{9}{4}x_0^2=-\frac{3x_0^3}{x}\Big|_{x_0}^{\infty}-\frac{9}{4}x_0^2=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{3x_0^3}{x}\right)-$$

$$-\left(-\frac{3x_0^3}{x_0}\right)-\frac{9}{4}x_0^2=0+3x_0^2-\frac{9}{4}x_0^2=\frac{3}{4}x_0^2.$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=$
$=\sqrt{\frac{3}{4}x_0^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x_0.$

4.4.9. Густина ймовірності випадкової величини *X* рівна: $f(x)=Ax^2e^{-mx}$ $(m>0,\ x\ \geq\ 0)$.

а) знайти коефіцієнт *A*;

б) побудувати функцію розподілу *F(x)*;

в) обчислити ймовірність попадання випадкової величини *X* в інтервал $\left(0;\frac{1}{m}\right)$.

Розв'язок.

а) Коефіцієнт *A* знайдемо з рівності: $\int_0^{\infty} f(x)dx=1,$ яка для заданої функції *f(x)* з розбиванням невласного інтегралу на два інтеграли у відповідності з заданими інтервалами густини набере вигляду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ax^2e^{-mx}dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_0^{\infty} Ax^2e^{-mx}dx=\int_0^{\infty} Ax^2e^{-mx}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x^2=u; e^{-mx}dx=dv;\ du=2xdx; \\ v=\int e^{-mx}dx=-\frac{1}{m}e^{-mx}; \\ \int udv=uv-\int vdu. \end{array}\right|=$$

$$=A\left(-\frac{x^2}{m}e^{-mx}\Big|_0^{\infty}+\frac{2}{m}\int_0^{\infty} x\cdot e^{-mx}dx\right)=*$$

Обчислимо перший доданок, використавши правило Лопіталя:

$$-\frac{x^2}{m}e^{-mx}\Big|_0^{\infty} = -\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{me^{mx}} - \frac{0}{m}e^{-0\cdot m} = -\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{m\cdot m\cdot e^{mx}} - 0 =$$

$$= -\lim_{x\to\infty}\frac{2}{m^3\cdot e^{mx}} = 0.$$

$$* = \frac{2A}{m}\int_0^{\infty} xe^{-mx}dx = \left| \begin{array}{l} x = u;\ du = dx; \\ e^{-mx}dx = dv;\ v = -\dfrac{1}{m}e^{-mx} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{m}\left[-\frac{x}{m}e^{-mx}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{m}\int_0^{\infty} e^{-mx}dx \right] =$$

$$= \frac{2A}{m}\left[-\frac{1}{m}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{mx}} + \frac{0}{m}e^{-m\cdot 0} - \frac{1}{m^2}e^{-mx}\Big|_0^{\infty} \right] =$$

$$= \frac{2A}{m}\left[-\frac{1}{m}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{me^{mx}} + 0 - \frac{1}{m^2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{mx}} + \frac{1}{m^2}e^{-m\cdot 0} \right] =$$

$$= \frac{2A}{m}\left[0 - 0 + \frac{1}{m^2} \right] = \frac{2A}{m^3} = 1.$$

Звідси, $A = \dfrac{m^3}{2}$. Отже, функція щільності має вигляд: $f(x) = \dfrac{m^3}{2}x^2e^{-mx}$.

б) Для обчислення інтегральної функції *F(x)* скористуємось формулою:

$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Якщо $x < 0$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0$; для $x \geq 0$:

$$F(x) = \frac{m^3}{2}\int_0^{x} x^2e^{-mx}dx = \frac{m^3}{2}\left[-\frac{x^2}{m}e^{-mx}\Big|_0^{x} + \frac{2}{m}\left(\frac{x}{m}e^{-mx}\Big|_x^{0} + \right.\right.$$

$$+\frac{1}{m^2}e^{-mx}\Big|_x^0\Bigg)\Bigg]=\frac{m^3}{2}\Bigg[-\frac{x^2}{m}e^{-mx}+\frac{2}{m}\Bigg(-\frac{x}{m}e^{-mx}+\frac{1}{m^2}e^{-m\cdot 0}-$$

$$-\frac{1}{m^2}e^{-mx}\Bigg)\Bigg]==\frac{m^3}{2}\Bigg[-\frac{x^2}{m}e^{-mx}-\frac{2\cdot x}{m^2}e^{-mx}+\frac{2}{m^3}-\frac{2}{m^3}e^{-mx}\Bigg]=$$

$$=-\frac{m^2x^2}{2}e^{-mx}-mxe^{-mx}+1-e^{-mx}=1-\frac{m^2x^2+2mx+2}{2}e^{-mx}.$$

в) Імовірність знаходження випадкової величини в заданому інтервалі $\left(0;\frac{1}{m}\right)$ рівна різниці інтегральних функцій на кінцях інтервалів: $P\left(0\le x\le\frac{1}{m}\right)=F\left(\frac{1}{m}\right)-F(0)=1-$

$$-\frac{m^2\cdot\frac{1}{m^2}+2m\cdot\frac{1}{m}+2}{2}e^{-m\cdot\frac{1}{m}}=1-\frac{5}{2}e^{-1}=1-\frac{5}{2e}\approx 0.0803.$$

4.4.10. Випадкова величина ексцентриситету деталі має розподіл Релея:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, x\ge 0;\\ 0, x<0.\end{cases}$$

Знайти:

а) густину ймовірності випадкової величини;

б) її моду і медіану.

Розв'язок.

а) Густина ймовірності випадкової величини:

$$f(x)=F'(x)=(1-e^{-x^2/2\sigma^2})'=\frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

б) Для знаходження моди *Mo* знайдемо максимальне значення функції щільності $f(x)$ прирівнявши її похідну до 0.

$$f^{/}(x)=\frac{1}{\sigma^2}\left[e^{-x^2\!/_{2\sigma^2}}-xe^{-x^2\!/_{2\sigma^2}}\cdot\frac{2x}{2\sigma^2}\right]=0,\quad f^{//}(x)<0.$$

Звідси $x^2=\sigma^2$, або $x=\sigma$, отже $Mo=\sigma$.

Значення медіани *Me* обчислимо виходячи з рівності:

$$P(x<Me)=F(Me)=P(x\geq Me)=\frac{1}{2}.$$

Підставимо $X = Me$ у вираз інтегральної функції: $1-e^{-Me^2/2\sigma^2}=\frac{1}{2}$, або $e^{-Me^2/2\sigma^2}=\frac{1}{2}$. Прологарифмувавши вираз за основою *e*, отримуємо після спрощення: $Me^2 = 2\sigma^2\ln 2$. Таким чином, $Me=\sigma\sqrt{2\ln 2}\approx 1.1774\sigma$.

4.4.11. Які з поданих нижче функцій є функціями розподілу:

а) $F(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}x$;

б) $F(x)=\begin{cases}0, x\leq 0\\ \frac{[x]}{2}, 0<x\leq 2\\ 1, x>2\end{cases}$;

в) $F(x)=\begin{cases}0, x\leq 0\\ \frac{x}{x+1}, x>0\end{cases}$;

г) $F(x)=e^{-e^{-x}}$, $x\in(-\infty;+\infty)$;

д) $F(x)=\begin{cases}0, x\leq 0\\ 1-\frac{1-e^{-x}}{x}, x>0\end{cases}$?

Розв'язок.

а) Множина можливих значень випадкової величини X є вся числова вісь. Отже, щоб дана функція була інтегральною функцією розподілу необхідно, щоб виконувалась така її властивість щодо границь:

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0; F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$

Перевіримо її:

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}arctgx\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{24}\lim_{x\to-\infty}arctgx=$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\neq0;$$

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}\lim_{x\to-\infty}arctgx=\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1.$$

Отже, дана функція не є інтегральною функцією розподілу.

б) Випадкова величина X в інтервалі (0, 2) є неперервною, отже, згідно означення інтегральної функції, яку можна задати формулою $F(x)=\int\limits_0^x f(x)dx$, $F(x)$ є теж неперервною. Подана ж функція $\frac{[x]}{2}$, де $[x]$ – ціла частина числа x неперервною не є, оскільки в точках $x = 1$, $x = 2$ вона має розриви першого роду (див. рис. 4.4.2).

Отже, дана функція інтегральною не є.

в) Дана функція $\frac{x}{x+1}$ є неперервною, невід'ємною для всіх $x \geq 0$, і неспадною, оскільки для $x_1 \leq x_2$ різниця $F(x_2)-F(x_1)=\frac{x_2}{x_2+1}-\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2-x_1}{(x_1+1)(x_2+1)}\geq0$, звідки $F(x_2)\geq F(x_1)$.

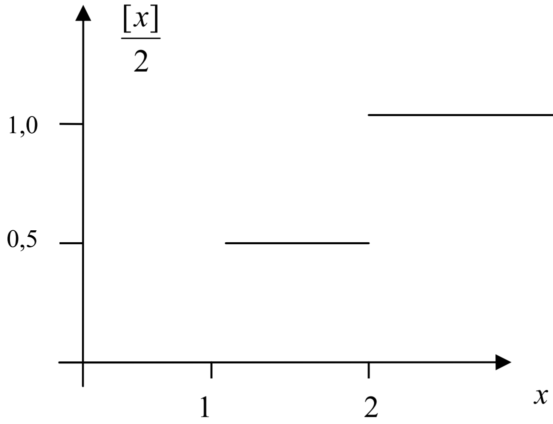


Рис. 4.4.2.

Перевіримо тепер дану функцію на існування границь на кінцях інтервалу:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+1}=0;\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=1.$ Таким чином, дана функція є інтегральною.

г) Множиною можливих значень випадкової величини X є вся числова вісь, на якій дана функція є неперервною і невід'ємною. Перевіримо дану функцію на існування границь:

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}e^{-e^{-x}}=\frac{1}{e^{\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}}}=\frac{1}{\infty}=0;\ \lim_{x\to\infty}F(x)=$$

$$=\frac{1}{e^{\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}}}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{\infty}}}=\frac{1}{e^{0}}=1.$$

Якщо $x_1\le x_2$, то $\dfrac{F(x_2)}{F(x_1)}=\dfrac{e^{-e^{-x2}}}{e^{-e^{-x1}}}=e^{e^{-x1}-e^{-x2}}$.

Про логарифмуємо ліву і праву частину рівності:

$$\ln\frac{F(x_2)}{F(x_1)} = e^{-x_1} - e^{-x_2} = \frac{1}{e^{x_1}} - \frac{1}{e^{x_2}} = \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{e^{x_1} \cdot e^{x_2}} \geq 0,$$ звідки

$\dfrac{F(x_2)}{F(x_1)} \geq e^0 = 1,$ тому $F(x_2) \geq F(x_1)$, тобто дана функція є неспадною. Отже, дана функція задовільняє всім властивостям інтегральної функції.

д) На множині додатніх чисел, де визначена функція, вона є неперервною і неспадною. Оскільки для $x_1 \leq x_2$ різниця

$$F(x_2) - F(x_1) = 1 - \frac{1-e^{-x_2}}{x_2} - 1 + \frac{1-e^{-x_1}}{x_1} = \frac{1-e^{-x_1}}{x_1} - \frac{1-e^{-x_2}}{x_2} = *$$

Запишемо e^{-x_1} і e^{-x_2} як розклади в ряд за формулою Тейлора:

$$e^{-x_1} = 1 - \frac{x_1}{1!} + \frac{x_1^2}{2!} - \frac{x_1^3}{3!} + \frac{x_1^4}{4!} - \ldots$$

$$e^{-x_2} = 1 - \frac{x_2}{1!} + \frac{x_2^2}{2!} - \frac{x_2^3}{3!} + \frac{x_2^4}{4!} - \ldots$$

$$* = 1 - \frac{x_1}{2} + \frac{x_1^2}{6} - \frac{x_1^3}{24} - 1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_2^2}{6} + \frac{x_2^3}{24} =$$

$$= \frac{12(x_2 - x_1) - 4(x_2^2 - x_1^2) + (x_2^3 - x_1^3)}{24} =$$

$$= \frac{12(x_2 - x_1) - 4(x_2 - x_1)(x_1 + x_2) + (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{24} =$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)[12 - 4x_2 - 4x_1 + x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2]}{24} =$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)[(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + x_1x_2 + 4]}{24} \geq 0.$$

Отже, $F(x_2) \geq F(x_1)$, що й потрібно було довести.

Обчислимо границі функції:

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1-e^{-x}}{x}\right)=1-\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=\left(1-\left(\frac{0}{0}\right)\right)=*$$

Використаємо правило Лопіталя.

$$*=1-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{1}=1-e^{0}=1-1=0;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1-e^{-x}}{x}\right)=1-\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-x}}{x}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{e^{x}}}{x}=1-0=1.$$

Таким чином, дана функція задовольняє всі властивості інтегральної функції.

4.5. Асиметрія і ексцес розподілу

Початковий момент *k*-го порядку випадкової величини X визначається інтегралом:

$$\nu_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)dx\text{, отже }\nu_1=M(X) \qquad (4.5.1).$$

Центральний момент *k*-го порядку випадкової величини X визначається інтегралом:

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x-M(x)\right]^k f(x)dx \qquad (4.5.2).$$

Звідси, $\mu_1=0$, $\mu_2=D(x)$. Третій центральний момент μ_3 служить характеристикою асиметрії (“скошеності”) розподілу, оскільки для симетричного розподілу відносно прямої $x = M(X)$ кожний центральний момент непарного порядку рівний нулю і $\mu_3=0$. Для несиметричних розподілів центральні моменти непарного порядку відмінні від нуля.

Оскільки μ_3 вимірюється в кубічних одиницях, то для отримання безрозмірної характеристики вводять відношення

μ_3 до кубу середнього квадратичного відхилення: $A_s = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ (4.5.3) і називають ***коефіцієнтом асиметрії***.

Якщо "полога" частина кривої розташована правіше моди, то асиметрія додатня ($A_s > 0$), якщо зліва – від'ємна ($A_s < 0$).

Ексцесом теоретичного розподілу називають величину, яка визначається так: $E_k = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ (4.5.4) і служить мірою гостровершинності чи плосковершинності кривої розподілу. Для найбільш поширеного нормального закону розподілу $\dfrac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$, отже $E_k = 0$. Якщо $E_k > 0$, то крива має більш високу і "гостру" вершину, ніж нормальна крива, якщо $E_k < 0$, то крива має більш низьку і "плоску" вершину, ніж нормальна крива (див. рис. 4.5.1, 4.5.2).

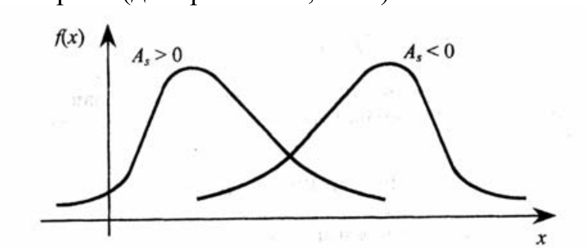


Рис. 4.5.1.

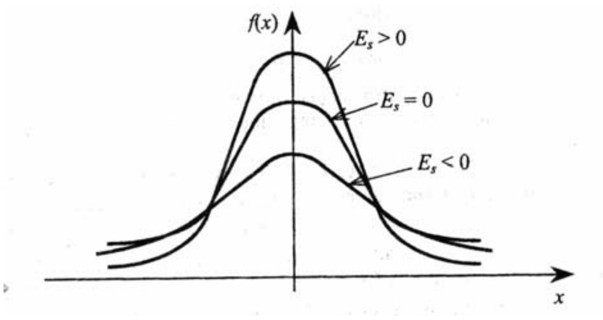


Рис. 4.5.2.

Задачі

4.5.1. Задана щільність розподілу випадкової величини *X*:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \dfrac{3}{2}x^2 & \text{при } 0\le x<1,\\ \dfrac{3}{2}\times(2-x)^2 & \text{при } 1<x\le 2,\\ 0 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Знайти:

а) початкові і центральні моменти перших чотирьох порядків;

б) асиметрію і ексцес цієї випадкової величини.

Розв’язок.

Графік даної функції подано на рис. 4.5.3.

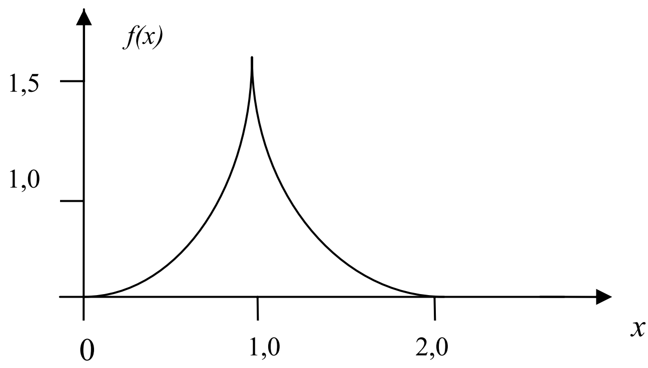


Рис. 4.5.3.

а) Початкові моменти *k*-ого порядку неперервної випадкової величини, що задана щільністю розподілу *f(x)* будемо обчислювати згідно формули:

$$v_k = M(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx = \int_0^1 x^k f_1\ (x)dx + \int_1^2 x^k f_2\ (x)dx,$$

де $k = 1, 2, 3, 4$.

Отже,

$$v_1 = M(X) = \int_0^1 xf_1\ (x)dx + \int_1^2 xf_2\ (x)dx = \int_0^1 x \cdot \frac{3}{2}x^2 dx +$$

$$+\int_1^2 x \cdot \frac{3}{2}(2-x)^2 dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x^3 dx + \frac{3}{2}\cdot 4\int_1^2 xdx - \frac{3}{2}\cdot 4\int_1^2 x^2 dx +$$

$$+\frac{3}{2}\int_1^2 x^3 dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + 6\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - 6\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{3}{8} +$$

$$+3\cdot(4-1) - 2\cdot(8-1) + \frac{3}{8}\cdot(16-1) = 1.$$

$M(X) = 1$ підтверджується симетричністю функції відносно $x = 1$.

$$v_2 = M(X^2) = \int_0^1 x^2 f_1\ (x)dx + \int_1^2 x^2 f_2\ (x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{3}{2}x^2 dx +$$

$$+\int_1^2 x^2 \cdot \frac{3}{2}(2-x)^2 dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x^4 dx + \frac{3}{2}\cdot 4\int_1^2 x^2 dx - \frac{3}{2}\cdot 4\int_1^2 x^3 dx +$$

$$+\frac{3}{2}\int_1^2 x^4 dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + 6\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - 6\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{3}{10} +$$

$$+2\cdot(8-1) - \frac{3}{2}\cdot(16-1) + \frac{3}{10}\cdot(32-1) = 1{,}1.$$

$$v_3 = M(X^3) = \int_0^1 x^3 f_1\ (x)dx + \int_1^2 x^3 f_2\ (x)dx = \int_0^1 x^3 \cdot \frac{3}{2}x^2 dx +$$

$$+\int_1^2 x^3 \cdot \frac{3}{2}(2-x)^2 dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x^5 dx + \frac{3}{2}\cdot 4\int_1^2 x^3 dx - \frac{3}{2}\cdot 4\int_1^2 x^4 dx +$$

$$+\frac{3}{2}\int_1^2 x^5dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{x^6}{6}\Big|_0^1+\frac{6}{4}\cdot x^4\Big|_1^2-6\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_1^2+\frac{3}{2}\cdot\frac{x^6}{6}\Big|_1^2=\frac{1}{4}+$$

$$+\frac{3}{2}\cdot(16-1)-\frac{6}{5}\cdot(32-1)+\frac{1}{4}\cdot(64-1)=1{,}3.$$

$$v_4=M(X^4)=\int_0^1 x^4 f_1\ (x)dx+\int_1^2 x^4 f_2\ (x)dx=\int_0^1 x^4\cdot\frac{3}{2}x^2dx+$$

$$+\int_1^2 x^4\cdot\frac{3}{2}\left(2-x\right)^2dx=\frac{3}{2}\int_0^1 x^6dx+\frac{3}{2}\cdot4\int_1^2 x^4dx-\frac{3}{2}\cdot4\int_1^2 x^5dx+$$

$$+\frac{3}{2}\int_1^2 x^6dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{x^7}{7}\Big|_0^1+6\frac{x^5}{5}\Big|_1^2-6\cdot\frac{x^6}{6}\Big|_1^2+\frac{3}{2}\cdot\frac{x^7}{7}\Big|_1^2=\frac{3}{14}+$$

$$+\frac{6}{5}\cdot(32-1)-(64-1)+\frac{3}{14}\cdot(128-1)=\frac{57}{35}=1\frac{22}{35}.$$

Центральні моменти обчислимо використовуючи формули, що виражають центральні моменти через початкові.

Центральний момент першого порядку рівний нулю: $\mu_1=0$;

другого – $\mu_2=D(x)=v_2-v_1^2=1{,}1-1^2=0{,}1$;

третього – $\mu_3=v_3-3v_1\cdot v_2+2v_1^3=1{,}3-3\cdot1\cdot1{,}1+2\cdot1^3=$ $=0$;

четвертого – $\mu_4=v_4-4v_1\cdot v_3+6v_1^2\cdot v_2-3v_1^4=1\frac{22}{35}-$

$$-4\cdot1\cdot1{,}3+6\cdot1^2\cdot1{,}1-3\cdot1=\frac{1}{35}.$$

б) Асиметрію A_s обчислимо за формулою:

$$A_S=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=\frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}=\frac{0}{(0{,}1)^{3/2}}=0.$$

Ексцес обчислимо за формулою:

$$E_S = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{{}^{1}\!/_{35}}{\mu_2{}^2} - 3 = \frac{1}{35(0{,}1)^2} - 3 = \frac{100}{35 \cdot 1} - 3 = -\frac{1}{7}.$$

4.5.2. Знайти теоретичний центральний момент 3-го порядку $M\left[X - M(X)\right]^3$ показникового розподілу.

Розв'язок.

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; $M\left[X - M(X)\right]^3 = \mu_3$.

Виразимо центральний момент μ_3 через початкові:

$$M\left[X - M(X)\right]^3 = M\left[X^3 - 3X^2 \cdot M(X) + 3X \cdot M^2(X) - \right.$$
$$\left. - M^3(X)\right] = M(X^3) - 3M(X^2) \cdot M\left[M(X)\right] + 3M(X) \times$$
$$\times M\left[M^2(X)\right] - M\left[M^3(X)\right] = M(X^3) - 3M(X^2) \cdot M(X) +$$
$$+ 3M(X) \cdot M^2(X) - M^3(X) = \nu_3 - 3\nu_2 \cdot \nu_1 + 2\nu_1^3.$$

Отже, $\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3$.

$$\nu_3 = M(X^3) = \int_0^\infty x^3 f(x)dx = \int_0^\infty x^3 \times \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_0^\infty x^3 d(e^{-\lambda x}) =$$

$$= \int_\infty^0 x^3 d(e^{-\lambda x}) = \begin{vmatrix} x^3 = u; d(e^{-\lambda x}) = d\upsilon; \\ du = 3x^2 dx; \upsilon = e^{-\lambda x} \end{vmatrix} = x^3 e^{-\lambda x} \Big|_\infty^0 - 3\int_\infty^0 x^2 e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \frac{3}{\lambda}\int_\infty^0 x^2 d(e^{-\lambda x}) = \begin{vmatrix} x^2 = u; d(e^{-\lambda x}) = d\upsilon \\ du = 2xdx; \upsilon = e^{-\lambda x} \end{vmatrix} = \frac{3}{\lambda}(x^2 \cdot e^{-\lambda x} \Big|_\infty^0 -$$

$$- 2\int_\infty^0 xe^{-\lambda x} dx) = \frac{6}{\lambda}\int_0^\infty xe^{-\lambda x} dx = -\frac{6}{\lambda^2}\int_0^\infty xd(e^{-\lambda x}) =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x; du = dx; \\ d\upsilon = d(e^{-\lambda x}); \upsilon = e^{-\lambda x} \end{vmatrix} = -\frac{6}{\lambda^2}(xe^{-\lambda x} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx) =$$

$$= -\frac{6}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = \frac{6}{\lambda^3} e^{-\lambda x} \Big|_\infty^0 = \frac{6}{\lambda^3} - 0 = \frac{6}{\lambda^3};$$

$$M(X^2)=\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}d(-\lambda x)=-\int_0^\infty x^2 d(e^{-\lambda x})=$$

$$=\int_\infty^0 x^2 d(e^{-\lambda x})=x^2e^{-\lambda x}\Big|_\infty^0-2\int_\infty^0 xe^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda}\int_\infty^0 xd(e^{-\lambda x})=$$

$$=\frac{2}{\lambda}\left[xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx\right]=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda}\int_\infty^0 e^{-\lambda x}d(-\lambda x)=\frac{2}{\lambda^2}\int_\infty^0 d(e^{-\lambda x})=$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_\infty^0=\frac{2}{\lambda^2};$$

$$M(X)=\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^\infty xd(e^{-\lambda x})=\int_\infty^0 xd(e^{-\lambda x})=xe^{-\lambda x}\Big|_\infty^0-$$

$$-\int_\infty^0 e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}\int_\infty^0 e^{-\lambda x}d(-\lambda x)=\frac{1}{\lambda}\int_\infty^0 d(e^{-\lambda x})=\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_\infty^0=\frac{1}{\lambda}.$$

Остаточно,

$$\mu_3=\frac{6}{\lambda^3}-3\times\frac{2}{\lambda^2}\times\frac{1}{\lambda}+2\times\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3=\frac{6}{\lambda^3}-\frac{6}{\lambda^3}+\frac{2}{\lambda^3}=\frac{2}{\lambda^3}.$$

4.5.3. Знайти асиметрію $A_s=\dfrac{\mu_3}{\sigma^3(x)}$ показникового розподілу.

Розв’язок.

$$A_s=\frac{\mu_3}{\sigma^3(X)};$$

Але $D(X)=\sigma^2(X)=M(X^2)-M^2(X)=\dfrac{2}{\lambda^2}-\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2=$

$$=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2};\quad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{\lambda}.$$

Остаточно, $A_s = \frac{2}{\lambda^3} : \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$.

4.5.4. Дискретна випадкова величина X має розподіл Пуассона:

$$P(X = m) = \lambda^m \cdot \frac{e^{-\lambda}}{m!} \ , m = 0, 1, 2, ...$$

Знайти: коефіцієнт асиметрії випадкової величини X.

Розв'язок.

За означенням $A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3(X)}$, де $\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^{\ 3}$.

Обчислимо $\nu_1 = M(X)$ випадкової величини, що розподілена за законом Пуассона:

X	0	1	2	...	k
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Поклавши $k - 1 = m$, отримаємо:

$$M(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda, \text{ оскільки } e^{\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!}.$$

Отже, $M(X) = \lambda$.

Обчислюємо $\nu_2 = D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

Для цього напишемо розподіл випадкової величини X^2, враховуючи, що імовірності розподілів X і X^2 рівні.

X^2	0^2	1^2	2^2	...	k^2
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$$M(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k(k-1)!}=$$

$$=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k-1)+1\right]\frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\lambda\left[\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right]=*$$

(Покладемо $k-1=m$)

$$*=\lambda\left[\sum_{m=0}^{\infty}m\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}\right]=$$

$$=\lambda\left[\sum_{m=0}^{\infty}m\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}+e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\right]=\lambda\left[\lambda+e^{-\lambda}\times e^{\lambda}\right]=\lambda^2+\lambda,$$

тут враховано, що $\sum m\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}=\lambda.$

Отже, $\nu_2=(\lambda^2+\lambda)-(\lambda)^2=\lambda;\ \sigma^3(X)=\lambda^{3/2}=\lambda\sqrt{\lambda}.$

Обчислимо $\nu_3=M(X^3)=\sum_{k=0}^{\infty}k^3\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}k^3\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot\frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!k}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k^2\frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}.$$

Покладемо $k-1=m$, звідки $k=m+1$, тому

$$M(X^3)=\lambda\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^2\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^2\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}+$$

$$+2\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}+\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=\lambda^2\sum_{m=0}^{\infty}m\times\frac{m\lambda^{m-1}}{(m-1)!m}e^{-\lambda}+$$

$$+2\lambda^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m\lambda^{m-1}}{(m-1)!m}e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=\lambda^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m-1)\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda}+$$

$$+\lambda^2\sum\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda}+2\lambda^2e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}+\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda^2\cdot\lambda+\lambda^2e^{-\lambda}e^{\lambda}+$$

$+2\lambda^2+\lambda=\lambda^3+3\lambda^2+\lambda,$ оскільки $\sum\limits_{m=0}^{\infty} m\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}=\lambda,$ а отже, $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{(m-1)\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda}=\lambda.$

Таким чином, $A_s=\dfrac{\mu_3}{\sigma^3(X)}=\dfrac{\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3}{\lambda^{3/2}}=$

$$=\frac{\lambda^3+3\lambda^2+\lambda-3\lambda(\lambda^2+\lambda)+2\lambda^3}{\lambda^{3/2}}=\frac{\lambda}{\lambda^{3/2}}=\frac{1}{\lambda^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

4.5.5. Знайти ексцес $E_K=\dfrac{\mu_4}{\sigma^4(x)}-3$ показникового розподілу (див. задачі 4.5.2, 4.5.3).

Розв'язок.

$\mu_4=M\left[X-M(X)\right]^4=M\left[X^4-4X^3M(X)+6X^2M^2(X)-\right.$
$\left.-4XM^3(X)+M^4(X)\right]=M(X^4)-4M(X^3)M(X)+$
$+6M(X^2)M^2(X)-4M(X)\times M^3(X)+M^4(X)=M(X^4)-$
$-4M(X^3)\times M(X)+6M(X^2)\times M^2(X)-4M^4(X)+M^4(X)=$
$=\nu_4-4\nu_3\times\nu_1+6\nu_2\times\nu_1^{\,2}-3\nu_1^{\,4};$

$$M(X^4)=\int_0^{\infty}x^4\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^{\infty}x^4d(e^{-\lambda x})=-(x^4e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}-4\int_0^{\infty}x^3e^{-\lambda x}dx)=$$

$$-4\int_0^{\infty}x^3e^{-\lambda x}dx=-\frac{4}{\lambda}\int_0^{\infty}x^3d(e^{-\lambda x})=-\frac{4}{\lambda}\left[x^3e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}-3\int_0^{\infty}x^2e^{-\lambda x}dx\right]=$$

$$-\frac{12}{\lambda}\times\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty}x^2d(e^{-\lambda x})=-\frac{12}{\lambda^2}\left[x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}-2\int_0^{\infty}xe^{-\lambda x}dx\right]=-\frac{24}{\lambda^2}\times\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty}xd(e^{-\lambda x})=$$

$$=\frac{24}{\lambda^3}\left[xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx\right]=-\frac{24}{\lambda^3}\times\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty}d(e^{-\lambda x})=-\frac{24}{\lambda^4}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}=\frac{24}{\lambda^4}.$$

Остаточно,

$$\mu_4 = \frac{24}{\lambda^4} - 4 \times \frac{6}{\lambda^3} \times \frac{1}{x} + 6 \times \frac{2}{\lambda^2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 3 \times \left(\frac{1}{\lambda}\right)^4 =$$

$$= \frac{24}{\lambda^4} - \frac{24}{\lambda^4} + \frac{12}{\lambda^4} - \frac{3}{\lambda^4} = \frac{9}{\lambda^4}.$$

$$E_\kappa = \frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} - 3 = \frac{\mu_4}{D^2(X)} - 3 = \frac{9}{\lambda^4} : \left(\frac{1}{\lambda^2}\right)^2 - 3 =$$

$$= \frac{9}{\lambda^4} \times \lambda^4 - 3 = 6.$$

4.6. Основні розподіли дискретних випадкових величин

Випадкова величина X називається ***рівномірно***-розподіленою, якщо всі імовірності її настання рівні і визначаються формулою: $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$, де $x_i = \overline{1, n}$ (4.6.1).

Випадкова величина X розподілена за ***геометричним законом***, якщо її імовірності утворюють геометричну прогресію з першим членом p і знаменником q ($0 < q < 1$): p, qp, q^2p, q^3p, …, $q^{k\text{-}1}p$, …, так що $P(X = x_i) = q^{x_i - 1}p$ (4.6.2).

Випадкова величина має ***гіпергеометричний розподіл***, якщо її імовірності визначаються законом:

$$P(X = x_i) = \frac{C_M^{x_i} \cdot C_{N-M}^{n-x_i}}{C_N^n} \quad (4.6.3),$$

де $N = M + (N - M)$, $n = x_i + (n - x_i)$, $x_i = 0, 1, 2, \ldots \min(M, n)$.

Випадкова величина X розподілена за ***пуассонівським*** законом, якщо її імовірності визначаються формулою Пуассона:

$$P(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}, \; x_i = 0, 1, 2 \ldots n, \; \lambda = np \quad (4.6.4),$$

$M(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$, $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

Біномним називають розподіл імовірностей, що визначаються формулою Бернуллі. Біномний розподіл має вигляд:

X	0	1	k	$n-1$	n
P	q^n	npq^{n-1}	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$np^{n-1}q$	p^n

Математичне сподівання $M(X)$ числа появи події A в n незалежних випробуваннях за схемою Бернуллі дорівнює добутку числа випробувань на імовірність появи події в кожному випробуванні: $M(X) = n \cdot p$, а дисперсія рівна $D(X) = = n \cdot p \cdot q$.

Задачі

4.6.1. Серед 10 годинників, які потрапили в ремонт, для 6 потрібна загальна чистка механізму. Годинники не розсортовані за видом ремонту. Майстер, бажаючи знайти годинник, якому потрібна загальна чистка механізму, розглядає їх один за одним і знайшовши цей годинник, закінчує огляд.

Треба сформулювати закон розподілу випадкової величини (к-сть оглянутих годинників) і знайти математичне сподівання цієї випадкової величини.

Розв’язок.

Запишемо умову відносно кількості годинників таким чином: *10 = 6 потр + 4 непот*. Нехай випадкова величина X – кількість перевірок.

Робиться одна перевірка, якщо витягнутий годинник потребує чистки, тоді $P(x=1) = \dfrac{6}{10}$. Дві перевірки здійснюються, якщо перший годинник не потребує чистки – подія $\overline{A}_1$, а другий потребує – подія A_2. Імовірність такої складної події дорівнює добутку імовірностей залежних подій:

$$P(x=2) = P(\overline{A}_1 \cdot A_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P_{\overline{A}_1}(A_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{15}.$$

Три перевірки здійснюються, якщо перші дві показують, що годинники не потребують чистки – події $\overline{A}_1$ і $\overline{A}_2$, а третя перевірка показує, що годинник її потребує.

Отже, $P(x=3)=P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3)=P(\overline{A}_1)\cdot P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)\cdot P_{\overline{A}_1\overline{A}_2}(A_3)=$

$$=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{1}{10}.$$

Аналогічно, $P(x=4)=P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3\cdot A_4)=P(\overline{A}_1)\cdot P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)\times$

$$\times P_{\overline{A}_1\overline{A}_2}(\overline{A}_3)\cdot P_{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3}(A_4)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{7}=\frac{1}{35}.$$

П'ять перевірок необхідно здійснити, якщо перші чотири зафіксують годинники, що не потребують чистки, а п'ята – що потребує чистки, так що $P(x=4)=P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3\cdot\overline{A}_4\cdot A_5)=$

$$=P(\overline{A}_1)\cdot P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)\cdot P_{\overline{A}_1\overline{A}_2}(\overline{A}_3)\cdot P_{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3}(\overline{A}_4)\cdot P_{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4}(A_5)=$$

$$=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot 1=\frac{1}{210}.$$

Оскільки годинників, що не потребують чистки є чотири, то на цьому перевірки закінчуються. Даний розподіл має вигляд:

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{210}$

Перевірка:

$$\sum p_i=\frac{6}{10}+\frac{4}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{35}+\frac{1}{210}=\frac{210}{210}=1.$$

Математичне сподівання числа перевірок рівне:

$$M(X)=1\cdot\frac{6}{10}+2\cdot\frac{4}{15}+3\cdot\frac{1}{10}+4\cdot\frac{1}{35}+5\cdot\frac{1}{210}=\frac{11}{7}=1\frac{4}{7}.$$

4.6.2. При підкиданні гральної кістки може випасти від 1 до 6 очок.

Розглядаючи кількість випавших очок як випадкову величину, сформулювати закон її розподілу і знайти математичне сподівання.

Розв'язок.

Нехай X – кількість випавших очок. Оскільки випадання "1", "2", "3", "4", "5", "6" є рівноможливими подіями, то їх імовірності рівні $p_i = \frac{1}{6}$.

Закон розподілу кількості випавших очок буде мати вигляд:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Математичне сподівання кількості випавших очок рівне:

$$M(X) = \sum x_i p_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

4.6.3. Стріляють в ціль до першого влучення. Влучення при різних пострілах – незалежні події, ймовірність влучення при кожному пострілі – p.

Описати простір елементарних подій. Нехай X – число зроблених пострілів. Знайти розподіл випадкової величини X.

Розв'язок.

Якщо імовірність влучення p, то імовірність невлучення $q = 1 - p$. Розподіл має вигляд:

X	1	2	3	4	5	...	...n
P	P	qp	$q^2 p$	$q^3 p$	$q^4 p$	...	$q^{n-1} p$

4.6.4. Ймовірність того, що виріб виготовлений на автоматичному станку буде першого або другого ґатунку рівна 0,8. Для контролю якості регулювання станка робітник періодично перевіряє один за одним вироби, але не більше 5 шт. кожного разу. При знаходженні виробу нижче 2 ґатунку станок зупиняється для регулювання.

Вважаючи, що ймовірність виготовлення виробів 1 і 2 ґатунку залишається постійною, скласти теоретичний розподіл кількості перевірок виробів, які робітник виготовляє при одній серії випробувань.

Знайти математичне сподівання цієї випадкової величини.

Розв'язок.

Нехай випадкова величина X означає кількість перевірок.

Перевіряється один виріб і станок зупиняється на регулювання, якщо цей виріб буде бракованим. Отже, $P(x=1)= =1-p=q=0{,}2$. Перевіряється два вироби, якщо перший виріб є першого або другого ґатунку, а другий виріб є бракований. Імовірність такої складної події рівна: $P(x=2)=pq$. Три перевірки (три вироби) буде здійснено, якщо перші дві перевірки покажуть, що вироби є першого або другого ґатунку, а третя перевірка показує, що виріб бракований. Імовірність такої події рівна: $P(x=3)=p^2q$. Аналогічно, імовірність чотирьох перевірок буде рівна: $P(x=4)=p^3q$. П'ять перевірок буде здійснено, якщо перші чотири перевірки засвідчують, що виріб є першого або другого ґатунку. Отже, $P(x=5)=p^4$.

Даний закон розподілу кількості перевірок має вигляд:

X	1	2	3	4	5
P	$q=0{,}2$	$pq=$ $=0{,}8\cdot 0{,}2=$ $=0{,}16$	$p^2q=$ $=0{,}8^2\cdot 0{,}2=$ $=0{,}128$	$p^3q=$ $=0{,}8^3\cdot 0{,}2=$ $=0{,}1024$	$p^4=$ $=0{,}8^4=$ $=0{,}4096$

Перевірка:

$$q+pq+p^2q+p^3q+p^4=1-p+p(1-p)+p^2(1-p)+$$
$$+p^3(1-p)+p^4=1-p+p-p^2+p^2-p^3+p^3-p^4+p^4=1.$$
$$\sum p_i=0{,}2+0{,}16+0{,}128+0{,}1024+0{,}4096=1{,}0.$$

Математичне сподівання числа перевірок X буде:

$$M(X)=\sum x_ip_i=1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}16+3\cdot 0{,}128+4\cdot 0{,}1024+$$

$+5\cdot 0{,}4096=0{,}2+0{,}32+0{,}384+0{,}4096+2{,}048=3.3616.$

4.6.5. Ймовірність того, що деталь виготовлена на автоматичному станку буде без дефектів, рівна p $(0 < p < 1)$. Робітник перевіряє якість всіх щойно виготовлених деталей до виявлення деталі з дефектом.

Припускаючи, що цей процес може продовжуватись нескінченно довго, скласти закон розподілу кількості перевірок до виявлення деталі з дефектом.

Виразити у вигляді суми членів нескінченого ряду математичне сподівання даної випадкової величини.

З'ясувати чи існує у цієї випадкової величини математичне сподівання.

Розв'язок.

Доповнимо наш закон розподілу. Випробування закінчуються на n-ій перевірці, якщо перші $n-1$ деталі пройдуть випробування, а n-на деталь буде з дефектом.

Отже, $P(X=n)=p^{n-1}q$.

Ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	1	2	3	...	n-1	n	...
P	q	pq	p^2q	...	$p^{n-2}q$	$p^{n-1}q$	...

Математичне сподівання випадкової величини X рівне сумі ряду:

$$M(X)=1\cdot q+2pq+3p^2q...+(n-1)p^{n-2}q+n\cdot p^{n-1}q+...=$$

$=q(1+2p+3p^2+...+(n-1)p^{n-2}+np^{n-1}+...)$, але

$$[1+2p+3p^2+...+(n-1)p^{n-2}+np^{n-1}]=\frac{d}{dp}(p+p^2+p^3...+$$

$$+...p^{n-1}+p^n)=\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{1-p}\right),$$

оскільки вираз в дужках є сумою нескінченної геометричної прогресії з знаменником $p<1$.

Отже, $M(X) = q\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{p}{1-p}\right) = q\dfrac{1}{(1-p)^2} = q\cdot\dfrac{1}{q^2} = \dfrac{1}{q}$.

Обчислимо дисперсію випадкової величини X:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 1^2 q + 2^2 qp + 3^2 qp^2 ... + ... +$$

$$+(n-1)^2 p^{n-2} q + n^2 p^{n-1} q ... - \left(\frac{1}{q}\right)^2 = q[1^2 + 2^2 p + 3^2 p^2 ... +$$

$$+ ...(n-1)^2 p^{n-2} + n^2 p^{n-1} ... +] - \frac{1}{q^2}.$$

Щоб обчислити суму ряду в дужках, домножимо на p ряд $[1 + 2p + 3p^2 + ... + (n-1)p^{n-2} + np^{n-1}]$, отримаємо:

$$p + 2p^2 + 3p^3 + ...(n-1)p^{n-1} + np^n = p\cdot\frac{p}{(1-p)^2} = .$$

Продиференціюємо цей ряд по p, отримаємо вираз в дужках:

$$1^2 + 2^2 p + 3^2 p^2 ... + ...(n-1)^2 p^{n-2} + n^2 p^{n-1} =$$

$$= \frac{d}{dp}\left[\frac{p}{(1-p)^2}\right] = \frac{1+p}{(1-p)^3}.$$

Остаточно, дисперсія рівна:

$$D(X) = q\frac{1+p}{(1-p)^3} - \frac{1}{q^2} = \frac{(1-p)(1+p)}{(1-p)^3} - \frac{1}{(1-p)^2} =$$

$$= \frac{1+p}{(1-p)^2} - \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{p}{q^2}.$$

4.6.6. З гвинтівки виконують постріли по цілі до першого влучення. Імовірність попадання для кожного пострілу дорівнює 0,6. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа витрачених набоїв. Знайти імовірність одного влучення в ціль, якщо в розпорядженні є тільки три набої.

Розв'язок.

X – число витрачених набоїв, $p = 0,6$.

$P(X = x_i)$ – ймовірність того, що буде витрачено x_i-ту кількість набоїв.

1 набій буде витрачено, коли перший постріл буде влучним. Отже $P(X = 1) = p = 0{,}6$.

Два набої буде витрачено, коли перший постріл буде промахом, отже,

$P(X = 2) = qp = (1 - p) \cdot p = (1 - 0{,}6) \cdot 0{,}6 = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$.

Три набої буде використано, коли перші два постріли будуть промахами:

$P(X = 3) = qqp = (1 - p) \cdot (1 - p) \cdot p = (1 - p)^2 \cdot p = (1 - 0{,}6)^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096$.

Відповідно 4 набої буде використано, коли три перші набої дадуть промах:

$P(X = 4) = (1 - p)^3 \cdot p = (1 - 0{,}6)^3 \cdot 0{,}6 = 0{,}4^3 \cdot 0{,}6 = 0{,}0384$.

Загальна формула для k витрачених набоїв матиме вигляд: $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$.

Закон розподілу буде мати вигляд:

X	1	2	3	4	...	k	…
P	p	qp	q^2p	q^3p	…	$q^{k-1}p$	…

Перевірка:

$$\sum p_i = p + qp + q^2p + q^3p + ... + q^{k-1}p + ... = p(1 + q + $$
$$+ q^2 + q^3 + ... + q^{k-1} + ...) = *$$

Вираз в дужках дорівнює сумі нескінченої геометричної прогресії $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$.

$* = p \cdot \frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$. Отже, закон розподілу складений вірно.

Якщо є три набої, то влучення може бути за I разом (використаний 1 набій), за II разом (використано 2 набої), за III разом (3 набої). Оскільки події ($x = 1$), ($x = 2$), ($x = 3$) є несумісними, то ймовірність події B – "використано 3 набої", є сумою імовірностей несумісних подій: $P(B) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = 0{,}6 + 0{,}24 + 0{,}096 = 0{,}936$.

4.6.7. З двох гармат почергово ведеться стрільба по цілі до першого влучення однією з двох гармат. Ймовірність попадання в ціль першою гарматою рівна 0,3, а другою – 0,7. Починає стрільбу перша гармата.

Скласти закон розподілу дискретних випадкових величин X і Y – числа витрачених ядер відповідно першою та другою гарматою.

Розв'язок.

Нехай X і Y – числа витрачених ядер відповідно першою та другою гарматою. Імовірності влучень першою та другою гарматою відповідно рівні $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}7$; невлучень – $q_1 = 0{,}7$; $q_2 = 0{,}3$.

Імовірності випадкових величин X та Y рівні. $P(x=1) = p_1$; $P(y=0) = p_1$ – оскільки, якщо перша гармата влучила, то друга гармата не стріляє.

$P(y=1) = q_1 p_2$ – якщо перша гармата не влучила, а друга влучила; $P(x=2) = q_1 q_2 p_1$; $P(y=2) = q_1 q_2 q_1 p_2 = q_1^2 q_2 p_2$;
$P(x=3) = q_1 q_2 q_1 q_2 p_1 = q_1^2 q_2^2 p_1$; $P(y=3) = q_1 q_2 q_1 q_2 q_1 p_2 = q_1^3 q_2^2 p_2$;
$P(x=4) = q_1^3 q_2^3 p_1$; $P(y=4) = q_1^4 q_2^3 p_2$; $P(x=5) = q_1^4 q_2^4 p_1$.

Загальні формули для законів розподілів такі:

$$P(x=n) = q_1^{n-1} q_2^{n-1} p_1 = (0{,}7)^{n-1} \cdot (0{,}3)^{n-1} \cdot 0{,}3 = (0{,}7)^{n-1} \cdot (0{,}3)^n;$$

$$P(y=n) = q_1^n q_2^{n-1} p_2 = (0{,}7)^n \times (0{,}3)^{n-1} \times 0{,}7 = (0{,}7)^{n+4} \times (0{,}3)^{n-1}.$$

4.6.8. Два бомбардувальники по черзі кидають бомби в ціль до першого влучення. Ймовірність влучення в ціль першим бомбардувальником 0,7, а другим – 0,8. Спочатку кидає бомби перший бомбардувальник.

Написати перші чотири члени закону розподілу дискретної випадкової величини X – числа кинутих бомб двома бомбардувальниками.

Розв'язок.

Використовуємо закони розподілів, отримані в задачі 4.6.7.

Необхідно обчислити $P(Z = X + Y)$. Оскільки випадкові величини Y і X залежні, то $P(z_i = x_i + y_i) = P(x_i) \cdot P_{xi}(y)$.

$p_1 = 0{,}7;\ \ q_1 = 0{,}3;\ \ p_2 = 0{,}8;\ \ q_2 = 0{,}2$.

X_i	1	2	3	4
P	p_1 0,7	$q_1 q_2 p_1$ $0{,}3 \times 0{,}2 \times 0{,}7$ 0.042	$q_1^2 q_2^2 p_1$ $0{,}3^2 \times 0{,}2^2 \times 0{,}7$ 0,0252	$q_1^3 q_2^3 p_1$ $0{,}3^3 \times 0{,}2^3 \times 0{,}7$ 0,0001512
Y_i	0	1	2	3
	p_1 0,7	$q_1 p_2$ $0{,}3 \times 0{,}8$ 0,24	$q^2 q_2 p_2$ $0{,}3^2 \times 0{,}2 \times 0{,}8$ 0,0144	$q_1^3 q_2^2 p_2$ $0{,}3^3 \times 0{,}2^2 \times 0{,}8$ 0,000864

Z_1	1+0 1	2+1 3	3+2 5	4+3 7
$P(Z_i)$	$p_1 p_1 = p_1^2$ $0{,}7^2 =$ $=0{,}49$	$q_1 q_2 p_1 q_1 p_2 =$ $= q_1^2 q_2 p_2 =$ 0,0144	$q_1^2 q_2^2 p_1 q_1^2 q_2 p_2 =$ $= q_1^4 q_2^3 p_1 p_2$ 0,00036288	$q_1^3 q_2^3 p_1 q_1^3 q_2^2 p_2 =$ $= q_1^6 q_2^5 p_1 p_2$ 0,0000001306

4.6.9. Випадкова величина X має біномний розподіл $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, де $k = 0, 1, 2, \ldots n$.

Обчислити $M(X)$, $D(X)$.

Розв'язок.

Представимо випадкову величину *X*, що рівна числу настання події *k* в *n* випробуваннях як суму: $X = X_1 + X_2 + + \dots + X_i \dots + X_n$, де X_i – число настання події в *i*-тому випро-буванні, що задане розподілом:

X	0	1
P	q	p

Тоді $M(X_i) = 0 \times q + 1 \times p = p$;

$$M(X) = M(X_1 + X_2 \dots + X_i + \dots X_n) = M(X_1) + M(X_2) + + \dots M(X_i) + \dots M(X_n) = nM(X_i) = np.$$

$$D(X_i) = M\left[X_i - M(X)\right]^2 = M(X_i - p)^2 = (0-p)^2 \cdot q + + (1-p)^2 p = p^2 q + q^2 p = pq(p+q) = pq;$$

$$D(X) = D(X_1 + X_2 + \dots X_i + \dots X_n) = D(X_1) + D(X_2) + + \dots D(X_i) + \dots D(X_n) = nD(X_i) = npq.$$

4.6.10. Гральний кубик кидають *n* раз. Нехай *X* – число появ шістки. Обчислити: а) розподіл *X*; б) *M(X)*; в) *D(X)*.

Розв'язок.

Нехай випадкова величина *X* – число появи шістки.

$$p = \frac{1}{6}; \quad q = \frac{5}{6}.$$

Закон розподілу:

X	0	1	2	....	n
P	q^n	$c_n^1 pq^{n-1}$	$c_n^2 p^2 q^{n-2}$	....	p^n

$$\sum p_i = q^n + c_n^1 pq^{n-1} + c_n^2 p^2 q^{n-2} + \dots + p^n = (p+q)^n = 1$$ –

закон складено вірно.

Події “випадання шістки” є незалежними і в кожному з n залежних випробувань відбувалися з однаковою ймовірністю, тому $M(X) = np$; $M(X) = \frac{1}{6}n$; $D(X) = npq = \frac{5}{36}n$.

4.6.11. Два бухгалтери виконують складні однотипні розрахунки. Ймовірність помилки для першого у звітній відомості 0,1, а для другого – 0,05. Скласти закон розподілу числа безпомилкових відомостей, якщо кожний з них заповнив по дві відомості.

Розв’язок.

Нехай імовірність помилки I бухгалтера $q_1 = 0{,}1$, імовірність його безпомилкової роботи $p_1 = 1 - q_1 = 0{,}9$; імовірність помилки II бухгалтера $q_2 = 0{,}05$, імовірність його безпомилкової роботи $p_2 = 0{,}95$. Безпомилкових відомостей у кожного бухгалтера може бути 0, 1, 2. Складемо закони розподілів числа X і Y безпомилкових відомостей, які склали перший та другий бухгалтери, відповідно, використавши формулу Бернуллі:

$$P(X=0) = P_2(0) = C_2^0 p_1^0 q_1^{2-0} = q_1^2 = 0{,}1^2 = 0{,}01;$$

$$P(Y=0) = q_2^2 = 0{,}05^2 = 0{,}0025;$$

$$P(X=1) = P_2(1) = C_2^1 p_1^1 q_1^{2-1} = 2p_1q_1 = 2\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1 = 0{,}18;$$

$$P(Y=1) = 2p_2q_2 = 2\cdot 0{,}95\cdot 0{,}05 = 0{,}095;$$

$$P(X=2) = P_2(2) = C_2^2 p_1^2 q_1^{2-2} = p_1^2 = 0{,}9^2 = 0{,}81;$$

$$P(Y=2) = p_2^2 = 0{,}95^2 = 0{,}9025.$$

X	0	1	2
P_1	0,01	0,18	0,81

Y	0	1	2
P_2	0,0025	0,095	0,9025

$$\sum p_{1i} = 0{,}01 + 0{,}18 + 0{,}81 = 1,$$

$$\sum p_{2i} = 0{,}0025 + 0{,}095 + 0{,}9025 = 1.$$

Тоді закон розподілу суми $X + Y$ має вигляд:

$X+Y$	$0+0=0$	$0+1=1$	$0+2=2$	$1+0=1$
$P_1 \cdot P_2$	0,01·0,025= =0,000025	0,01·0,095= =0,00095	0,01·0,9025= =0,009025	0,18·0,0025= =0,00045
$1+1=2$	$1+2=3$	$2+0=2$	$2+1=3$	$2+2=4$
0,18·0,095= =0,0171	0,18·0,9025= =0,16245	0,81·0,0025= =0,002025	0,81·0,095= =0,07095	0,81·0,9025= =0,731025

Запишемо однакові суми $X + Y$ один раз, тоді їх імовірності додаються, як сума імовірностей несумісних подій.

$X+Y$	0	1	2	3	4
P_1P_2	0,000025	0,00095 + + 0,00045 = = 0,0014	0,009025 + + 0,0171 + + 0,002025 = = 0,02815	0,16245 + + 0,07695 = = 0,2394	0,731025

Перевірка:

$$\sum p_i = 0{,}000025 + 0{,}0014 + 0{,}02815 + 0{,}2394 + 0{,}731025 = 1 .$$

4.6.12. Скласти закон розподілу числа куль білого кольору серед чотирьох відібраних, якщо вибір проводиться випадковим чином з урни, в якій є сім однакових за розміром куль, з яких три кулі є білими. Обчислити дисперсію цього числа куль.

Розв’язок.

7 = 3 *білі* + 4 *не білі*

Число x_i білих куль серед чотирьох ($K = 4$) відібраних може бути: 1, 2, 3. Імовірність $P(X = x_i)$ обчислимо за класичним означенням: $P(X = x_i) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_M^{x_i} C_{N-M}^{K-x_i}}{C_N^K} = \dfrac{C_3^{x_i} C_4^{4-x_i}}{C_7^4}$.

Отже, $P(X = 0) = \dfrac{C_3^0 C_4^4}{C_7^4} = \dfrac{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \dfrac{1}{35}$;

$$P(X = 1) = \frac{C_3^1 C_4^3}{C_7^4} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{12}{35};$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^2 C_4^2}{C_7^4} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{18}{35};$$

$$P(X=3)=\frac{C_3^3C_4^1}{C_7^4}=\frac{4\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4}{7\cdot6\cdot5\cdot4}=\frac{4}{35}.$$

Перевірка: $\sum p_i=\frac{1}{35}+\frac{12}{35}+\frac{18}{35}+\frac{4}{35}=\frac{35}{35}=1$.

Закон розподілу складений вірно і має вигляд:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$$M(X)=\sum x_ip_i=0\cdot\frac{1}{35}+1\cdot\frac{12}{35}+2\cdot\frac{18}{35}+3\cdot\frac{4}{35}=\frac{60}{35}=\frac{12}{7}.$$

$$D(X)=\sum x_i^2p_i-M^2(X)=0^2\cdot\frac{1}{35}+1^2\cdot\frac{12}{35}+2^2\cdot\frac{18}{35}+$$

$$+3^2\cdot\frac{4}{35}-\left(\frac{12}{7}\right)^2=\frac{120}{35}-\frac{144}{49}=\frac{24}{49}.$$

4.6.13. У лотереї на 2000 білетів розігруються три речі, вартість яких відповідно 30, 50, 70 грн. Скласти закон розподілу суми виграшу для особи, що має два білети. Знайти ймовірність того, що сумарна вартість виграшу буде не менша 80 грн.

Розв’язок.

2000 = 1997 прогр. + 3 вигр., $s_1=30$; $s_2=50$; $s_3=70$. Вартість виграшу у особи, що має два білети може бути: 0 = = 0 + 0; 30 = 0 + 30; 50 = 0 + 50; 70 = 0 + 70; 80 = 30 + 50; 100 = 30 + 70; 120 = 50 + 70. Позначимо через $X=0,1,2$ кількість виграшних білетів серед двох. Обчислимо імовірності цих подій за:

а) класичним означенням – $P(A)=\frac{m}{n}$;

$$P(X=0)=\frac{C_{1997}^2}{C_{2000}^2}=\frac{1997\cdot1996}{2000\cdot1999}=0{,}997001501;$$

$$P(X=1)=\frac{C_{1997}^{1}\cdot C_{3}^{1}}{C_{2000}^{2}}=\frac{1997\cdot 3\cdot 2}{2000\cdot 1999}=0{,}0029969985;$$

$$P(X=2)=\frac{C_{3}^{2}}{C_{2000}^{2}}=\frac{3\cdot 1\cdot 2}{2000\cdot 1999}=0{,}00000150075.$$

Таким чином, закон розподілу має вигляд:

X	0	30	50	70	80	100	120
P	0,997001501	0,0029969985			0,00000150075		

Перевірка: $\frac{1997\cdot 1996}{2000\cdot 1999}+\frac{1997\cdot 3\cdot 2}{2000\cdot 1999}+\frac{3\cdot 2}{2000\cdot 1999}=$

$$=\frac{1997\cdot(1996+6)+6}{2000\cdot 1999}=\frac{3998000}{3998000}=1$$

б) через залежні події.

Позначимо події через A_1 – "перший білет виграшний (програшний – $\overline{A}_1$)", A_2 – "другий білет виграшний (програшний – $\overline{A}_2$)".

Тоді $P(X=0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)\cdot P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)=\frac{1997}{2000}\cdot\frac{1996}{1999}$.

$$P(X=1)=P(A_1\cdot\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(\overline{A}_2)+$$

$$+P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(A_2)=\frac{3}{2000}\cdot\frac{1997}{1999}+\frac{1997}{2000}\cdot\frac{3}{1999}=\frac{2\cdot 3\cdot 1997}{2000\cdot 1999}.$$

$$P(X=2)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)=\frac{3}{2000}\cdot\frac{2}{1999}.$$

Знайдені імовірності ті ж самі, що й обчислені за формулою Бернуллі.

в) за формулою Пуассона.

Оскільки ймовірність виграшного білету низька - $p=\frac{3}{2000}=0{,}0015<<0{,}1$, а $\lambda=np=2\cdot 0{,}0015=0{,}003<10$

(n = 2, оскільки використовуються два наявні білети), то формулу Пуассона використовувати можна.

Отже, $P_2(X=0)=P_2(0)=\dfrac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=e^{-0,003}=0,997004496$;

$$P(X=1)=P_2(1)=\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\frac{0,003}{1}e^{-0,003}=0,00299101349;$$

$$P(X=2)=P_2(2)=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}=\frac{(0,003)^2}{1\cdot 2}e^{-0,003}=0,0000044865.$$

$$\sum p_i=0,999999996\approx 1.$$

Наближена формула Пуассона дає імовірності дуже близькі (точність 10^{-5}) до імовірностей обчислених за точними формулами.

Сумарна вартість виграшу буде не меншою за 80 грн., якщо буде один виграшний білет, імовірність цієї події рівна P = 0,00000150075.

4.6.14. Ймовірність того, що телефон-автомат спрацює невірно при опусканні монет дорівнює 0,02. Скласти закон розподілу числа помилкової роботи автомата при 200 спробах з'єднання з абонентом, записавши перший, другий, сотий та останній члени розподілу. Знайти ймовірність того, що буде не менше двох невірних з'єднань.

Розв'язок.

Невірних (помилкових) з'єднань може бути від 0 до 200. Оскільки імовірність помилки p = 0,02 << 0,1 дуже мала, то використаємо формулу Пуассона, оскільки $\lambda=np=200\times$ $\times 0,02=4<10$.

Отже, $P(X=0)=P_{200}(0)=\dfrac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=e^{-4}$;

$$P(X=1)=P_{200}(1)=\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\frac{4}{1}e^{-4}=4e^{-4};$$

$$P(X=2)=P_{200}(2)=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}=\frac{4^2}{2}e^{-4}=8e^{-4};$$

$$P(X=100)=P_{200}(100)=\frac{\lambda^{100}}{100!}e^{-\lambda}=\frac{4^{100}}{100!}e^{-4};$$

$$P(X=200)=P_{200}(200)=\frac{\lambda^{200}}{200!}e^{-\lambda}=\frac{4^{200}}{200!}e^{-4}.$$

Закон розподілу має вигляд:

X	0	1	2	100	200
P	$\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=$ $=e^{-4}$	$\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=$ $=4e^{-4}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}=$ $=8e^{-4}$	$\frac{\lambda^{100}}{100!}e^{-\lambda}=$ $=\frac{4^{100}}{100!}e^{-4}$	$\frac{\lambda^{200}}{200!}e^{-\lambda}=$ $=\frac{4^{200}}{200!}e^{-4}$

$$\sum_{i=1}^{200}p_i=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}+\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}+\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}+\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}+\ldots+\frac{\lambda^{100}}{100!}e^{-\lambda}+$$

$$+\ldots+\frac{\lambda^{200}}{200!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^0}{0!}+\frac{\lambda^1}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\ldots+\frac{\lambda^{100}}{100!}+\ldots+\frac{\lambda^{200}}{200!}\right)=$$

$=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$, оскільки $e^{\lambda}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}$, а m = 200 можна вважати достатньо великим числом. Використаємо залежність:

$P_{200}(k\geq 2)+P_{200}(k\leq 1)=1$. Звідси $P_{200}(k\geq 2)=1-$ $-P_{200}(k\leq 1)==1-[P_{200}(k=0)+P_{200}(k=1)]=1-(e^{-\lambda}+$ $+4e^{-\lambda})=1-5e^{-4}=0{,}90542$ – ймовірність того, що буде не менше двох невірних з’єднань.

4.7. Закон рівномірного розподілу неперервних випадкових величин

Закон ***рівномірного*** розподілу.

Випадкова величина X називається рівномірно розподіленою, якщо на інтервалі, де визначена випадкова величина, щільність розподілу має постійне значення:

$$f(x)=\begin{cases} c=const, & \text{якщо} \quad x\in[a,b]; \\ 0, & \text{якщо} \quad x\notin[a,b]. \end{cases} \qquad (4.7.1).$$

Графік щільності рівномірного розподілу має вигляд (рис. 4.7.1а), а інтегральної функції (рис. 4.7.1б).

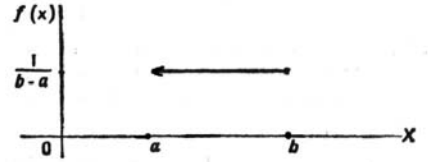


Рис. 4.7.1а.

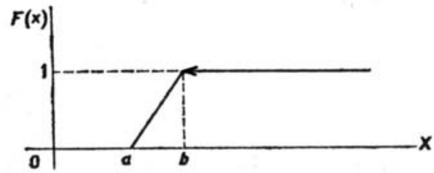


Рис. 4.7.1б.

Імовірність попадання X в інтервал (α,β) рівна: $P(\alpha<X<\beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$ (4.7.2). Інтегральна функція рівна $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$ (4.7.3). Математичне сподівання $M(X)=$ $=\dfrac{a+b}{2}$ (4.7.4), дисперсія $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ (4.7.5).

Задачі

4.7.1. Знайти дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини, X розподіленої рівномірно в інтервалі (2; 8).

Розв’язок.

Функція щільності рівномірного закону розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{8-2} = \frac{1}{6}.$$

Тоді:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx = \int_2^8 x \cdot \frac{1}{6}dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_2^8 = \frac{1}{12}(8^2 - 2^2) = 5;$$

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(x) = \int_2^8 x^2 \cdot \frac{1}{6}dx - 5^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_2^8 -$$

$$-25 = \frac{1}{18}(8^3 - 2^3) - 25 = 3;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3}.$$

4.7.2. Знайти середнє значення і дисперсію добутку двох незалежних випадкових величин X і Y з рівномірними законами розподілу: X в інтервалі [0, 1], Y – в інтервалі [1, 3].

Розв’язок.

Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то математичне сподівання їх добутку рівне добутку їх математичних сподівань: $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

Але математичне сподівання випадкової величини X розподіленої за рівномірним законом рівне половині суми кінців інтервалу $[a,b]$: $M(X) = \frac{a+b}{2}$.

Тому $M(X) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$; $\quad M(Y) = \frac{1+3}{2} = 2$.

Отже, $M(X \cdot Y) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Для обчислення дисперсії $D(X \cdot Y)$ скористаємося формулою:

$$D(X \cdot Y) = M(X \cdot Y)^2 - M^2(X \cdot Y) = M(X^2 \cdot Y^2) -$$
$$- M^2(X) \cdot M^2(Y) = M(X^2) \cdot M(Y^2) - M^2(X) \cdot M^2(Y).$$

Підставимо у формулу значення $M^2(X)$ і $M^2(Y)$ випадкових величин, розподілених за рівномірним законом:

$$M(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx = \int_b^a x^2 \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b =$$
$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}, \text{ звідки}$$
$$M(X^2) = \frac{1^2 + 0 \cdot 1 + 0^2}{3} = \frac{1}{3}; \quad M(Y^2) = \frac{3^2 + 1 \cdot 3 + 1^2}{3} = \frac{13}{3}.$$

Отже, $D(X \cdot Y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 = \frac{4}{9}$.

Дисперсію $D(X \cdot Y)$ можна також обчислити за формулою:

$$D(X \cdot Y) = D(X) \cdot D(Y) + M^2(X) \cdot D(Y) + D(X) \cdot M^2(Y),$$

де $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$, звідси $D(X) = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$;
$D(Y) = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3}$.

Остаточно, $D(X \cdot Y) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$.

4.7.3. Випадкова величина X має рівномірний розподіл з математичним сподіванням $M(X)=3$ і дисперсією $D(X)=$ $=4/3$. Знайти функцію розподілу випадкової величини X.

Розв'язок.

Рівномірний розподіл задається двома параметрами: a – початком і b – кінцем інтервалу. Математичне сподівання $M(X)$ і дисперсія $D(X)$ випадкової величини, що задана рівномірним законом розподілу відповідно рівні:

$$\begin{cases} M(X)=\dfrac{a+b}{2}=3, \\ D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Отже, для отримання оцінок a і b маємо систему рівнянь:

$\begin{cases} b+a=6, \\ b-a=4, \end{cases}$, звідки , $b=5$, $a=1$.

Таким чином, функція щільності рівномірного розподілу має вигляд: $f(x)=\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{1}{5-1}=\dfrac{1}{4}$ при $1\le x\le 5$.

Тоді інтегральна функція буде мати вигляд:

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx=\int_1^x \frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}x\Big|_1^x=\frac{1}{4}(x-1);$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\le 1; \\ \dfrac{x-1}{4} \quad \text{при } 1\le x\le 5; \\ 1 \quad \text{при } x\ge 5. \end{cases}$$

4.7.4. Величина X має щільність розподілу $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{, якщо } a\le x\le b, \\ 0 & \text{, якщо } x<a \text{ або } x>b\,. \end{cases}$$

Обчислити її математичне сподівання і дисперсію.

Розв'язок.

Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини X згідно формул рівна:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx = \int_0^R \frac{xdx}{b-a} = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2};$$

$$M(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2dx}{(b-a)} = \frac{x^3}{(b-a)\cdot 3}\Big|_a^b =$$

$$= \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3};$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Середньоквадратичне відхилення $\sigma(X)$ рівне $\sigma(X) =$ $= \sqrt{D(X)} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}.$

4.7.5. Ціна поділки шкали вимірювального пристрою 0,2. Покази пристрою округлюються до найближчого цілого числа.

Знайти ймовірність того, що при вимірюванні буде зроблена похибка:

а) менша 0,04; б) більша 0,05.

Розв'язок.

Нехай A – описана подія. Похибку заокруглення відліку можна розглядати, як випадкову величину X, яка розподілена рівномірно в інтервалі між двома сусідніми цілими поділками. Щільність рівномірного розподілу $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{0,2} =$ $= 5$. При відліку буде зроблена похибка: а) менша 0,04, якщо покази приладу округлені до попередньої з двох сусідніх поділок, тобто до 0, так що випадкова величина $X \in$ (0; 0,04) – подія A_1 або покази округлені до наступної поділки, тобто до 0,2, так, що $X \in$ (0,16; 0,2) – подія A_2. Таким чином $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$, як сума імовірностей несумісних подій.

Оскільки $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$, то

$$P(A) = P(0 < X < 0,04) + P(0,16 < X < 0,20) =$$

$$= 5\int\limits_0^{0,04} dx + 5\int\limits_{0,16}^{0,2} dx = 5x\Big|_0^{0,04} + 5x\Big|_{0,16}^{0,2} = 5 \cdot 0,04 = 0,4\,.$$

б) Похибка відліку перевищить 0,05, якщо вона буде знаходитись в інтервалі (0,05; 0,15). Імовірність такої події рівна:

$$\mathrm{P}(0,05 < X < 0,15) = 5\int\limits_{0,05}^{0,15} dx = 5x\Big|_{0,05}^{0,15} = 5 \cdot 0,1 = 0,5.$$

4.7.6. Автобуси деякого маршруту йдуть чітко за розкладом. Інтервал руху – 5 хв.

Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійде до зупинки буде чекати автобус менше 3 хв.

Розв'язок.

Якщо інтервал між приходом двох автобусів складає 5 хвилин, то щоб пасажир чекав не більше 3 хвилин, він повинен підійти на зупинку не раніше ніж 5 – 3 = 2 хвилини після відходу попереднього автобуса. Імовірність такої події A рівна

$$P(A) = P(2 < X < 5) = \int\limits_2^5 f(x)dx = \int\limits_2^5 \frac{1}{5}dx = \frac{1}{5}\int\limits_2^5 dx =$$

$$= 0{,}2x \Big|_{2}^{5} = 0{,}2 \times 3 = 0{,}6.$$

Цю ж імовірність можна обчислити згідно геометричного означення імовірності:

$$P(A) = \frac{\Delta l}{l} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

4.7.7. Годинникова стрілка електричного годинника рухається стрибками в кінці кожної хвилини. Знайти імовірність того, що в даний момент часу годинник покаже час, який відрізняється від істинного не більше, ніж на 20 с.

Знайти математичне сподівання функції $Y = \varphi(x) = X^2$ (не знаходячи попередньо щільності розподілу Y).

Розв’язок.

І спосіб.

Нехай A – описана подія. Похибка відліку часу складає не більше 20 секунд, якщо вона буде в інтервалі $\Delta_1 = (0;\ 20)$ або $\Delta_2 = (40;60)$. Тоді згідно геометричного означення імовірності:

$$P(A) = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{l} = \frac{20+20}{60} = \frac{2}{3}.$$

ІІ спосіб.

Істинний час є випадковою величиною X, яка рівномірно розподілена в інтервалі між двома сусідніми хвилинними поділками. Щільність рівномірного розподілу $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{60}$. Тоді $P(A) = P(0 < X < 20) + P(40 < X < 60) =$

$$= \int_0^{20} \frac{1}{60} dx + \int_{40}^{60} \frac{1}{60} dx = \frac{1}{60} x \Big|_0^{20} + \frac{1}{60} x \Big|_{40}^{60} = \frac{20}{60} = \frac{2}{3}.$$

4.7.8. Рівномірно розподілена випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x)=\frac{1}{2l}$ в інтервалі $(a-l;a+l)$; поза цим інтервалом $f(x) > 0$.

Знайти математичне сподівання і дисперсію X.

Розв'язок.

Оскільки крива розподілу щільності імовірності симетрична відносно прямої $x = a$, то $M(X) = a$. Тоді функція щільності має вигляд: $f(l)=\frac{1}{2l}$ в інтервалі $(a-l;a+l)$.

Обчислимо дисперсію:

$$D(X)=\frac{[a+l-(a-l)]^2}{12}=\frac{(2l)^2}{12}=\frac{l^2}{3}.$$

4.8. Показниковий (експоненціальний) розподіл

Випадкова величина розподілена за показниковим (експоненціальним) законом, якщо її густина розподілу імовірностей має вигляд:

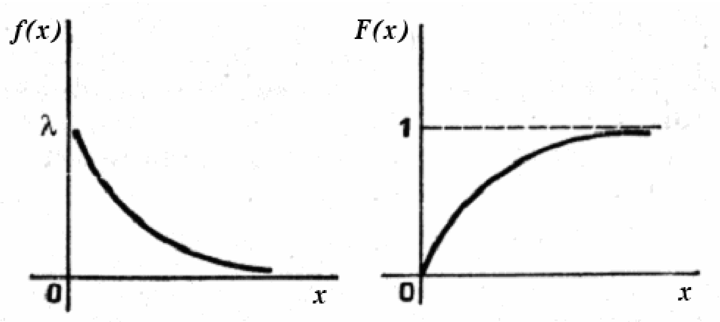
$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо} \quad x\geq 0\end{cases} \qquad (4.8.1),$$

де λ – постійна додатня величина або параметр показникового розподілу.

Інтегральна функція показникового розподілу має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{якщо} \quad x\geq 0.\end{cases} \qquad (4.8.2).$$

Графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ подані на рис. 4.8.1а, б.



а *б*

Рис. 4.8.1а, б.

Імовірність попадання випадкової величини X в заданий інтервал (α, β) рівна $P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$ (4.8.3). Математичне сподівання $M(X)$ і середнє квадратичне відхилення показникового розподілу рівні оберненій величині параметра λ:

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad (4.8.4).$$

Задачі

4.8.1. Неперервна випадкова величина X в інтервалі $(0; \infty)$ задана щільністю розподілу $f(x) = a \cdot e^{-ax}$, $a > 0$.

Знайти ймовірність того, що X прийме значення, яке належить інтервалу (1; 2).

Розв'язок.

Обчислимо дану імовірність згідно формули:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Отже:

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_{1}^{2} \alpha e^{-\alpha x}dx = -\int_{1}^{2} e^{-\alpha x}d(-\alpha x) = -e^{-\alpha x}\Big|_{1}^{2} =$$

$$= e^{-\alpha x}\Big|_1^2 = e^{-1\alpha} - e^{-2\alpha} = \frac{1}{e^{\alpha}} - \frac{1}{e^{2\alpha}} = \frac{e^{\alpha} - 1}{e^{2\alpha}}.$$

4.8.2. Випадкова величина X має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 1/3$.

Обчислити ймовірності:

а) $P\{X > 3\}$;

б) $P\{X > 6/X > 3\}$;

в) $P\{X > t + 3/X > t\}$.

Розв'язок.

а) Події ($X > 3$) і $(X \le 3)$ є протилежними, отже, $P(X > 3) + P(X \le 3) = 1$.

Звідки, $P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - P(0 \le X \le 3) = 1 -$

$$-(e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}) = 1 - \left(e^{-\frac{1}{3}\cdot 0} - e^{-\frac{1}{3}\cdot 3}\right) = 1 - (e^0 - e^{-1}) = 1 - 1 + e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

б) Розкриємо нерівність в дужках:

$x > \dfrac{6}{x} > 3,\ \ x^2 \ge 6 \ge 3x$; звідки $x > \sqrt{6}$; ($x < -\sqrt{6}$ не підходить, оскільки у показниковому законі розподілу $x > 0$) і $x < 2$. Події ($x < 2$) і $(x > \sqrt{6})$ несумісні. Отже,

$$P\left(x > \frac{6}{x} > 3\right) = P(x < 2) + P(x > \sqrt{6}) = P(0 < x < 2) +$$

$$+ P(\sqrt{6} < x < \infty) == \left(e^{-\frac{1}{3}\cdot 0} - e^{-\frac{1}{3}\cdot 2}\right) + \left(e^{-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{6}} - e^{-\frac{1}{3}\cdot\infty}\right) = 1 -$$

$$- e^{-\frac{2}{3}} + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}} = 1 - 0{,}51342 + 0{,}44198 = 0{,}92856.$$

в) Розкриємо нерівність в дужках:

$x \ge t + \dfrac{3}{x} \ge t \to x^2 \ge xt + 3 \ge xt$, що приводить до системи нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - tx - 3 > 0 \\ x^2 - tx > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} (x - x_1)(x - x_2) > 0 \\ x(x - t) > 0 \end{cases}, \text{ де}$$

$$x_1 = \frac{t - \sqrt{t^2 + 12}}{2} < 0,$$

$$x_2 = \frac{t + \sqrt{t^2 + 12}}{2} > 0.$$

Це приводить до розв'язку $\begin{cases} x > x_1, \quad x > x_2 \\ x > 0, \quad x > t \end{cases}$, що остаточно дає $x > x_2 = \dfrac{t + \sqrt{t^2 + 12}}{2}$.

Розв'язок $x < t$, $x < x_1 < 0$ не підходить, оскільки у показниковому законі розподілу $x > 0$.

Отже, $P\left(x > t + \dfrac{3}{x} > t \right) = P\left(x > \dfrac{t + \sqrt{t^2 + 12}}{2} \right) =$

$$= P\left(\frac{t + \sqrt{t^2 + 12}}{2} < x < \infty \right) = e^{-\frac{1}{3}\left(\frac{t + \sqrt{t^2 + 12}}{2} \right)} - e^{-\frac{1}{3}\infty} = e^{-\frac{t + \sqrt{t^2 + 12}}{2}}.$$

4.8.3. Час T безвідмовної роботи двигуна автомобіля розподілений за показниковим законом. Відомо, що середній час безвідмовної роботи двигуна між технічним обслуговуванням рівний 100 годинам.

Визначити ймовірність безвідмовної роботи двигуна за 80 годин.

Розв'язок.

Нехай випадкова величина X – час безвідмовної роботи. Середній час безвідмовної роботи рівний його математичному сподіванню: $M(X) = 100$.

Тоді імовірність безвідмовної роботи за 80 годин рівна згідно формули для показникового закону:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = e^{-\alpha\lambda} - e^{-\beta\lambda}.$$

Оскільки $M(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, то $\lambda = \dfrac{1}{M(X)} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$.

Отже, $P(0 \le X \le 80) = e^{-0\cdot 0,01} - e^{-80\cdot 0,01} = 1 - e^{-0,8} =$
$= 1 - 0{,}4493 = 0{,}5507$.

4.8.4. Проводяться випробування двох незалежно працюючих один від одного приладів. Час T безвідмовної роботи кожного приладу має показниковий розподіл, щільність ймовірності кожного з яких має такий вигляд:

$$f_1(t) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} & \text{при } t \ge 0, \\ 0 & \text{при } t < 0; \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} & \text{при } t \ge 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що за час t_0:

а) обидва прилади не вийдуть з ладу;

б) хоча б один прилад вийде з ладу.

Розв'язок.

а) Шукана імовірність $P(A)$ – це імовірність того, що протягом часу t_0 будуть безвідмовно працювати перший прилад – подія A_1 і другий прилад – подія A_2. Тоді $P(A) = P(A_1\ A_2)$. Оскільки події A_1 і A_2 незалежні, то $P(A) = P(A_1)\ P(A_2)$.

Для обчислення імовірностей $P(A_1)$ і $P(A_2)$ використаємо інтегральні функції, які будуть мати вигляд:

$$P_1(t \le t_0) = F_1(t_0) = \int_0^{t_0} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt = -\int_0^{t_0} e^{-\lambda_1 t} d(-\lambda_1 t) =$$

$$= e^{-\lambda_1 t}\Big|_0^{t_0} = e^{-\lambda_1 t}\Big|_{t_0}^{0} = 1 - e^{-\lambda_1 t_0}.$$

Аналогічно, $P_2(t \le t_0) = F_2(t_0) = 1 - e^{-\lambda_1 t_0}$.

Імовірності $P(A_1) = P_1(t \geq t_0)$ і $P(A_2) = P_1(t \geq t_0)$ знайдемо з рівнянь:

$P_1(t > t_0) + P_1(t \leq t_0) = 1;$

$P_2(t > t_0) + P_2(t \leq t_0) = 1;$

$$P(A_1) = 1 - P_1(t \leq t_0) = 1 - F_1(t_0) = 1 - (1 - e^{-\lambda_1 t_0}) = e^{-\lambda_1 t_0}.$$

Аналогічно, $P(A_2) = e^{-\lambda_1 t_0}$. Остаточно $P(A) = e^{-\lambda_1 t_0} \times \times e^{-\lambda_2 t_0} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t_0}$.

б) Нехай $P(\overline{A})$ – імовірність шуканої події. Події: $\overline{A}$ – хоча б один прилад вийде з ладу і A – жоден прилад не вийде з ладу є протилежними, так що $P(\overline{A}) + P(A) = 1$. Отже, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t_0}$.

4.8.5. а) Довести, що якщо неперервна випадкова величина розподілена за показниковим законом, то:

а) ймовірність того, що X прийме значення, яке менше $M(X)$, не залежить від величини параметру λ;

б) Знайти ймовірність того, що $X > M(X)$.

Розв'язок.

а) За означенням $P(X < x) = F(x)$, отже, $P(X < M(x)) = F(x)$. Обчислимо вирази для інтегральної функції $F(x)$ і $M(X)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x}dx = -\int_{0}^{x} e^{-\lambda x} d(-\lambda x) =$$

$$= -e^{-\lambda x}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

$$M(X) = \int_{0}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = -\int_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x} d(-\lambda x) =$$

$$= -\int_{0}^{\infty} xd(e^{-\lambda x}) = \left| x = u; d(e^{-\lambda x}) = du; v = e^{-\lambda x} \right| =$$

$$= -\left(xe^{-\lambda x} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \right) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} d(-\lambda x) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_\infty^0 e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_\infty^0 = \frac{1}{\lambda}.$$

(Тут використано: $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-\lambda x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\lambda e^{\lambda x}} = 0$ за правилом Лопіталя).

Таким чином, $P(X < M(X)) = P\left(X < \frac{1}{\lambda} \right) = F\left(\frac{1}{\lambda} \right) = 1 - e^{\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = 1 - e$ не залежить від параметру λ. б) Для знаходження $P(X > M(X))$, що аналогічно $P(X \geq M(X))$, оскільки $P(X = x) = 0$, скористуємось рівністю: $P(X < x) + P(X \geq x) = 1$. Звідси, $P(X \geq M(X)) = 1 - P(X < x)$ або $P(X > M(X)) = 1 - F(M(X)) = 1 - (1 - e) = e$.

4.8.6. Знайти дисперсію і середнє квадратичне відхилення показникового закону, заданого функцією розподілу $F(x) = 1 - e^{-0,4x}$, $x \geq 0$.

Розв'язок.

Обчислимо функцію щільності $f(x) = F'(x) = \left(1 - e^{-0,4x}\right)' = 0,4e^{-0,4x}$. Отже, $\lambda = 0,4$. Тоді $M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{10}{4} = 2,5$ і $D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \left(\frac{10}{4} \right)^2 = 6,25$.

4.8.7. Час T виявлення цілі локатором розподілений за показниковим законом.

Знайти ймовірність того, що ціль буде виявлена за час від 5 до 15 с. після початку пошуку, якщо середній час виявлення цілі дорівнює 10 с.

Розв'язок.

Якщо час T розподілений за показниковим законом, то щільність ймовірності $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Оскільки, $M(X) = \frac{1}{\lambda}$, то $\lambda = \frac{1}{M(X)} = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

Ймовірність виявлення цілі в даних межах часу обчислимо згідно формули: $P(a \le X \le b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$. Підставивши дані, отримаємо, $P(5 \le X \le 15) = e^{-0{,}1\cdot 5} - e^{-0{,}1\cdot 15} = e^{-0{,}5} - e^{-1{,}5} = 0{,}6065 - 0{,}2231 = 0{,}3834$.

4.8.8. Функція розподілу неперервної випадкової величини X (час безвідмовної роботи деякого пристрою) рівна $f(x) = 1 - e^{\frac{-x}{T}}$, $x \ge 0$.

Знайти ймовірність безвідмовної роботи пристрою за час $x \ge T$.

Розв'язок.

Події $(X > T)$ і $(X \le T)$ є протилежними, тому $P(x > T) + P(x \le T) = 1$, звідки $P(X > T) = 1 - P(X \le T) =$
$$= 1 - p(0 \le X \le T) = 1 - [F(T) - F(0)] = 1 - \left[1 - e^{-\frac{T}{T}} - \left(1 - e^{-\frac{0}{T}}\right)\right] =$$
$$= 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1}.$$

4.9. Нормальний розподіл

Нормальним називають розподіл імовірностей неперервної випадкової величини, якщо її густина розподілу описується такою формулою:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \text{ де } a = M(X),\ \sigma = \sqrt{D(X)} \qquad (4.9.1).$$

Нормованим називають нормальний розподіл з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$. Функція $F(x)$ нормального розподілу

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2a^2}} dz \qquad (4.9.2),$$

а функція нормованого розподілу $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ (4.9.3).

Отже, $F(x) = F_0((x-a)/\sigma)$ (4.9.4). Враховуючи те, що інтегральна функція Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ (4.9.5) затабульована, то $F_0(x) = 0{,}5 + \Phi(x)$ (4.9.6).

Графік щільності нормального розподілу описується кривою Гаусса і має такі властивості: 1) функція означена на всій числовій осі; 2) $f(x) > 0$; 3) $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$; 4) у точці $x = a$ функція $f(x)$ має максимум, що рівний $1/\sigma\sqrt{2\pi}$; 5) $f(x)$ – симетрична відносно $x = a$; 6) точки графіку $x = a - \sigma$ і $x = a + \sigma$ є точками перегину; 7) зростання математичного сподівання a приводить лише до зсуву нормальної кривої вздовж осі OX вправо, спадання – до зсуву вліво без змін форми. З зростанням σ нормальна крива стає більш пологою (плосковершинною), тобто максимум функції спадає, при зменшенні σ нормальна крива стає більш гостровершинною, тобто максимум функції зростає (рис. 4.9.1).

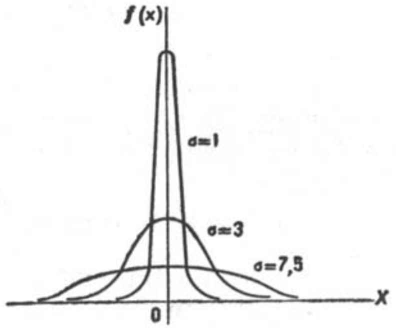


Рис. 4.9.1.

Імовірність попадання в заданий інтервал (α, β) нормальної випадкової величини визначається рівністю:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \qquad (4.9.7).$$

Імовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X за абсолютною величиною менше наперед заданого будь-якого малого додатного числа δ визначається рівністю:

$$P(| X - a |< \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \qquad (4.9.8).$$

В частковому випадку при a = 0, $P(| X |< \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$

(4.9.9) .

В попередній формулі покладемо $\delta = \sigma t$, t = 1, 2, 3, 4, 5.

Отримаємо:

$P(| X - a |< \delta) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0{,}34134 = 0{,}68268$;

$P(| X - a |< 2\delta) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}47725 = 0{,}95450$;

$P(X - a |< 3\delta) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}99730$;

$P(| X - a |< 4\delta) = 2\Phi(4) = 2 \cdot 0{,}499968 = 0{,}99936$;

$P(| X - a |< 5\delta) = 2\Phi(5) = 2 \cdot 0{,}499997 = 0{,}999994$.

Як видно з обчислень, імовірність того, що абсолютна величина відхилення не перевищить потроєне середнє квадратичне відхилення рівна 0,9973, що близько до одиниці. Лише в 0,27% випадків так відбутися не може. ***Правило 3-ох сігм***. Якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищує потроєне середнє квадратичне відхилення.

Задачі

4.9.1. Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a = 25$. Ймовірність попадання X в інтервал (10; 15) рівна 0,2.

Чому дорівнює ймовірність попадання X в інтервал (35; 40)?

Розв'язок.

Розпишемо імовірність попадання випадкової величини розподіленої за нормальним законом в заданий інтервал:

$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$. Отже,

$$P(10 \le X \le 15) = \Phi\left(\frac{15-25}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10-25}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{10}{\sigma}\right) -$$

$$-\Phi\left(-\frac{15}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{15}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0,2$$ – за умовою, і

$$P(35 \le X \le 40) = \Phi\left(\frac{40-25}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{35-25}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{15}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right).$$

Отже, $P(10 \le X \le 15) = P(35 \le X \le 40) = 0,2$.

4.9.2. Випадкові похибки вимірів підлягають нормальному закону розподілу з середнім квадратичним відхиленням 20 мм і математичним сподіванням 0 мм.

Знайти ймовірність того, що з 3 незалежних вимірів похибка хоча б одного не перевищить за абсолютною величиною 4 мм.

Розв'язок.

Нехай подія *A* полягає в тому, що в 3 незалежних вимірах похибка хоча б одного не перевищить δ.

Згідно умови задачі $\sigma(X) = 20$, $M(X) = 0$, $\delta = 4$, $n = 3$, $k \geq 1$. Спочатку необхідно обчислити імовірність того, що відхилення випадкової величини похибки *X*, розподіленої за нормальним законом не перевищить δ:

$$P(|X| \leq \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \quad \text{або} \quad P(|X| \leq 4) = 2\Phi\left(\frac{4}{20}\right) = 2 \times$$

$\times \Phi(0{,}2) = 2 \cdot 0{,}0793 = 0{,}1586$. Отже, $p = 0{,}1586$; $q = 1 - p = $ $= 0{,}8416$. Тоді $P(A) = 1 - (1-p)^3 = 1 - 0{,}8416^3 = 0{,}40433$.

4.9.3. Випадкова величина *X* розподілена нормально, причому *a* = 0 і середнє квадратичне відхилення = σ.

Знайти значення σ, при якому ймовірність того, що *X* прийме значення, яке належить інтервалу (α, β), $(\alpha > 0,$ $\beta > \alpha)$, буде найбільшою.

Вказівка. Скористатися формулою $P(\alpha < x < \beta) =$

$$= \varphi\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) = \varphi(\sigma).$$

Розв'язок.

Імовірність нормально розподіленої випадкової величини в заданому інтервалі знаходиться за формулою:

$$P(\alpha \leq x \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta - a}{\sigma}} e^{-z^2/2} dz -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\alpha - a}{\sigma}} e^{-z^2/2} dz = \varphi(\sigma).$$

Для знаходження σ знайдемо критичні точки продиференціювавши функцію $\varphi(\sigma)$ (означені інтеграли) по зміннійверхній межі і прирівняємо її до 0:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)^2}\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)^{/} - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)^2}\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)^{/}\right] = 0 \text{, або}$$

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)^2}\cdot\frac{\beta-a}{\sigma^2} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)^2}\cdot\frac{\alpha-a}{\sigma^2}\text{, або}$$

$$\frac{\alpha-a}{\beta-a} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)^2}}{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)^2}} = e^{\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-2a)}{\sigma^2}}.$$

Прологарифмувавши вираз за основою e, отримаємо:

$$\ln\frac{\alpha-a}{\beta-a} = \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-2a)}{2\sigma^2},$$

звідки $\sigma^2 = \dfrac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-2a)}{2\ln\dfrac{\alpha-a}{\beta-a}}$ або

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-2a)}{2\ln\dfrac{\alpha-a}{\beta-a}}}.$$

4.9.4. Автомат штампує деталі. Контрольована довжина деталі X розподілена нормально з математичним сподіванням рівним 50 мм. Фактична довжина виготовлених деталей не менша 32 і не більша 68 мм.

Знайти ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі:

а) більша 55;

б) менша 40 мм.

Розв'язок.

З фактичної довжини деталей випливає рівність:

$P(32 \le X \le 68) = 1$.

Для знаходження σ використаємо рівність:

$P(|x-a| \le \delta) = 2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$, де $\delta = |x-a| = 68-50 = 50-$
$-32 = 18$.

Отже, $P(|x-50| \le 18) = 2\Phi\left(\dfrac{18}{\sigma}\right) = 1$.

Звідси $\Phi\left(\dfrac{18}{\sigma}\right) = 0{,}5$; з властивості інтегральної функції отримуємо $\dfrac{18}{\sigma} = 5$, отже, $\sigma = \dfrac{18}{5} = 3{,}5$.

Для знаходження шуканих імовірностей використаємо формулу: $P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\dfrac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha - a}{\sigma}\right)$. Отже,

а) $P(X \ge 55) = P(55 \le X \le 68) = \Phi\left(\dfrac{68-50}{3{,}6}\right) -$
$-\Phi\left(\dfrac{55-50}{3{,}6}\right) = \Phi(5) - \Phi(1{,}389) = 0{,}5 - 0{,}4177 = 0{,}0823$.

б) $P(X \le 40) = P(32 \le X \le 40) = \Phi\left(\dfrac{40-50}{3{,}6}\right) -$
$-\Phi\left(\dfrac{32-50}{3{,}6}\right) = \Phi(5) - \Phi(2{,}778) = 0{,}5 - 0{,}4973 = 0{,}0027$.

4.9.5. Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням 10 і середнім квадратичним відхиленням 5.

Знайти інтервал, симетричний відносно математичного сподівання, в який з ймовірністю 0,9973 попадає величина *X* в результаті випробування.

Розв’язок.

$a = 10$; $\sigma = 5$; $P = 0{,}9973$. δ – ?

Використаємо формулу: $P\left(\left|x-a\right| \le \delta\right) = 2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$, яка в числах набуде вигляду: $P\left(\left|x-10\right| \le \delta\right) = 2\Phi\left(\dfrac{\delta}{5}\right) = 0{,}9973$, звідки $\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right) = \dfrac{0{,}9973}{2} = 0{,}49865$. З таблиць №2 знаходимо $\dfrac{\delta}{\sigma} = 3$, або $\delta = 30$.

З імовірністю $P = 0{,}9973$ випадкова величина буде знаходитись в інтервалі $(a - 3\sigma \le X \le a + 3\sigma) = (10 - 3\cdot 5 \le X \le$ $\le 10 + 3\cdot 5) = (-5 \le X \le 2{,}5)$.

4.9.6. Зріст дорослих чоловіків є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Нехай математичне сподівання її рівне 175 см., а середньоквадратичне відхилення – 6 см.

Визначити ймовірність того, що хоча б один з випадково вибраних п'яти чоловіків буде мати зріст від 170 до 180 см.

Розв’язок.

Згідно умови задачі математичне сподівання $a = 175$, середньоквадратичне відхилення $\sigma = 6$; $n = 5$; $\alpha = 170$; $\beta = 180$. Необхідно обчислити $P_5(k \ge 1)$.

Події $(k = 0)$ і $(k \ge 1)$ – протилежні. Тому $P_5(k = 0) +$ $+ P_5(k \ge 1) = 1$. Тоді $P_5(k \ge 1) = 1 - P_5(k = 0) = 1 - (1-p)^5$.

Оскільки випадкова величина розподілена за нормальним законом, то імовірність *p* рівна імовірності знаходження її в інтервалі (α, β):

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$ Підставивши числові дані, отримуємо:

$$P(170 \le X \le 180) = \Phi\left(\frac{180-175}{6}\right) - \Phi\left(\frac{170-175}{6}\right) = \Phi\left(\frac{5}{6}\right) -$$

$$-\Phi\left(-\frac{5}{6}\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{6}\right) = 2\Phi(0{,}8333) = 2\cdot 0{,}2976 = 0{,}5952.$$

Отже, $p = 0{,}5952$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}5952 = 0{,}4048$.

Остаточно, $P_5(k \ge 1) = 1 - (0{,}4048)^5 = 1 - 0{,}01087 = 0{,}98913$.

4.9.7. Який процент конденсаторів з числа відібраних з відхиленням $\pm 20\%$, які підлягають нормальному закону розподілу величин, буде мати відхилення від номіналу в межах від 0 до +1% (передбачається, що весь діапазон відхилень конденсаторів становить 3σ)?

Розв’язок.

Оскільки відхилення від номіналу не мають систематичної похибки, то математичне сподівання відхилення $a = 0$. Згідно умови задачі 20% = 3σ, звідки $\sigma = \dfrac{20\%}{3} = 6{,}667\%$.

Оскільки випадкова величина відхилення X розподілена за нормальним законом, то

$$P(0 \le X \le 1\%) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1-0}{6{,}667}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{0-0}{6{,}667}\right) = \Phi(0{,}1499) - \Phi(0) = 0{,}0596,$$

що буде відповідати приблизно 6% конденсаторів.

4.9.8. При 10000 підкиданнях монети «тризуб» випав 5400 разів. Чи слід вважати, що монета несиметрична?

Розв'язок

Число випробувань рівне n = 10000. Ймовірність випадання "тризуба" в кожному підкиданні монети рівна p = 0,5. Тоді математичне сподівання числа випадань "тризуба" рівне $M(X) = np = 10000 \times 0{,}5 = 5000;$ дисперсія числа випадань "тризуба" рівна $D(X) = npq = 5000 \times 0{,}5 = 2500;$ середньоквадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2500} = 50.$

Враховуючи, що число випробувань достатньо велике, можна припустити, що випадкова величина X – число випадань "тризуба" розподілена за нормальним законом. Тоді імовірність відхилення значень випадкової величини X від її математичного сподівання на величину $\delta = |5400 - 5000| =$ $= 400$ рівна $P\left(|X - M(X)| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{400}{50}\right) =$ $= 2\Phi(8) = 2 \cdot 0{,}5 = 1.$

Отже, монета несиметрична. Можна також застосувати правило "3-ох σ", згідно якого імовірність відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання більш ніж на 3σ мала: $P(|X - M(X)| > 3\sigma) \approx 0{,}027$ або $P(|X - M(X)| < 3\sigma) = 0{,}9973.$ Оскільки $3\sigma = 3 \cdot 50 = 150 <$ $< \delta = 400$, то ймовірність відхилення близька до 1.

4.10. Інші закони розподілу

4.10.1. Задані функції щільності розподілу ймовірності випадкової величини X. Вивести формули для обчислення:

1) моди випадкової величини X;
2) математичного сподівання випадкової величини X;
3) дисперсії і середнього квадратичного відхилення;
4) асиметрії;
5) ексцесу;
6) інтегральної функції.

Розрахунки виконати для: а) Гамма-функції; б) логнормального закону; в) закону Максвела.

Розв'язок.

а) Гамма-функція.

Диференціальна функція щільності розподілу ймовірності має вигляд:

$$\text{а)}\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-x/\beta}, & x > 0,\ \alpha > -1, \\ & \beta > 0,\ \alpha - \text{ціле}; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Розрахунки виконати для $\alpha = 0;\ \alpha = 1;\ \alpha = 2;\ \alpha = 3$.

Дослідження графіка функції щільності:

$\alpha = 0$; $f(x) = \dfrac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-x/\beta} = \dfrac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$, оскільки $\Gamma(1) = 0! = 1$.

$$f(0) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{0}{\beta}} = f(\max) = \frac{1}{\beta}.$$

При $x \to \infty$ функція щільності прямує до 0:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\beta e^{x/\beta}} = 0; \quad f(x) \geq 0.$$

Тому вісь *x* – горизонтальна асимптота.

При $\alpha > 0$, α-цілому

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-x/\beta} = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} \times$$

$$\times \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{x/\beta}} = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x^{\alpha+1}\beta}{e^{x/\beta}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\cdot 1\cdot 0\cdot \beta^{\alpha}}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)e^{x/\beta}} = 0.$$

Вісь *x* – горизонтальна асимптота.

1. Обчислимо модальне значення *Mo* випадкової величи-

ни X, в якому функція щільності $f(x)$ досягає свого максимального значення при $X \geq 0$:

$$f'(x) = \left[\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-x/\beta} \right]' = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} \left[(x^{\alpha})' e^{-x/\beta} + \right.$$

$$\left. + x^{\alpha} (e^{-x/\beta})' \right] = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} \left[\alpha x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} + x^{\alpha} e^{-x/\beta} \left(-\frac{1}{\beta} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} e^{-x/\beta} x^{\alpha-1} \left(\alpha - \frac{x}{\beta} \right) = 0.$$

$$\alpha - \frac{x}{\beta} = 0; \quad x = \alpha \cdot \beta.$$

$$Mo = \alpha \cdot \beta.$$

$$f_{\max} = f(Mo) = \frac{(\alpha \cdot \beta)^{\alpha}}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1) e^{\alpha\beta/\beta}} = \frac{\alpha^{\alpha}\beta^{\alpha}}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)e^{\alpha}} =$$

$$= \frac{\alpha^{\alpha}}{e^{\alpha}\beta\Gamma(\alpha+1)} = \frac{\alpha^{\alpha}}{e^{\alpha} \cdot \beta \cdot \alpha!}.$$

Знайдемо точки перегину прирівнявши $f''(x)$ до 0:

$$\left[\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} e^{-x/\beta} x^{\alpha-1} (\alpha - \frac{x}{\beta}) \right]' = 0;$$

$$\frac{1}{\beta^{\alpha+1} \cdot \Gamma(\alpha+1)} \left[e^{-x/\beta} (-\frac{1}{\beta}) x^{\alpha-1} (\alpha - \frac{x}{\beta}) + e^{-x/\beta} (\alpha-1) x^{\alpha-2} \times \right.$$

$$\left. \times (\alpha - \frac{x}{\beta}) + e^{-x/\beta} x^{\alpha-1} (-\frac{1}{\beta}) \right] = 0;$$

$$\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} e^{-x/\beta} x^{\alpha-2} \left[-\frac{1}{\beta} x (\alpha - \frac{x}{\beta}) + (\alpha-1)(\alpha - \frac{x}{\beta}) + \right.$$

$$\left. + x(-\frac{1}{\beta}) \right] = 0;$$

$$-\frac{1}{\beta}x\cdot\alpha+\frac{x^2}{\beta^2}+(\alpha-1)\alpha-\frac{(\alpha-1)}{\beta}x-\frac{x}{\beta}=0;$$

$$\frac{1}{\beta^2}x^2-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha-1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\right)x+(\alpha-1)\alpha=0;$$

$$\frac{1}{\beta^2}x^2-\frac{2\alpha}{\beta}x+(\alpha-1)\alpha=0;$$

$$x_{1/2}=\frac{\frac{2\alpha}{\beta}\pm\sqrt{\frac{4\alpha^2}{\beta^2}-4\frac{1}{\beta^2}(\alpha-1)\alpha}}{2\frac{1}{\beta^2}}=\frac{\frac{2\alpha}{\beta}\pm\frac{2\sqrt{\alpha}}{\beta}}{2\frac{1}{\beta^2}}=$$

$$=(\alpha\pm\sqrt{\alpha})\beta\,.$$

В точках $x_{1,2}=\alpha\beta\pm\sqrt{\alpha}\beta$ функція має перегин (рис. 4.10.1).

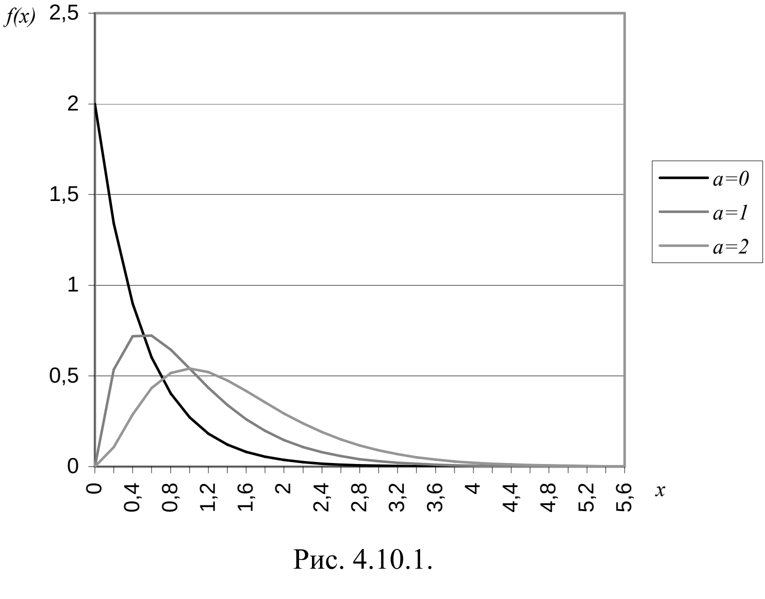


Рис. 4.10.1.

2. Математичне сподівання випадкової величини *X*:

$$M(X)=\int_0^{\infty} xf(x)x=\int_0^{\infty}\frac{x\cdot x^{\alpha}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}dx\ .$$

Зробимо підстановку: $\dfrac{x}{\beta}=y\to x=y\beta;\ \ dx=\beta dy.$

$$M(X)=\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha+1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}dx=\int_0^{\infty}\frac{(y\beta)^{\alpha+1}e^{-y}}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\beta dy=$$

$$=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{\infty}y^{\alpha+1}e^{-y}dy\ .$$

Використаємо властивість γ - функції:

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx;\qquad \Gamma(n)=(n-1)!;\qquad \Gamma(\alpha+1)=\alpha!;$$

$\Gamma(\alpha+2)=(\alpha+1)!$ і $(\alpha+1)!=\alpha!(\alpha+1)$.

Отже, $M(X)=\dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+2)=\dfrac{\beta(\alpha+1)!}{\alpha!}=$

$$=\frac{\beta\alpha!(\alpha+1)}{\alpha!}=\beta(\alpha+1)\ .$$

3. Дисперсія $D(X)$:

$D(X)=M(X^2)-M^2(X)$.

$$M(X^2)=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}e^{-x/\beta}dx=\int_0^{\infty}\frac{(y\beta)^{\alpha+2}e^{-y}\beta dy}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}=$$

$\dfrac{x}{\beta}=y;\ \ x=y\beta;\ \ dx=\beta dy$.

$$=\int_0^{\infty}\frac{\beta^{\alpha+3}y^{\alpha+2}e^{-y}dy}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}=\frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{\infty}y^{\alpha+2}e^{-y}dy=\frac{\beta^2\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(\alpha+1)}=$$

$$=\frac{\beta^2(\alpha+2)!}{\alpha!}=\frac{\beta^2\alpha!(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha!}=\beta^2(\alpha+1)(\alpha+2).$$

$$\mu_2=D(X)=\beta^2(\alpha+1)(\alpha+2)-\left[(\alpha+1)\beta\right]^2=\beta^2(\alpha+1)\times$$
$$\times\left[\alpha+2-\alpha-1\right]=\beta^2(\alpha+1).$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\beta^2(\alpha+1)}=\beta\sqrt{\alpha+1}.$$

4. Асиметрія розподілу A_s обчислюється за формулою:

$A_s=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$, де μ_3 – центральний момент III порядку:

$$\mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3,$$

$$\nu_3(X)=M(X^3)=\int_0^\infty x^3 f(x)dx=\int_0^\infty x^3\,\frac{x^\alpha e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}dx=$$

Зробимо підстановку: $\frac{x}{\beta}=y$; $x=y\beta$; $dx=\beta dy$.

$$=\int_0^\infty\frac{(y\beta)^{\alpha+3}e^{-y}\beta dy}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}=\frac{\beta^3}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty y^{\alpha+3}e^{-y}dy=\frac{\beta^3\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(\alpha+1)}=$$

$$=\frac{\beta^3\alpha!(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\alpha!}=\beta^3(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3).$$

Тут використано:

$\Gamma(\alpha+1)=\alpha!$;

$\Gamma(\alpha+4)=(\alpha+3)!=\alpha!(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)$.

Оскільки $\nu_1=\beta(\alpha+1)$, $\nu_2=\beta^2(\alpha+1)(\alpha+2)$, то

$$\mu_3=\beta^3(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)-3\beta(\alpha+1)\beta^2(\alpha+1)(\alpha+2)+$$
$$+2\beta^3(\alpha+1)^3=\beta^3(\alpha+1)(\alpha^2+3\alpha+2\alpha+6-3\alpha^2-9\alpha-6+$$
$$+2\alpha^2+4\alpha+2)=\beta^3(\alpha+1)\cdot 2=2\beta^3(\alpha+1).$$

Отже, асиметрія γ - розподілу:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{2\beta^3(\alpha+1)}{\beta^3(\alpha+1)^{3/2}} = \frac{2}{(\alpha+1)^{1/2}} .$$

При $\alpha = 0$; $A_s = 2$;

$\alpha = 1$; $A_s = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$;

$\alpha = 2$; $A_s = \frac{2}{\sqrt{3}}$;

$\alpha = 3$; $A_s = 1$.

5, Ексцес розподілу обчислюється за формулою::

$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$, де $\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$,

$$\nu_4(X) = M(X^4) = \int_0^\infty x^4 f(x)dx = \int_0^\infty x^4 \frac{x^\alpha e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+4} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} dx = \int_0^\infty \frac{(y\beta)^{\alpha+4} e^{-y}\beta dy}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} = \frac{\beta^4}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty y^{\alpha+4} e^{-y} dy =$$

$$= \frac{\beta^4 \Gamma(\alpha+5)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{\beta^4 \alpha!(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}{\alpha!} =$$

$$= \beta^4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4) .$$

Прийнято:

$\Gamma(\alpha+5) = (\alpha+4)! = \alpha!(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)$;

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$.

$$\mu_4 = \beta^4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4) - 4\beta(\alpha+1)\beta^3 \times$$
$$\times(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) + 6\beta^2(\alpha+1)^2\beta^2(\alpha+1)(\alpha+2) - 3\beta^4 \times$$
$$\times(\alpha+1)^4 = \beta^4(\alpha+1)[(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4) - 4(\alpha+1)(\alpha+2)\times$$
$$\times(\alpha+3) + 6(\alpha+1)^2(\alpha+2) - 3(\alpha+1)^3] = \beta^4(\alpha+1)[\alpha^3 + 4\alpha^2 +$$
$$+ 5\alpha^2 + 20\alpha + 6\alpha + 24 - 4\alpha^3 - 20\alpha^2 - 24\alpha - 4\alpha^2 - 20\alpha - 24 +$$
$$+ 6\alpha^3 + 12\alpha^2 + 12\alpha^2 + 24\alpha + 6\alpha + 12 - 3\alpha^3 - 9\alpha^2 - 9\alpha - 3] =$$

$$= \beta^4(\alpha+1)(3\alpha+9) = \beta^4(\alpha+1)\cdot 3(\alpha+3).$$

Тоді, $E_k = \dfrac{3\beta^4(\alpha+1)(\alpha+3)}{\beta^4(\alpha+1)^2} - 3 = \dfrac{3(\alpha+3)}{\alpha+1} - 3 > 0$,

оскільки $\dfrac{\alpha+3}{\alpha+1} > 1$.

При $\alpha = 0$, $E_k = 6$; $\alpha = 1$, $E_k = \dfrac{3\cdot 4}{2} - 3 = 3$;

$\alpha = 2$, $E_k = \dfrac{3\cdot 5}{3} - 3 = 2$; $\alpha = 3$, $E_k = \dfrac{3\cdot 6}{4} - 3 = 1{,}5$.

6. Обчислимо інтегральну функцію $F(x)$ при різних значеннях α:

а) $\alpha = 0$;

$$F(x) = \frac{1}{\beta}\int_0^x e^{-\frac{x}{\beta}}dx = -\int_0^x e^{-\frac{x}{\beta}}d\left(-\frac{x}{\beta}\right) = -e^{-\frac{x}{\beta}}\Big|_0^x = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}.$$

б) $\alpha = 1$;

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(2)}\int_0^{\frac{x}{\beta}} ye^{-y}dy = \left| \begin{matrix} y = u, e^{-y}dy = dv; \\ dy = du; v = \int e^{-y}dy = -e^{-y} \end{matrix} \right| =$$

$$= -ye^{-y}\Big|_0^{\frac{x}{\beta}} + \int_0^{\frac{x}{\beta}} e^{-y}dy = -\left(\frac{x}{\beta}\right)\cdot e^{-\frac{x}{\beta}} - e^{-y}\Big|_0^{\frac{x}{\beta}} = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}\left(1 + \frac{x}{\beta}\right).$$

При $x = 0$, $F(0) = 0$; при $x \to \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left[1 - e^{-\frac{x}{\beta}}(1 + \frac{x}{\beta}\right] =$

$$= 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{1 + \frac{x}{\beta}}{e^{\frac{x}{\beta}}} = 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\beta}e^{\frac{x}{\beta}}} = 1 - 0 = 1.$$

Отже, дана функція $F(x)$ є інтегральною.

в) $\alpha = 2$;

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(3)} \int_0^{\frac{x}{\beta}} y^2 e^{-y} dy = \left| \begin{matrix} y^2 = u, du = 2ydy; \\ d(e^{-y}) = dv; v = -e^{-y} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{x}{\beta}}^{0} y^2 e^{-y} d(-y) = \frac{1}{2} y^2 e^{-y} \Big|_{\frac{x}{\beta}}^{0} - \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{\frac{x}{\beta}}^{0} e^{-y} y dy = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\beta} \right)^2 e^{-\frac{x}{\beta}} -$$

$$- \left[- ye^{-y} \Big|_{\frac{x}{\beta}}^{0} - e^{-y} \Big|_{\frac{x}{\beta}}^{0} \right] = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}} \left[1 + \frac{x}{\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\beta} \right)^2 \right].$$

г) $\alpha = 3$;

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(4)} \int_0^{\frac{x}{\beta}} y^3 e^{-y} dy = \left| \begin{matrix} \Gamma(4) = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ y^3 = u, du = 3y^2 dy; \\ e^{-y} dy = dv; v = -e^{-y} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3!} \int_{\frac{x}{\beta}}^{0} y^3 d(e^{-y}) = \frac{1}{3!} y^3 e^{-y} \Big|_{\frac{x}{\beta}}^{0} - \frac{1}{3!} \int_{\frac{x}{\beta}}^{0} 3y^2 e^{-y} dy = \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{\beta} \right)^3 e^{-\frac{x}{\beta}} -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\frac{x}{\beta}}^{0} y^2 e^{-y} dy = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}} \left[1 + \frac{x}{1! \cdot \beta} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{\beta} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{\beta} \right)^3 \right].$$

д) $\alpha = 4$;

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(5)} \int_0^{\frac{x}{\beta}} y^4 e^{-y} dy = \frac{1}{4!} \int_{\frac{x}{\beta}}^{0} y^4 d(e^{-y}) = \frac{1}{4!} y^4 e^{-y} \Big|_{\frac{x}{\beta}}^{0} -$$

$$-\frac{1}{4!}\int\limits_{\frac{x}{\beta}}^{0} 4y^3 e^{-y}dy = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}\left[1 + \frac{x}{1!\beta} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{\beta}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{\beta}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x}{\beta}\right)^4\right].$$

б) Логнормальний закон.

$f(x)$ – логнормальна: логарифм $\ln x$ випадкової величини X розподілений за нормальним законом:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\beta^2}} & \text{при } x > 0; \\ f(x) = 0 & \text{при } x \le 0, \end{cases}$$

α – будь-яке дійсне число.

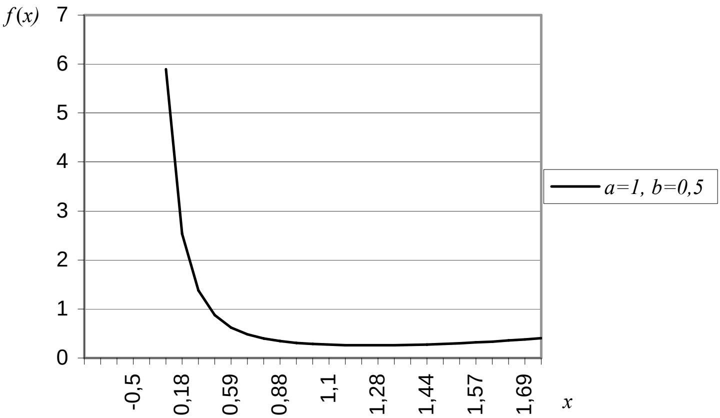


Рис. 4.10.2.

1. Обчислимо модальне значення логнормального розподілу, прирівнявши І похідну від $f(x)$ до 0.

$f'(x) = 0$;

$$f'(x) = \left[\frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\beta^2}}\right]' = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\beta^2}}\right]' =$$

$$=\frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{(\ln x-\alpha)^2}{2\beta^2}}-\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{(\ln x-\alpha)^2}{2\beta^2}}\cdot\frac{2(\ln x-\alpha)}{2\beta^2}\cdot\frac{1}{x}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(\ln x-\alpha)^2}{2\beta^2}}\cdot\frac{1}{x^2}\left[1+\frac{2(\ln x-\alpha)}{2\beta^2}\right]=0$$

$$1+\frac{\ln x-\alpha}{\beta^2}=0;\ \ \ln x-\alpha+\beta^2=0;\ \ln x=\alpha-\beta^2.$$

Отже, $x=e^{\alpha-\beta^2}$; $Mo=e^{\alpha-\beta^2}$.

2. Математичне сподівання випадкової величини X:

$$M(X)=\int_0^\infty x\cdot\frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(\ln x-\alpha)^2}{2\beta^2}}dx=\frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{(\ln x-\alpha)^2}{2\beta^2}}dx=*$$

Зробимо заміну $\frac{\ln x-\alpha}{\beta}=t$; при $\begin{array}{l} x\to 0,\ \ t\to-\infty; \\ x\to\infty,\ \ t\to\infty; \end{array}$

$\ln x=t\beta+\alpha$; $x=e^{t\beta+\alpha}$; $dx=x\beta dt=e^{t\beta+\alpha}\beta dt$.

$$*=\frac{\beta}{\beta\sqrt{2\pi}}e^{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{t\beta}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(t-\beta)^2}{2}}e^{\frac{\beta^2}{2}}dt=**$$

Перетворимо вираз:

$$-\frac{t^2}{2}+t\beta=-\left(\frac{t^2}{2}-t\beta\right)=-\left(\frac{(t-\beta)^2}{2}-\frac{\beta^2}{2}\right).$$

$$**=e^{\frac{\beta^2}{2}}e^{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(t-\beta)^2}{2}}dt=***$$

Оскільки $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(t-\beta)^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1}\cdot e^{-\frac{(t-\beta)^2}{2\cdot 1^2}}$ характеризує щільність нормального закону розподілу з математичним сподіванням β і середнім квадратичним відхиленням рівним 1, а $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1}e^{-\frac{(t-\beta)^2}{2}}dt=1$, то

$***=e^{\alpha+\frac{\beta^2}{2}}$. Отже, $M(X)=e^{\alpha+\frac{\beta^2}{2}}$.

Графік функції зображено на рис. 4.10.2.

3. Обчислимо дисперсію логнормального закону згідно формули: $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$, де

$$M(X^2)=\int_0^{\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^{\infty}x^2\frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(\ln x-\alpha)^2}{2\beta^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot e^{-\frac{(\ln x-\alpha)^2}{2\beta^2}}dx=\frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{t\beta+\alpha}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{t\beta+\alpha}\beta dt=*$$

Зробимо ту ж підстановку:

$$-\frac{t^2}{2}+2t\beta=-\frac{(t-2\beta)^2}{2}+2\beta^2.$$

$$*=\frac{e^{2\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2t\beta-\frac{t^2}{2}}dt=e^{2\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(t-2\beta)^2}{2}}e^{2\beta^2}dt=$$

$$=e^{2\alpha}e^{2\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-2\beta)^2}{2}}dt=**$$

Тут $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1}\cdot e^{-\frac{(t-2\beta)^2}{2\cdot 1^2}}dt=1$;

$**=e^{2\alpha}e^{2\beta^2}$.

$$D(X)=e^{2\alpha}e^{2\beta^2}-(e^{\alpha+\frac{\beta^2}{2}})^2=e^{2\alpha}e^{2\beta^2}-e^{2\alpha}e^{\beta^2}=e^{2\alpha}e^{\beta^2}(e^{\beta^2}-1)=$$

$$=e^{2\alpha+\beta^2}(e^{\beta^2}-1).$$

Отже, $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=e^{\alpha+\frac{\beta^2}{2}}\sqrt{e^{\beta^2}-1}$.

Обчислимо початкові моменти третього ν_3 і четвертого ν_4 порядків.

$$\nu_3 = \int_0^\infty x^3 \frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-\alpha)^2}{2\beta^2}} dx = *$$

Використавши попередню підстановку, отримаємо

$$* = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{3(\beta t+\alpha)} e^{-\frac{t^2}{2}} \beta dt = **$$

Виконаємо перетворення в підінтегральному виразі:

$$-\frac{t^2}{2} + 3\beta t + 3\alpha = -\left(\frac{t^2}{2} - 3\beta t\right) + 3\alpha = -\left[\frac{(t-3\beta)^2}{2} - \frac{9}{2}\beta^2\right] +$$

$$+3\alpha = -\frac{(t-3\beta)^2}{2} + \frac{9}{2}\beta^2 + 3\alpha\,;$$

$$** = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-3\beta)^2}{2}} e^{\frac{9}{2}\beta^2+3\alpha} dt = e^{\frac{9}{2}\beta^2+3\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-3\beta)^2}{2}} dt = ***$$

Оскільки $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-3\beta)^2}{2\cdot 1}} dt = 1$ при $\sigma = 1$, вираз рівний $*** = e^{\frac{9}{2}\beta^2+3\alpha}$.

$$\nu_4 = \int_0^\infty x^4 \cdot \frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-\alpha)^2}{2\beta^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{4(\beta t+\alpha)}}{\beta\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \beta dt = *$$

$$-\frac{t^2}{2} + 4\beta t + 4\alpha = -\left(\frac{t^2}{2} - 4\beta t\right) + 4\alpha = -\frac{(t-4\beta)^2}{2} + 8\beta^2 + 4\alpha\,;$$

$$* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-4\beta)^2}{2}} e^{8\beta^2+4\alpha} dt = e^{8\beta^2+4\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-4\beta)^2}{2}} dt\,.$$

Оскільки $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-4\beta)^2}{2\cdot 1}}dt = 1$, то $\nu_4 = e^{8\beta^2+4\alpha}$.

4. $M(X) = e^{\alpha+\frac{\beta^2}{2}} = \nu_1$,

$M(X^2) = e^{2\alpha}e^{2\beta^2} = \nu_2$,

$D(X) = e^{2\alpha}e^{\beta^2}(e^{\beta^2}-1)$,

$M(X^3) = e^{\frac{9}{2}\beta^2+3\alpha} = \nu_3$,

$M(X^4) = e^{8\beta^2+4\alpha} = \nu_4$,

$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = e^{\frac{9}{2\beta^2}+3\alpha} - 3(e^{\alpha}e^{\frac{\beta^2}{2}}e^{2\alpha}e^{2\beta^2}) +$

$+2(e^{\alpha+\frac{\beta^2}{2}})^3 = e^{\frac{9}{2}\beta^2}e^{3\alpha} - 3e^{3\alpha}e^{\frac{5}{2}\beta^2} + 2e^{3\alpha}e^{\frac{3}{2}\beta^2} =$

$= e^{3\alpha}e^{\frac{3}{2}\beta^2}(e^{3\beta^2} - 3e^{\beta^2} + 2).$

$\sigma^3(X) = D(X)\cdot\sqrt{D(X)} = e^{2\alpha}e^{\beta^2}(e^{\beta^2}-1)\cdot e^{\alpha}e^{\frac{\beta^2}{2}}(e^{\beta^2} -$

$-1)^{\frac{1}{2}} = e^{3\alpha}e^{\frac{3}{2}\beta^2}(e^{\beta^2}-1)^{\frac{3}{2}}.$

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{e^{3\alpha}e^{\frac{3}{2}\beta^2}(e^{3\beta^2}-3e^{\beta^2}+2)}{e^{3\alpha}e^{\frac{3}{2}\beta^2}(e^{\beta^2}-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^{3\beta^2}-3e^{\beta^2}+2}{(e^{\beta^2}-1)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{(e^{3\beta^2}-3e^{2\beta^2}+3e^{\beta^2}-1)+3e^{2\beta^2}-6e^{\beta^2}+3}{(e^{\beta^2}-1)^{\frac{3}{2}}} = *$$

Оскільки $(e^{\beta^2}-1)^3 = e^{3\beta^2} - 3e^{2\beta^2} + 3e^{\beta^2} - 1$.

$$* = \frac{(e^{\beta^2}-1)^3 + 3(e^{2\beta^2}-2e^{\beta^2}+1)}{(e^{\beta^2}-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(e^{\beta^2}-1)^3 + 3(e^{\beta^2}-1)^2}{(e^{\beta^2}-1)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(e^{\beta^2}-1)^6}{(e^{\beta^2}-1)^3}} + 3\sqrt{\frac{(e^{\beta^2}-1)^4}{(e^{\beta^2}-1)^3}} = \sqrt{(e^{\beta^2}-1)^3} + 3\sqrt{e^{\beta^2}-1} > 0$$

5. $\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4 = e^{8\beta^2+4\alpha} - 4e^{\alpha+\frac{\beta^2}{2}} e^{\frac{9}{2}\beta^2+3\alpha} +$
$+ 6e^{2\alpha+\beta^2} e^{2\alpha} e^{2\beta^2} - 3e^{4\alpha+2\beta^2} = e^{8\beta^2} e^{4\alpha} - 4e^{5\beta^2} e^{4\alpha} + 6e^{4\alpha} e^{3\beta^2} -$
$- 3e^{4\alpha} e^{2\beta^2} = e^{4\alpha} e^{2\beta^2} (e^{6\beta^2} - 4e^{3\beta^2} + 6e^{\beta^2} - 3)$;

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{e^{4\alpha} e^{2\beta^2} (e^{6\beta^2} - 4e^{3\beta^2} + 6e^{\beta^2} - 3)}{e^{4\alpha} e^{2\beta^2} (e^{\beta^2}-1)^2} - 3 = *$$

$\sigma^4 = D^2(X) = e^{4\alpha} e^{2\beta^2} (e^{\beta^2}-1)^2$. Підставимо

$e^{2\beta^2} - 2e^{\beta^2} + 1 = (e^{\beta^2}-1)^2$,

$(e^{\beta^2}-1)^3 = e^{3\beta^2} - 3e^{2\beta^2} + 3e^{\beta^2} - 1$,

$(e^{2\beta^2}-1)^3 = e^{6\beta^2} - 3e^{4\beta^2} + 3e^{2\beta^2} - 1$.

$$* = \frac{(e^{6\beta^2} - 3e^{4\beta^2} + 3e^{2\beta^2} - 1) + 3e^{4\beta^2} - 4e^{3\beta^2} - 3e^{2\beta^2} + 6e^{\beta^2} - 2}{(e^{\beta^2}-1)^2} - 3 =$$

$$= \frac{3e^{2\beta^2}(e^{2\beta^2} - 2e^{\beta^2} + 1) + 2e^{3\beta^2} - 6e^{2\beta^2} + 6e^{\beta^2} - 2}{(e^{\beta^2}-1)^2} - 3 =$$

$$= \frac{(e^{2\beta^2}-1)^3 + 3e^{2\beta^2}(e^{\beta^2}-1)^2 + 2e^{\beta^2}(e^{2\beta^2} - 2e^{\beta^2} + 1) - 2e^{2\beta^2} + 4e^{\beta^2} - 2}{(e^{\beta^2}-1)^2} - 3 =$$

$$= \frac{(e^{2\beta^2}-1)^3 + 3e^{2\beta^2}(e^{\beta^2}-1)^2 + 2e^{\beta^2}(e^{\beta^2}-1)^2 - 2(e^{2\beta^2} - 2e^{\beta^2} + 1)}{(e^{\beta^2}-1)^2} - 3 =$$

$$= \frac{(e^{\beta^2}-1)^3(e^{\beta^2}+1)^3 + 3e^{2\beta^2}(e^{\beta^2}-1)^2 + 2e^{\beta^2}(e^{\beta^2}-1)^2 - 2(e^{\beta^2}-1)^2}{(e^{\beta^2}-1)^2} - 3 =$$

$= (e^{\beta^2}-1)(e^{\beta^2}+1)^3 + 3e^{2\beta^2} + 2e^{\beta^2} - 2 - 3 = 0\cdot 1 + 3\cdot 1 + 2\cdot 1 - 2 - 3 > 0$,
оскільки перші три доданки додатні.

6. Обчислимо інтегральну функцію розподілу ймовірності логнормального закону:

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{0}^{x}\frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-\alpha)^2}{2\beta^2}}dx=*$$

Зробимо заміну змінних $\frac{\ln x-\alpha}{\beta}=t$. Тоді $\ln x=\beta t-\alpha$;

$\frac{dx}{x}=\beta dt$; $x=e^{\beta t+\alpha}$.

$t_1\to-\infty$ при $x\to 0$;

$t_2=\frac{\ln x-\alpha}{\beta}$.

$$*=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\ln x-\alpha}{\beta}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\ln x-\alpha}{\beta}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=*$$

Оскільки:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0{,}5,$$

$*=0{,}5+\Phi\left(\frac{\ln x-\alpha}{\beta}\right)=0{,}5+\Phi(t)$, де $\Phi(t)$ – інтегральна функція Лапласа.

в)Максвела.

Функція щільності має вигляд $f(v)=\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}v^2e^{-h^2v^2}$ при $v\geq 0$ (див. рис. 4.10.3).

1. Обчислимо моду розподілу, прирівнявши першу похідну $f'(v)$ до 0.

$$f'(v)=\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}\left[2ve^{-h^2v^2}+v^2e^{-h^2v^2}(-h^2 2v)\right]=0,$$

або $\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}2ve^{-h^2v^2}\left(1-v^2h^2\right)=0\to 1-v^2h^2=0$.

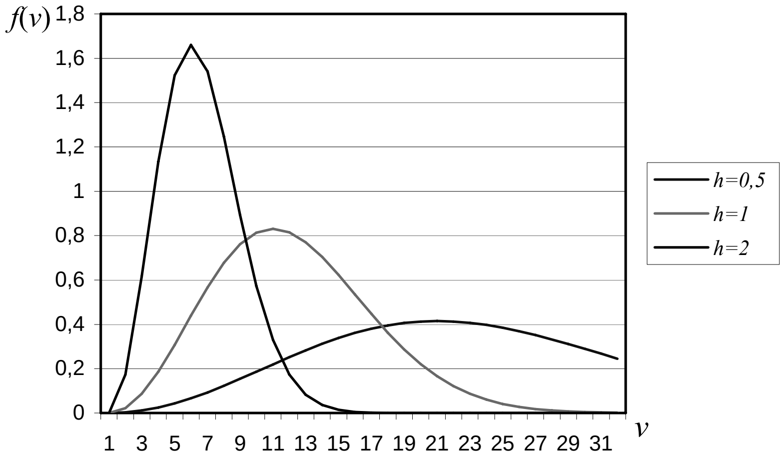


Рис. 4.10.3.

Звідси $v^2 = \dfrac{1}{h^2}$ або $v_0 = \dfrac{1}{h}$. Отже, $Mo = \dfrac{1}{h}$.

2. Обчислимо математичне сподівання випадкової величини v:

$$M(v) = \int_0^\infty \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{-h^2v^2} v dv = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty v^2 e^{-h^2v^2} d(v^2) =$$

$$= -\frac{4h^3}{\sqrt{\pi} \cdot 2 \cdot h^2} \int_0^\infty v^2 e^{-h^2v^2} d(-h^2v^2) = -\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty v^2 d(e^{-h^2v^2}) =$$

$$| v^2 = u,\ du = 2vdv;\ d(e^{-h^2v^2}) = dw,\ w = e^{-h^2v^2} |$$

$$= -\frac{2h}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{-h^2v^2} \Big|_0^\infty + \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-h^2v^2} 2vdv = -\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{v^2}{e^{h^2v^2}} \Big|_0^\infty -$$

$$-\frac{2h}{h^2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-h^2v^2} d(-h^2v^2) = -\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{v^2}{e^{h^2v^2}} \Big|_0^\infty - \frac{2}{h\sqrt{\pi}} e^{-h^2v^2} \Big|_0^\infty =$$

$$= -\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\left(\lim_{v\to\infty}\frac{v^2}{e^{h^2v^2}} - \frac{0}{e^{h^2 0}}\right) - \frac{2}{h\sqrt{\pi}}\lim_{v\to\infty}\frac{1}{e^{h^2v^2}} + \frac{2}{h\sqrt{\pi}}e^{-h^2 0} =$$

$$= -\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\lim_{v\to\infty}\frac{2}{2h^2v\cdot e^{h^2v^2}\,2h^2v} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot 0 + \frac{2}{h\sqrt{\pi}}\cdot 1 =$$

Використавши правило Лопіталя, отримуємо:

$$= \frac{2}{h\sqrt{\pi}} = \frac{1{,}1284}{h} > Mo\,.$$

3. Обчислимо дисперсію $D(v)$ за формулою:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)\,;$$

$$M(v^2) = \int_0^\infty v^2 f(v)dv = \int_0^\infty v^2\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}v^2e^{-h^2v^2}dv = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty v^3e^{-h^2v^2}vdv =$$

$$= -\frac{4h^3}{2\sqrt{\pi}\cdot h^2}\int_0^\infty v^3e^{-h^2v^2}d(-h^2v^2) = -\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty v^3 d(e^{-h^2v^2}) =$$

$$= -\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\left(v^3e^{-h^2v^2}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty 3v^2e^{-h^2v^2}dv\right) = *$$

Для знаходження границі I доданку використаємо правило Лопіталя:

$$\lim_{v\to\infty}v^3e^{-h^2v^2} = \lim_{v\to\infty}\frac{v^3}{e^{h^2v^2}} = \lim_{v\to\infty}\frac{3v^2}{e^{h^2v^2}h^2\,2v} = \frac{3}{2h^2}\lim_{v\to\infty}\frac{1}{e^{h^2v^2}\,2v} = 0\,.$$

Отже, $v^3e^{-h^2v^2}\Big|_0^\infty = 0\,.$

$$* = \frac{6h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty v^2e^{-h^2v^2}dv = \frac{3}{2h^2}\int_0^\infty\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}v^2e^{-h^2v^2}dv = \frac{3}{2h^2}\,,$$

оскільки $\int_0^\infty\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}v^2e^{-h^2v^2}dv = 1$. Отже, дисперсія буде рівна:

$$D(v)=\frac{3}{2h^2}-\left(\frac{2}{h\sqrt{\pi}}\right)^2=\frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)}{h^2}=\frac{3\pi-8}{2\pi h^2}=\frac{0{,}22676}{h^2}.$$

Отже, $\sigma(v)=\sqrt{D(v)}=\dfrac{0{,}47619}{h}$.

4. Для обчислення асиметрії і ексцесу знайдемо початкові моменти третього і четвертого порядків.

$$v_3=\mu(v^3)=\int_0^\infty v^3 f(v)dv=\int_0^\infty v^3\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}v^2e^{-h^2v^2}dv=$$

$$=\frac{4h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty v^4\cdot v\cdot h^2e^{-h^2v^2}dv=-\frac{4h}{\sqrt{\pi}\cdot 2}\int_0^\infty v^4\cdot e^{-h^2v^2}d(-h^2v^2)=$$

$$=-\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty v^4d(e^{-h^2v^2})=\begin{vmatrix} v^4=u, du=4v^3dv; \\ d(e^{-h^2v^2})=dw, w=e^{-h^2v^2}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\left[v^4e^{-h^2v^2}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty 4v^3e^{-h^2v^2}dv\right]=\frac{8h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty v^3e^{-h^2v^2}dv=*$$

$$\lim_{v\to\infty}v^4e^{-h^2v^2}=\lim_{v\to\infty}\frac{v^4}{e^{h^2v^2}}=\lim_{v\to\infty}\frac{4v^3}{e^{h^2v^2}\cdot 2vh^2}=$$

$$=\lim_{v\to\infty}\frac{4\cdot 3v^2}{2h^2ve^{h^2v^2}}=\frac{6}{h^2}\lim_{v\to\infty}\frac{2v}{e^{h^2v^2}+ve^{h^2v^2}2h^2v}=0;$$

$$*=\frac{8h}{h^2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty v^2e^{-h^2v^2}vh^2dv=-\frac{8}{2h\sqrt{\pi}}\int_0^\infty v^2e^{-h^2v^2}d(-h^2v^2)=$$

$$=-\frac{4}{h\sqrt{\pi}}\int_0^\infty v^2d(e^{-h^2v^2})=-\frac{4}{h\sqrt{\pi}}\left(v^2e^{-h^2v^2}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty 2ve^{-h^2v^2}dv\right)=*$$

$$\lim_{v\to\infty}v^2e^{-h^2v^2}=\lim_{v\to\infty}\frac{v^2}{e^{h^2v^2}}=\lim_{v\to\infty}\frac{2v}{e^{h^2v^2}2vh^2}=0;$$

$$* = -\frac{4}{h\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{h^2} \int_0^{\infty} e^{-h^2v^2} d(-h^2v^2) = -\frac{4}{h^3\sqrt{\pi}} e^{-h^2v^2} \Big|_0^{\infty} =$$

$$= -\frac{4}{h^3\sqrt{\pi}} \lim_{v\to\infty} \frac{1}{e^{h^2v^2}} + \frac{4}{h^3\sqrt{\pi}} e^{-0} = \frac{4}{h^3\sqrt{\pi}}.$$

Отже, $v_3 = \dfrac{4}{h^3\sqrt{\pi}}$.

Центральний момент III порядку $\mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3 =$

$$= \frac{4}{h^3\sqrt{\pi}} - 3 \cdot \frac{2}{h\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{2} h^2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{h\sqrt{\pi}} \right)^3 = \frac{16 - 5\pi}{h^3 \pi^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\sigma(v) = \sqrt{D(v)} = \frac{\sqrt{3\pi - 8}}{h\sqrt{2\pi}}.$$

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{(16 - 5\pi) \cdot h^3 2^{3/2} \pi^{3/2}}{h^3 \pi^{3/2} (3\pi - 8)^{3/2}} = \frac{0{,}84852}{1{,}6921} = 0{,}501.$$

Оскільки асиметрія додатня, то похилість (“хвіст”) знаходиться справа відносно моди.

5. Для обчислення ексцесу необхідно обчислити початкові v_4 і центральні μ_4 моменти IV порядку.

$$v_4 = \int_0^{\infty} \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{-h^2v^2} v^4 dv = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} v^5 \cdot v e^{-h^2v^2} dv =$$

$$= -\frac{4h^3}{h^2 2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} v^5 d(e^{-h^2v^2}) = -\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \left(v^5 e^{-h^2v^2} \Big|_0^{\infty} - 5\int_0^{\infty} v^4 e^{-h^2v^2} dv \right) =$$

$$= \frac{10h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} v^4 e^{-h^2v^2} dv = \frac{5}{2h^2} M(v^2) = \frac{5}{2h^2} \cdot \frac{3}{2h^2} = \frac{15}{4h^4},$$

оскільки $v^5 e^{-h^2v^2} \Big|_0^{\infty} = 0$.

$$\mu_4 = v_4 - 4v_1v_3 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4 = \frac{15}{4h^4} - 4\cdot\frac{2}{h\sqrt{\pi}}\cdot\frac{4}{h^3\sqrt{\pi}} +$$

$$+6\left(\frac{2}{4\sqrt{\pi}}\right)^2\frac{3}{2h^2} - 3\left(\frac{2}{h\sqrt{\pi}}\right)^4 = \frac{15\pi^2+16\pi-192}{4h^4\pi^2}.$$

Тоді ексцес $E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{(15\pi^2+16\pi-192)\cdot 4h^4\pi^2}{4h^4\pi^2(3\pi-8)^2} - 3 =$

$= 3{,}0421 - 3 = 0{,}0421 > 0$.

6. Обчислимо інтегральну функцію:

$$F(x) = \int_0^x f(v)dv = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}\int_0^x v^2 e^{-h^2v^2}dv = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}\int_0^x v\cdot ve^{-h^2v^2}dv =$$

$$= \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\int_0^x ve^{-h^2v^2}d(v^2) = -\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}\cdot 2h^2}\int_0^x ve^{-h^2v^2}d(-h^2v^2) =$$

$$= \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_x^0 vd(e^{-h^2v^2}) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\left[v\cdot e^{-h^2v^2}\Big|_x^0 - \int_x^0 e^{-h^2v^2}dv\right] = -\frac{2h}{\sqrt{\pi}}ve^{-h^2v^2} +$$

$$+\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-h^2v^2}dv = *$$

Для обчислення інтегралу зробимо підстановку $hv = z$; $dv = \frac{dz}{h}$.

Тоді $\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-h^2v^2}dv = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{h}\int_0^{hx} e^{-z^2}dz = \Phi(hx)$, бо

$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ – з означення інтегральної функції.

$$* = \Phi(hx) - \frac{2h}{\sqrt{\pi}}xe^{-h^2x^2}.$$

4.10.2. Випадкова величина *X* розподілена за логнормальним законом з параметрами (α, β). Знайти значення β, при якому ймовірність того, що *X* прийме значення, яке належить інтервалу [*a,b*] буде найбільшою.

Розв'язок.

Інтегральна функція логнормального розподілу задається формулою: $F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{\ln x - \alpha}{\beta}\right)$. Тоді імовірність знаходження випадкової величини в заданому інтервалі [*a,b*] рівна:

$$P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{\ln b - \alpha}{\beta}\right) - \Phi\left(\frac{\ln a - \alpha}{\beta}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\ln b - \alpha}{\beta}} e^{-t^2/2} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\ln a - \alpha}{\beta}} e^{-t^2/2} dt = \varphi(\beta).$$

Для знаходження максимуму функції $\varphi(\beta)$ продиференціюємо її по *t* і прирівняємо до 0.

$$\varphi'(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(\ln b - \alpha)^2}{2\beta^2}} \cdot \left(\frac{\ln b - \alpha}{\beta}\right)' - e^{-\frac{(\ln a - \alpha)^2}{2\beta^2}} \cdot \left(\frac{\ln a - \alpha}{\beta}\right)'\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\ln a - \alpha}{\beta^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln a - \alpha}{\beta}\right)^2} -- \frac{\ln b - \alpha}{\beta^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b - \alpha}{\beta}\right)^2}\right] = 0.$$

Звідси $\frac{\ln a - \alpha}{\ln b - \alpha} = e^{\frac{(\ln a - \alpha)^2 - (\ln b - \alpha)^2}{2\beta^2}} = e^{\frac{\ln\frac{a}{b}[\ln(a \cdot b) - 2\alpha]}{2\beta^2}}$.

Прологарифмувавши вираз, отримуємо:

$$\ln\frac{\ln a - \alpha}{\ln b - \alpha} = \frac{\ln\frac{a}{b} \cdot [\ln(a \cdot b) - 2\alpha]}{2\beta^2}; \text{ звідси}$$

$$\beta^2 = \frac{\ln\frac{a}{b}\cdot\left[\ln(a\cdot b)-2\alpha\right]}{\ln\frac{\ln a-\alpha}{\ln b-\alpha}}.$$

4.10.3. Обчислити медіану логнормального закону.
Розв'язок.

Згідно означення $P(X \le Me) = P(X \ge Me) = \frac{1}{2} = F(Me)$.

$$F(Me) = \int_0^{Me} \frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln X-\alpha)^2}{2\beta^2}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{\ln X-\alpha}{\beta} = t,\ \ln X = \beta t+\alpha; \\ x = e^{\beta t+\alpha},\ dx = e^{\beta t+\alpha}\beta dt; \\ x_1 \to 0,\ t \to -\infty; \\ x_2 = Me,\ t_2 = \frac{\ln Me-\alpha}{\beta}. \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{\ln Me-\alpha}{\beta}} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} e^{\beta t+\alpha}\beta dt}{e^{\beta t+\alpha}\beta\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln Me-\alpha}{\beta}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dte +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\ln Me-\alpha}{\beta}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0{,}5 + \varPhi\left(\frac{\ln Me-\alpha}{\beta}\right) = 0{,}5 + \varPhi(z) = 0{,}5.$$

Тут $\varPhi(z)$ – інтегральна функція Лапласа. Отже,

$\varPhi\left(\frac{\ln Me-\alpha}{\beta}\right) = 0$, тому $\frac{\ln Me-\alpha}{\beta} = 0$. Звідси ln*Me* = α, отже, *Me* = e^{α}.

4.10.4. Розглядаються три проекти *А*, *Б*, *В* щодо інвестування. При здійсненні багаторазових інвестицій в певну підприємницьку діяльність обчислюється величина збитків у вигляді відсотка величини реальних збитків по відношенню до розрахункової суми виручки. Було встановлено, що обчислена таким чином величина збитків підлягає: для проекту *А* – Гамма розподілу з параметрами $\beta = 1$, $\alpha = 1$; для проекту *Б* – логнормальному закону з $\beta = \sqrt{2}$; для проекту *В* – закону Максвела. Математичні сподівання збитків для трьох проектів рівні між собою.

а) Обчислити імовірності попадання випадкової величини збитків *X* в допустиму, критичну та катастрофічну зони, якщо $x_{дп} = M(X) + \sigma(X)$ (%); $x_{кр} = M(X) + 2\sigma(X)$ (%); $x_{кт} = $ $= M(X) + 3\sigma(X)$ (%).

б) Оцінити міру ризику кожного з цих проектів та обрати один з них для інвестування. За величину ризику прийняти: середньоквадратичне відхилення, коефіцієнт варіації, коефіцієнт асиметрії.

Розв'язок.

Ймовірності попадання величини відносних збитків *X* в допустиму, критичну та катастрофічну зони відповідно рівні:

$$P_{дп} = P(0 \le X < x_{дп}) = F(x_{дп}) - F(0);$$

$$P_{кр} = P(x_{дп} \le X < x_{кр}) = F(x_{кр}) - F(x_{дп});$$

$$P_{кт} = P(x_{кр} \le X < x_{кт}) = F(x_{кт}) - F(x_{кр}).$$

а) Математичне сподівання випадкової величини, що задана Гамма функцією (проект *А*) рівне $M(X) = \beta(\alpha + 1)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \beta\sqrt{\alpha + 1}$. Для $\alpha = 1$, $\beta = 1\,\%$ $M(X) = 1 \cdot (1 + 1) = 2\%$; $\sigma(X) = 1 \cdot \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} =$ $= 1{,}4142\%$; $x_{дп} = M(X) + \sigma(X) = 2 + \sqrt{2}$ (%); $x_{кр} = M(X) +$ $+ 2\sigma(X) = 2 + 2\sqrt{2}$ (%); $x_{кт} = M(X) + 3\sigma(X) = 2 + 3\sqrt{2}$ (%). Інтегральна функція гамма розподілу для $\alpha = 1$ рівна $F(x) =$ $= 1 - e^{-x/\beta}\left(1 + \dfrac{x}{\beta}\right)$. Для $\beta = 1$ $F(x) = 1 - e^{-x}(1 + x)$.

Оскільки $F(0) = 1 - e^{-0}(1 + 0) = 0$;

$$F(x_{\partial n}) = F(2+\sqrt{2}) = 1 - e^{-(2+\sqrt{2})}(1+2+\sqrt{2}) = 1 -$$
$$- 0{,}145238 = 0{,}8548;$$

$$F(x_{\kappa p}) = F(2+2\sqrt{2}) = 1 - e^{-(2+2\sqrt{2})}(1+2+2\sqrt{2}) = 0{,}953378;$$

$$F(x_{\kappa m}) = F(2+3\sqrt{2}) = 1 - e^{-(2+3\sqrt{2})}(1+2+3\sqrt{2}) = 0{,}98591514,$$

то отримуємо:

$$P_{\partial n} = 0{,}8548 - 0 = 0{,}8548;$$

$$P_{\kappa p} = 0{,}953378 - 0{,}8548 = 0{,}09858;$$

$$P_{\kappa m} = 0{,}985915 - 0{,}953378 = 0{,}032537.$$

Математичне сподівання випадкової величини, що задана логнормальним законом (проект *Б*) рівне $M(X) = e^{\alpha + \beta^2/2}$. Підставивши $\beta = \sqrt{2}$, отримаємо $M(X) = e^{\alpha+1} = 2$ згідно умови. Звідси, $\alpha = \ln 2 - 1 = 0{,}30685$. Середнє квадратичне відхилення логнормального закону $\sigma(X) = e^{\alpha + \beta^2/2}\sqrt{e^{\beta^2} - 1} =$ $= M(X)\sqrt{e^2 - 1} = 2 \cdot 2{,}52765 = 5{,}0553$.

Тоді $x_{\partial n} = M(X) + \sigma(X) = e^{\alpha + \beta^2/2} + e^{\alpha + \beta^2/2}\sqrt{e^{\beta^2} - 1} =$

$$= e^{\alpha + \beta^2/2}\left(1 + \sqrt{e^{\beta^2} - 1}\right) = M(X)\left(1 + \sqrt{e^{\beta^2} - 1}\right) = 2\left(1 + \sqrt{e^2 - 1}\right);$$

$$x_{\kappa p} = M(X) + 2\sigma(X) = M(X)\left(1 + 2\sqrt{e^{\beta^2} - 1}\right) = 2\left(1 + 2\sqrt{e^2 - 1}\right);$$

$$x_{\kappa m} = M(X) + 3\sigma(X) = M(X)\left(1 + 3\sqrt{e^{\beta^2} - 1}\right) = 2\left(1 + 3\sqrt{e^2 - 1}\right).$$

Інтегральна функція логнормального закону рівна

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{\ln x - \alpha}{\beta}\right);$$

$$\ln x_{\partial n} - \alpha = \ln\left(e^{\alpha+1}\left(1 + \sqrt{e^2 - 1}\right)\right) - \alpha = \ln e^{\alpha+1} + \ln\left(1 + \sqrt{e^2 - 1}\right) =$$
$$= 1 + \ln\left(1 + \sqrt{e^2 - 1}\right).$$

$F(0)=0{,}5-0{,}5=0$.

$$F(x_{дп})=0{,}5+\Phi\left[\frac{1+\ln(1+\sqrt{e^2-1})}{\sqrt{2}}\right]=0{,}5+$$

$$+\Phi\left[\frac{1+\ln(1+2{,}52765)}{1{,}4142135}\right]=0{,}5+\Phi(1{,}598508)=0{,}5+\Phi(1{,}980)=$$

$=0{,}5+0{,}4451=0{,}9451$.

$$\ln x_{кр}-\alpha=1+\ln(1+2\sqrt{e^2-1}).$$

$$F(x_{кр})=0{,}5+\Phi\left[\frac{1+\ln(1+2\cdot 2{,}52765)}{1{,}4142135}\right]=0{,}5+\Phi(2{,}227)=$$

$=0{,}5+0{,}4761=0{,}9761$.

$$F(x_{кр})=0{,}5+\Phi\left[\frac{1+\ln(1+3\cdot 2{,}52765)}{1{,}4142135}\right]=0{,}5+\Phi(2{,}227)=$$

$=0{,}5+0{,}4873=0{,}9873$. Отже,

$P_{дп}=0{,}9451-0=0{,}9451$; $P_{кр}=0{,}9761-0{,}9451=0{,}031$;

$P_{кт}=0{,}9873-0{,}9761=0{,}0112$.

Математичне сподівання випадкової величини розподіленої за законом Максвела рівне $M(0)=\dfrac{1{,}1284}{h}\approx 2$, звідки $h=\dfrac{1{,}1284}{2}=0{,}5642$. Середнє квадратичне відхилення $\sigma(v)$ рівне $\sigma(v)=\dfrac{0{,}47619}{h}=\dfrac{0{,}47619}{0{,}5642}=0{,}844$.

$x_{дп}=M(v)+\sigma(v)=2+0{,}844=2{,}844$;

$x_{кр}=M(v)+2\sigma(v)=2+2\cdot 0{,}844=3{,}688$;

$x_{кт}=M(v)+3\sigma(v)=2+3\cdot 0{,}844=4{,}532$.

Інтегральна функція випадкової величини, розподіленої за законом Максвела має вигляд:

$$F(x)=\Phi(hx)-\frac{2h}{\sqrt{\pi}}xe^{-h^2x^2}.$$

Тому, $F(0)=0$; $F(x_{\partial n})=\Phi(2{,}844)-\frac{1{,}1284}{\sqrt{\pi}}\times$

$\times 2{,}844e^{-(0{,}5642\cdot 2{,}844)^2}=0{,}99992-0{,}137925=0{,}862$.

.

$$F(x_{кр})=\Phi(3{,}688)-\frac{1{,}1284}{\sqrt{\pi}}3{,}688e^{-(0{,}5642\cdot 3{,}688)^2}=1{,}0000-$$

$-0{,}030928=0{,}969$.

$$F(x_{кт})=\Phi(4{,}532)-\frac{1{,}1284}{\sqrt{\pi}}4{,}532e^{-(0{,}5642\cdot 4{,}532)^2}=1{,}0000-$$

$-0{,}0041756=0{,}996$. Отже,

$P_{\partial n}=0{,}862-0=0{,}862$; $P_{кр}=0{,}969-0{,}862=0{,}107$;

$P_{кт}=0{,}996-0{,}969=0{,}027$.

б) Для проекту *А*: $M(X_A)=2$, $\sigma(X_A)=1{,}414$.

$$CV(X_A)=\frac{\sigma(X)}{M(X)}=\frac{\beta\sqrt{\alpha+1}}{\beta(\alpha+1)}=\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}=0{,}707;$$

$$As_A=\frac{2}{\sqrt{\alpha+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=1{,}414.$$

Для проекту *Б*: $M(X_Б)=2$; $\sigma(X_Б)=5{,}055$.

$$CV(X_Б)=\frac{e^{\alpha+\beta^2/2}\sqrt{e^{\beta^2}-1}}{e^{\alpha+\beta^2/2}}=\sqrt{e^{\beta^2}-1}=\sqrt{e^2-1}=2{,}528;$$

$$As_Б=\sqrt{(e^{\beta^2}-1)^3}+3\sqrt{e^{\beta^2}-1}=\sqrt{(e^2-1)^3}+3\sqrt{e^2-1}=$$

$=23{,}732$.

Для проекту *В*: $M(X_В)=2$; $\sigma(X_В)=0{,}844$.

$$CV(X_B) = \frac{0,844}{2} = 0,422\ ;\ As_B = 0,501\ .$$

Висновок. Враховуючи те, що для проекту *B* найнижчі значення середнього квадратичного відхилення $\sigma(X)$ для одного і того ж математичного сподівання $M(X)$, а також найнижче значення асиметрії As для інвестування слід вибрати його.

4.11. Функція одного випадкового аргумента

Нехай задана функція *Y* випадкового аргумента *X*: $Y = \varphi(X)$.

1. Якщо аргумент *X* – дискретна випадкова величина і різним можливим значенням аргумента *X* відповідають а) різні можливі значення функції *Y*, то імовірності відповідних значень *X* і *Y* між собою рівні: $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$; б) значення *Y*, серед яких є рівні між собою, то значення імовірностей *Y*, що повторюються, додаються.

Математичне сподівання функції *Y* рівне:

$$M(Y) = M[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i \qquad (4.11.1).$$

Дисперсія функції *Y* рівна:

$$D(Y) = M[\varphi^2(x)] - M^2(\varphi(x)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^2(x_i) p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i \right)^2$$

(4.11.2).

2. Якщо аргумент *X* – неперервна випадкова величина, що задана щільністю розподілу *f*(*x*), причому можливі значення *X* належать всій числовій осі, то математичне сподівання функції *Y* знаходиться безпосередньо за формулою:

$$M(Y) = M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx \qquad (4.11.3).$$

Якщо $x \in (a,b)$, то $M[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x) f(x)dx$ (4.11.4).

Дисперсія функції *Y* рівна:

$$D[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - M[\varphi(x)]]^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) f(x)dx -$$

$$-[M[\varphi(x)]]^2 \qquad (4.11.5).$$

Якщо $x \in (a,b)$, то

$$D[\varphi(x)] = \int_a^b [\varphi(x) - M[\varphi(x)]]^2 f(x)dx = \int_a^b \varphi^2(x) f(x)dx -$$

$$-[M[\varphi(x)]]^2 \qquad (4.11.6).$$

Якщо *X* – неперервна випадкова величина, що задана щільністю розподілу *f*(*x*), і якщо *y* = *φ*(*x*) – диференційована строго зростаюча або строго спадна функція, обернена функція якої *x* = *Ψ*(*y*), то щільність розподілу *g(y)* випадкової величини *У* знаходять з рівності: $g(y) = f[\Psi(y)] \cdot |\Psi^{/}(y)|$ (4.11.7).

Якщо функція *y* = *φ*(*x*) в інтервалі можливих значень *X* не монотонна, то потрібно розбити цей інтервал на підінтервали, в яких функція *φ*(*x*) – монотонна і знайти щільності розподілів $g_i(y)$ в кожному з підінтервалів і їх суму:

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} g_i(y) \qquad (4.11.8).$$ Тоді

$$g(y) = f[\Psi_1(y)] \cdot |\Psi_1^{/}(y)| + f[\Psi_2(y)] \cdot |\Psi_2^{/}(y)| \qquad (4.11.9),$$

для двох інтервалів монотонності.

Тоді математичне сподівання і дисперсія функції $Y = \varphi(X)$ з використанням щільності розподілу *g*(*y*) буде:

$$M(Y) = \int_c^d y \cdot g(y)dy; \; D(Y) = \int_c^d y^2 g(y)dy - [M(Y)]^2 \quad (4.11.10),$$

де *c* і *d* – кінці інтервалу, в яких містяться можливі значення *Y*.

Задачі

4.11.1. Випадкова величина X має розподіл:

X	-1	0	1	2
P	0,2	0,1	0,3	0,4

Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $Y = 2^x$.

Розв'язок.

X	-1	0	1	2
P	0,2	0,1	0,3	0,4

$Y = 2^x$	2^{-1}	2^0	2^1	2^2
2^x	½	1	2	4
P	0,2	0,1	0,3	0,4

$$M(Y) = \sum y_i p_i = \frac{1}{2}\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}4 = 0{,}1 +$$

$$+ 0{,}1 + 0{,}6 + 1{,}6 = 2{,}4;$$

$$D(Y) = \sum y_i^2 p_i - M^2(y) = 0{,}25\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}3 +$$

$$+16\cdot 0{,}4 - (2{,}4)^2 = 0{,}05 + 0{,}1 + 1{,}2 + 6{,}4 - 5{,}76 = 0{,}98.$$

4.11.2. Випадкова величина X має розподіл:

X	1	-1
P	0,5	0,5

Обчислити $M(X^n)$, $D(X^n)$.

Розв'язок.

Складемо розподіл випадкової величини X^n:

$n = 2k$, n – парне, тоді:

X^n	1	$(-1)^{2k}=1$
P	0,5	0,5

X^n	1	1
P	0,5	0,5

$\rightarrow$

X^n	1
P	1

Тоді $M(X) = \sum x_i p_i = 1 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 1$.

$D(X^n) = M[(X^n)^2] - M^2(X^n) = M[X^n - M(X^n)]^2$;

$D(X^n) = (1-1)^2 0{,}5 + (1-1)^2 0{,}5 = 0.$

n – непарне:

X^n	1	$(-1)^{2k+1} = -1$
P	0,5	0,5

X^n	1	-1
P	0,5	0,5

Тоді $M(X) = \sum x_i p_i = 1 \cdot 0{,}5 + (-1) \cdot 0{,}5 = 0,$

$D(X^n) = (1-0)^2 0{,}5 + (-1-0)^2 0{,}5 = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$.

4.11.3. Випадкова величина *X* має розподіл:

X	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

Знайти:

а) розподіл випадкової величини $Y = |X|$;

б) $M(Y)$, $D(Y)$.

Розв'язок.

а) $Y = X$

X	-1	0	1
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

$Y = |X|$

$Y = \lvert X\rvert$	1	0	1
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

$\rightarrow$

$Y = \lvert X\rvert$	0	1
P	$1/3$	$2/3$

б) $M(Y) = 0 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$;

$$D(Y)=0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{6-4}{9}=\frac{2}{9}.$$

4.11.4. Ребро куба x виміряно наближено, причому $a\le x\le b$. Розглядаючи ребро куба як випадкову величину X, розподілену рівномірно в інтервалі (a; b), знайти математичне сподівання і дисперсію об'єму куба.

Розв'язок.

Об'єм куба рівний випадковій величині $\zeta^3=\varphi(X)$.

Отже, математичне сподівання об'єму куба рівне:

$$M(\zeta^3)=\int_a^b x^3\cdot f(x)dx=\int_a^b x^3\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_a^b=$$

$$=\frac{b^4-a^4}{4(b-a)}=\frac{(b^2-a^2)(b^2+a^2)}{4(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)(b^2+a^2)}{4(b-a)}=$$

$$=\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}.$$

Дисперсія об'єму куба рівна:

$$D(\zeta^3)=\int_a^b(x^3)^2\cdot f(x)dx-M^2(x)=\int_a^b(x^3)^2\frac{1}{b-a}dx-$$

$$-\left[\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}\right]^2=\frac{x^7}{(b-a)\cdot 7}\Big|_a^b-\left[\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}\right]^2=$$

$$=\frac{b^7-a^7}{7(b-a)}-\left[\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}\right]^2=$$

$$=\frac{b^6+b^5a+b^4a^2+b^3a^3+b^2a^4+ba^5+a^6}{7}-$$

$$-\frac{7(b^6+2b^5a+3b^4a^2+4b^3a^3+3b^2a^4+2ba^5+a^6)}{16}=$$

$$=\frac{9b^6+2b^5a-5b^4a^2-12b^3a^3-5b^2a^4+2ba^5+9a^6}{112}.$$

4.11.5. Випадкова величина *X* задана щільністю розподілу *f*(*x*) = cos*x* в інтервалі $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; поза цим інтервалом *f*(*x*) = 0.

Знайти математичне сподівання функції $y=\varphi(x)=$ $=X^2$, не знаходячи попередньо щільності розподілу *Y*.

Знайти дисперсію функції $y=\varphi(x)=X^2$, не знаходячи попередньо щільності розподілу *Y*.

Розв'язок.

I спосіб.

Використаємо формулу:

$$M(Y)=M[\varphi(X)]=\int_a^b \varphi(x)\cdot f(x)dx.$$

$$M(X^2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx=\begin{vmatrix} x^2=u, du=2xdx; \\ \cos xdx=dv, v=\int\cos xdx=\sin x\end{vmatrix}=$$

$$=x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx=\begin{vmatrix} x=u, du=dx; \\ \sin xdx=dv, v=\int \sin xdx=-\cos x\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\frac{\pi}{2}-0-2\cdot\left[-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx\right]=\frac{\pi^2}{4}\cdot 1-$$

$$-2\left[-\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}+0\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{\pi^2}{4}-2=\frac{\pi^2-8}{4}.$$

Для знаходження дисперсії скористуємось формулою:

$$D[\varphi(X)]=\int_a^b \varphi^2(x)f(x)dx-M^2[\varphi(X)].$$

Отже, $D(X^2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4\cos x dx-\left(\frac{\pi^2-8}{4}\right)^2=*$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4\cos x dx=\left|\begin{matrix}x^4=u, du=4x^3dx;\\ \cos x dx=dv, v=\int \cos x dx=\sin x\end{matrix}\right|=$$

$$=x^4\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^3\sin x dx=\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\sin\frac{\pi}{2}-0-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^3\sin x dx=**$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^3\sin x dx=\left|\begin{matrix}x^3=u, du=3x^2dx;\\ \sin x dx=dv, v=\int\sin x dx=-\cos x\end{matrix}\right|=$$

$$=-x^3\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+3\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x dx=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\cos\frac{\pi}{2}-0+$$

$$+3\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx.$$

$$=**\left(\frac{\pi}{2}\right)^4-12\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx=\left(\frac{\pi}{2}\right)^4-12\left(\frac{\pi^2-8}{4}\right)^2=\left(\frac{\pi}{2}\right)^4-$$

$$-3\left(\pi^2-8\right)-\left(\frac{\pi^2-8}{4}\right)^2=\frac{320-32\pi^2}{16}=20-2\pi^2.$$

Отже, $D(X^2)=20-2\pi^2$.

II спосіб.

$\psi(y)=x=\sqrt{y}$; $\psi'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$, тоді $g(y)=$

$$= f[\psi(y)]\ |\psi'(y)| = \cos\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}};\quad M(Y)=\int_a^b y g(y)dy;$$

$M(Y)=\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} y g(y)dy.$ Оскільки $0<x<\frac{\pi}{2}$ і $y=x^2$, то $0<y<\frac{\pi^2}{4}$.

$$M(Y)=\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} y\cos\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \left|\begin{array}{l}\sqrt{y}=t;\ y=0, t=0;\\ y=t^2\\ dy=2tdt;\ y=\frac{\pi^2}{4}, t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right| =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos t\,\frac{1}{2t}\cdot 2dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos tdt=\left|\begin{array}{l}u=t^2, du=2tdt;\\ dv=\cos tdt, v=\sin t\\ \int udv=uv-\int vdu\end{array}\right|=$$

$$=t^2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t\sin tdt=\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin tdt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}u=t, du=dt;\\ dv=\sin tdt, v=-\cos t\end{array}\right|=\frac{\pi^2}{4}-2(-t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt)=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-2;$$

$$D(Y)=\int_a^b y^2 g(y)dy-(M(Y))^2;\quad \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} y^2\cos\sqrt{y}\times\frac{1}{2\sqrt{y}}dy=$$

$$=\left|\begin{array}{l}y=t^2, dy=2tdt\\ t_1=0, t_2=\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^4\cos tdt=\left|\begin{array}{l}u=t^4, du=4t^3dt;\\ dv=\cos tdt, v=\sin t\end{array}\right|=$$

$$= t^4 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 \sin t dt = \begin{vmatrix} u = t^3, du = 3t^2 dt; \\ dv = \sin t, v = -\cos t \end{vmatrix} = \frac{\pi^4}{16} -$$

$$-4(-t^3 \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-3t^2)\cos t dt) = \frac{\pi^4}{16} - 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t dt =$$

$$= \frac{\pi^4}{16} - 12(\frac{\pi^2}{4} - 2) = \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24$$

$$D(Y) = \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24 - (\frac{\pi^2}{4} - 2)^2 = \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24 - \frac{\pi^4}{16} +$$

$$+ \pi^2 - 4 = 20 - 2\pi^2.$$

4.11.6. Радіус кулі виміряний наближено, причому $\alpha \le X \le b$. Розглядаючи радіус кулі як випадкову величину *X*, розподілену рівномірно в інтервалі (*a*; *b*), знайти математичне сподівання і дисперсію об'єму кулі.

Розв’язок.

Об’єм кулі рівний $Y = \varphi(X) = \frac{4}{3}\pi X^3$, $f(x) = \frac{1}{b-a}$ – функція щільності неперервного розподілу.

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини *Y*:

$$M[Y] = M[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x) \cdot f(x) dx = \int_a^b \frac{4}{3}\pi x^3 \cdot \frac{dx}{b-a} =$$

$$= \frac{4 \cdot \pi}{3(b-a)} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_a^b = \frac{\pi(b^4 - a^4)}{3(b-a)} = \frac{\pi(b^2 - a^2)(b^2 + a^2)}{3(b-a)} =$$

$$= \frac{\pi(b-a)(b+a)(b^2 + a^2)}{3(b-a)} = \frac{\pi(b+a)(b^2 + a^2)}{3}.$$

Знайдемо дисперсію об’єму кулі:

$$D[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi^2(x) \cdot f(x)dx - M^2[\varphi(X)] =$$

$$= \int_a^b \frac{16}{9}\pi^2 x^6 \cdot \frac{dx}{b-a} - \left[\frac{\pi}{3}(b+a)(b^2+a^2)\right]^2 = \frac{16\pi^2}{9(b-a)} \cdot \frac{x^7}{7}\Big|_a^b -$$

$$-\left[\frac{\pi}{3}(b+a)(b^2+a^2)\right]^2 = \frac{16\pi^2(b^7-a^7)}{9 \cdot 7(b-a)} - \frac{\pi^2}{9}(b^3+ab^2+$$

$$+a^2b+a^3)^2 = \frac{16\pi^2}{9 \cdot 7}(b^6+b^5a+b^4a^2+b^3a^3+b^2a^4+ba^5+a^6) -$$

$$-\frac{\pi^2}{9}(b^6+2b^5a+3b^4a^2+4b^3a^3+3b^2a^4+2ba^5+a^6) =$$

$$= \frac{\pi^2(9b^6+2b^5a-5b^4a^2-12b^3a^3-5b^2a^4+2ba^5+9a^6)}{63}.$$

4.11.7. Обчислити MX^n при натуральному n, якщо X має нормальний розподіл з параметрами (a, σ).

Розв’язок.

Нехай: а) $n = 1$. Обчислимо

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \frac{x-a}{\sigma} = t,\ x = a + \sigma t,\ dx = \sigma dt; \\ x \to \infty, t \to \infty;\ x \to -\infty, t \to -\infty \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a+\sigma t) e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} -$$

$$-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} d\left(-\frac{t^2}{2}\right) = a - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = a.$$

Тут використано $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$ – інтеграл Пуассона,

$\lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{e^{\frac{t^2}{2}}} = 0.$

б) $M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (a+\sigma t)^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} a^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \right.$$

$$\left. + 2a\sigma \int\limits_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a^2 \cdot \sqrt{2\pi} + 2a\sigma \cdot 0 +$$

$$+ \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t \cdot t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = a^2 - \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} d\left(-\frac{t^2}{2}\right) = a^2 - \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} t \cdot d\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right) = a^2 - \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= a^2 - 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = a^2 + \sigma^2.$$

Тут враховано, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2/2} dt = 0$ – як інтеграл від непарної функції з симетричними межами.

в) $n = 3$;

$$M(X^3) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (a+\sigma t)^3 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(a^3 + 3a^2\sigma t + 3a\sigma^2 t^2 + \sigma^3 t^3\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{a^3}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt +$$

$$+\frac{3a^2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{3a\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^3e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{a^3}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}+0+\frac{3a\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt+0=a^3+\frac{3a\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=$$

$$=a^2+3a\sigma^2.$$

Тут враховано, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^3e^{-t^2/2}dt=0$ – як інтеграл від непарної функції з симетричними межами.

г) $n = 4$;

$$M(X^4)=\int_{-\infty}^{\infty} x^4\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(a+\sigma t)^4\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(a^4+4a^3\sigma t++6a^2t^2+4a\sigma^3t^3+\sigma^4t^4\right)e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{a^4}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{4a^3\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{6a^2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt+$$

$$+\frac{4a\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^3e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^4e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{a^4}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}+0+$$

$$+\frac{6a^2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}-\frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}\left(t^3e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}-3\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)=a^4+6a^2\sigma^2-$$

$$-\frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}\left(0-3\cdot\sqrt{2\pi}\right)=a^4+6a^2\sigma^2+3\sigma^4.$$

д) $n = 5$;

$$M(X^5)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}x^5e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(a+\sigma t)^5\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(a^5+5a^4\sigma t+10a^3\sigma^2t^2+10a^2\sigma^3t^3+5a\sigma^4t^4+\sigma^5t^5\right)\times$$

$$\times e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{a^5}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{5a^4\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{10a^3\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt+$$

$$+\frac{10a^2\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^3e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{5a\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^4e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\sigma^5}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^5e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{a^5}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}+0+\frac{10a^3\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}+0+\frac{5a\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}\cdot3\sqrt{2\pi}+0=$$
$$=a^5+10a^3\sigma^2+3\cdot5a\sigma^4.$$

Тут враховано, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2/2}dt=0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^3e^{-t^2/2}dt=0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^5e^{-t^2/2}dt=0$, як інтеграли від непарних функцій з симетричними межами.

За індукцією рекурентна формула для обчислення MX^n має вигляд:

$$M(X^n)=\sum_{k=0}^{[n/2]}C_n^{2k}a^{n-2k}(2k-1)!!\sigma^{2k}.$$

4.11.8. Обчислити Me^{-x} для випадкової величини, що має нормальний розподіл з параметрами $(0,\sigma)$.

Розв'язок.

Скористуємось формулою:

$$M[\varphi(X)]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}-x}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+\sigma^2)^2-\sigma^4}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+\sigma^2)^2}{2\sigma^2}+\frac{\sigma^2}{2}}dx=$$

$$=\frac{e^{\frac{\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{array}{l}\dfrac{x+\sigma^2}{\sigma}=t;\,dx=\sigma dt;\\ x\to\infty,\,t\to\infty;\,x\to-\infty,\,t\to-\infty;\end{array}\right|=$$

$$=\frac{e^{\frac{\sigma^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt=\frac{e^{\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=e^{\frac{\sigma^2}{2}}.$$

4.11.9. Випадкова величина ζ має показниковий розподіл: $P(\zeta\geq x)=e^{-x}$ при $x\geq 0$. Знайти $M\zeta(1-e^{\alpha\zeta})$.

Розв’язок.

Знайдемо функцію розподілу випадкової величини ζ з рівності: $P(\zeta\leq x)+P(\zeta\geq x)=1$, звідки $P(\zeta<x)=F(x)=$ $=1-P(\zeta\geq x)=1-e^{-x}$.

Отже, $f(x)=F^{/}(x)=e^{-x}$. Тоді

$$M[\zeta(1-e^{-\alpha\zeta})]=\int_0^{\infty}x(1-e^{-\alpha x})e^{-x}dx=\int_0^{\infty}xe^{-x}dx-$$

$$-\int_0^{\infty}xe^{-(a+1)x}dx=-\int_0^{\infty}xd(e^{-x})+\frac{1}{a+1}\int_0^{\infty}xd(e^{-(a+1)x})=-xe^{-x}\Big|_0^{\infty}+$$

$$+\int_0^{\infty}e^{-x}dx+\frac{x}{a+1}e^{-(a+1)x}\Big|_0^{\infty}-\frac{1}{a+1}\int_0^{\infty}e^{-(a+1)x}dx=-\int_0^{\infty}e^{-x}d(-x)+$$

$$+\frac{1}{(a+1)^2}\int_0^{\infty}e^{-(a+1)x}d[-(a+1)x]=-e^{-x}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{(a+1)^2}e^{-(a+1)x}\Big|_0^{\infty}=$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}+e^{-0}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(a+1)^2}e^{-(a+1)x}-\frac{1}{(a+1)^2}e^{-(0\cdot 1)0}=$$

$$=1-\frac{1}{(a+1)^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(a+1)^2}e^{-(a+1)x}=\begin{cases}1-(a+1)^{-2} & \text{при}\quad a>-1;\\ \infty & \text{при}\quad a<-1.\end{cases}$$

4.11.10. Випадкова величина *X* має нормальний розподіл з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією.

Знайти: $M\left(\dfrac{X}{1+X^2}\right)$; $M(\sin X)$; $M(X\cos X)$.

Розв'язок.

Для обчислення математичного сподівання функції $Y = \varphi(x)$ скористуємось формулою:

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx \text{, де}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Таким чином, $M\left(\dfrac{X}{1+X^2}\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$;

$$M(\sin X) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx;$$

$$M(\cos X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

У підінтегральних виразах функція $f(x)$ – парна, а $\varphi(x)$ – непарні. Таким чином, $f(x) \cdot \varphi(x)$ – непарна функція, а інтеграл від непарної функції з симетричними межами рівний 0. Отже, $M\left(\dfrac{X}{1+X^2}\right) = 0$, $M(\sin X) = 0$, $M(X \cdot \cos X) = 0$.

4.11.11. Випадкова величина *X* має нормальний розподіл з параметрами (0; σ). Знайти її моменти MX^n.

Розв'язок.

Для обчислення MX^n скористуємось формулою:

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx$$, де $\varphi(x) = x^n$, $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

Отже, $M\left(X^n\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$.

Якщо $n = 2k + 1$, то підінтегральна функція X непарна, а інтеграл від непарної функції з симетричними межами відносно початку координат рівний 0:

$$M\left(X^{2k+1}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 0.$$

Нехай $n = 2$, тоді $M\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx =$

$$= -\frac{\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot d\left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) =$$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \right) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Тут враховано, що $\lim_{x \to \pm\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}} \times$

$\times \frac{2\sigma^2}{2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sigma^2}{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot x} = 0$ (використали правило Лопіталя).

В останньому інтегралі зробимо заміну змінних: $z = \frac{x}{\sigma}$; $dx = \sigma dz$, так що

$$M(X^2) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = \sigma^2$$, оскільки

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \sqrt{2\pi}$ – інтеграл Пуассона.

Нехай $n = 4$, тоді $M(X^4) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}dx =$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \left|\begin{array}{l} x^3 = u,\ du = 3x^2dx;\ xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = dv, \\ v = -\sigma^2\cdot\int e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = -\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[-x^3\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 3\sigma^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\right] = 3\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sigma^3\sqrt{2\pi} =$$

$$= 3\sigma^4, \text{ оскільки } \lim_{x\to\pm\infty}\left(-x^3\cdot\sigma^2\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) = 0.$$

$$M(X^6) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^6 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^5 x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$= -\frac{\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^5 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^5 d\left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) =$$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} x^5 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} 5x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = 5\sigma\cdot\sigma\cdot 3\sigma^4 =$$

$$= 1\cdot 3\cdot 5\sigma^6 = (6-1)!!\sigma^6, \text{ оскільки } \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} x^5 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) = 0.$$

$$M(X^8) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^8 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^7 x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$=-\frac{\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^7 d\left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)=-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}x^7e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}7x^6e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=7\cdot5\cdot3\cdot1\sigma^6\cdot\sigma\cdot\sigma=1\cdot3\cdot5\cdot7\sigma^8=(8-1)!!\sigma^8.$$

Отже, за індукцією рекурентна формула для обчислення моментів буде мати вигляд: $M(X^{2n})=(2n-1)!!\sigma^{2n}$; $M(x^{2n+1})=0$.

4.11.12. Випадкова величина ζ має Γ-розподіл з щільністю $\frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}, x\ge 0$. Знайти $M\zeta^\beta$. При яких β це математичне сподівання скінченне?

Розв'язок.

За означенням Γ-функція рівна $\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$. Для обчислення $M\zeta^\beta$ скористуємось формулою математичного сподівання функції $\varphi(X)$ одного випадкового аргументу:

$M[\varphi(X)]=\int_0^\infty \varphi(x)f(x)dx.$ Отже,

$$M[\zeta^\beta]=\int_0^\infty\frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}\cdot x^\beta dx=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\lambda^\alpha x^{\alpha+\beta-1}e^{-\lambda x}dx=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\lambda^\alpha x^{\alpha+\beta-1}e^{-\lambda x}\cdot\frac{\lambda^\beta}{\lambda^\beta}dx=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^\beta}\int_0^\infty(\lambda x)^\alpha(\lambda x)^\beta(\lambda x)^{-1}\times$$

$$\times d(\lambda x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^\beta}\int_0^\infty u^\alpha u^\beta u^{-1}e^{-u}du=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^\beta}\int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}e^{-u}du=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^\beta}\int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}du=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\lambda^\beta}\quad\text{при } \alpha\ge 0,\beta\ge 0.$$

Отже, при $\alpha + \beta > 0$ математичне сподівання скінченне.

4.11.13. Випадкова величина X розподілена за законом Коші $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = X^3 + 2$.

Розв'язок.

Знайдемо обернену функцію $\Psi(y)$ з рівняння:

$$x^3 = y - 2;\ \ x = \sqrt[3]{y-2} = (y-2)^{1/3} = \Psi(y).$$

Її похідна рівна: $\Psi'(y) = [(y-2)^{1/3}]' = \dfrac{1}{3}(y-2)^{-2/3}$.

Отже, щільність розподілу рівна:

$$g(y) = f[\Psi(y)]\left|\Psi'(y)\right| = \frac{1}{\pi[1+(y-2)^{2/3}]} \cdot \frac{1}{3}\left|(y-2)^{-2/3}\right| =$$

$$= \frac{1}{3\pi[(y-2)^{2/3} + (y-2)^{4/3}]}.$$

Перевірка:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = \frac{1}{3\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{[(y-2)^{2/3} + (y-2)^{4/3}]} =$$

$$= \frac{1}{3\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(y-2)}{(y-2)^{2/3} + (y-2)^{4/3}} = \frac{1}{3\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^{2/3} + u^{4/3}} =$$

$$= \left|u = t^3; du = 3t^2dt\right| = \frac{1}{3\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t^2dt}{t^{2\cdot 2/3} + t^{3\cdot 4/3}} = \frac{1}{3\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t^2dt}{t^2 + t^4} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2dt}{t^2+t^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{\pi} arctgt \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1.$$

4.11.14. Випадкова величина X розподілена нормально з параметрами (a, σ^2). Знайти щільність розподілу величини $Y = e^x$ при довільних a, σ.

Розв'язок.

З рівняння $y = e^x$, знайдемо обернену функцію $x = \ln y$. Отже, $\Psi(y) = \ln y$; $\Psi^/(y) = \dfrac{1}{y}$. Оскільки функція $y = e^x$ диференційована і строго зростає, то $g(y) = f[\Psi_1(y)]\left|\Psi_1^/(y)\right| =$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y - a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y - a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Перевірка:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y - a)^2}{2\sigma^2}} dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\ln y - a)^2}{2\sigma^2}} d(\ln y) = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1,$$ оскільки

$\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ – інтеграл Пуассона.

4.11.15. Задана густина $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ нормально розподіленої випадкової величини X.

Знайти густину розподілу випадкової величини $y = \dfrac{1}{2}x^2$.

Розв'язок.

З рівняння $y = \dfrac{1}{2}x^2$ знаходимо обернену функцію. Так як в інтервалі $(-\infty, \infty)$ функція $y = \dfrac{1}{2}x^2$ не є монотонною, то розіб'єм цей інтервал на інтервали $(-\infty, 0)$ і $(0, \infty)$ в яких розглядувана функція монотонна. В інтервалі $(-\infty, 0)$ обернена функція $\Psi_1(y) = -\sqrt{2y}$; в інтервалі $(0, \infty)$ обернена функція $\Psi_2(y) = \sqrt{2y}$. Шукана щільність розподілу може бути знайдена з формули:

$$g(y) = f[\Psi_1(y)] \cdot \left| (\Psi_1^{/}(y) \right| + f[\Psi_2(y)] \cdot \left| \Psi_2^{/}(y) \right|.$$

Знайдемо похідні обернених функцій:

$\Psi_1^{/}(y) = -\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{y}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{y}}; \Psi_2^{/}(y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{y}}$. Оскільки

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, то $f[\Psi_1(y)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{-\sqrt{2y}}{2}\right)^2} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{2y}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y};$$

$$f[\Psi_2(y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(-\sqrt{2y}\right)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y}.$$

Підставивши похідні у формулу, отримуємо:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} \cdot \left| -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} \cdot \left| \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{2}{2\sqrt{\pi y}} e^{-y} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi y}} e^{-y}.$$

Так як $-\infty \le x \le \infty$, то $0 \le y \le \infty$.

Отже, $g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi y}} e^{-y}$.

Перевірка:

$$\int_0^\infty g(y)dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y} dy = \left| \begin{array}{l} y = t^2, t = \sqrt{y}, \\ dy = 2tdt, \begin{cases} y = 0, t = 0; \\ y = \infty, t = \infty. \end{cases} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-t^2} \cdot 2t}{t} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1,$$ оскільки,

$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ – інтеграл Пуассона.

4.11.16. Задана густина розподілу $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Знайти густину розподілу $g(Y)$ випадкової величини $y = \frac{1}{4} x^2$.

Розв’язок.

Задано $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $y = \frac{1}{4} x^2$, $0 \le y \le \infty$ (див. розв’язок 4.11.5).

З рівняння $y = \frac{1}{4} x^2$ знаходимо обернену функцію $x = \Psi_1(y) = -2\sqrt{y}$ для інтервалу $(-\infty, 0)$ і $x = \Psi_2(y) = 2\sqrt{y}$ для інтервалу $(\infty, 0)$ і її похідні:

$$\Psi_1^{/}(y) = -\frac{2}{2\sqrt{y}} = -\frac{1}{\sqrt{y}}; \quad \Psi_2^{/}(y) = \frac{2}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

$$f[\Psi_1(y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{-\sqrt{2y}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2y};$$

$$f[\Psi_2(y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\sqrt{2y}\right)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2y}.$$

Для щільності розподілу $g(y)$ використаємо формулу:

$$g(y) = f[\Psi_1(y)]\left|\Psi_1^{/}(y)\right| + f[\Psi_2(y)]\left|\Psi_2^{/}(y)\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2y} \cdot \left|-\frac{1}{\sqrt{y}}\right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi y}} e^{-2y}.$$

Перевірка:

$$\int_0^\infty g(y)dy = \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{2\pi y}} e^{-2y} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-2y}}{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \left| y = t^2; dy = 2tdt \right| = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-2t^2}}{t} 2tdt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-2t^2} 2dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t^2 = \dfrac{z^2}{2}; z^2 = 2t^2; \\ 2zdz = 2 \cdot 2tdt; \\ t = \dfrac{z}{\sqrt{2}}. \end{array} \right| = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2} \sqrt{2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz =$$

$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1,$ оскільки, $\int\limits_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ – інтеграл Пуассона.

4.11.17. Задана функція розподілу $F(x)$ випадкової величини X. Знайти функцію розподілу $G(y)$ випадкової величини $Y = aX + b$.

Розв'язок.

За означенням інтегральної функції розподілу $G(y) = P(Y < y)$. Нехай:

а) $a > 0$. Тоді з зростанням X функція Y зростає і нерівність $Y < y$ виконується для $X < x$. Отже,

$$G(y) = P(Y < y) = P(X < x) = F(x),$$

де $x = \dfrac{y-b}{a}$ отримано з рівняння $y = ax + b$. Таким чином, $G(y) = F\left[{(y-b)}\big/{a} \right]$.

б) $a < 0$. Тоді з зростанням X функція Y спадає і нерівність $Y < y$ виконується для $X > x$. Отже,

$$G(y) = P(Y < y) = P(X > x).$$

Але $P(X > x) + P(X \le x) = 1$, звідки $P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$. З рівняння $y = ax + b$ виразимо $x = (y-b)/a$ і підставимо в попереднє рівняння. Остаточно отримуєм:

$$G(y) = 1 - F\left[{(y-b)}\big/{a} \right].$$

4.11.18. Нехай *F(x)* – функція розподілу випадкової величини *X*.

Знайти функцію розподілу випадкової величини $y = -x$.

Розв'язок.

Нехай $y = x$ задана своїм законом розподілу. Тоді випадкова величина $z = -x$ має ті ж самі імовірності розподілу, що й $y = x$. Наприклад:

$y = x$	1	2	5	11	25
P	0,01	0,07	0,4	0,3	0,22
$z = -x$	– 1	– 2	– 5	– 11	– 25

$z = -x$	– 25	–11	– 5	– 2	– 1
P	0,22	0,3	0,4	0,07	0,01

Інтегральні функції $F(x)$ і $F(-x)$ відповідно рівні:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1;\\ 0{,}01 & 1\le x<2;\\ 0{,}01+0{,}07=0{,}08 & 2\le x<5;\\ 0{,}08+0{,}4=0{,}48 & 5\le x<11;\\ 0{,}48+0{,}3=0{,}78 & 11\le x<25;\\ 1 & x>25.\end{cases}$$

$$F(-x)=\begin{cases}0 & x<-25;\\ 0{,}22 & -25\le x<-11;\\ 0{,}22+0{,}3=0{,}52 & -11\le x<-5;\\ 0{,}52+0{,}4=0{,}92 & -5\le x<-2;\\ 0{,}92+0{,}07=0{,}99 & -2\le x<-1;\\ 1 & x>-1.\end{cases}$$

Див. попередню задачу.

Оскільки події $x\le 0+\varepsilon$ і $x>0$ – протилежні, то $P(x\le 0+\varepsilon)+P(x>0)=1$. Тому $P(x\le 0)=F(-x+\varepsilon)=$ $=1-F(x)$ або $F(-x)=P(X>x)$.

Наприклад. x = 5, – x = – 5, F(5) = 0,08, F(–5) = 0,52 і $P(x>5)=P(x=11)+P(x=25)=0{,}3+0{,}22=0{,}52$. Тобто F(–5) = P(x > 5). $F(-5+\varepsilon)=F(-2)=0{,}92$; 1 – F(5) = 1 – – 0,08 = 0,92. Тобто $F(-5+\varepsilon)=1-F(5)$.

Графіки функцій F(x) і F(– x) наведені на рис 4.11.1а, б.

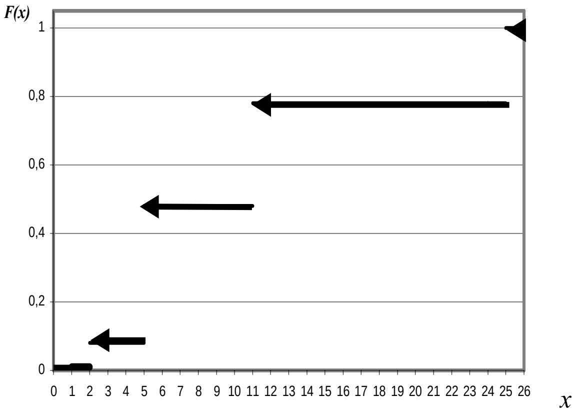


Рис. 4.11.1а.

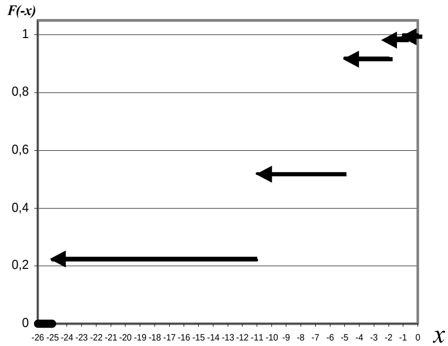


Рис. 4.11.1б.

4.12. Функція двох випадкових аргументів.

Нехай X і Y – неперервні незалежні випадкові величини, що мають щільності розподілів $f_1(x)$ і $f_2(y)$. При цьому, якщо щільність розподілів хоч би одного з аргументів задана на інтервалі $(-\infty, \infty)$, то щільність розподілу $g(z)$ суми $z = x + y$ обчислюється згідно формули:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z - x) dx \qquad (4.12.1),$$

або

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z - y) f_2(y) dy \qquad (4.12.2).$$

Для невід'ємних значень аргументів вищенаведені формули набувають вигляду:

$$g(z) = \int_{0}^{z} f_1(x) f_2(z - x) dx \qquad (4.12.3)$$

або $g(z) = \int_{0}^{z} f_1(z - y) f_2(y) dy$ (4.12.4).

Щільність розподілу суми незалежних випадкових величин називають ***композицією***.

Якщо обидві щільності $f_1(x)$ і $f_2(y)$ задані на обмежених інтервалах, то для обчислення щільності величини $z = x + y$ доцільно спочатку визначити функцію розподілу $G(z)$, а потім продиференціювати її по z: $g(z) = G'(z)$.

Якщо X і Y – ***незалежні випадкові*** величини, що задані відповідними щільностями розподілів $f_1(x)$ і $f_2(y)$, то імовірність попадання випадкової точки (X, Y) в область D рівна подвійному інтегралу по цій області від добутку щільностей розподілу: $P[X,Y \subset D] = \iint\limits_{(D)} f_1(x) f_2(y) dxdy$ (4.12.5).

Задачі

4.12.1. Задані щільності рівномірно розподілених незалежних випадкових величин X і Y: $f(x) = 1$ в інтервалі (0, 1), поза ним $f_1(x) = 0$; $f_2(y) = 1$ в інтервалі (0, 1), поза ним $f_2(y) = 0$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $Z = X + Y$. Побудувати графік щільності розподілу $g(z)$.

Розв’язок.

Можливі значення випадкової точки (X, Y) розташовані в квадраті $OABC$ з сторонами $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. За означенням інтегральної функції розподілу $F(z) = P(Z < z) = = P(X + Y < z)$ (рис. 4.12.1).

Нерівність $x + y < z$ задовольняється лише для точок, що лежать нижче прямої $x + y = z$ в квадраті $OABC$, яка відтинає на осях x і y відрізки, що рівні z($x = 0$, $y = z$; $y = 0$, $x = z$).

Оскільки, згідно умови X і Y незалежні, то

$$F(z) = \iint\limits_{(S)} f_1(x) f_2(y) dxdy = \iint\limits_{(S)} 1 \cdot 1 dxdy \iint\limits_{(S)} dxdy = S,$$

де S – частина площі квадрату $OABC$, що лежить нижче прямої $x + y = z$, а тому залежить від z. Всі значення z розбивають на 4 інтервали.

Якщо $z \le 0$, то $S = 0$, тобто $F(z) = 0$.

Якщо $0 < z < 1$, то $F(z) = S_{\Delta ODE} = \dfrac{z^2}{2}$.

Якщо $1 < z < 2$, то

$$F(z) = S_{OAHKC} = 1^2 - S_{\Delta HBK} = 1 - \frac{HB^2}{2} = * .$$

$HB = BK$, $HB = 1 - AH = 1 - AF = 1 - (z - 1) = 2 - z$.

$$* = 1 - \frac{(2 - z)^2}{2}.$$

Якщо $z > 2$, то $F(z) = S_{OABC} = 1 \cdot 1 = 1$.

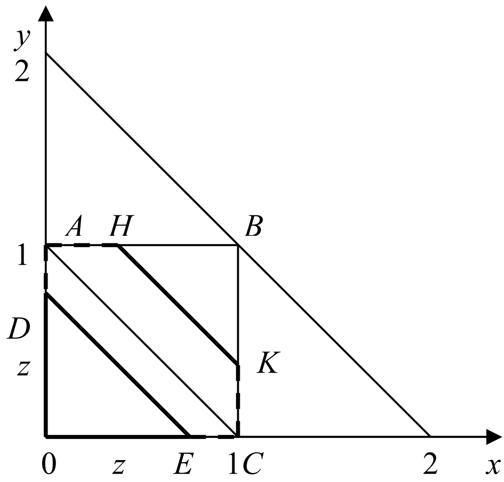


Рис. 4.12.1

Отже, інтегральна функція така:

$$F(z)=\begin{cases}0, & \text{якщо } z\le 0;\\ z^2/2, & \text{якщо } 0<z<1;\\ 1-(2-z)^2/2 & \text{якщо } 1<z<2;\\ 1, & \text{якщо } z>2.\end{cases}$$

Оскільки $g(z)=F'(z)$, то

$$g(z)=\begin{cases}0, & \text{якщо } z\le 0;\\ z, & \text{якщо } 0<z<1;\\ 2-z, & \text{якщо } 1<z<2;\\ 0, & \text{якщо } z>2.\end{cases}$$

Графік функції щільності g(z) зображений на рис. 4.12.2.

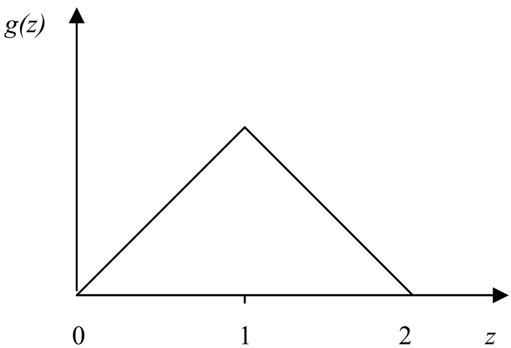


Рис. 4.12.2.

4.12.2. Задані щільності розподілів рівномірно розподілених незалежних випадкових величин *X* і *Y*: $f_1(x)=\dfrac{1}{2}$ в інтервалі (1; 3), поза ним $f_1(x)=0$; $f_2(y)=\dfrac{1}{4}$ в інтервалі (2, 6), поза ним $f_2(y)=0$. Знайти функцію розподілу і щільність розподілу випадкової величини *Z* = *X* + *Y*. Побудувати графік щільності розподілу *g*(*z*).

Розв'язок.

Можливі значення випадкової точки (X, Y) розташовані всередині прямокутника $ABCD$ з сторонами $1 \le x \le 3$, $2 \le y \le 6$ (рис. 4.12.3).

За означенням інтегральної функції розподілу, $F(z) = P(Z < z) = P(X + Y < z)$.

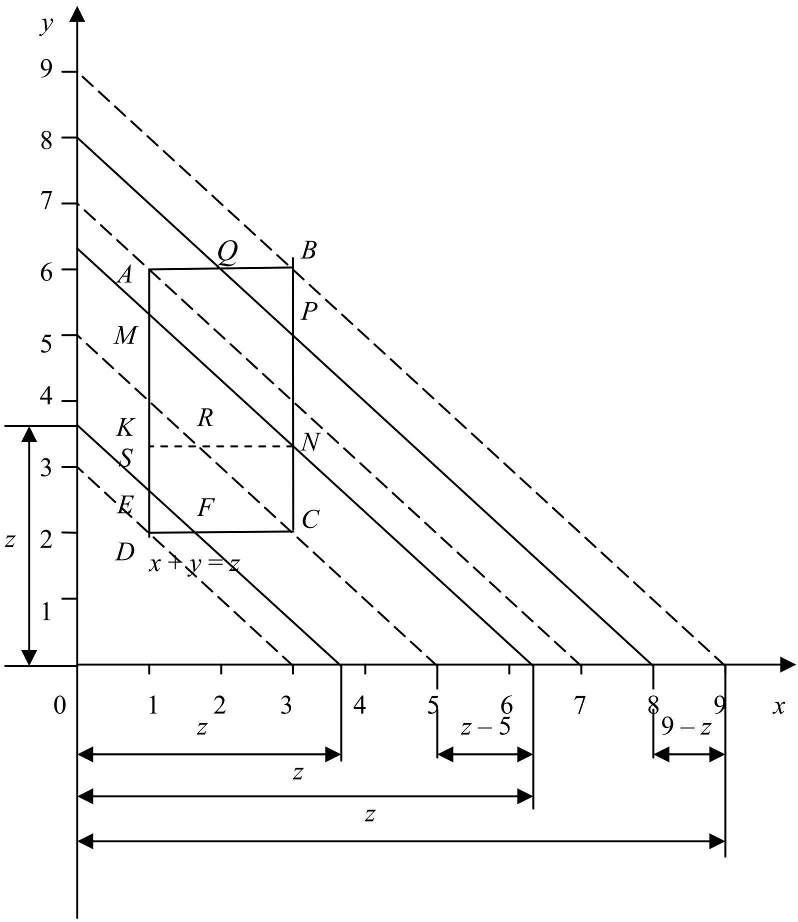


Рис. 4.12.3.

Нерівність $x + y < z$ задовольняється лише для тих точок, що лежать нижче прямої $x + y = z$ в прямокутнику *ABCD*, яка відтинає на осях *x* і *y* відрізки, що рівні *z*.

Оскільки, згідно умови *X* і *Y* незалежні, то

$$F(z) = \iint\limits_{(S)} f_1(x) f_2(y) dxdy = \iint\limits_{(S)} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} dxdy = \frac{1}{8} \iint\limits_{(S)} dxdy = \frac{1}{8} S ,$$

де *S* – частина площі прямокутника, що лежить нижче прямої $x + y = z$. Оскільки площа *S* залежить від *z*, то всі значення *z* розбиваються на 5 інтервалів проходження прямої $x + y = z$ через вершини прямокутника *ABCD*: $z < 3$; $3 < z < 5$; $5 < z < 7$; $7 < z < 9$; $z > 9$.

Якщо $z < 3$, то $S = 0$, і $F(z) = 0$.

Якщо $3 < z < 5$, то $S = S_{\Delta DEF} = \dfrac{(z-3)^2}{2}$.

Якщо $5 < z < 7$, то $S = S_{DMNC} = S_{SNCD} + S_{\Delta SMN}$;

$S_{SNCD} = DC \cdot CN$, але $DC = 5 - 3 = 2$, $CN = RN = z - 5$;

$S_{\Delta SMN} = \dfrac{SN^2}{2} = \dfrac{(3-1)^2}{2} = 2$. Отже, $S = 2 \cdot (z-5) + 2 = 2z - 8$.

Якщо $7 < z < 9$, то $S = S_{ADCPQ} = S_{ABCD} - S_{\Delta QBP} =$

$$= DC \cdot AD - \frac{QB^2}{2} = (3-1) \cdot (6-2) - \frac{(9-z)^2}{2} = 8 - \frac{(9-z)^2}{2} .$$

Таким чином, інтегральна функція *F*(*z*) рівна:

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} \cdot 0 = 0, & \text{якщо } z < 3; \\ \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{(z-3)^2}{2} = \dfrac{(z-3)^2}{16}, & \text{якщо } 3 < z < 5; \\ \dfrac{1}{8} \cdot (2z-8) = \dfrac{z}{4} - 1, & \text{якщо } 5 < z < 7; \\ \dfrac{1}{8} \cdot \left[8 - \dfrac{(9-z)^2}{2} \right] = 1 - \dfrac{(9-z)^2}{16}, & \text{якщо } 7 < z < 9; \\ \dfrac{1}{8} \cdot 8 = 1, & \text{якщо } z > 9. \end{cases}$$

Тоді щільність розподілу $g(z) = F'(z)$ рівна:

$$g(z) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } z < 3; \\ (z-3)/8, & \text{якщо } 3 < z < 5; \\ 1/4, & \text{якщо } 5 < z < 7; \\ (9-z)/8, & \text{якщо } 7 < z < 9; \\ 0, & \text{якщо } z > 9. \end{cases}$$

Графік функції щільності зображений на рис. 4.12.4.

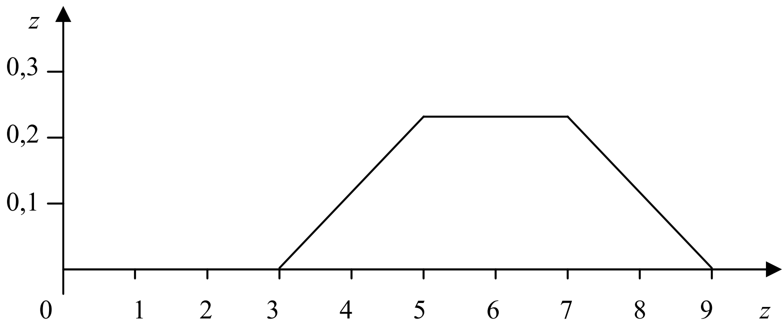


Рис. 4.12.4.

4.12.3. Незалежні випадкові величини *X* та *Y* задані густинами розподілу:

$$f_1(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} \quad (0 < x < \infty);$$

$$f_2(y) = \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} \quad (0 < y < \infty).$$

Знайти композицію цих законів, тобто густину розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

Розв’язок.

Так як можливі значення аргументів невід’ємні, то використаємо формулу:

$$g(z)=\int_0^z f_1(x)\cdot f_2(z-x)dx;$$

$$g(z)=\int_0^z \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{5}e^{-\frac{(z-x)}{5}}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}e^{-\frac{z}{5}}\int_0^z e^{-\frac{x}{3}+\frac{x}{5}}dx=$$

$$=\frac{1}{15e^{\frac{z}{15}}}\int_0^z e^{-\frac{2}{15}x}dx=-\frac{1}{15e^{\frac{z}{5}}}\cdot\frac{15}{2}\int_0^z e^{-\frac{2}{15}x}d\left(-\frac{2}{15}x\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{5}}e^{-\frac{2}{15}x}\Big|_0^z=-\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{5}}\left(e^{-\frac{2}{15}z}-1\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{5}}\left(1-e^{-\frac{2}{15}z}\right),$$

тут $z\geq 0$, оскільки $x\geq 0, y\geq 0$. Отже, $g(z)=\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{5}}\times$ $\times\left(1-e^{-\frac{2}{15}z}\right)$ в інтервалі $(0,\infty)$ і $g(z)=0$ поза цим інтервалом.

Перевіримо, що $\int_0^\infty g(z)dz=1$: $\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{z}{5}}\left(1-e^{-\frac{2}{15}z}\right)dz=$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-\frac{z}{2}}dz-\int_0^\infty e^{-\frac{z}{5}-\frac{2}{15}z}dz\right]=\frac{1}{2}\left[(-5)\int_0^\infty e^{-\frac{z}{5}}d\left(-\frac{z}{5}\right)-\right.$$

$$\left.-(-3)\int_0^\infty e^{-\frac{z}{3}}d\left(-\frac{z}{3}\right)\right]=\frac{1}{5}\left[-5e^{-\frac{z}{5}}\Big|_0^\infty+3e^{-\frac{z}{3}}\Big|_0^\infty\right]=\frac{1}{2}(5-3)=1.$$

4.12.4. Незалежні нормально розподілені випадкові величини X і Y задані щільностями розподілів:

$$f_1(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/2\sigma_1^2};\quad f_2(y)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-(y-b)^2/2\sigma_2^2}.$$

Довести, що композиція цих двох законів, тобто щільність розподілу випадкової величини $Z = X + Y$, також є нормальним законом.

Розв’язок.

Для визначення закону щільності суми випадкових величин скористуємось формулою:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x)dx = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(z-x-b)^2}{2\sigma_2^2}} dx = *$$

$$-\left[\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(z-x-b)^2}{2\sigma_2^2}\right] = -\frac{\sigma_2^2(x-a)^2 + \sigma_1^2(z-x-b)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} =$$

$$= -\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)x^2 - 2[a\sigma_2^2 + \sigma_1^2(z-b)]x + a^2\sigma_2^2 + \sigma_1^2(z-2zb+b^2)}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} =$$

$$= -\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)x^2 - 2[a\sigma_2^2 + \sigma_1^2(z-b)]x + a^2\sigma_2^2 + \sigma_1^2(z-b)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} =$$

$$= -\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[x^2 - 2\frac{\left(\frac{a}{\sigma_1^2} + \frac{z-b}{\sigma_2^2}\right)\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}x + \frac{\left(\frac{a^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(z-b)^2}{2\sigma_2^2}\right)2\sigma_1^1\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right] =$$

$$= -\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[\left[x^2 - 2\frac{a\sigma_2^2 + (z-b)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}x + \left[\frac{a\sigma_2^2 + (z-b)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right]^2 -\right.\right.$$

$$\left. -\left[\frac{a\sigma_2^2 + (z-b)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right]^2 + \frac{a^2\sigma_2^2 + (z-b)^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right] =$$

$$= -\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[x - \frac{a\sigma_2^2 + (z-b)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right]^2 +$$

$$+\frac{[a\sigma_2^2 + (z-b)\sigma_1^2] - (\sigma_1^2+\sigma_2^2)[a^2\sigma_2^2 + (z-b)^2\sigma_1^2]}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} =$$

$$= -\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[x - \frac{a\sigma_2^2+(z-b)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right]^2 +$$

$$+\frac{2a\sigma_1^2\sigma_2^2(z-b) - a^2\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2(z-b)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} =$$

$$= -\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[x - \frac{a\sigma_2^2+(z-b)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right]^2 - \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2[(z-b)-a]^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}.$$

$$* = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{(z-a-b)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}[x-\frac{a\sigma_2^2+(z-b)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}]^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}}} e^{-\frac{[z-(a+b)\}^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = **$$

Зроблено заміну змінних

$$\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[x - \frac{a\sigma_2^2+(z-b)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right] = z^2;\ dx = \frac{dz}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}}}$$

і враховано, що $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$ – інтеграл Пуассона.

$$** = \frac{\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{[z-(a+b)]^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} e^{-\frac{[z-(a+b)]^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_z} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}},$$

де $\sigma_z = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$; $m_z = a+b$.

Отже, функція щільності суми $X + Y$ випадкових величин підлягає нормальному закону.

4.13. Система двох випадкових величин

Випадкові величини, можливі значення яких визначаються двома, трьома, ... n числами називаються відповідно ***двомірними, трьохмірними, ... n-мірними***. Двомірна випадкова величина (X, Y) визначається двома складовими або компонентами X і Y, що утворюють систему двох випадкових величин.

Геометрична інтерпретація двомірної величини – випадкова точка $M(X; Y)$ на площині XOY або як випадковий вектор $\overline{OM}$. Якщо складові X і Y – дискретні, то двомірна величина є ***дискретною***, якщо складові неперервні, то – ***неперервною***.

Законом розподілу імовірностей двомірної дискретної випадкової величини називають відповідність пар чисел (x_i, y_j) і їх імовірностей $p(x_i, y_j)$ ($i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., m$). Закон розподілу задають у вигляді: а) аналітично; б) таблиці з подвійним входом (табл. 4.13.1).

Таблиця 4.13.1.

Y	X					
	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	…	$p(x_i, y_1)$	…	$p(x_n, y_1)$
…	…	…	…	…	…	…
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	…	$p(x_i, y_j)$	…	$p(x_n, y_j)$
…	…	…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	…	$p(x_i, y_m)$	…	$p(x_n, y_m)$

Для того, щоб знайти імовірність $P(X = x_i)$, треба просумувати імовірності "стовпця x_i", $P(Y = y_j)$ – імовірності "лінійки y_j".

Події $(X = x_i, Y = y_j)$ ($i = 1, 2, …, n$; $j = 1, 2, …, m$) утворюють повну групу, тому сума імовірностей, що розміщені у всіх клітках таблиці, рівна одиниці.

Інтегральною або ***функцією*** розподілу двомірної випадкової величини (X, Y) називають функцію $F(x, y)$, яка визначає для кожної пари чисел (x, y) імовірність того, що X

набуде значення, менше x, і при цьому Y набуде значення, менше y: $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$ (рис. 4.13.1) (4.13.1).

Функція розподілу має такі властивості:

1. Значення функції задовольняють подвійній нерівності $0 \le F(x, y) \le 1$.

2. Функція розподілу є неспадною функцією по кожній змінній, тобто $F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$, якщо $x_2 > x_1$; $F(x, y_2) \ge$ $\ge F(x, y_1)$, якщо $y_2 > y_1$.

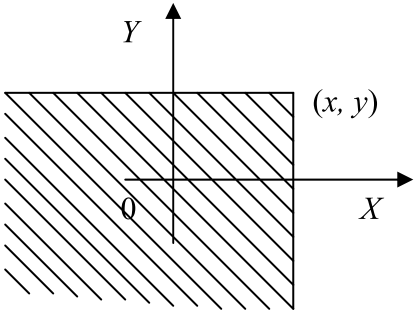


Рис. 4.13.1.

3. Виконуються граничні співвідношення: 1) $F(-\infty, y) =$ $= 0$; 2) $F(x, -\infty) = 0$; 3) $F(-\infty, -\infty) = 0$; $F(\infty, \infty) = 1$.

4. а) При $y = \infty$ функція розподілу системи стає функцією розподілу складової X: $F(x, \infty) = F_1(x)$.

б) При $x = \infty$ функція розподілу системи стає функцією розподілу складової Y: $F(\infty, y) = F_2(y)$.

Використовуючи функцію розподілу системи, можна знайти імовірність попадання випадкової точки (X, Y) в напівсмугу $x_1 < X < x_2$ і $Y < y$ (рис. 4.13.2а):

$P(x_1 \le X < x_2, Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y)$ (4.13.2) або в напівсмугу $X < x$ і $y_1 < Y < y_2$ (рис. 4.13.2б):

$$P(X < x, y_1 \le Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1) \qquad (4.13.3).$$

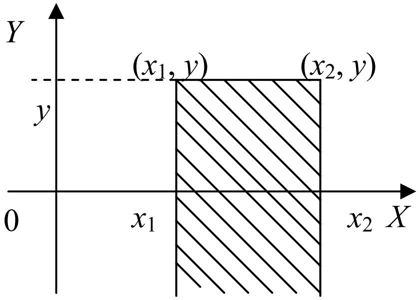


Рис. 4.13.2а.

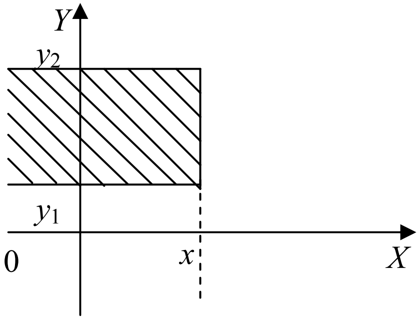


Рис. 4.13.2б.

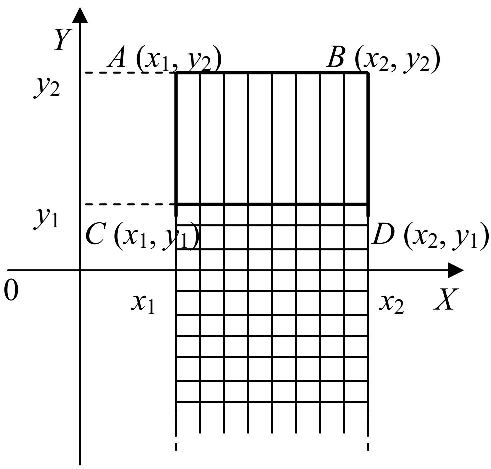


Рис. 4.13.3.

Імовірність попадання випадкової точки (X, Y) в прямокутник $x_1 < X < x_2$; $y_1 < Y < y_2$ (рис. 4.13.3) рівна:

$$P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = \left[F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2\right] - \\ - \left[F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)\right] \qquad (4.13.4).$$

Щільністю сумісного розподілу імовірностей або ***диференціальною функцією системи неперервної двомірної випадкової величини*** називають другу змішану похідну від функції розподілу:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \qquad (4.13.5).$$

Геометрично цю функцію можна розглядати як поверхню, яку називають поверхнею розподілу. Якщо відома щільність сумісного розподілу $f(x, y)$, то інтегральну функцію $F(x, y)$ обчислюють за формулою:

$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{x} f(x, y) dxdy$ (4.13.6), яка безпосередньо випливає з означення щільності.

Імовірність попадання випадкової точки (x, y) в область D рівна подвійному інтегралу по області D від функції $f(x, y)$:

$$P((X, Y) \subset D) = \iint\limits_{(D)} f(x, y) dxdy \qquad (4.13.7).$$

Геометрично цю формулу можна розглядати як об'єм тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y)$, в основі якого лежить проекція цієї поверхні на площину xOy.

Властивості двомірної щільності імовірності:

1. Двомірна щільність імовірності невід'ємна:

$f(x, y) \ge 0$.

2. Подвійний невласний інтеграл з нескінченними межами від двомірної щільності рівний 1:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dxdy = 1.$$

Звідси випливає, що якщо всі можливі значення (x, y) належать обмеженій області D, то

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = 1.$$

Щільність розподілу одномірної випадкової величини рівна невласному інтегралу з нескінченими межами від щільності сумісного розподілу системи з змінною інтегрування, що відповідає другій складовій:

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad (4.13.8),$$

$$f_2(y) = \frac{dF_2(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \qquad (4.13.9).$$

Умовні закони розподілу імовірностей складових.

Нехай двомірна випадкова величина (x, y) ***дискретна*** з можливими значеннями складових: x_1, x_2, …, x_n; y_1, y_2, …, y_m. ***Умовним розподілом*** складової X при $Y = y_j$ називають сукупність умовних імовірностей $p(x_1|y_j)$, $p(x_2|y_j)$, …, $p(x_n|y_j)$, обчислених за умови, що подія $Y = y_j$ (стала для всіх значень X) уже відбулася: $p(x_i \mid y_j) = \dfrac{p(x_i, y_j = const)}{p(y_j = const)}$ ($i = 1, 2, …, n$) (4.13.10).

Аналогічно знаходять умовні закони розподілу складової Y:

$$p(y_j \mid x_i = const) = p(x_i = const, y_j) / p(x_i) \qquad (4.13.11).$$

Сума імовірностей умовного розподілу дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i \mid y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j) / p(y_j) = p(y_j) / p(y_j) = 1;$$

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j \mid x_i) = 1.$$

Цю властивість розподілу використовують для контролю обчислень.

Нехай (x, y) – ***неперервна*** двомірна випадкова величина.

Умовною щільністю $\varphi(x \mid y)$ ***розподілу*** складової X при даному значенні $Y = y$ називають відношення щільності сумісного розподілу $f(x, y)$ системи (x, y) до щільності розподілу $f_2(y)$ складової Y:

$$\varphi(x \mid y) = f(x, y) / f_2(y) = f(x, y) / \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \quad (4.13.12).$$

Умовна щільність складової Y при даному значенні $X = x$ відповідно рівна:

$$\psi(y \mid x) = f(x, y) / f_1(x) = f(x, y) / \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (4.13.13).$$

Отже, закон розподілу системи випадкових величин рівний добутку закону розподілу одної з складових на умовний закон розподілу другої складової:

$$f(x, y) = f_2(y)\varphi(x \mid y), \ f(x, y) = f_1(x)\psi(y \mid x) \quad (4.13.14).$$

Умовні щільності мають такі ж властивості, як і будь-які щільності:

$$\varphi(x \mid y) \geq 0, \ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x \mid y) dx = 1;$$

$$\psi(y \mid x) \geq 0, \ \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y \mid x) dy = 1.$$

Рівномірним називають розподіл двомірної неперервної випадкової величини (X, Y), якщо в області, якій належать всі можливі значення (x, y), щільність сумісного розподілу імовірностей зберігає стале значення.

Умовним математичним сподіванням дискретної випадкової величини Y при $X = x$ (x – певне можливе значення X) називають добуток можливих значень Y на їх умовні імовірності:

$$M(Y \mid X = x) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j \mid x) \quad (4.13.15), \text{ відповідно}$$

$$M(X \mid Y = y) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i \mid y) \qquad (4.13.16).$$

Умовне математичне сподівання неперервної випадкової величини Y при $X = x$ рівна невласному інтегралу з нескінченними межами інтегрування від добутку змінної y на умовну щільність випадкової величини Y при $X = x$:

$$M(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\psi(y \mid x)dy \qquad (4.13.17).$$

Відповідно $M(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x \mid y)dx$ (4.13.18).

Умовне математичне сподівання $M(Y \mid x)$ як функцію від x: $M(Y \mid x) = f(x)$ називають ***функцією регресії Y на X.*** Відповідно $M(X \mid y) = \varphi(y)$ – ***функція регресії X на Y.***

Числові характеристики неперервної системи двох випадкових величин

Математичні сподівання складових X і Y неперервної двомірної випадкової величини (X, Y) рівні:

$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx$ (4.13.19); $M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)dy$ (4.13.20);

$M(X) = \iint_{(D)} xf(x,y)dxdy$ (4.13.21); $M(Y) = \iint_{(D)} yf(x,y)dxdy$ (4.13.22),

де D – область можливих значень X і Y.

Дисперсії складових X і Y рівні:

$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx - [M(X)]^2$ (4.13.23);

$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} [y - M(Y)]^2 f_2(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dy - [M(Y)]^2$ (4.13.24);

$D(X) = \iint_{(D)} [x - M(X)]^2 f(x,y)dxdy = \iint_{(D)} x^2 f(x,y)dxdy - [M(X)]^2$ (4.13.25);

$$D(Y)=\iint\limits_{(D)}\left[y-M(Y)\right]^2 f(x,y)dxdy=\iint\limits_{(D)} y^2 f(x,y)dxdy-\left[M(Y)\right]^2$$
(4.13.26).

Залежні і незалежні випадкові величини.

Теорема. Для того, щоб випадкові величини X і Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб функція розподілу системи (X, Y) була рівна добутку функцій розподілу складових: $F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$ (4.13.27).

Наслідок. Для того, щоб неперервні випадкові величини X і Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб щільність сумісного розподілу системи (X, Y) була рівна добутку щільностей розподілу складових: $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$ (4.13.28).

Початковим моментом $\nu_{k,s}$ порядку $k+s$ системи (X, Y) називають математичне сподівання добутку $X^k Y^s$:

$$\nu_{k,s}=M[X^k Y^s].$$

Частковим випадком є $\nu_{1,0}=M(X)$, $\nu_{0,1}=M(Y)$.

Центральним моментом $\mu_{k,s}$ порядку $k+s$ системи (X, Y) називають математичне сподівання добутку відхилень відповідно k-го і s-го ступенів:

$$\mu_{k,s}=M\left\{[X-M(X)]^k\cdot[Y-M(Y)]^s\right\} \quad (4.13.29).$$

В часткових випадках $\mu_{1,0}=M[X-M(X)]=0$, $\mu_{0,1}=M[Y-M(Y)]=0$, $\mu_{2,0}=M[X-M(X)]^2=D(X)$, $\mu_{0,2}=M[Y-M(Y)]^2=D(Y)$.

Кореляційним моментом μ_{xy} системи (X, Y) називають центральний момент $\mu_{1,1}$ порядку 1 + 1, що рівний математичному сподіванню добутку відхилень цих величин:

$$\mu_{xy}=M\{[X-M(X)][Y-M(Y)]\} \quad (4.13.30).$$

Для дискретних величин формула набуває вигляду:

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[x_i - M(X)][y_j - M(Y)]p(x_i, y_j) \qquad (4.13.31),$$

для неперервних величин –

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)][y - M(Y)]f(x, y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dxdy - M(X)M(Y) \qquad (4.13.32).$$

Теорема 1. Кореляційний момент двох незалежних випадкових величин X і Y рівний нулю.

Теорема 2. Абсолютна величина кореляційного моменту двох випадкових величин X і Y не перевищує середнє геометричне їх дисперсій:

$$\left|\mu_{xy}\right| \le \sqrt{D_x D_y}\ .$$

Коефіцієнтом кореляції величин X і Y називають відношення кореляційного моменту до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин.

$$r_{xy} = \mu_{xy} / \sigma_x \sigma_y\ .$$

Теорема 3. Абсолютна величина коефіцієнта кореляції не перевищує 1: $\left|r_{xy}\right| \le 1$.

Дві випадкові величини є ***корельованими***, якщо їх кореляційний момент відмінний від нуля.

Дві випадкові величини називають ***некорельованими***, якщо їх кореляційний момент рівний нулю.

Дві корельовані величини є також і залежними; якщо дві величини залежні, то вони можуть бути як корельованими, так і некорельованими. З незалежності двох величин випливає їх некорельованість, але з некорельованості ще не можна зробити висновок про незалежність цих величин.

Для нормально розподілених складових двомірної випадкової величини з некорельованості цих величин випливає їх незалежність, так що поняття незалежності і некорельованості для них рівнозначні.

Задачі

4.13.1. Задана функція розподілу двомірної випадкової величини:

$$F(x) = \begin{cases} (1-e^{-4x})(1-e^{2y}) & \text{при } x \geq 0, y \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ або } y < 0. \end{cases}$$

Знайти двомірну густину ймовірності системи (X, Y).

Розв'язок.

Використаємо формулу:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (1-e^{-2y}) \cdot (-e^{-4x}) \cdot (-4) = 4e^{-4x}(1-e^{-2y}),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 4e^{-4x}(-e^{-2y})(-2) = 8e^{-4x}e^{-2y} = 8e^{-4x \cdot 2y}.$$

Перевірка:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(x,y)dxdy = 8\int_0^{\infty} e^{-4x}dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-2y}dy = \int_0^{\infty} e^{-4x}d(-4x) \times$$

$$\times \int_0^{\infty} e^{-2y}d(-2y) = e^{-4x}\Big|_0^{\infty} \cdot e^{-2y}\Big|_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{e^{4\cdot\infty}}\right) \cdot \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{e^{2\cdot\infty}}\right) = 1.$$

4.13.2. Щільність сумісного розподілу $f_{x_1,x_2}(u,v)$ величин x_1, x_2 визначається рівностями $f_{x_1,x_2}(u,v) = c(u+v)$ при $0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 1$ і $f_{x_1,x_2}(u,v) = 0$ в решти випадках.

Знайти:

а) константу c,

б) одномірні щільності розподілу x_1 і x_2.

Розв'язок.

Для знаходження параметра c скористаємося формулою $c\int_0^1 du\int_0^1 (u+v)dv = 1$. Оскільки

$$c\int_0^1 du\int_0^1 (u+v)dv = \int_0^1 (uv+\frac{v^2}{2})\Big|_0^1 du = \int_0^1 (u+\frac{1}{2})du =$$

$$=(\frac{u^2}{2}+\frac{1}{2}u)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Отже, $c = 1$ і $f_{x_1,x_2}(u,v) = u+v$.

Знайдемо щільності розподілу кожної із величин за формулами $f_{x_1}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_1,x_2}(u,v)dv$ та $f_{x_2}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_1,x_2}(u,v)du$. В нашому випадку при $0 \le u \le 1$ і $0 \le v \le 1$ маємо:

$$f_{x_1}(u) = \int_0^1 (u+v)dv = (uv+\frac{v^2}{2})\Big|_0^1 = u+\frac{1}{2},$$

$$f_{x_2}(v) = \int_0^1 (u+v)dv = (\frac{u^2}{2}+uv)\Big|_0^1 = v+\frac{1}{2}.$$

4.13.3. Задані щільності розподілу незалежних складових двомірної випадкової величини (X,Y):

$f_1(x) = 5e^{-5x}$ при $x > 0$;

$f_1(x) = 0$ при $x \le 0$;

$f_2(y) = 2e^{-2y}$ при $y > 0$;

$f_2(y) = 0$ при $y \le 0$.

Знайти: а) щільність сумісного розподілу системи б) інтегральну функцію розподілу системи.

Розв'язок.

Оскільки складові системи незалежні, то:

а) двомірна щільність імовірності рівна добутку щільностей складових:

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)=5e^{-5x}\cdot 2e^{-2y}=10e^{-(5x+2y)}.$$

б) інтегральна функція розподілу системи рівна добутку функцій розподілу складових: $F(x,y)=F(x)\cdot F(y)$, де $F(x)$ і $F(y)$ обчислимо згідно формул:

$$F(x)=\int_0^x f_1\ (x)dx=\int_0^x 5e^{-5x}dx=-\int_0^x e^{-5x}d(-5x)=-e^{-5x}\Big|_0^x=$$

$$=e^{-5x}\Big|_x^0=1-e^{-5x};$$

$$F(y)=\int_0^y f_2\ (y)dy=\int_0^y 2e^{-2y}dy=-\int_0^y e^{-2y}d(-2y)=-e^{-2y}\Big|_0^y=$$

$$=e^{-2y}\Big|_y^0=1-e^{-2y};$$

тому $F(x,y)=\left(1-e^{-5x}\right)\cdot\left(1-e^{-2y}\right)$.

Отже,

а) $f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0 \text{ або } y\le 0;\\ 10e^{-(5x+2y)} & \text{при } x\ge 0 \text{ і } y\ge 0;\end{cases}$

б) $F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0 \text{ або } y\le 0;\\ (1-e^{5x})\cdot(1-e^{2y}) & \text{при } x>0 \text{ і } y>0.\end{cases}$

4.13.4. Задана щільність сумісного розподілу неперервної випадкової двомірної величини (X, Y): $f(x, y) = 2\cos x\cos y$ в квадраті $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$, $0\le y\le\dfrac{\pi}{4}$; за межами квадрату $f(x, y) = 0$.

Знайти дисперсію складових.

Розв’язок.

Обчислимо дисперсію складової X:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f_1(x)dx-M^2(X).$$

$$M(X^2)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\cdot\sqrt{2}\cos xdx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\cdot\underbrace{\cos xdx}_{dv}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x^2=u;\ \ du=2xdx;\\ dv=\cos xdx;\\ v=\int\ \ \cos xdx=\sin x;\end{array}\right|=\sqrt{2}\left[x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}2x\sin xdx\right]=$$

$$=\sqrt{2}\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\sin\frac{\pi}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\underbrace{\sin xdx}_{dv}\right]=\left|\begin{array}{l}x=u;\quad dx=du;\\ \sin xdx=dv;\\ v=\int\sin xdx=-\cos x;\end{array}\right|=$$

$$=\sqrt{2}\left\{\frac{\pi^2}{16}\frac{\sqrt{2}}{2}-2-\left[x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos xdx\right]\right\}=$$

$$=\sqrt{2}\left\{\frac{\sqrt{2}\pi^2}{32}-2\left(-\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)\right\}=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}\pi^2}{32}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2\pi^2}{32}+\frac{\pi\cdot 2}{4}-2=$$

$$=\frac{\pi^2+8\pi-32}{16}.$$

Отже, $D(X)=\dfrac{\pi^2+8\pi-32}{16}-\left(\dfrac{\pi+4-4\sqrt{2}}{4}\right)^2$. Очевидно, що $D(Y)=D(X)$ внаслідок симетричності.

4.13.5. Задано розподіл ймовірностей дискретної двомірної випадкової величини:

Y	*X*			
	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Знайти закон розподілу складників X і Y.

Розв'язок.

Склавши імовірності "по стовпчиках", отримаємо імовірності можливих значень X: $P(26) = 0{,}14$; $P(30) = 0{,}42$; $P(41) = 0{,}19$; $P(50) = 0{,}25$.

Напишемо закон розподілу складової X:

X	26	30	41	50
P	0,14	0,42	0,19	0,25

Контроль: 0,14 + 0,42 + 0,19 + 0,25 = 1,00. Склавши імовірності "по лінійках", знайдемо розподіл складової Y:

Y	2,3	2,7
P	0,29	0,71

Контроль: 0,29 + 0,71 = 1,00.

4.13.6. Знайти ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) в прямокутник, обмежений прямими $x = 1$, $x = 2$, $y = 3$, $y = 5$, якщо відома функція розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x} & \text{при } x \geq 0, y \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ або } y < 0. \end{cases}$$

Розв'язок.

Використаємо формулу:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = \left[F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)\right] - \left[F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)\right] = *$$

Покладемо в $F(x, y) = 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2$, значення $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; $y_1 = 3$, $y_2 = 5$.

Отримаємо

$$* = \left[(1-2^{-2}-2^{-5}+2^{-2-5})-(1-2^{-1}-2^{-5}+2^{-1-5})\right]-$$
$$-\left[(1-2^{-2}-2^{-3}+2^{-2-3})-(1-2^{-1}-2^{-3}+2^{-1-3})\right]=1-2^{-2}-2^{-5}+$$
$$+2^{-7}-1+2^{-1}+2^{-5}-2^{-6}-1+2^{-2}+2^{-3}-2^{-5}+1-2^{-1}-2^{-3}+2^{-4}=$$
$$=2^{-4}-2^{-5}-2^{-6}+2^{-7}=\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}=\frac{2^3-2^2-2+1}{2^7}=$$
$$=\frac{8-4-2+1}{2^7}=\frac{3}{2^7}=\frac{3}{128}.$$

4.13.7. Щільність імовірності системи двох випадкових величин (ζ, η) має вигляд $f(x,y)=ae^{-4x^2-6xy-9y^2}$. Визначити: а) постійну a; б) коефіцієнт кореляції випадкових ζ і η; в) умовні закони розподілу $f_\varsigma(x|y),\ f_\eta(y|x)$; г) математичні сподівання складових.

Розв’язок.

а) Для знаходження параметра a використаємо властивість: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$. Отже,

$$a\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2-6xy-9y^2}dxdy = a\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(2x+\frac{3}{2}y)^2}e^{-\frac{27}{4}y^2}dxdy=$$
$$=a\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{27}{4}y^2}\cdot dy\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(2x+\frac{3}{2}y)^2}dx=*$$

$$-4x^2-6xy-9y^2=-(4x^2+6xy+9y^2)=$$
$$=-\left[\left(2x+2\cdot 2x\cdot\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}y^2\right)-\frac{9}{4}y^2+9y^2\right]=$$
$$-\left[\left(2x+\frac{3}{2}y\right)^2+\frac{27}{4}y^2\right]=-\left(2x+\frac{3}{2}y\right)^2-\frac{27}{4}y^2.$$

$$* = a\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{4}{27}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{27}{4}y^2} d\left(\sqrt{\frac{27}{4}}y\right)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(2x+\frac{3}{2}y\right)^2} d\left(2x+\frac{3}{2}y\right) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{27}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{a}{\sqrt{27}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{a\pi}{3\sqrt{3}} = 1.$$

Тут враховано, що $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$; $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ – інтеграли Пуассона.

Отже, $a = \dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{\pi}$.

б) Щільності розподілу імовірностей складових ζ та η знаходимо згідно формул:

$$f_1(x) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2-6xy-9y^2}dy = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(3y-x)^2}e^{-3x^2}dy = *$$

$$-4x^2-6xy-9y^2 = -(9y^2+6xy+4x^2) = -\left[(3y)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\cdot 3y\cdot x + x^2 - x^2 + 4x^2\right] = -\left[(3y+x)^2+3x^2\right] = -(3y+x)^2 - 3x^2.$$

$$* = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{e^{-3x^2}}{3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(3y+x)^2}d(3y+x) = \frac{\sqrt{3}e^{-3x^2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du =$$

$$= \frac{\sqrt{3}e^{-3x^2}}{\pi}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{3}e^{-3x^2}}{\sqrt{\pi}};$$

$$f_2(y) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2-6xy-9y^2}dx = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(2x+\frac{3}{2}y\right)^2} e^{-\frac{27}{4}y^2}dx = *$$

$$-4x^2-6xy-9y^2 = -\left(2x+\frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{27}{4}y^2.$$

$$* = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{27}{4}y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(2x+\frac{3}{2}y\right)^2} d\left(2x+\frac{3}{2}y\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} e^{-\frac{27}{4}y^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{3\sqrt{3}e^{-\frac{27}{4}y^2}}{2\pi} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{3\sqrt{3}e^{-\frac{27}{4}y^2}}{2\sqrt{\pi}}.$$

в) умовні щільності розподілу імовірностей складових ζ та η неперервної двомірної випадкової величини (ζ, η) обчислимо згідно формул:

$$f_\varsigma(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{3\sqrt{3} \cdot e^{-4x^2-6xy-9y^2} \cdot 2\sqrt{\pi}}{\pi \cdot e^{-\frac{27}{4}y^2} 3\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(2x+\frac{3}{2}y\right)^2};$$

$$f_\eta(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{3\sqrt{3} \cdot e^{-4x^2-6xy-9y^2} \cdot \sqrt{\pi}}{\pi \cdot \sqrt{3}e^{-3x^2}} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+3y)^2}.$$

г) Математичні сподівання складових ζ і η обчислимо згідно формул:

$$M_\varsigma = M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} e^{-3x^2} dx = 0,$$

$$\left(= -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x^2} d(-3x^2) = -\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{\pi}} e^{-3x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{\pi}} e^{-3x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \right)$$

як інтеграл від непарної функції з симетричними межами.

$$M_\eta = M(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{27}{4}y^2} dy =$$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{27}{4}y^2} dy = 0$ – як інтеграл від непарної функції з симетричними межами.

4.13.8. Система двох випадкових величин (X, Y) підлягає закону розподілу з щільністю імовірності

$$f(x,y) = \frac{a}{1+(x^2+y^2)^2}.$$

а) Знайти коефіцієнт *a;*

б) знайти радіус кола з центром в початку координат, ймовірність попадання в який рівна 0,5.

Розв'язок.

а) Для знаходження параметра a використаємо властивість:

$$a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxdy}{1+(x^2+y^2)^2} = 1.$$

Для обчислення інтегралу використаємо полярні координати: $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $dxdy = \rho d\varphi d\rho$; $0 \le \rho \le \infty$; $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Отже,

$$a\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho d\varphi}{1+(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)^2} = a \cdot \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{d(\rho^2)}{1+(\rho^2)^2} =$$

$$= \frac{a}{2} \cdot 2\pi \cdot arctg(\rho^2)\Big|_0^{\infty} = a\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a\pi^2}{2} = 1, \text{ звідки } a = \frac{2}{\pi^2}.$$

б) Для знаходження радіуса кола ρ з центром в початку координат, імовірність попадання в який рівна 0,5, скористуємось рівністю:

$P(0 \le X \le \rho,\ 0 \le \varphi \le 2\pi) = 0{,}5$, або використавши вираз щільності отримаємо:

$$\frac{1}{2} \cdot a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho} \frac{d(\rho^2)}{1+(\rho^2)^2} = \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot arctg\rho^2 = \frac{1}{2}.$$

Отже, $\frac{4}{\pi} \cdot arctg\rho^2 = 1$; $arctg\rho^2 = \frac{\pi}{4}$, звідки $\rho^2 = 1$ або $\rho = 1$.

4.13.9. Система випадкових величин (ζ, η) має щільність імовірності $f(x,y) = \dfrac{a}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$. Необхідно знайти:

а) коефіцієнт a;

б) імовірність попадання в прямокутник $0 \le X \le 1$, $-1 \le Y \le 1$;

в) функцію розподілу системи (ζ, η);

г) закони розподілу одномірних величин ς і η;

д) з'ясувати, чи є ці величини залежними.

Розв'язок.

а) Використаємо властивість функції щільності:

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1,$ або

$$a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2+x^2y^2} = a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)} =$$

$$= a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+y^2)} = a\cdot arctgx\Big|_{-\infty}^{\infty}\cdot arctgy\Big|_{-\infty}^{\infty} = a\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = a\pi^2.$$

Отже, $a\pi^2 = 1$; звідки $a = \dfrac{1}{\pi^2}$ і щільність розподілу

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1+x^2+y^2+x^2y^2}.$$

б) $P(0 \le X \le 1, -1 \le Y \le 1) = \dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{1}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2+x^2y^2} =$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dy}{1+y^2}\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2} == \frac{1}{\pi^2}\cdot arctgy\Big|_{-1}^{1}\cdot arctgx\Big|_{0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\cdot\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\cdot\left[\frac{\pi}{4}-0\right] = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{8}.$$

в) $F(x,y) = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{dxdy}{1+x^2+y^2+x^2y^2} =$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(arctgy+\frac{\pi}{2}\right)+\left(arctgx+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{arctgx}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{arctgy}{\pi}+\frac{1}{2}\right)=F_1(x)\cdot F_2(y)\text{, де}$$

$$F_1(x)=\frac{arctgx}{\pi}+\frac{1}{2};\ F_2(y)=\frac{arctgy}{\pi}+\frac{1}{2}.$$

Оскільки інтегральна функція системи $F(x, y)$ дорівнює добутку інтегральних функцій її складових, то випадкові величини незалежні.

г) щільності розподілу складових X і Y такі:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}arctgy\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\cdot\pi=\frac{1}{\pi(1+x^2)};$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+y^2)}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2(1+y^2)}\cdot\pi=\frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Отже,

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2+y^2+x^2y^2)}=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}=$$

$$=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Для того, щоб встановити, чи величини є залежними, обчислимо умовні щільності імовірностей складових:

$$f_\xi(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}:\frac{1}{\pi(1+y^2)}=$$

$$=\frac{1}{\pi(1+x^2)}=f_1(x).$$

$$f_\eta(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{1}{\pi(1+y^2)}=f_2(y)\,.$$

Отже, випадкові величини незалежні.

д) кореляційний момент обчислюється згідно формули:

$$\mu_{xy}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(x))(y-M(y))f(x,y)dxdy\,,\text{ де}$$

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot\frac{dx}{\pi(1+x^2)}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{2\pi}\Big[\lim_{x\to\infty}\ln(1+x^2)-$$

$$-\lim_{x\to-\infty}\ln(1+x^2)\Big]=\frac{1}{2\pi}\cdot\ln\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+x^2}{1+x^2}=\frac{1}{2\pi}\ln 1=0.$$

Аналогічно, $M(Y)=0$ внаслідок симетричності $f(x,y)$ відносно x і y.

Отже,

$$\mu_{xy}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xy\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{ydy}{1+y^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{\infty}\cdot\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{4\pi^2}\cdot 0\cdot 0=0\,.$$

Нема кореляції між випадковими величинами X і $У$, тобто вони незалежні.

4.13.10. Система двох випадкових величин (ζ,η) підлягає нормальному закону з щільністю імовірності:

$$f(x,y)=a\cdot\exp\left\{-\left[\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(y+2)^2}{4}\right]\right\}.$$

Знайти коефіцієнт a. Визначити імовірність сумісного виконання двох нерівностей: $-1<\zeta<1,\ 0<\eta<2$.

Розв'язок.

Для знаходження параметра a використаємо властивість:

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1,$ отже:

$$a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}} e^{-\frac{(y+2)^2}{4}} dxdy = a\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y+2)^2}{4}} dy =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{4}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}} d\left(\frac{x-1}{\sqrt{8}}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y+2)^2}{4}} d\left(\frac{y+2}{\sqrt{4}}\right) = \frac{a}{2\cdot 2\sqrt{2}} \times$$

$\times\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi} = 1,$ оскільки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}} d\left(\frac{x-1}{\sqrt{8}}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$,

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y+2)^2}{4}} d\left(\frac{y+2}{\sqrt{4}}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ – інтеграли Пуассона,

звідки $a = \dfrac{1}{4\pi\sqrt{2}}$.

Імовірність попадання випадкової точки, розподіленої за нормальним законом в прямокутник виражається формулою:

$$P((\xi,\eta)\in D) = \frac{1}{4}\left[\Phi\left(\frac{\beta - m_\xi}{\sigma_\xi}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_\xi}{\sigma_\xi}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\Phi\left(\frac{\varsigma - m_n}{\sigma_n}\right) - \Phi\left(\frac{\omega - m_n}{\sigma_n}\right)\right].$$

Тут: $m_\xi = 1;$ $\sigma_\xi = 2(2\sigma^2 = 8);$ $m_\eta = -2;$ $\sigma_\eta = \sqrt{2}(2\sigma^2 = 4)$.

Отже,

$$P(-1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2) = \frac{1}{4}\left[\Phi\left(\frac{1-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-1}{2}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\Phi\left(\frac{2+2}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{0+2}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{1}{4}[\Phi(0) - \Phi(1)]\cdot\left[\Phi\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\Phi(1)\cdot[\Phi(2,8284)-\Phi(1,4142)] == \frac{1}{4}\cdot 0,6827\cdot[0,9952-0,8427] =$$
$$= 0,0260316 \approx 0,026.$$

4.13.11. Щільність сумісного розподілу неперервної двомірної випадкової величини (X, Y): $f(x,y) = Ce^{-x^2-2xy-4y^2}$.

Знайти:

а) постійний множник C;

б) щільності розподілу складових;

в) умовні щільності розподілу складових.

Розв'язок.

а) Використаємо властивість інтегральної функції $F(\infty,\infty)=1$. Отже, $F(x,y) = C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2xy-4y^2}dxdy = 1$.

Звідси $C = \dfrac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2xy-4y^2}dxdy}$.

Обчислимо знаменник, врахувавши, що

$x^2+2xy+4y^2 = x^2+2xy+y^2+3y^2 = (x+y)^2+3y^2$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2xy-4y^2}dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-3y^2}dy\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2xy-y^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-3y^2}dy\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2}d(x+y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-3y^2}\cdot\sqrt{\pi}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{3y}\right)^2}d\left(\sqrt{3y}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Тут використано, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2}d(x+y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$,

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{3y})^2}d(\sqrt{3y}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$ – інтеграли Пуассона.

Отже, $C = \dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$.

б) Щільності розподілу складових

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2xy-4y^2}dy = \frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-x^2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2xy-4y^2}dy = *$$

Зробимо перетворення:

$$-2xy-4y^2 = -(4y^2+2xy) = -[4y^2+2\cdot 2y\cdot\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{4}] =$$

$$= -[(2y+\frac{x}{2})^2-\frac{x^2}{4}] = -(2y+\frac{x}{2})^2+\frac{x^2}{4}.$$

$$* = \frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-x^2+\frac{x^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2y+\frac{x}{2})^2}dy = \frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-\frac{3}{4}x^2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2y+\frac{x}{2})^2}d(2y+\frac{x}{2}) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\pi}e^{-0{,}75x^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}e^{-0{,}75x^2}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}e^{-0{,}75x^2}.$$

Тут враховано, що $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2y+\frac{x}{2})^2}d(2y+\frac{x}{2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}$

– інтеграл Пуассона.

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2xy-4y^2}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2}e^{-3y^2}dx = \frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-3y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2}d(x+y) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = \frac{\sqrt{3}}{\pi}e^{-3y^2}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}e^{-3y^2},$$

оскільки $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}$ – інтеграл Пуассона.

в) Умовні щільності розподілу складових:

$$\varphi(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{\sqrt{3}e^{-x^2-2xy-4y^2} \cdot \sqrt{\pi}}{\pi \cdot \sqrt{3}e^{-3y^2}} = \frac{e^{-x^2-2xy-y^2}}{\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+y)^2};$$

$$\varphi(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{\sqrt{3}e^{-x^2-2xy-4y^2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{\pi}}{\pi \cdot \sqrt{3}e^{-0,75x^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0,25x^2-2xy-4y^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0,25(x^2+8xy+16y^2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0,25(x+4y)^2}.$$

4.13.12. Неперервна двомірна випадкова величина (X, Y) розподілена рівномірно всередині прямокутника з центром симетрії в початку координат і сторонами $2a$ та $2b$, які паралельні координатним осям.

Знайти:

а) двомірну щільність ймовірності системи;

б) щільності розподілу складових.

Розв’язок.

Щільності імовірності складових:

$$f(x) = \frac{1}{(a-(-a))} = \frac{1}{2a}; \quad f(y) = \frac{1}{(b-(-b))} = \frac{1}{2b}.$$

Щільність сумісного розподілу системи:

$f(x,y) = f(x) \cdot f(y) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2b} = \frac{1}{4ab}$, оскільки складові системи незалежні (рис. 4.13.4).

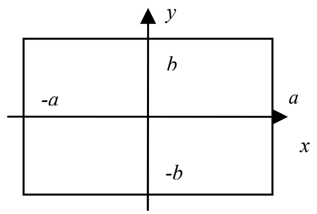


Рис. 4.13.4.

4.13.13. Задана щільність сумісного розподілу неперервної випадкової двомірної величини (X, Y): $f(x, y) = 2\cos x\cos y$ в квадраті $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{4}$; за межами квадрату $f(x, y) = 0$.

Знайти математичне сподівання складових.

Розв'язок.

$$f(x,y) = 2\cos x \cdot \cos y \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)dx; \;\; f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy.$$

Обчислимо спочатку щільність розподілу складової X:

$$f_1(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos x \cdot \cos y dy = 2\cos x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos y dy =$$

$$= 2\cos x \cdot \sin y \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 2\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\cos x.$$

Аналогічно отримаємо $f_2(y) = \sqrt{2}\cos y$.

Обчислимо математичне сподівання складової X:

$$M(X) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sqrt{2}\cos x dx = \sqrt{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x, \;\; du = dx; \\ \cos x dx = dv, \\ v = \int \;\; \cos x dx = \sin x; \end{array} \right| = M(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sqrt{2}\cos x dx =$$

$$\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx; \\ \cos x dx = dv, \\ v = \int \cos x dx = \sin x; \end{array} \right| = \sqrt{2}\left(x\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx \right) = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\pi\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 8}{8} \right) = \frac{\pi\cdot 2 + 8 - 8\sqrt{2}}{8} = \frac{\pi + 4 - 4\sqrt{2}}{4}.$$

Очевидно, що $M(Y) = \dfrac{\pi + 4 - 4\sqrt{2}}{4}$. Отже, $M(X) = = M(Y) = \dfrac{\pi + 4 - 4\sqrt{2}}{4}$.

4.13.14. Задана двомірна щільність імовірності $f(x, y) = = C/(x^2 + y^2 + 1)^3$ системи випадкових величин (*X*, *Y*). Знайти постійну *C*.

Розв'язок.

Для знаходження постійної *C* використаємо властивість: $C\int \dfrac{dxdy}{(x^2 + y^2 + 1)^3} = 1$.

Для обчислення інтегралу використаємо полярні координати: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\cos\varphi$, $dxdy = \rho d\varphi d\rho$, $0 \le \rho \le \infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Отже,

$$C\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho d\varphi}{(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi + 1)^3} = \frac{C}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{d(\rho^2 + 1)}{(\rho^2 + 1)^3} =$$

$$=\frac{C}{2}2\pi\cdot\lim_{\rho\to\infty}\frac{(\rho^2+1)^{-3+1}}{-3+1}\Bigg|_{\infty}^{0}=\lim_{\rho\to\infty}\frac{C\pi}{2(\rho^2+1)^2}\Bigg|_{\infty}^{0}=\frac{C\pi}{2}=1;$$

Звідси, $C=1:\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2}{\pi}$.

4.13.15. Система двох випадкових величин (X,Y) рівномірно розподілена в трикутнику, обмеженому прямими $y = x$, $y = 0$, $x = 2$. Встановити, чи величини X і Y є залежними. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y.

Розв'язок.

Система двох неперервних випадкових величин має рівномірний розподіл в області D площини $x0y$, якщо щільність імовірності в цій області постійна = C: рівна нулю в решті точках площини $x0y$:

$$f(x,y)=\begin{cases}C & \text{всередині } D\\ 0 & \text{поза } D\end{cases},\quad \text{де}\quad C=\frac{1}{S_D},\quad S_D\ -$$

площа області D.

На рис. 4.13.5 заштрихована область D.

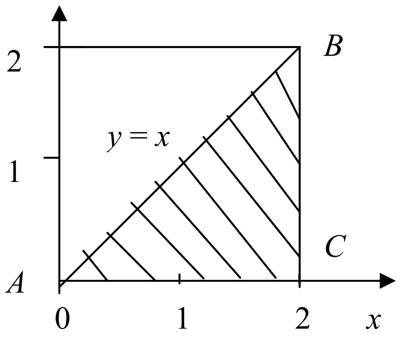


Рис. 4.13.5.

Отже, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{якщо } 0<x<2,\ 0<y<x;\\ 0, & \text{при всіх решта } x \text{ і } y.\end{cases}$

Обчислимо математичні сподівання складових X і Y:

$$M(X)=\iint\limits_{(D)} xf(x,y)dxdy=\int\limits_0^2\int\limits_0^x x\cdot\frac{1}{2}dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 xdx\int\limits_0^x dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 x\cdot y\Big|_0^x dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{4}{3};$$

$$M(Y)=\iint\limits_{(D)} y\cdot\frac{1}{2}dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x ydy=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\frac{y^2}{2}\Big|_0^x dx=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^2=\frac{2}{3}.$$

Обчислимо щільності складових:

$$f_1(x)=\int\limits_0^x f(x,y)dy=\int\limits_0^x\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}y\Big|_0^x=\frac{1}{2}x;$$

отже, $f_1(x)=\dfrac{1}{2}x$ при $0<x<2$.

Аналогічно, $f_2(y)=\int\limits_0^2 f(x,y)dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 dx=\dfrac{1}{2}x\Big|_0^2=\dfrac{1}{2}\cdot 2=1$ при $0<y<x$.

Для того, щоб встановити, чи є випадкові величини X і Y залежними, обчислимо умовні щільності імовірностей складових:

$$\varphi(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2};$$

$$\psi(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot x}=\frac{1}{x}.$$

Оскільки, $f_1(x)\neq\varphi(x\,|\,y)$ і $f_2(y)\neq\psi(y\,|\,x)$, то випадкові величини X і Y є залежними.

Обчислимо кореляційний момент

$$\mu_{xy} = \iint\limits_D xyf(x,y)dxdy - M(X)M(Y) = \iint\limits_{(D)} xy \cdot \frac{1}{2} dxdy -$$

$$- M(X)M(Y) = \frac{1}{2}\int_0^2 xdx \int_0^x ydy - \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\int_0^2 x \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^x dx - \frac{8}{9} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x \cdot \frac{x^2}{2}dx - \frac{8}{9} = \frac{1}{4}\cdot \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 - \frac{8}{9} = \frac{16}{16} - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}.$$

Коефіцієнт кореляції $r_{xy} = \dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$, де середні квадратичні відхилення $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$ і $\sigma_y = \sqrt{D(Y)}$.

Обчислимо дисперсії складових:

$$D(X) = \iint\limits_{(D)} x^2 f(x,y)dxdy - M^2(X) = \int_0^2\int_0^x x^2 \cdot \frac{1}{2}dxdy - \left(\frac{4}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx \int_0^x dy - \frac{16}{9} = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx \cdot \left. y\right|_0^x dx - \frac{16}{9} = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 \cdot xdx - \frac{16}{9} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.$$

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$D(Y) = \iint\limits_{(D)} y^2 f(x,y)dxdy - M^2(Y) = \int_0^2\int_0^x y^2 \cdot \frac{1}{2}dxdy - \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 dx \int_0^x y^2 dy - \frac{4}{9} = \frac{1}{2}\int_0^2 \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^x dx - \frac{4}{9} = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^3}{3}dx - \frac{4}{9} = \frac{1}{6}\cdot \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 -$$

$$- \frac{4}{9} = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Обчислимо коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{1}{9} : \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{1}{2}.$$

Отже, випадкові величини X і Y залежні і тіснота зв'язку між ними складає $\frac{1}{2}$ або 0,5.

4.13.16. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні і мають показниковий розподіл з параметрами λ_1 та λ_2. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = \dfrac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}$.

Розв'язок.

Оскільки випадкові величини ξ_1 і ξ_2 у показниковому розподілі є додатніми, то достовірно відношення η буде знаходитись в межах $0 < \dfrac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2} < 1$. Нехай z – певна стала, тоді згідно означення інтегральної функції

$$F_\eta(z) = P(\eta < z) = P\left(\frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2} < z \right) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } z \ge 1; \\ 0, & \text{якщо } z \le 0. \end{cases}$$

Нехай $0 < z < 1$. Тоді $P\left\{ \dfrac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2} < z \right\} = P\{(\xi_1, \xi_2) \in D\}$, де область D (заштрихована) визначена нерівностями (рис. 4.13.6).

$$D = \left\{ (u, v) : \frac{u}{u + v} < z, u > 0, v = 0 \right\}, \quad \text{де} \qquad v = u\frac{1 - z}{z} \quad –$$

рівняння граничної прямої, а розв'язок існує в напівплощині $v > u\dfrac{1 - z}{z}$.

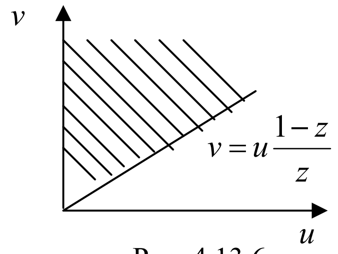


Рис. 4.13.6.

Оскільки ξ_1 і ξ_2 – незалежні випадкові величини, то щільність їх сумісного розподілу рівна добутку щільностей складових:

$f_{\xi_1\xi_2}(u,v) = f_{\xi_1}(u)\cdot f_{\xi_2}(v)$, де $f_{\xi_1}(u) = \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 u}$, $f_{\xi_2}(v) = \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 v}$. Інтегруючи щільність розподілу $f_{\xi_1\xi_2}(u,v)$ по області D, маємо:

$$F_\eta(z) = P\left\{\frac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2} < z\right\} = \iint\limits_{(D)} f_{\xi_1\xi_2}(u,v)\,dudv =$$

$$= \iint\limits_{(D)} \lambda_1 e^{-\lambda_1 u}\lambda_2 e^{-\lambda_2 v}\,dudv = \lambda_1\lambda_2\int_0^\infty e^{-\lambda_1 u}du \int_{u\frac{1-z}{z}}^{\infty} e^{-\lambda_2 v}dv =$$

$$= \lambda_1\lambda_2\int_0^\infty e^{-\lambda_1 u}\left[\frac{1}{\lambda_2}\int_{\infty}^{u\frac{1-z}{z}} e^{-\lambda_3 v}d(-\lambda_2 v)\right]\cdot du = \lambda_1\int_0^\infty e^{-\frac{u(\lambda_1 z-\lambda_2 z+\lambda_2)}{z}}du =$$

$$= \lambda_1\cdot\frac{z}{\lambda_1 z-\lambda_2 z+\lambda_2}e^{-\frac{u(\lambda_1 z-\lambda_2 z+\lambda_2)}{z}}\Bigg|_{\infty}^{0} = \lambda_1\frac{z}{(\lambda_1-\lambda_2)z+\lambda_2}.$$

Отже, $F_\eta(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ \dfrac{\lambda_1 z}{(\lambda_1-\lambda_2)z+\lambda_2}, & 0 < z \le 1, \\ 1, & z > 1. \end{cases}$

4.13.17. Нехай ξ і η – незалежні випадкові величини, які мають показниковий розподіл з параметром λ. Обчислити: а) функцію розподілу $\omega = \frac{\xi}{\eta}$; б) щільність розподілу $\frac{\xi}{\eta}$; в) математичне сподівання $\frac{\xi}{\eta}$.

Розв'язок.

а) Оскільки випадкові величини ξ і η – додатні, то їх відношення $\frac{\xi}{\eta} > 0$. Оскільки $f_\eta(u) = \lambda e^{-\lambda u}$ і $f_\eta(v) = \lambda e^{-\lambda v}$, то з-за незалежності випадкових величин ξ і η

$$f_\omega = f_\xi(u) f_\eta(v) = \lambda^2 e^{-\lambda u} e^{-\lambda v}.$$

Нехай $z > 0$, тоді $F_\omega(z) = P\left(\frac{\xi}{\eta} < z\right) = P\{(\xi, \eta) \in D\}$, де область D визначена нерівностями:

$$D\left\{(u,v) : \frac{u}{v} < z, u > 0, v > 0\right\}.$$

Рівняння граничної прямої $v = \frac{u}{z} = \frac{1}{z} \cdot u$, а розв'язок існує в напівплощині $v > \frac{u}{z}$ (рис. 4.13.7).

Інтегруючи щільність розподілу $f_{\xi,\eta}(u,v)$ по області D, маємо:

$$F_\omega(z) = P\left(\frac{\xi}{\eta} < z\right) = \lambda^2 \iint_D e^{-\lambda u} e^{-\lambda v} du dv = \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda u} du \int_{\frac{u}{z}}^\infty e^{-\lambda v} dv =$$

$$= \lambda^2 \int_0^\infty [e^{-\lambda u} \cdot \left[\frac{1}{\lambda} \int_\infty^{\frac{u}{z}} e^{-\lambda v} d(-\lambda v)\right] du = \lambda \int_0^\infty [e^{-\lambda u} \cdot \left[e^{-\lambda v} \Big|_\infty^{u/z} \right] du =$$

$$=\lambda\int_0^{\infty} e^{-\lambda u}\cdot e^{-\lambda\frac{u}{z}}du=\lambda\int_0^{\infty} e^{-\lambda u-\lambda\frac{u}{z}}du=\lambda\int_0^{\infty} e^{-\lambda\frac{u(z+1)}{z}}du=$$

$$=\frac{z}{z+1}\int_{\infty}^{0} e^{-\frac{\lambda u(z+1)}{z}}d\left(-\frac{\lambda u(z+1)}{z}\right)=\frac{z}{z+1}e^{-\frac{\lambda u(z+1)}{z}}\Bigg|_{\infty}^{0}=\frac{z}{z+1}.$$

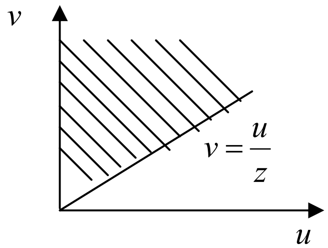


Рис. 4.13.7.

б) Щільність розподілу

$$f_{\omega}(z)=F'_{\omega}(z)=\left(\frac{z}{z+1}\right)'=\frac{1}{(1+z)^2}.$$

в) $M\left(\dfrac{\xi}{\eta}\right)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\dfrac{x}{y}\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dxdy=\underbrace{\int_0^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx}_{I_1}\cdot\underbrace{\int_0^{\infty}\dfrac{1}{y}\lambda e^{-\lambda y}dy}_{S_2}=$

I_2 – невласний інтеграл 1-го і 2-го роду.

$$I_2=\int_0^1\frac{1}{y}\lambda e^{-\lambda y}dy+\int_1^{\infty}\frac{1}{y}\lambda e^{-\lambda y}dy$$

Очевидно, що 2-й інтеграл існує. Розглядаємо

$$\int_0^1\frac{1}{y}\lambda e^{-\lambda y}dy=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon}^1\frac{1}{y}\lambda e^{-\lambda y}dy\ge\lambda e^{-\lambda 1}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon}^1\frac{1}{y}dy=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\lim_{\varepsilon\to0}\ln|y|\Bigg|_{\varepsilon}^{1}=\lambda e^{-\lambda}\lim\ln|\varepsilon|=\infty.$$

Отже і-а розбіжний.

4.13.18. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні і рівномірно розподілені на відрізку [0, 1]. Знайти щільність розподілу випадкової величини: $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$.

Розв’язок.

Оскільки випадкові величини ξ_1 і ξ_2 рівномірно розподілені на відрізку [0, 1], то їхні щільності розподілу рівні $f_{\xi_1(u)} = 1$, $f_{\xi_2}(v) = 1$, а якщо вони і незалежні, то щільність їх сумісного розподілу рівна $f_{\xi_1,\xi_2}(u \cdot v) = 1 \cdot 1 = 1$ на $0 < u \le 1$; $0 < v \le 1$.

Інтегральна функція $F_\eta(z) = P(\eta \le z) = P(\xi_1 \cdot \xi_2 \le z) = = \iint\limits_D dudv$, де область

$$D = \{(u, v) : u \cdot v < z; 0 \le u \le 1; 0 \le v \le 1\}.$$

Очевидно, що $P(\eta \le z) = 0$, оскільки область D пуста, $P(\eta \le z) = 1$ при $z \ge 2$, бо достовірно попадає вся область D.

При $0 < z < 1$ (рис. 4.13.8).

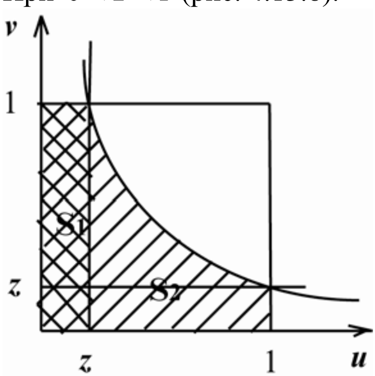


Рис. 4.13.8.

$$F_\eta(z) = \iint\limits_D dudv = S_1 + S_2 = z \cdot 1 + \int\limits_z^1 \frac{z}{u} du = z + z \int\limits_z^1 \frac{du}{u} = z + z \ln u \Big|_z^1 =$$

$$= z - z \ln z = z(1 - \ln z).$$

Отже, $F_\eta(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \le 0; \\ z(1 - \ln z), & \text{при } 0 < z < 1; \\ 1 & \text{при z} > 1. \end{cases}$

Звідси щільність розподілу

$f_\eta(z) = F'_\eta(z) = (z - z\ln z)' = 1 - \ln z - 1 = -\ln z$.

Або

$$F_\eta(z) = z \cdot 1 + \int_z^1 du \int_0^{\frac{z}{u}} dv = z + \int_z^1 \frac{z}{u} du = z + z\int_z^1 \frac{du}{u} =$$

$$= z + z\ln u \Big|_z^1 = z + z(\ln 1 - \ln z) = z - z\ln z.$$

Або $F_\eta(z) = z \cdot 1 + \int_z^1 \left(\int_0^{\frac{z}{v}} du \right) dv = z + \int_z^1 \left(\frac{z}{v} \right) dv =$

$$= z + z\ln u \Big|_z^1 = z - z\ln z.$$

4.13.19. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні і мають рівномірний розподіл на відрізку [0, 1]. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = \dfrac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}$.

Розв’язок.

Оскільки випадкові величини рівномірно розподілені на відрізку [0, 1], то їхні щільності відповідно рівні $f_{\xi_1}(u) = 1$, $f_{\xi_2}(v) = 1$, а внаслідок їх незалежності $f_\eta(u, v) =$ $= f_{\xi_1}(u) \cdot f_{\xi_2}(v) = 1 \cdot 1 = 1$.

Отже, $F_\eta(z) = P\left(\dfrac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2} < z \right)$, де значення *z* розбиваються на 2 інтервали:

$$\left[0;\frac{1}{2}\right]-(\xi_1=0;\xi_1=\xi_2)\,;\ \left[\frac{1}{2};1\right]-(\xi_1=\xi_2;\xi_2=0)\,.$$

(Див. рис. 4.13.9).

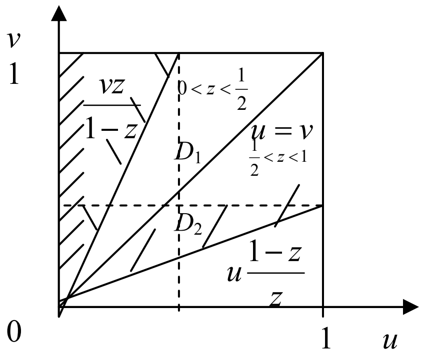


Рис. 4.13.9.

Якщо $0<z<\dfrac{1}{2}$, то $F_\eta(z)=\iint\limits_{D_1}dudv=\int\limits_0^1 dv\int\limits_0^{\frac{vz}{1-z}}du=$

$$=\int\limits_0^1\left[u\Big|_0^{\frac{vz}{1-z}}\right]dv=\int\limits_0^1\frac{vz}{1-z}dv=\frac{z}{1-z}\cdot\frac{v^2}{2}\Big|_0^1=\frac{z}{2(1-z)}\,.$$

Якщо $\dfrac{1}{2}<z<1$, то

$$F_\eta(z)=1-\iint\limits_{D_2}dudv=1-\int\limits_0^1 du\int\limits_0^{u\frac{1-z}{z}}dv=1-\int\limits_0^1\left[v\Big|_0^{u\frac{1-z}{z}}\right]du=$$

$$=1-\int\limits_0^1\frac{u(1-z)}{z}du=1-\frac{1-z}{z}\cdot\frac{u^2}{2}\Big|_0^1=1-\frac{1-z}{2z}=\frac{3z-1}{2z}\,.$$

Якщо $z>1$, то $F_\eta(z)=1$.

Остаточно, $F_\eta(z)=\begin{cases}0, & \text{якщо } z<1;\\ \dfrac{z}{2(1-z)}, & \text{якщо } 0<z<\dfrac{1}{2};\\ \dfrac{3z-1}{2z}, & \text{якщо } \dfrac{1}{2}<z<1;\\ 1, & \text{якщо } z>1.\end{cases}$

4.13.20. Нехай ξ і η – незалежні випадкові величини, які мають показниковий розподіл з параметром λ. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\dfrac{\xi+\eta}{\xi}$.

Розв'язок.

Оскільки у показниковому законі розподілу випадкові величини ξ і η додатні, то $\gamma=\dfrac{\xi+\eta}{\xi}=1+\dfrac{\eta}{\xi}>1$. Згідно означення, інтегральна функція рівна: $F_\gamma\left\{\dfrac{\xi+\eta}{\xi}<z\right\}$, тому $F_\gamma\left(\dfrac{\xi+\eta}{\xi}<z\right)=0$ при $z\le 1$. При $z>1$ $F_\gamma\left(\dfrac{\xi+\eta}{\xi}<z\right)=$ $=P\{(\xi,\eta)\in D\}$, де заштрихована область D визначена нерівностями (рис. 4.13.10): $D=\left\{(u,v):\dfrac{u}{u+v}<z, u>0, v>0\right\}$.

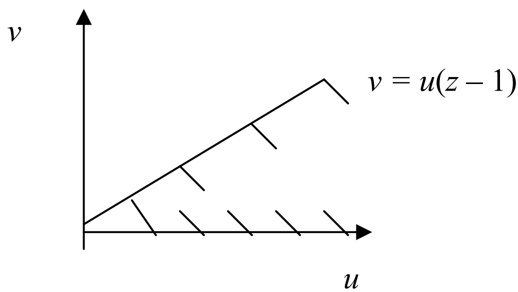


Рис. 4.13.10.

Сумісна щільність розподілу незалежних величин ξ і η рівна добутку імовірностей складових:

$$f(\xi,\eta)=f_{\xi}(u)\cdot f_{\eta}(v)=\lambda e^{-\lambda u}\cdot\lambda e^{-\lambda v}.$$

Інтегруючи сумісну щільність розподілу по області D отримуємо:

$$F_{\gamma}(z)=P(\gamma<z)=P\left(\frac{\xi+\eta}{\xi}<z\right)=\lambda^2\iint\limits_{D}e^{-\lambda u}e^{-\lambda v}dudv=$$

$$=\lambda^2\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda u}du\int\limits_0^{u(z-1)}e^{-\lambda v}dv=\lambda^2\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda u}du\left[\frac{1}{\lambda}\int\limits_{u(z-1)}^{0}e^{-\lambda v}d(-\lambda v)\right]=$$

$$=\lambda\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda u}\left(e^{-\lambda v}\Big|_{u(z-1)}^{0}\right)du=\lambda\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda u}(1-e^{-\lambda u(z-1)})du=$$

$$=\lambda\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda u}du-\lambda\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda u}e^{-\lambda u(z-1)}du=\int\limits_{\infty}^{0}e^{-\lambda u}d(-\lambda u)-\lambda\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda uz}du=$$

$$=e^{-\lambda u}\Big|_{\infty}^{0}+\frac{1}{z}\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda uz}d(-\lambda uz)=1+\frac{1}{z}e^{-\lambda uz}\Big|_0^{\infty}=1-\frac{1}{z}.$$

4.13.21. В першому квадранті задана функція розподілу системи двох випадкових величин: $F(x,y)=1+2^{-x}-2^{-y}+$ $+2^{-x-y}$. Обчислити: а) двомірну щільність імовірності системи; б) імовірність попадання випадкової точки (X, Y) в трикутник з вершинами A (1; 3), B (3; 3), C (2; 8).

Розв'язок.

а) Двомірну щільність імовірності (щільність сумісного розподілу) обчислимо згідно формули:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2(1+2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y})}{\partial x\partial y};$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = -\ln 2(2^{-x} + 2^{-x-y})\ ;\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \ln^2 2 \cdot 2^{-x-y}\ .$$

Отже, $f(x,y) = \ln^2 2 \cdot 2^{-x-y}$.

б) Імовірність попадання випадкової точки (X, Y) в область D визначається рівністю:

$$P[(X,Y) \in D] = \iint_D f(x,y)dxdy\ .$$

Область D – рівнобедрений трикутник ABC (рис.4.13.11).

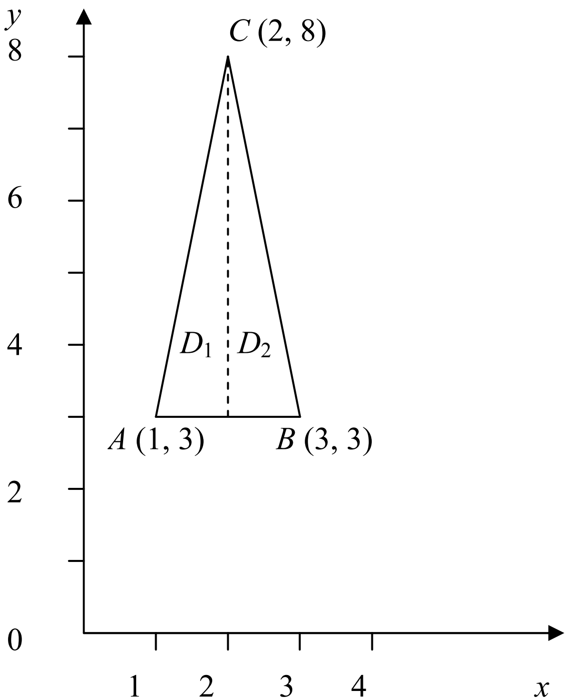


Рис. 4.13.11.

Для визначення меж області $D = D_1 + D_2$ визначимо рівняння сторін AC і CB, як рівняння прямих, що проходять через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

AC: $$\frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A} \to \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{8-3}.$$

Рівняння AC: $y = 5x - 2$.

Аналогічно знаходимо рівняння CB: $y = 18 - 5x$.

Отже,

$$P(x,y) \in D = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy = \ln^2 2(I_1 + I_2) \cdot$$

$$I_1 = \iint_{D_1} 2^{-x} 2^{-y} dxdy = \int_1^2 2^{-x} dx \int_3^{5x-2} 2^{-y} dy = \int_1^2 2^{-x} dx \times$$

$$\times \int_{5x-2}^{3} 2^{-y} d(-y) = \int_1^2 2^{-x} \left(\frac{2^{-y}}{\ln 2} \Bigg|_{5x-2}^{3} \right) dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 2^{-x} (2^{-3} - 2^{-(5x-2)}) dx =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{1}{2^3} \int_1^2 2^{-x} dx - 2^2 \int_1^2 2^{-6x} dx \right] = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{1}{2^3} \int_2^1 2^{-x} d(-x) + \right.$$

$$\left. + \frac{2^2}{6} \int_1^2 2^{-6x} d(-6x) \right] = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{1}{2^3} \cdot \frac{2^{-x}}{\ln 2} \Bigg|_2^1 + \frac{2^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2^{-6x}}{\ln 2} \Bigg|_1^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{\ln^2 2} \left[\frac{1}{2^3} (2^{-1} - 2^{-2}) + \frac{2}{3} (2^{-12} - 2^{-6}) \right] = \frac{1}{\ln^2 2} \left[\frac{1}{2^4} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3 \cdot 2^{11}} \right] = \frac{1}{\ln^2 2} \left[\frac{1}{3 \cdot 2^4} + \frac{1}{3 \cdot 2^{11}} \right].$$

$$I_2 = \int_2^3 2^{-x} dx \int_3^{18-5x} 2^{-y} dy = \int_2^3 \left[2^{-x} \int_{18-5x}^{3} 2^{-y} d(-y) \right] =$$

$$= \int_2^3 2^{-x} \left(\frac{2^{-y}}{\ln 2} \Bigg|_{18-5x}^{3} \right) dx = \frac{1}{\ln 2} \int_2^3 2^{-x} (2^{-3} - 2^{5x-18}) dx =$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{1}{2^3}\int_2^3 2^{-x}dx-\frac{1}{2^{18}}\int_2^3 2^{4x}dx\right]=\frac{1}{\ln^2 2}\left[\frac{1}{2^3}\cdot 2^{-x}\Big|_3^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2^{20}}\cdot 2^{4x}\Big|_2^3\right]=\frac{1}{\ln^2 2}\left[\frac{1}{2^3}(2^{-2}-2^{-3})-\frac{1}{2^{20}}(2^{12}-2^8)\right]=$$

$$=\frac{1}{\ln^2 2}\left(\frac{3}{2^8}+\frac{1}{2^{12}}\right).$$

Отже,

$$P(x,y)=\ln^2 2\cdot\frac{1}{\ln^2 2}\left[\frac{1}{3\cdot 2^4}+\frac{1}{3\cdot 2^{11}}+\frac{3}{2^8}+\frac{9}{2^{12}}\right]=$$

$$=\frac{25}{3\cdot 2^8}+\frac{5}{3\cdot 2^{12}}.$$

4.13.22. Задані норми прибутків акцій видів *А* і *Б*, й імовірності станів економіки. Визначити кореляцію норм прибутків цих акцій. Дані подано в таблиці :

Стан економіки	Імовірність P_i	Норма прибутку	
		R_{Ai} (*А*)	R_{2i} (*Б*)
1. Значне піднесення	0,1	303	61
2. Незначне піднесення	0,3	97	65
3. Стагнація	0,3	69	68
4. Незначне падіння	0,2	66	95
5. Значне падіння	0,1	63	165

Коефіцієнт кореляції ρ_{12} між нормами прибутків акцій двох видів визначається за формулою:

$$\rho_{12}=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(R_{1i}-m_1)(R_{1i}-m_2)}{\sigma_1\sigma_2},$$

де сподівані норми прибутків m_1 і m_2 визначаються за формулами:

$$m_1=\sum_{i=1}^{n} p_i R_{1i}\ ;\ m_2=\sum_{i=1}^{n} p_i R_{2i}\ ;$$

середні квадратичні відхилення σ_1 і σ_2 визначаються за формулами:

$$\sigma_1 = \sqrt{D_1} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (R_{1i} - m_1)^2} \ ;$$

$$\sigma_2 = \sqrt{D_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (R_{2i} - m_2)^2} \ .$$

Визначимо всі необхідні величини для розглянутого прикладу :

$$m_1 = \sum_{i=1}^{5} p_i R_{1i} = 303 \cdot 0{,}1 + 97 \cdot 0{,}3 + 69 \cdot 0{,}3 + 66 \cdot 0{,}2 + 63 \cdot 0{,}1 =$$

$= 30{,}3 + 29{,}1 + 20{,}7 + 13{,}2 + 6{,}3 = 99{,}6;$

$$m_2 = \sum_{i=1}^{5} p_i R_{2i} = 61 \cdot 0{,}1 + 65 \cdot 0{,}2 + 68 \cdot 0{,}3 + 95 \cdot 0{,}3 + 165 \cdot 0{,}1 =$$

$= 84{,}5$;

$D_1 = 303^2 \cdot 0{,}1 + 97^2 \cdot 0{,}3 + 60^2 \cdot 0{,}3 + 66^2 \cdot 0{,}2 + 63^2 \cdot 0{,}1 -$
$- (99{,}6)^2 = = 4779{,}84;$

$D_2 = 61^2 \cdot 0{,}1 + 65^2 \cdot 0{,}2 + 68^2 \cdot 0{,}3 + 95^2 \cdot 0{,}3 + 165^2 \cdot 0{,}1 -$
$- (84{,}5)^2 = 894{,}05;$

$$\sigma_1 = \sqrt{D_1} = \sqrt{4779{,}84} = 69{,}14;$$

$$\sigma_2 = \sqrt{D_2} = \sqrt{894.05} = 29{,}9 \ .$$

Підставивши числові дані визначимо коефіцієнт кореляції між нормами прибутків акцій двох видів:

$$\rho_{12} = \frac{0{,}1(303-99{,}6)(61-84{,}5) + 0{,}3(97-99{,}6)(65-84{,}5) + 0{,}3(69-99{,}6)(68-84{,}5) +}{69{,}14 \cdot 29{,}9}$$

$$\frac{0{,}1(303-99{,}6)(61-84{,}5) + 0{,}3(97-99{,}6)(65-84{,}5) + 0{,}3(69-99{,}6)(68-84{,}5) +}{69{,}14 \cdot 29{,}9}$$

$$\frac{+\,0{,}2(66-99{,}6)(95-84{,}5) + 0{,}1(63-99{,}6)(165-84{,}5)}{} = \frac{-676{,}5}{69{,}14 \cdot 29{,}9} = -0{,}3272.$$

§5. Закон великих чисел

Послідовність випадкових величин X_1, X_2, ... ***збігається за імовірністю*** до випадкової величини X, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ імовірність нерівності $\left|X_n - X\right| < \varepsilon$ при $n \to \infty$ прямує до одиниці.

Лема Чебишева. Якщо випадкова величина X набирає лише невід'ємні значення, тоді імовірність того, що при випробуванні вона набере значення, яке більше від додатнього числа a, не переважає дробу, в чисельнику якого математичне сподівання від X, а знаменник – число a:

$$P(x > a) \le \frac{M(X)}{a} \qquad (5.1).$$

Нерівність Чебишева. Імовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання $M(X)$ за абсолютною величиною не менше будь-якого додатнього числа ε, обмежена зверху величиною $D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X - M(X)| \ge \varepsilon) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (5.2).$$

Відхилення випадкової величини від математичного сподівання $M(X)$ менше, ніж ε, виражається в другій формі запису нерівності Чебишева:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (5.3).$$

Нерівність Чебишева корисна лише при відносно великих ε, оскільки при малих ε дає грубі оцінки або й тривіальний результат.

Загальна теорема Чебишева (про стійкість середньоарифметичного).

Якщо x_1, x_2, ... x_n – послідовність незалежних випадкових величин з математичними сподіваннями $M(x_1)$, $M(x_2)$, ... $M(x_n)$ і дисперсіями $D(x_1)$, $D(x_2)$, ... $D(x_n)$ обмеженими однією і тією ж постійною $\left|D(x_i)\right| \le L$, то для довільного $\varepsilon > 0$ і достатньо великого числа n, практично достовірною можна вважати подію, яка полягає в тому, що відхилення середнього арифметичного випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань буде за абсолютною величиною як завгодно малим:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}-\frac{M(x_1)+M(x_2)+...+M(x_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1 \quad (5.4).$$

При доведенні цієї теореми з допомогою нерівності Чебишева отримуємо оцінку:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(x_i)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{L}{n\varepsilon^2} \quad (5.5).$$

Частковим випадком теореми Чебишева є теореми Бернуллі і Пуассона.

Теорема Бернуллі встановлює зв'язок між частотою події і її імовірністю при постійних умовах випробувань. При необмеженому зростанні числа незалежних випробувань частота m/n деякої події A збігається за імовірністю до її імовірності $p = P(A)$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1 \quad (5.6),$$

де ε – яке завгодно мале додатнє число.

При доведенні теореми Бернуллі отримуємо таку оцінку:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} \quad (5.7),$$

яка має практичне застосування.

Теорема Пуассона (встановлює стійкість частоти при змінних умовах випробувань). Якщо проводиться n незалежних випробувань і імовірність появи події A в i-тому випробуванні рівна p_i, то при збільшенні n частота m/n події A збігається по імовірності до середньоарифметичного імовірностей p_i:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad (5.8),$$

де ε – яке завгодно мале додатнє число.

Задачі

5.1. Середньодобове споживання електроенергії в населеному пункті дорівнює 12000 кВт·год.

Визначити ймовірність того, що споживання електроенергії в цьому населеному пункті протягом даної доби перевищить 50000 кВт·год.

Розв'язок.

$M(X) = 12000$ кВт·год; $x \geq 50000$ кВт·год.

Використаємо теорему Маркова: $P(x > \alpha) \leq \dfrac{M(X)}{\alpha}$.

Підставивши числові дані, отримаємо:

$$P(X > 50000) \leq \frac{12000}{50000} = 0{,}24\,; \quad P(X > 50000) \leq 0{,}24\,.$$

5.2. Відомо, що 3/4 всієї продукції, що виробляється заводом – першого сорту.

Оцінити ймовірність того, що число виробів першого сорту серед 200000 виготовлених буде відрізнятись від математичного сподівання цього числа не більше, ніж на 2000 шт.

Розв'язок.

$p = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$ – ймовірність того, що виріб I сорту; $n = 200000$; $\varepsilon = 2000$; $q = 0{,}25$. Використаємо нерівність Чебишева:

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Тут $M(X) = np = 200000 \cdot 0{,}75 = 150000$; $D(X) = npq = 200000 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 37500$.

Отже, $P\left(\left|X-150000\right|<2000\right)\geq 1-\dfrac{37500}{(2000)^2}=0{,}990625$.

5.3. Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що при 1000 підкиданнях монети число випадань герба буде знаходитись в межах між 450 і 550.

Розв'язок.

Обчислимо математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$ випадкової величини X – числа μ випадань герба в n = = 1000 випробуваннях:

$$M(X)=np=1000\cdot 0{,}5=500; D(X)=npq=$$
$$=1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=250.$$

Застосуємо нерівність Чебишева у вигляді:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|\leq\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Значення величини відхилення ε визначимо як різницю між межами числа появи події і математичним сподівання: ε = = 550 – 500 = $\left|450-500\right|$ = 50.

Підставляючи необхідні дані у нерівність, отримаємо:

$$P\left(\left|X-500\right|\leq 50\right)\geq 1-\frac{250}{50^2}=0{,}9.$$

5.4. Ймовірність появи події в кожному випробуванні рівна 1/4.

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що число X появи події знаходиться в межах від 150 до 250, якщо буде проведено 800 випробувань.

Розв'язок.

P = 1/4 = 0,25; n = 800; 150 < X < 250.

P(150<X<250) – ?

Нерівність Чебишева:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2};$$

$M(X) = n \cdot p = 0{,}25 \cdot 800 = 200;$

$\varepsilon = 250 - 200 = 200 - 150 = 50;$

$\varepsilon = 50; D(X) = npq = 0{,}25 \cdot 800 \cdot 0{,}75 = 150.$

Отже, $P(|X - 200| < 50) \geq 1 - \dfrac{150}{50 \cdot 50} = 1 - 0{,}06 = 0{,}04.$

5.5. Дискретна випадкова величина *X* задана законом розподілу:

X	0,1	0,4	0,6
P	0,2	0,3	0,5

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < \sqrt{0{,}4}$.

Розв'язок.

Обчислимо $M(X)$ і $D(X)$:

$M(X) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}44;$

$D(X) = v_2 - v_1^2 = 0{,}23 - (0{,}44)^2 = 0{,}0364.$

Підставивши дані в нерівність Чебишева

$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$, отримуємо:

$$P(|X - 0{,}44| < \sqrt{0{,}4}) \geq 1 - \frac{0{,}0364}{\left(\sqrt{0{,}4}\right)^2} = 1 - \frac{0{,}0364}{0{,}4} = 0{,}909.$$

5.6. З 5000 виробів було обстежено 500 шт., відібраних випадковим чином. Серед них виявилось 10 бракованих.

Прийнявши частку бракованих виробів серед відібраних за ймовірність виготовлення бракованого виробу, оцінити ймовірність того, що у всій партії виявиться бракованих виробів не більше 3% і не менше 1%.

Розв'язок.

Ймовірність виготовлення бракованих виробів рівна $p = \dfrac{10}{500} = 0{,}02$, тоді $q = 1 - p = 0{,}98$; $\varepsilon_1 = (1\%) = 0{,}01 = p_1$;

ε_2 = (3%) = 0,03 = p_2. Звідси величина відхилення рівна: $\varepsilon = |0{,}01 - 0{,}02| = 0{,}03 - 0{,}02 = 0{,}01$.

Для обчислення шуканої імовірності скористуємося нерівністю Чебишева у формі: $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$.

Підставивши числові дані у формулу, отримаємо:

$$P\left(\left|\frac{m}{5000} - 0{,}02\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{0{,}02 \cdot 0{,}98}{5000 \cdot (0{,}01)^2} = 0{,}9608.$$

5.7. Ймовірність дозрівання кукурудзяного стебла з трьома струками дорівнює 3/4.

Оцінити ймовірність того, що серед 3000 стебел частка з трьома струками буде за абсолютною величиною відрізнятись від ймовірності дозрівання такого стебла не більше, ніж на 0,02.

Розв'язок.

$$p = \frac{3}{4};\ n = 3000;\ \ \varepsilon = 0{,}02.$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = ?$$

Обчислимо дану імовірність за формулою:

а) Бернуллі: $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$;

$$P\left(\left|\frac{m}{3000} - \frac{3}{4}\right| < 0{,}02\right) \geq 1 - \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 4 \cdot 3000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}02} = 1 - \frac{1}{64} =$$

$$= \frac{63}{64} = 0{,}984;$$

б) Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\Phi\left(0{,}02\sqrt{\frac{3000\cdot4\cdot4}{3\cdot1}}\right)=$$

$$=2\Phi(2{,}53)=2\cdot0{,}4943=0{,}9886.$$

5.8. Визначити необхідне число дослідів, які необхідно провести, щоб відхилення частоти появи події *A* від ймовірності її появи в окремому досліді, що дорівнює 0,75, не перевищувало за абсолютною величиною 0,05 з ймовірністю 0,96.

Розв'язок.

Для обчислення кількості дослідів *n* можна використати дві формули:

а) Використаємо нерівність Чебишева:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\ge1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}, \text{ звідки}$$

$$n\ge\frac{pq}{\varepsilon^2\cdot\left[1-P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\right]}.$$

Підставивши у формулу необхідні дані, отримаємо:

$$n\ge\frac{0{,}75\cdot0{,}25}{0{,}05^2(1-0{,}96)}=\frac{0{,}75\cdot0{,}25}{0{,}0025\cdot0{,}04}=1875,$$

отже $n\ge1875$.

б) Використаємо інтегральну теорему Муавра-Лапласа про ймовірність відхилення частоти події від її імовірності в кожному випробуванні не більше, ніж на ε:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

У задачі p = 0,75, q = 1 – p = 0,25; ε = 0,05; $P\left\{\left|\frac{m}{n}-0{,}75\right|\le0{,}05\right)=\beta=0{,}96$.

Тоді $\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)=\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{0{,}96}{2}=0{,}48$, тобто $\Phi(t)=0{,}48$.

Згідно таблиць інтегральної функції t = 2,054.

Отже, $\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}=t$, звідки $n=\dfrac{t^2 pq}{\varepsilon^2}$.

Підставивши числові дані у формулу, отримаємо:

$$n=\frac{2{,}054^2\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}{(0{,}05)^2}=316{,}42\approx 316.$$

5.9. При штампуванні 70% виробів виявляються першосортними.

Скільки потрібно взяти виробів, щоб з ймовірністю, що перевищує 0,9973, можна було стверджувати, що частка першосортних серед них буде відрізнятись за абсолютною величиною від ймовірності 0,7 не більше, ніж на 0,05?

Скільки виробів потрібно було би взяти, щоб результат можна було б гарантувати з ймовірністю, що перевищує 0,99 (тобто з меншою ймовірністю)?

В якому з цих двох випадків потрібно взяти більшу кількість виробів і чому?

Розв'язок.

Використаємо розв'язок задачі 5.8.

При $P\ge 0{,}9973$, p = 0,70; ε = 0,05, q = 0,3

$$n\ge\frac{pq}{\varepsilon^2(1-P)}=\frac{0{,}7\cdot 0{,}3}{(0{,}05)^2(1-0{,}9973)}=31111,$$ отже,

$n\ge 31111$.

При $P\ge 0{,}99$

$$n\ge\frac{pq}{\varepsilon^2(1-p)}=\frac{0{,}7\cdot 0{,}3}{(0{,}05)^2(1-0{,}99)}=8400.$$

Збільшення імовірності P приводить до збільшення n.

5.10. Ймовірність виготовлення нестандартної радіолампи дорівнює 0,04.

Яке найменше число радіоламп потрібно відібрати, щоб з ймовірністю 0,88 можна було б стверджувати, що частка нестандартних радіоламп буде відрізнятись від ймовірності виготовлення нестандартної лампи за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,02?

Розв'язок.

Введемо позначення: $p = 0,04$; $P = 0,88$; $\varepsilon = 0,02$; $q = 0,96$.

Для знаходження числа n використаємо:

а) формулу Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Підставивши необхідні дані, отримуємо:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,04\right| \le 0,02\right) = 2\Phi\left(0,02\sqrt{\frac{n}{0,04 \cdot 0,96}}\right) = 0,88,$$

звідки $\Phi\left(0,02\sqrt{\frac{n}{0,04 \cdot 0,96}}\right) = \frac{0,88}{2} = 0,44.$

З таблиць інтегральної функції знаходимо $t = 1,555$, при якому $\Phi(t) = 0,44$. Отже, $0,02\sqrt{\frac{n}{0,04 \cdot 0,96}} = 0,44$ або $\sqrt{\frac{n}{0,96}} = 15,55$. Звідки $n = 0,96 \cdot (15,55)^2 = 232$.

б) нерівність Чебишева:

$P = \left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$, яка в числах має вигляд: $0,88 = 1 - \frac{0,44 \cdot 0,96}{n(0,22)^2}$. Отже, $\frac{0,96}{n} = 0,12$, звідки $n = 800$.

Як видно з розрахунків, нерівність Чебишева дає значення n значно вище.

5.11. В певному технологічному процесі в середньому 75% виробів має допуск ±5%. Яке число виробів з партії з 200000 шт. з ймовірністю 0,99 можна планувати з допуском ±5%?

Розв'язок.

Введемо значення: $P = \gamma = 0{,}99;\quad n = 200000;\quad p = = (75\%) = 0{,}75 = \frac{3}{4};\ q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25 = \frac{1}{4}$.

Необхідно обчислити m і ε. Для обчислення даних величин скористуємось:

а) формулою Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \gamma.$$

Підставивши необхідні дані, отримуємо:

$$P\left(\left|\frac{m}{200000} - 0{,}75\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{200000\cdot 4\cdot 4}{3\cdot 1}}\right) = 0{,}99.$$

Спростивши вираз, отримуємо: $2\Phi(\varepsilon\cdot 1032{,}7956) = 0{,}99$, звідки, $\Phi(t) = \frac{0{,}99}{2} = 0{,}495$. З таблиць інтегральної функції отримуємо t = 2,573. Отже, $\varepsilon = \frac{2{,}573}{1032{,}7956} = 0{,}002491$. Підставивши отримане значення ε в нерівність $\left|\frac{m}{200000} - 0{,}75\right| \le 0{,}002491$, будемо мати:

$$0{,}75 - 0{,}002491 \le \frac{m}{200000} \le 0{,}75 + 0{,}002491,$$

або $150000 - 498{,}2 \le m \le 150000 + 498{,}2$

Остаточно, $m = 150000 \pm 498$.

б) нерівністю Чебишева:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Підставивши необхідні дані, отримаємо: $0{,}99\geq$ $\geq 1-\dfrac{0{,}75\cdot 0{,}25}{200000\cdot\varepsilon^2}$, або $\dfrac{0{,}75\cdot 0{,}25}{200000\cdot\varepsilon^2}\geq 0{,}01$,, звідки, $\varepsilon^2\leq$ $\leq\dfrac{0{,}75\cdot 0{,}25}{200000\cdot 0{,}01}=0{,}00009375$. Отже, $\varepsilon\leq 0{,}009682$. Розкривши нерівність:

$\left|\dfrac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$ або $\left|\dfrac{m}{200000}-0{,}75\right|<0{,}009682$, отримуємо

$p-\varepsilon<\dfrac{m}{n}<p+\varepsilon$, або

$$0{,}75-0{,}009682<\frac{m}{200000}<0{,}75+0{,}009682.$$

Отже,

$$0{,}75\cdot 200000-0{,}009682\cdot 200000<m<0{,}75\cdot 200000+$$
$+0{,}009682\cdot 200000$, або $m=150000\pm 1936$.

5.12. Вибірковим шляхом потрібно визначити середній зріст чоловіків двадцятилітнього віку.

а) У скількох відібраних випадково чоловіків потрібно виміряти зріст, щоб з ймовірністю, що перевищує 0,95, можна було б стверджувати, що середній зріст у відібраної групи буде відрізнятись від середнього зросту (що приймається за математичне сподівання вибіркового середнього зросту) за абсолютною величиною не більше, ніж на 1 см? Встановлено, що дисперсія зросту в кожному випадку не перевищує 25.

б) Як зміниться результат, якщо було б необхідно ту ж точність вибіркового обстеження гарантувати менш строго, наприклад, з ймовірністю 0,9?

в) Як змінився б результат, якщо потрібна була б менша точність оцінки середнього зросту? Наприклад, з ймовірністю, що перевищує 0,95, потрібно було б гарантувати, що відхилення середнього зросту всіх двадцятилітніх чоловіків за абсолютною величиною не перевищить 2 см.

Розв'язок.

Використаємо нерівність Чебишева записану у формі:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum x_i - \frac{1}{n}\sum M(x_i)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{L}{n\varepsilon^2},$$

де L – додатнє число, що задовольняє вимозі: $D(x_i) \leq L(i = 1,2,...n)$. Згідно умови: $1 - \frac{L}{n\varepsilon^2} \geq P$, де P – задана імовірність. З нерівності визначаємо: $n \geq \frac{L}{\varepsilon^2(1-P)}$, де $L = 25$.

Підставивши числові дані отримаємо:

а) $n \geq \frac{25}{1^2(1-0{,}95)} = 500;\ \ n \geq 500$.

Тут покладено $\varepsilon = 1$, $P = 0{,}95$.

б) $n \geq \frac{25}{1^2(1-0{,}9)} = 250;\ \ n \geq 250$.

Тут покладено $P = 0{,}9$; $\varepsilon = 1$.

Зменшення імовірності P приводить до зменшення числа випробувань.

в) $n \geq \frac{25}{2^2(1-0{,}95)} = 125;\ \ n \geq 125$.

Тут покладено $P = 0{,}95$; $\varepsilon = 2$.

Зменшення точності оцінки ε приводить до зменшення числа випробувань.

5.13. Скільки разів потрібно виміряти дану величину, істинне значення якої рівне a, щоб з ймовірністю, не меншою 0,98, можна було стверджувати, що середньоарифметичне значення цих вимірів відмінне від a за абсолютною величиною меншою, ніж три, якщо середньоквадратичне відхилення кожного виміру менше шести?

Розв'язок.

Оскільки кожний з вимірів, що є випадковою величиною $x_i (i = 1,2,...)$, має дисперсію D_{x_i}, що обмежена однією і тією ж постійною L $\left(\left|D_{x_i}\right| \le L = \sigma^2 = 6^2\right)$, скористуємось нерівністю Чебишева: $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - a\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{L}{n\varepsilon^2}$.

Поклавши $\varepsilon = 3$; $P(\quad) = 0{,}98$; $L = 6^2 = 36$ в попередню нерівність, отримуємо $1 - \frac{6^2}{3^2 \cdot n} \ge 0{,}98$, розв'язавши яку отримуємо $n \ge 200$.

5.14. Дисперсія кожної з 30000 незалежних випадкових величин не перевищує шести.

Якою повинна бути верхня межа абсолютної величини відхилення середньоарифметичної випадкової величини від середньоарифметичного математичного сподівання, щоб ймовірність такого відхилення перевищила 0,92?

Розв'язок.

Скористуємось узагальненою нерівністю Чебишева:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{L}{n\varepsilon^2},$$

де $D_{x_i} \le L = 6,\ n = 30000,\ P(......) = 0{,}92$.

Верхню величину відхилення ε знаходимо з умови: $1 - \frac{L}{n\varepsilon^2} \le 0{,}92.$

Підставивши необхідні дані в нерівність і розв'язавши її, отримуємо:

$$\varepsilon \le \sqrt{\frac{6}{30000 \cdot 0.08}} = \sqrt{\frac{1}{400}} = 0{,}05\,.$$

Отже, $\varepsilon \le 0{,}05$.

5.15. Середньоквадратичне відхилення кожної з 450000 незалежних випадкових величин не перевищує десяти.

Визначити ймовірність того, що абсолютна величина відхилення цих середньоарифметичних випадкових величин від середньоарифметичних їх математичних сподівань не перевищить 0,02.

Розв'язок.

Використаємо формулу:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(x_k)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D(X)}{n\varepsilon^2},$$

підставивши в яку числові дані n = 450000; σ = 10; ε = = 0,02; $D(X)$ = 100, отримаємо:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(x_k)\right| < 0{,}02\right) \ge 1 - \frac{100}{450000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}02} =$$

$$= 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9};\; P \ge \frac{4}{9}.$$

5.16. На відрізку [0;1] випадковим чином вибрані 108 незалежних і рівномірно розподілених випадкових величин $X_1, X_2, \ldots X_{108}$.

Визначити імовірність події $S_{108} = \sum_{i=1}^{108} X_i \in (50;60).$

Розв'язок.

Оскільки число випадкових величин n=108 достатньо велике, то сума S_n є випадковою величиною розподіленою за нормальним законом. Для обчислення заданої імовірності скористуємось формулою:

$$P\{S_n \in (\alpha, \beta)\} = P\{\alpha \le S_n \le \beta\} = \varPhi\left(\frac{\beta - M(S_n)}{(S_n)}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{\alpha - M(S_n)}{(S_n)}\right),$$

де $\quad M(S_n) = M(S_{108}) = \sum_{i=1}^{108} M(X_i) = 108M(X_i) = 108 \times$

$\times \dfrac{0+1}{2} = 54,$ оскільки для рівномірного розподілу

$M(X_i) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2};$

$$\sigma(S_n) = \sqrt{D(S_n)} = \sqrt{D(S_{108})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{108} D(X_i)} = \sqrt{108 \cdot D(X_i)},$$

де $D(X_i) = \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{1}{12}$, отже $\sigma(S_{108}) = \sqrt{\dfrac{108}{12}} = \sqrt{9} = 3.$

Остаточно,

$$P(50 \le S_n \le 60) = \varPhi\left(\frac{60-54}{3}\right) - \varPhi\left(\frac{50-54}{3}\right) = \varPhi(2) +$$

$$+\varPhi(1{,}333) = 0{,}4772 + 0{,}4088 = 0{,}886.$$

5.17. Випадкова величина $\overline{X}$ є середньоарифметичною 3200 незалежних і однаково розподілених випадкових величин $X_i (i = 1,2,...,3200)$, для яких $M(X_i) = 3$ і $D(X_i) = 2$.

Знайти а) імовірність події $\overline{X} \in (2{,}95;3{,}075)$; б) довірчий інтервал для $\overline{X}$, задаючи довірчу імовірність рівну 0,6826.

Розв’язок.

а) Оскільки число незалежних випадкових величин $n = 3200$ є великим, то їх середнє значення $\overline{X}$ є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом, так що ймовірність того, що випадкова величина $\overline{X}$ знаходиться в заданому інтервалі знаходиться за формулою:

$$P\left(\alpha \le \overline{X} \le \beta\right) = \Phi\left(\frac{\beta - M(\overline{X})}{\sigma(\overline{X})}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - M(\overline{X})}{\sigma(\overline{X})}\right)$$

і, оскільки, $\sigma(\overline{X}) = \sqrt{D(\overline{X})} = \sqrt{D\left(\frac{(x_1 + x_2 + \dots x_i + \dots x_n)}{n}\right)} =$

$$= \sqrt{\frac{D(x_1) + D(x_2) + \dots D(x_i) + \dots D(x_n)}{n^2}} = \sqrt{\frac{nD(x_i)}{n^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{D(x_i)}{n}} = \sqrt{\frac{\sigma^2(x_i)}{n}} = \frac{\sigma(x_i)}{\sqrt{n}}\text{, то}$$

$$P\left\{\overline{X} \in (\alpha, \beta)\right\} = \Phi\left\{\frac{[\beta - M(\overline{X})]\sqrt{n}}{\sigma(x_i)}\right\} - \Phi\left\{\frac{[\alpha - M(\overline{X})]\sqrt{n}}{\sigma(x_i)}\right\}.$$

Підставивши необхідні дані, отримуємо:

$$P\left\{\overline{X} \in (2{,}95; 3{,}075)\right\} = \Phi\left(\frac{(3{,}075 - 3)\sqrt{3200}}{\sqrt{2}}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{(2{,}95 - 3)\sqrt{3200}}{\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{0{,}075 \cdot 40\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{0{,}05 \cdot 40\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(3) + \Phi(2) =$$

$$= 0{,}49865 + 0{,}4772 = 0{,}97585 \approx 0{,}976.$$

б) Для обчислення меж, в яких буде знаходитись середнє значення, необхідно обчислити величину відхилення. Для цього скористуємося формулою:

$$P\left\{\left| \overline{X} - \alpha \right| \le \delta)\right\} = 2\Phi\left[\frac{\delta}{\sigma(\overline{X})}\right] = 2\Phi\left[\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma(x_i)}\right].$$

Згідно умови $2\Phi\left[\dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma(x_i)}\right]=0{,}6826$, отже $\Phi\left[\dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma(x_i)}\right]=$ $=\Phi(x)=0{,}6826:2=0{,}3413.$

Згідно таблиць інтегральної функції x = 1, 0. Тому $\dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma(x_i)}=1{,}0$, звідки $\delta=\dfrac{1{,}0\sigma(x_i)}{\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3200}}=\dfrac{\sqrt{2}}{40\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{40}=$ $=0{,}025.$

Отже, $\left|\overline{X}-a\right|\le\delta$, або $a-\delta\le\overline{X}\le a+\delta$;

Підставивши необхідні дані, отримуємо $3{,}0-0{,}025\le$ $\le\overline{X}\le 3{,}0+0{,}025$, або $2{,}975\le\overline{X}\le 3{,}025.$

5.18. При складанні статистичного звіту необхідно скласти 300 чисел, кожне з яких заокруглене з точністю до 10^{-5}. Припускається, що похибки заокруглення чисел взаємно незалежні і рівномірно розподілені на відрізку $\left[-0{,}5\cdot10^{-5};0{,}5\cdot10^{5}\right]$. Знайти межі, в яких з імовірністю більшою за 0,997 буде лежати сумарна похибка.

Розв'язок.

Введемо позначення: X_i – випадкова величина похибки заокруглення одного i-того числа; n = 300; $X_i\in$ $\in[-0{,}5\cdot10^{-5};0{,}5\cdot10^{-5}]$, $P\ge0{,}997$, $\sigma(Xi)=10^{-5}$ – похибка (середнє квадратичне відхилення) заокруглення i-того числа.

Тоді S_{300} – випадкова величина суми похибок 300 чисел.

Обчислимо математичне сподівання $M(X_i)$ і дисперсію $D(X_i)$ похибки i-того числа, що розподілена за рівномірним законом:

$$M(X_i)=\frac{a+b}{2}=\frac{-0{,}5\cdot10^{-5}+0{,}5\cdot10^{-5}}{2}=0;$$

$$D(X_i)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(0{,}5\cdot10^{-5}+0{,}5\cdot10^{-5})^2}{12}=\frac{(10^{-5})}{12}=\frac{10^{-10}}{12}.$$

Математичне сподівання *M*(S_{300}) суми S_{300} похибок 300 чисел рівне:

$$M(S_{300}) = M\left(\sum_{i=1}^{300}(X_i)\right) = \sum_{i=1}^{300} M(X_i) = 300M(X_i) =$$

$$= 300 \cdot 0 = 0\,.$$

Дисперсія суми *D*(S_{300}) суми похибок 300 чисел S_{300} рівна:

$$D(S_{300}) = D\left(\sum_{i=1}^{300} X_i\right) = \sum_{i=1}^{300} D(Xi) = 300D(X_i) =$$

$$= \frac{300 \cdot 10^{-10}}{12} = 2{,}5 \cdot 10^{-10}.$$

Оскільки *n* = 300 достатньо велике, то сума їх похибок розподілена за нормальним законом і для обчислення ширини інтервалу *ε* можна використати формулу:

$$P\left(\left|S - M(S_{300})\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(S_{300})}\right) \le 0{,}997.$$

Отже, $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(S_{300})}\right) \le \frac{0{,}997}{2} = 0{,}4985.$

З таблиць інтегральної функції знаходимо *t* = 2,96 при якому *Φ*(*t*) = 0,4985.

Отже, $\frac{\varepsilon}{\sigma(S_{300})} \le 2{,}96$, звідки

$$\varepsilon \le \sigma(S_{300}) \cdot 2{,}96 = \sqrt{25 \cdot 10^{-10}} \cdot 2{,}96 = 2{,}96 \cdot 5 \cdot 10^{-5} =$$

$$= 14{,}8 \cdot 10^{-5} = 0{,}000148\,.$$

Розкривши нерівність $\left|S - M(S_{300})\right| \le \varepsilon$ і врахувавши, що *M*(S_{300}) = 0, сумарна похибка буде знаходитись в межах $S_{300} \in \left[-14.8 \cdot 10^{-5}; 14.8 \cdot 10^{-5}\right]$.

Ширину інтервалу *ε* можна також обчислити з нерівності Чебишева:

$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$, замінивши в якій X на S_{300} отримаємо:

$$P\left(\left|S_{300} - M(S_{300})\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(S_{300})}{\varepsilon^2}.$$

Підставивши необхідні дані, отримуємо:

$$0{,}097 \geq 1 - \frac{25 \cdot 10^{-10}}{\varepsilon^2}, \text{ або } \frac{25 \cdot 10^{-10}}{\varepsilon^2} \geq 0{,}003,$$

звідки $\varepsilon^2 \leq \dfrac{25 \cdot 10^{-10}}{\varepsilon^2} = 83{,}33 \cdot 10^{-8}$, отже $\varepsilon \leq 0{,}0009$.

Сумарна похибка згідно нерівності Чебишева знаходиться в інтервалі $S_{300} \in \left[-0{,}0009; 0{,}0009\right]$. Як видно з обчислень, нерівність Чебишева дає більш широкий інтервал, ніж формула для нормального закону.

5.19. Сумується 10^4 чисел, кожне з яких заокруглено з точністю до 10^{-m}.

Припускаючи, що похибки від заокруглення незалежні і рівномірно розподілені в інтервалі $(-\frac{1}{2} \times 10^{-m}; \frac{1}{2} \times 10^{-m})$, знайти межі, в яких з ймовірністю не меншою 0,99, знаходиться сумарна похибка.

Знайти також оцінку цих меж, використовуючи нерівність Чебишева. Порівняти ці результати.

Розв'язок.

Позначимо через X_i випадкову величину похибки заокруглення одного i-того числа, яких є $n = 10^4$, $\sigma(X_i)$ – точність заокруглення або середнє квадратичне відхилення величини похибки заокруглення i-того числа,

$$X_i \in \left[-\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}; \frac{1}{2} 10^{m}\right].$$

Тоді S_{10^4} – випадкова величина суми похибок 10^4 чисел, $P \geq 0{,}99$.

Обчислимо математичне сподівання *M(X$_i$)* і дисперсію *D(X$_i$)* похибки *i*-того числа, що розподілена за рівномірним законом:

$$M(X_i) = \frac{a+b}{2} = \frac{-\frac{1}{2}10^{-m} + \frac{1}{2}10^{-m}}{2} = 0;$$

$$D(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{\left(\frac{1}{2}10^{-m} + \frac{1}{2}10^{-m}\right)^2}{12} = \frac{10^{-2m}}{12}.$$

Математичне сподівання $M(S_{10^4})$ суми S_{10^4} похибок 10^4 чисел рівне:

$$M(S_{10}^4) = M\sum_{i=1}^{10^4} X_i = \sum_{i=1}^{10^4} M(X_i) = 10^4 M(X_i) = 10^4 \cdot 0 = 0.$$

Дисперсія $D(S_{10^4})$ суми похибок 10^4 чисел рівна:

$$D(S_{10^4}) = D\left(\sum_{i=1}^{10^4} X_i\right) = \sum_{i=1}^{10^4} D(X_i) = 10^4 D(X_i) =$$

$$= \frac{10^4 \cdot 10^{-2m}}{12} = \frac{10^{4-2m}}{12}.$$

Оскільки $n = 10^4$ дуже велике, то сума їх похибок розподілена за нормальним законом і для обчислення ширини інтервалу ε використаємо формулу:

$$P\left(\left|S_{10^4} - M(S_{10^4})\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(S_{10^4})}\right) \leq 0{,}99.$$ Отже,

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(S_{10^4})}\right) \leq 0{,}99 = 0{,}495.$$

З таблиць інтегральної функції знаходимо t = 2,573 при якому $\Phi(t) = 0{,}495$. Враховуючи, що інтегральна функція зростаюча, маємо $\dfrac{\varepsilon}{\sigma(S_{10^4})} \le 2{,}573$, звідки

$$\varepsilon \le \sigma(S_{10^4}) \cdot 2{,}573 = \sqrt{\frac{10^4 \cdot 10^{-2m}}{12}} \cdot 2{,}573 = \frac{10^{2-m}}{2\sqrt{3}} \cdot 2{,}573 .$$

Враховуючи, що $M(S_{10^4}) =$ 0, знаходимо, що сумарна похибка буде знаходитись в межах:

$$S_{10^4} \in \left[-\frac{2{,}573}{2\sqrt{3}} \cdot 10^{2-m}; \frac{2{,}573}{2\sqrt{3}} \cdot 10^{2-m} \right].$$

Ширину інтервалу ε можна також обчислити з нерівності Чебишева:

$P\big(|X - M(X)| < \varepsilon\big) \ge 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$, замінивши в якій X на S_{10^4} отримаємо:

$$P\big(|S_{10^4} - M(S_{10^4})| < \varepsilon\big) \ge 1 - \frac{D(S_{10^4})}{\varepsilon^2}.$$

Підставивши необхідні дані, отримаємо:

$$0{,}99 \ge 1 - \frac{10^{4-2m}}{12 \cdot \varepsilon^2}, \text{ або } \frac{10^{4-2m}}{12 \cdot \varepsilon^2} \ge 0{,}01, \text{ звідки}$$

$$\varepsilon^2 \le \frac{10^{4-2m}}{0{,}01 \cdot 12} = \frac{10^{6-2m}}{12}, \text{ отже } \varepsilon \le \sqrt{\frac{10^{6-2m}}{12}} = \frac{10^{3-m}}{2\sqrt{3}} .$$

Тому сумарна похибка з заданою ймовірністю 0,99 згідно нерівності Чебишева знаходиться в інтервалі:

$$S_{10^4} \in \left[-\frac{10^{3-m}}{2\sqrt{3}}; \frac{10^{3-m}}{2\sqrt{3}} \right].$$

Нерівність Чебишева дає більш широкий інтервал, ніж формула для нормального розподілу.

5.20. Поїзд складається з 98 вагонів. Вага кожного вагона – випадкова величина з математичним сподіванням, рівним 65 т, і середньоквадратичним відхиленням, рівним 9 т. Локомотив може везти поїзд, якщо маса останнього не перевищує 6600 т. В протилежному випадку підчіплюють другий локомотив. Яка ймовірність того, що цього робити не доведеться?

Розв'язок.

Вага поїзда, що складається з 98 вагонів і є сумою їх ваг, є випадковою величиною S_{98}.

Математичне сподівання ваги всього поїзда рівне:

$$M(S_{98}) = \sum_{i=1}^{98} M(X_i) = 98 \cdot M(X_i) = 98 \cdot 65 = 6370(\text{т}),$$

де $M(X_i) = 65$ – математичне сподівання ваги кожного вагона. Дисперсія ваги всього поїзда рівна:

$$D(S_{98}) = \sum_{i=1}^{98} D(X_i) = \sum_{i=1}^{98} \sigma^2(X_i) = 98 \cdot \sigma^2(X_i) =$$

$= 98 \cdot 9^2 = 7938(\text{т})$, де $\sigma^2(X_i) = 9$ – середньоквадратичне відхилення ваги одного вагона.

Величина відхилення ε між верхньою межею ваги поїзда, який може везти один локомотив, і математичним сподіванням ваги поїзда рівне:

$\varepsilon = 6600 - 6370 = 230$ (т).

Тоді ймовірність того, що не потрібно підчіплювати другий локомотив рівна імовірності того, що величина відхилення $\varepsilon < 230$. Ця імовірність рівна згідно:

а) нерівності Чебишева:

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) = P\left(\left|S_{98} - M(S_{98})\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(S_{98})}{\varepsilon^2}.$$

Підставивши у формулу необхідні дані отримуємо:

$$P\left(\left|S_{98} - 6370\right| < 230\right) \geq 1 - \frac{7938}{230^2} = 0{,}85.$$

б) згідно формули величини відхилення для нормального закону розподілу, оскільки $n = 98$ досить велике:

$$P\left(\left|X - M(X)\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right), \quad \text{або } P\left(\left|S_{98} - M(S_{98})\right| \le \varepsilon\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(S_{98})}\right).$$

Підставивши у формулу необхідні дані отримуємо:

$$P\left(\left|S_{98} - 6370\right| \le 230\right) = 2\Phi\left(\frac{230}{\sqrt{7938}}\right) = 2\Phi(2{,}5815) =$$

$$= 2 \cdot 0{,}4951 = 0{,}9902\,.$$

5.21. Стрільба ведеться почергово з трьох гармат. Ймовірність попадання в ціль при одному пострілі з кожної гармати відповідно дорівнює 0,2; 0,4 і 0,6. Таким чином проведено 600 пострілів.

Визначити знизу ймовірність того, що при цьому частота відрізняється від середньої ймовірності попадання за абсолютною величиною не більше ніж на 0,05.

Розв'язок.

Скористуємось теоремою Пуассона.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \overline{p}\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{\overline{p}\overline{q}}{n\varepsilon^2},$$

де $\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} p_i n_i$ – середня імовірність настання події в кожному випробуванні, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – загальна кількість випробувань,

$$\overline{p}\ \overline{q} = \frac{p_1 q_1 n_1 + p_2 q_2 n_2 + \ldots p_i q_i n_i}{n}.$$

Підставивши необхідні дані задачі $n_1 = n_2 = n_3 = 200$; $n = 600$; $\varepsilon = 0{,}05$; $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}4$; $p_3 = 0{,}6$; $q_1 = 0{,}8$; $q_2 = 0{,}6$; $q_3 = 0{,}4$, обчислимо середню імовірність попадання в ціль при кожному з 600 вистрілів:

$$\overline{p} = \frac{0{,}2 \cdot 200 + 0{,}4 \cdot 200 + 0{,}6 \cdot 200}{600} = 0{,}4;$$

і $\overline{p}\,\overline{q} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 200 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 200 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 200}{600} =$

$$= \frac{64}{300} = \frac{0{,}64}{3}.$$

Тоді шукана імовірність рівна:

$$P\left(\left| \frac{m}{600} - 0{,}4 \right| < 0{,}05 \right) > 1 - \frac{0{,}64}{3 \cdot 600 \cdot (0{,}05)^2} =$$

$$= 1 - \frac{32}{225} = \frac{193}{225}.$$

Отже, $P\left(\left| \dfrac{m}{600} - 0{,}4 \right| < 0{,}05 \right) \geq \dfrac{193}{225}$.

5.22. Проведено 500 незалежних випробувань; в 200 з них ймовірність настання події A була рівна 0,4 в 180 – 0,5 і в 120 – 0,6.

Знайти нижню межу ймовірності того, що відхилення частоти від середньої ймовірності не перевищує за абсолютною величиною 0,05.

Розв'язок.

Використаємо теорему Пуассона з закону великих чисел:

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - \overline{p} \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{\overline{p} \cdot \overline{q}}{n\varepsilon^2},$$

де $\overline{p} = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{p_i n_i}{n}$ – середня імовірність настання події A в кожному випробуванні, $n = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$ – загальна кількість випробувань,

$$\overline{p}\,\overline{q} = \frac{p_1q_1n_1 + p_2q_2n_2 + ...p_iq_in_i}{n}.$$

Підставивши необхідні дані задачі: ε = 0,05; n = 500; n_1 = = 200; n_2 = 180; n_3 = 120; p_1 = 0,7; q_1 = 0,6; p_2 = 0,5; q_2 = 0,5; p_3 = 0,6; q_3 = 0,4, отримуємо середню імовірність настання події A в кожному з 500 випробувань:

$$\overline{p} = \frac{0{,}4\cdot 200 + 0{,}5\cdot 200 + 0{,}6\cdot 200}{500} = \frac{242}{500} = 0{,}484$$

і $$\overline{p}\,\overline{q} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 200 + 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 200 + 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 200}{500} =$$

$$= \frac{121{,}8}{500}.$$

Остаточно:

$$P\left(\left|\frac{m}{500} - 0{,}484\right| < 0{,}05\right) \geq 1 - \frac{121{,}8}{500\cdot 500\cdot (0{,}05)^2} = 0{,}80512.$$

5.23. З 5000 проведених випробувань в 2000 ймовірність появи події A дорівнює 0,2; в 1400 – 0,5 і в 1600 – 0,6. Знайти границі, в яких повинна знаходитись частота появи події A, якщо це потрібно гарантувати з ймовірністю 0,95.

Розв'язок.

Середнє значення ймовірності появи події A в кожному з 5000 випробувань рівне: $\overline{p} = \dfrac{p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3}{n}$, де n = = 5000; n_1 = 2000; n_2 = 1400; n_3 = 1600; p_1 = 0,2; p_2 = 0,5; p_3 = = 0,6.

Підставивши ці дані, отримаємо:

$$\overline{p} = \frac{0{,}2\cdot 2000 + 0{,}5\cdot 1400 + 0{,}6\cdot 1600}{5000} = 0{,}412.$$

Для знаходження меж, в яких буде знаходитись частота, необхідно знати величину відхилення ε, яку можна обчислити двома способами:

а) за теоремою Пуассона:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-\overline{p}\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{\overline{p}\cdot\overline{q}}{n\varepsilon^2}=0{,}95.$$

Для цього обчислимо

$$\overline{p}\;\overline{q}=\frac{p_1q_1n_1+p_2q_2n_2+\ldots p_iq_in_i}{n}=$$

$$=\frac{0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 2000+0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1400+0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 1600}{5000}=\frac{1054}{5000}.$$

З формули Пуассона $\dfrac{\overline{p}\overline{q}}{n\varepsilon^2}=0{,}05$, звідки $\varepsilon^2=\dfrac{\overline{p}\cdot\overline{q}}{n\cdot 0{,}05}=$ $=\dfrac{1054}{(5000)^2\cdot 0{,}05}$. Отже $\varepsilon=0{,}02904.$

Розкривши нерівність $\left|\dfrac{m}{5000}-0{,}412\right|<0{,}02904$, отримуємо межі, в яких з заданою імовірністю 0,95 буде знаходитись частота появи події A: $0{,}383<\dfrac{m}{n}<0{,}441$ або $0{,}383<\dfrac{m}{5000}<0{,}441$. Отже, $0{,}383\cdot 5000<m<0{,}441\cdot 5000$, або $1915<m<2205$.

б) з формули Бернуллі-Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-\overline{p}\right|\leq\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\overline{p}\,\overline{q}}}\right)=0{,}95.$$

Отже, $\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{\overline{p}\,\overline{q}}}\right)=\dfrac{0{,}95}{2}=0{,}475,$ або $\Phi(x)=0{,}475.$

З таблиць інтегральної функції знаходимо, що x = 1,96 або $\varepsilon\sqrt{\dfrac{5000\cdot 5000}{1054}}=1{,}96.$

Звідси $\varepsilon = \frac{1{,}96 \cdot \sqrt{1054}}{5000} = 0{,}012726$. Отже, $\left|\frac{m}{n} - 0{,}412\right| \leq$ $\leq 0{,}012726$, або $0{,}3993 \leq \frac{m}{n} \leq 0{,}4247$, або $1996{,}5 \leq m \leq$ $\leq 2123{,}5$; заокругливши, отримаємо $1997 \leq m \leq 2124$.

5.24. Чи можна застосовувати теорему Чебишева до послідовності незалежних випадкових величин X_1, X_2, ..., що мають рівномірний розподіл на:

а) $[\alpha;\beta]$; б) $[0;n]$; в) $[0;\sqrt{n}]$; г) $[1;\frac{1}{\sqrt{n}}]$ (де n=1,2,…)?

Розв’язок.

Для того, щоб до послідовності випадкових величин можна було застосувати теорему Чебишева, достатньо, щоб ці величини: 1) були попарно незалежні; 2) мали кінцеві математичні сподівання; 3) мали рівномірно обмежені дисперсії.

Оскільки випадкові величини незалежні, то звідси випливає їх попарна незалежність, тобто перша умова теореми Чебишева виконана.

а) Перевіримо, чи виконується умова кінцевості математичних сподівань і дисперсій. $M(X_n) = \frac{\alpha+\beta}{2}$;

$D(X_n) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$ для рівномірного закону.

Отже, кожна випадкова величина X має кінцеве математичне сподівання і дисперсію, так що друга і третя умови теореми виконуються, тобто всі умови виконуються. Таким чином, до даної послідовності випадкових величин теорема Чебишева може бути застосована.

б) Математичне сподівання випадкової величини X_n рівномірно розподіленої на відрізку $[0;n]$ рівне:

$$M(X_n) = \frac{0+n}{2} = \frac{n}{2};\ \text{ при } n \to \infty, M(X_n) \to \infty\ .$$

Дисперсія випадкової величини $D(X_n)=\frac{(n-0)^2}{12}=\frac{n^2}{12}$;

при $n\to\infty, D(X_n)\to\infty$, тобто теорема Чебишева про рівномірну обмеженість дисперсій не виконується. Отже, теорема Чебишева до даної послідовності не може бути застосована.

в) Математичне сподівання випадкової величини $M(X_n)=\frac{0+\sqrt{n}}{2}=\frac{\sqrt{n}}{2}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} M(X_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2}\to\infty.$

Дисперсія випадкової величини

$$D(X_n)=\frac{\left(\sqrt{n}-0\right)^2}{12}=\frac{n}{12} \text{ і } \lim_{n\to\infty} D(X_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{12}\to\infty.$$

Таким чином, друга і третя умови теореми Чебишева порушуються і вона не може бути застосована до даної послідовності.

г) Математичне сподівання

$$M(X_n)=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{2}=\frac{\sqrt{n}}{2};\ \lim_{n\to\infty} M(X_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}.$$

Дисперсія $D(X_n)=\dfrac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)^2}{12}$;

$$\lim_{n\to\infty} D(X_n)=\frac{1}{12}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)^2=\frac{1}{12}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)^2=\frac{1}{12}.$$

Дисперсії випадкових величин рівномірно обмежені величиною $\frac{1}{12}$, і оскільки математичні сподівання $M(X_n)$ кінцеві і рівні $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{n}}$, тому до даної послідовності можна застосовувати теорему Чебишева.

5.25. Послідовності незалежних випадкових величин X_n ($n = 1, 2,\ldots$) задані своїми таблицями розподілів імовірностей:

а)

X_n	$-\alpha$	0	α
$P(X_n)$	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{1}{2n+1}$	$\frac{n}{2n+1}$

б)

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
$P(X_n)$	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

в)

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
$P(X_n)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

г)

X_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
$P(X_n)$	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{n}$

д)

X_n	-5^n	5^n
$P(X_n)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

е)

X_n	a	$-a$
$P(X_n)$	$n/(2n+1)$	$(n+1)/(2n+1)$

є)

X_n	$n+1$	$-n$
$P(X_n)$	$n/(2n+1)$	$(n+1)/(2n+1)$

ж)

X_n	$-5n$	0	$5n$
$P(X_n)$	$\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

До яких з цих послідовностей можна застосувати теорему Чебишева?

Розв’язок.

Оскільки випадкові величини незалежні, то тим більше вони попарно незалежні, отже, перша умова для застосування нерівності Чебишева виконується.

а) $$M(X_n)=\sum X_n\cdot P(X_n)=-\alpha\cdot\frac{n}{2n+1}+0\cdot\frac{1}{2n+1}+$$

$$+\alpha\cdot\frac{n}{2n+1}=0.$$

$$D(X_n)=\sum X_n^2\cdot P(X_n)-M^2(X_n)=(-\alpha)^2\cdot\frac{n}{2n+1}+$$

$$+0^2\cdot\frac{1}{2n+1}+\alpha^2\cdot\frac{n}{2n+1}-0^2=\frac{2\alpha^2 n}{2n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty}D(X_n)=2\alpha^2\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{n}{2n+1}=2\alpha^2\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=2\alpha^2\cdot\frac{1}{2}=\alpha^2.$$

Математичні сподівання сталі і рівні 0, дисперсії рівномірно обмежені числом α^2. Тому до даної послідовності можна застосувати теорему Чебишева.

б) $$M(X_n)=-n\alpha\cdot\frac{1}{2n^2}+0\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+n\alpha\cdot\frac{1}{2n^2}=0;$$

$$D(X_n)=-(n\alpha)^2\cdot\frac{1}{2n^2}+0^2\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+(n\alpha)^2\cdot\frac{1}{2n^2}-0^2=$$

$$=\frac{2n^2\alpha^2}{2n^2}=\alpha^2.$$

Всі три умови для застосування нерівності Чебишева виконуються.

в) $M(X_n) = -n\alpha \cdot \dfrac{1}{4} + 0 \cdot \dfrac{1}{2} + n\alpha \cdot \dfrac{1}{4} = 0;$

$$D(X_n) = -(n\alpha)^2 \cdot \frac{1}{4} + 0^2 \cdot \frac{1}{2} + (n\alpha)^2 \cdot \frac{1}{4} - 0^2 =$$

$$= 2n^2\alpha^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{n^2\alpha^2}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} D(X_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\alpha^2}{2} \to \infty.$$

Оскільки дисперсії $D(X_n)$ не обмежені рівномірно, то теорему Чебишева застосовувати не можна.

г) $M(X_n) = -\sqrt{n} \cdot \dfrac{1}{n} + 0 \cdot \left(1 - \dfrac{2}{n}\right) + \sqrt{n} \cdot \dfrac{1}{n} = 0;$

$$D(X_n) = -(\sqrt{n})^2 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + (\sqrt{n})^2 \cdot \frac{1}{n} - 0 = \frac{2n}{n} = 2.$$

Всі три умови для застосування теореми Чебишева виконуються.

д) $M(X_n) = -5^n \cdot \dfrac{1}{2} + 5^n \cdot \dfrac{1}{2} = 0;$

$$D(X_n) = \left(-5^n\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(5^n\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 5^{2n}}{2} = 5^{2n},$$

$$\lim_{n\to\infty} D(X_n) = \lim_{n\to\infty} 5^{2n} \to \infty.$$

Дисперсії не обмежені рівномірно, тому теорему Чебишева не можна застосовувати.

е) $M(X_n) = \alpha \cdot \dfrac{n}{2n+1} - \alpha \cdot \dfrac{(n+1)}{2n+1} = -\dfrac{\alpha}{2n+1};$

$$D(X_n) = \alpha^2 \cdot \frac{n}{2n+1} + \frac{(-\alpha)^2 \cdot (n+1)}{2n+1} - \left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)^2 =$$

$$= \frac{2\alpha^2 n + \alpha^2}{2n+1} - \left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)^2;$$

$$\lim_{n\to\infty} D(X_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\alpha^2 n + \alpha^2}{2n+1} - \lim_{n\to\infty}\cdot\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\cdot \frac{2\alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{n}}{2 + \dfrac{1}{n}} - 0^2 = \alpha^2.$$

Дисперсії рівномірно обмежені числом α^2. Тому до даної послідовності можна застосовувати теорему Чебишева.

є) $M(X_n) = (n+1)\cdot\dfrac{n}{2n+1} - n\cdot\dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{0}{2n+1} = 0;$

$$D(X_n) = \frac{(n+1)^2\cdot n}{2n+1} + \frac{(-n)^2\cdot(n+1)}{2n+1} - 0^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{2n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} D(X_n) = \lim_{n\to\infty}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+3\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{2\cdot\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}} - 0 \to \infty.$$

Дисперсії *$D(X_n)$* не обмежені рівномірно, тому теорему Чебишева застосовувати не можна.

ж) $M(X_n) = -\dfrac{5n}{2^n} + 0\cdot\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right) + \dfrac{5n}{2^n} = 0;$

$$D(X_n) = \left(-5^n\right)^2\cdot\frac{1}{2^n} + 0^2\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) + \left(5^n\right)^2\cdot\frac{1}{2^n} =$$

$$= \frac{2\cdot 5^2\cdot n^2}{2^n} = \frac{n^2}{2^{n-1}}\cdot 5^2,$$

$$\lim_{n\to\infty} D(X_n) = 5^2\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^{n-1}} = 5^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(n-1)\ln 2} =$$

$$= \frac{2\cdot 5^2}{\ln 2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{2\cdot 5^2}{\ln 2}.$$

Дисперсії обмежені рівномірно, отже, теорему Чебишева застосовувати можна.

5.26. Обчислити імовірність відхилення випадкової величини X від свого математичного сподівання $M(X)$ менш ніж на три середньоквадратичні відхилення $\sigma(X)$ за нерівністю Чебишева і порівняти з імовірностями $P(|X-M(X)|\leq$ $\leq 3\sigma(X)$ обчисленими за умов, що X має: а) нормальний розподіл; б) показниковий розподіл; в) рівномірний розподіл на відрізку $[a;b]$; г) $P(x=-1)=P(x=1)=\frac{1}{18}$; $P(x=0)=$ $=\frac{8}{9}$; д) розподіл Пуассона з $M(X)$ = 0,09 і $M(X)$ = 0,16.

Розв'язок.

Згідно нерівності Чебишева імовірність того, що випадкова величина, розподілена за будь-яким законом по модулю відхиляється від свого математичного сподівання на величину меншу за своє потроєне середньоквадратичне відхилення рівна:

$$P(|X-M(X)|<3\sigma)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=1-\frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=$$

$$=1-\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}=0{,}88889.$$

Для обчислення даної імовірності з врахуванням законів розподілів використаємо формули для обчислення імовірності попадання випадкової величини в заданий інтервал $[\alpha;\beta]$. Якщо випадкова величина розподілена за:

а) нормальним законом, то

$$P(\alpha\leq X\leq\beta)==\Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),\text{ де } a=M(X).$$

Отже, $P(|X-M(X)|\leq 3\sigma)=P(|X-a|\leq 3\sigma)=$

$$= P(a-3\sigma \le X \le a+3\sigma) = \Phi\left(\frac{a+3\sigma-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-3\sigma-a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) = 2\cdot 0{,}49865 = 0{,}9973;$$

$$P(|X - M(X)| \le 3\sigma) = 0{,}9973.$$

б) показниковим законом, то $P(\alpha \le X \le \beta) = e^{-\alpha\lambda} - e^{-\beta\lambda}$.

У цьому законі $M(X) = \sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, тому $M(X) +$ $+ 3\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda} + 3\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{4}{\lambda}$.

За нижню межу $M(X) - \sigma(X)$ беремо 0, оскільки функція щільності цього закону існує лише для $X \ge 0$. Отже,

$$P(|X - M(X)| \le 3\sigma) = P[M(X) - 3\sigma(X) \le X \le M(X) + 3\sigma(X)] =$$

$$= P\left(0 \le X \le \frac{4}{\lambda}\right) = e^{-\alpha\cdot 0} - e^{-\beta\cdot\frac{4}{\lambda}} = 1 - e^{-4} = 0{,}98168;$$

$$P(|X - M(X)| \le 3\sigma) = 0{,}98168.$$

в) рівномірним розподілом на відрізку [$a;b$], то $P(\alpha \le X \le \beta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$. У цьому законі $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$; $\sigma(X) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$. Таким чином,

$$P\left(\frac{a+b}{2} - 3\cdot\frac{b-a}{2\sqrt{3}} \le X \le \frac{a+b}{2} + 3\cdot\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{\frac{a+b}{2} + 3\cdot\frac{b-a}{2\sqrt{3}} - \frac{a+b}{2} + 3\cdot\frac{b-a}{2\sqrt{3}}}{b-a} = \frac{3}{\sqrt{3}} = 1.$$

Оскільки імовірність обмежена 1, то величина відношення $\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ вказує на те, що величина інтервалу $[\alpha;\beta]$ більша за відрізок [*a;b*] існування випадкової величини *X*, тому $P(|X-M(X)|\le 3\sigma)=1$.

г) Обчислимо математичне сподівання *M(X)* і дисперсію *D(X)* випадкової величини *X*:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i=-1\cdot\frac{1}{18}+0\cdot\frac{8}{9}+1\cdot\frac{1}{18}=0;$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-M^2(X)=(-1)^2\cdot\frac{1}{18}+0^2\cdot\frac{8}{9}+$$

$$+1^2\cdot\frac{1}{18}-0^2=\frac{1}{9};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{3}.$$

Нижня межа інтервалу рівна $M(X)-3\cdot\sigma(X)=0-3\times\times\dfrac{1}{3}=-1,$ верхня межа рівна $M(X)+3\cdot\sigma(X)=0+3\cdot\dfrac{1}{3}=1$.

.

Оскільки в заданий інтервал (межі не включаються) попадає лише єдине значення x = 0, ймовірність появи якого рівна $p=\dfrac{8}{9}$, то $P(|X-M(X)|<3\sigma)=P(|X|\le 1)=\dfrac{8}{9}$.

д) У розподілі Пуассона *M*(*X*) = *D*(*X*) = λ, $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$. Якщо *M*(*X*) = 0,09, то $\sigma(X)$ = 0,3, і тоді верхня межа інтервалу рівна $M(X)+3\sigma(X)=0{,}09+3\cdot 0{,}3=0{,}99.$ За нижню межу інтервалу приймемо 0, оскільки у цьому законі X_i – число появи події ≥ 0. Таким чином, єдиним значенням, що попадає в заданий інтервал є x_1 = 0, імовірність якого знайдемо за формулою:

$$P(x_i = 0) = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \frac{0{,}09^0 \cdot e^{-0{,}09}}{0!} = e^{-0{,}09} = 0{,}91393,$$

$$P(|x - 0{,}09| < 0{,}9) = 0{,}91393.$$

Якщо $M(X)$ = 0,16, то $\sigma(X)$ = 0,4 і верхня межа інтервалу рівна 0,16 + 1,2 = 1,36, за нижню межу приймемо 0. В заданий інтервал попадають два значення: x_1= 0*,* x_2 = 1, імовірності яких рівні $P(x = 0) = 0{,}91393$ і $P(x = 1) = \frac{0{,}09^1 \cdot e^{-0{,}09}}{1!} =$ $= 0{,}0822538.$ Оскільки події (x_1 = 0) *і* (x_2 = 1) є несумісними, то імовірність знаходження даної випадкової величини в даному інтервалі дорівнює сумі імовірностей:

$$P(|x - 0{,}16| < 3\sigma) = 0{,}91393 + 0{,}08225 = 0{,}99618.$$

Частина III
Елементи математичної статистики

§ 6. Задачі математичної статистики

Математична статистика розробляє методи отримання, математичного опису і обробки експериментальних даних, які дають змогу за результатами випробувань робити імовірнісні висновки про закономірності випадкових масових явищ. Задачі математичної статистики в певній мірі є зворотніми до задач теорії ймовірностей. Основні задачі математичної статистики такі:

а) оцінка невідомої функції розподілу;

б) оцінка невідомих параметрів розподілу;

в) статистична перевірка гіпотез;

г) довірчі інтервали.

Генеральною сукупністю називають всю сукупність однорідних об'єктів, яку вивчають відносно деякої кількісної або якісної ознаки, що характеризує ці об'єкти.

Вибірковою сукупністю або ***вибіркою*** називають сукупність випадково відібраних об'єктів з генеральної сукупності.

Повторною називають вибірку, при якій відібраний об'єкт (перед вибором наступного) повертається в генеральну сукупність. ***Безповторною*** називають вибірку, при якій відібраний об'єкт в генеральну сукупність не повертається. ***Репрезентативною*** називають вибірку, яка вірно представляє пропорції генеральної сукупності. Значення ознаки x_k у окремих членів сукупності називають ***варіантами***, а числа, які показують, скільки разів повторюється кожна варіантна – ***частотами*** n_k. ***Варіаційний ряд*** – сукупність елементів вибірки, записаних в порядку неспадання, які позначають x_1, x_2, …, x_n і відповідних їм частот. Частоти n_i або відносні $\dfrac{n_i}{n}$ частоти варіант називають їх ***вагами***.

6.1. Графічне зображення вибірки

Функцію розподілу $F(x)$ генеральної сукупності називають ***теоретичною функцією розподілу***. Вона визначає імовірність події $X < x$.

Емпіричною функцією розподілу (функцією розподілу вибірки) називають функцію $F^*(x)$, яка визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$:

$F^*(x) = n_x / n$ (6.1.1),

де n_x – число тих x_i, для яких $x_i < x$; n – об'єм вибірки. При великих n $F^*(x) \approx F(x)$ або $\lim\limits_{n\to\infty} p\left[\left|F(x) - F^*(x)\right| < \varepsilon\right] = 1$ (6.1.2) $(\varepsilon > 0)$. Властивості емпіричної функції розподілу:

1) значення емпіричної функції належать проміжку [0; 1]; 2) $F^*(x)$ – неспадна функція; 3) якщо x_1 і x_k – відповідно найменша і найбільша варіанти, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$ і $F^*(x) = 1$ при $x \le x_k$. Графік емпіричної функції – східчаста лінія, яка має розриви (скачки) в точках x_1, x_2 і т. д. (рис. 6.1.1).

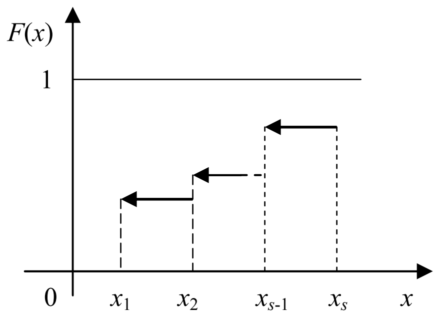


Рис. 6.1.1.

При цьому виконуються такі рівності:

$\sum\limits_{k=1}^{s} n_k = n$ (6.1.3); $\sum\limits_{k=1}^{s} W_k = 1$.(6.1.4)

Дискретний варіаційний ряд або ряд розподілу частот може бути записаний у вигляді таблиць (табл. 6.1.1).

Таблиця 6.1.1.

x_i	x_1	x_2	…	x_k	…	x_s
n_i	n_1	n_2	…	n_k	…	n_s
x_i	x_1	x_2	…	x_k	…	x_s
$W_i = \frac{n_i}{n}$	W_1	W_2	…	W_k	…	W_s

Коли варіанти є неперервною випадковою величиною або при великій кількості різних варіант, коли дискретний розподіл є малозручним, застосовують ***інтервальне групування***, суть якого полягає в наступному. Весь розмах зміни ознаки від найменшої (x_{min}) до найбільшої (x_{max}) розбивають на певне число інтервалів (x_1, x_2), (x_2, x_3), ... (x_{s-1}, x_s) або розрядів і підраховують частоти варіант, що відповідно рівні n_1, n_2, … n_s.

Інтервальний варіаційний ряд, або інтервальний статистичний ряд розподілу записують у вигляді таблиці (табл.. 6.1.2).

Таблиця 6.1.2.

Інтервал	$[x_1–x_2]$	$[x_2–x_3]$	…	$[x_{k-1}–x_k]$	…	$[x_{s-1}–x_s]$	$\sum$
n_i	n_1	n_2	…	n_k	…	n_s	n
$W_i = \frac{n_i}{n}$	W_1	W_2	…	W_k	…	W_s	1

Інтервальний ряд може бути умовно перебудований в дискретний шляхом заміни кожного інтервалу його серединою. На практиці найчастіше розглядають інтервали однакової довжини (звичайно k = 6-20). Кількість інтервалів наближено можна визначити з співвідношення $k \le 5\lg n$ (6.1.5), де n – об’єм вибірки або за формулою Стерджеса:

$n = 1 + 3{,}322\lg n$ (6.1.6).

Для графічного зображення статистичних розподілів вибірки будують полігон і гістограму.

Якщо на площині нанести точки (x_1, n_1), (x_2, n_2), … (x_s, n_s) і з'єднати сусідні точки відрізками прямих ліній, то отримана ламана лінія називається ***полігоном частот*** або ***частотним багатокутником*** (рис. 6.1.2). Якщо на площині нанести точки $\left(x_1, \frac{n_1}{n}\right)$, $\left(x_2, \frac{n_2}{n}\right)$, ... $\left(x_s, \frac{n_s}{n}\right)$ і з'єднати сусідні точки відрізками прямих ліній, отримаємо ***полігон відносних частот***. Для побудови полігонів частот (відносних частот) на осі абсцис відкладають варіанти, а на осі ординат – відповідні їм частоти чи відносні частоти.

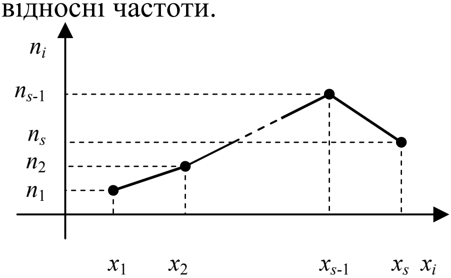


Рис. 6.1.2.

Інтервальний статистичний ряд розподілу зображений графічно, називається ***гістограмою частот***, яка будується наступним чином. Для кожного частотного інтервалу довжиною h знаходять суму частот варіант n_i, що попадають в i-тий інтервал. По осі абсцис відкладають інтервали [x_i, x_{i+1}] і на кожному з них будується прямокутник площею n_i, тобто висотою $l = \frac{n_i}{h}$ (рис. 6.1.3). Площа гістограми частот рівна сумі всіх частот, тобто об'єму вибірки n.

Для побудови гістограми відносних частот на осі абсцис відкладають часткові інтервали [x_i, x_{i+1}] і на кожному з них будується прямокутник висотою $l_i = \frac{n_i}{n \cdot h} = \frac{W_i}{h}$. Площа гістограми відносних частот рівна сумі всіх відносних частот, тобто одиниці.

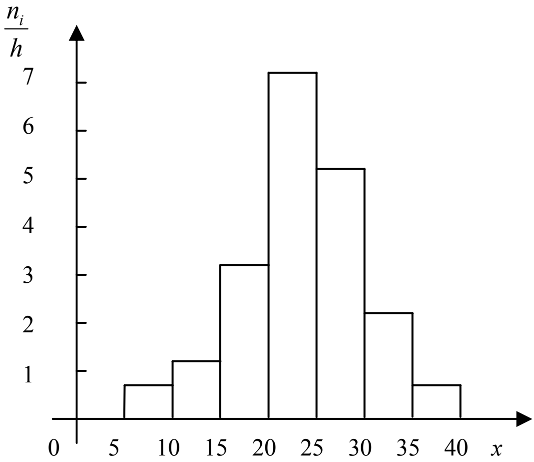


Рис. 6.1.3.

6.2. Основні характеристики вибірки

Значення ознаки (варіанти), яка розділяє ранжований варіаційний ряд на дві рівні за кількістю варіант частини називається ***медіаною*** *Me**.

Якщо число варіант парне, тобто $n = 2k$, то $Me^* = \frac{(x_k + x_{k+1})}{2}$ (6.2.1а), при непарному $n = 2k + 1$ $Me^* = x_{k+1}$ (6.2.1б).

З означення емпіричної інтегральної функції випливає рівність $F^*(Me^*) = 0{,}5$.

Для інтервального ряду виходячи з умови $F^*(x_{k-1}) \le 0{,}5$ і $F^*(x_k) \ge 0{,}5$ знаходять медіанний інтервал (x_{k-1}, x_k). Тоді, використовуючи лінійну інтерполяцію, значення медіани на цьому інтервалі обчислюють згідно формули:

$$Me^* = x_{k-1} + \frac{0{,}5 - F^*(x_{k-1})}{F^*(x_k) - F^*(x_{k-1})} \cdot (x_k - x_{k-1}) \quad (6.2.2).$$

Для знаходження медіани можна використати іншу формулу:

$$Me = x_{k-1} + \frac{\frac{\sum m}{2} - S_{Me-1}}{m_{Me}} \cdot (x_k - x_{k-1}) \qquad (6.2.3),$$

де $\sum m = n$ – сума всіх частот;

S_{Me-1} – сума частот до медіанного інтервалу;

m_{Me} – частота медіанного інтервалу.

Для того, щоб знайти медіанний інтервал, послідовно знаходять нагромаджені частоти S. Першій нагромадженій частоті S_{Me}, яка більша за $\frac{1}{2}\sum m$, відповідає медіанний інтервал (у випадку дискретного ряду S_{Me} відповідає самій медіані).

Модою *Mo** дискретного статистичного розподілу називається варіанта, що має найбільшу частоту. Для інтервального розподілу визначається модальний інтервал (x_{k-1}, x_k), якому відповідає найбільша щільність відносної частоти $\frac{n_i}{h_i}$, де n_i – число варіант з i-того інтервалу. Тоді згідно лінійної інтерполяції значення *Mo** всередині модального інтервалу рівне:

$$Mo^* = x_{k-1} + \frac{m_{Mo} - m_{Mo-1}}{(m_{Mo} - m_{Mo-1}) + (m_{Mo} - m_{Mo+1})} \cdot (x_k - x_{k-1}) =$$

$$= x_{k-1} + \frac{f(x_{k-1})}{f(x_{k-1}) + f(x_{k+1})} \cdot (x_k - x_{k-1}) \quad (6.2.4),$$

де x_{k-1} – початок модального інтервалу, тобто інтервалу, в якому міститься мода;

m_{Mo-1} – частота інтервалу попереднього перед Mo (що передує модальному);

m_{Mo} – частота модального інтервалу;

m_{Mo+1} – частота інтервалу наступного за модальним.

Приклад. Заданий інтервальний статистичний розподіл вибірки. Обчислити медіану та моду.

Інтервали $[x_i; x_{i+1}]$	Частоти m	Нагромаджені частоти S
6,5-6,9	3	3
6,9-7,3	10	3 + 10 = 13
7,3-7,7	20	13 + 20 = 33
7,7-8,1	32	33 + 22 = 55
8,1-8,5	16	
8,5-8,9	12	
8,9-9,3	7	

Розв’язок.

Використаємо формулу (6.2.3). Доповнимо таблицю даних стовпчиком нагромаджених частот S. В даній задачі медіанним є інтервал [7,7-8,1], оскільки в ньому $S = 55 > \dfrac{\sum m}{2} = 50.$ Отже, $x_{k-1} = 7{,}7$; $x_k = 8{,}1$; $\dfrac{\sum m}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$;

$m_{Me} = 32$; $S_{Me-1} = 20$; $Me = 7{,}7 + \dfrac{50-20}{32} \cdot 0{,}4 = 7{,}7 + 0{,}4 = 8{,}1$.

Використаємо формулу (6.2.2). Інтервал в якому виконуються умови $F^*(x_{k-1}) \le 0{,}5$ і $F^*(x_k) \ge 0{,}5$ є [7,7-8,1].

$F^*(x_{k-1}) = F^*(7{,}7) = \dfrac{33}{100} = 0{,}33$; $F^*(x_k) = F^*(8{,}1) = \dfrac{55}{100} = 0{,}55$.

Отже, $Me = 7{,}7 + \dfrac{0{,}5 - 0{,}33}{0{,}55 - 0{,}33} \cdot 0{,}4 = 7{,}7 + 0{,}4 = 8{,}0$.

Обидва способи дають близьке значення медіани.

Обчислимо моду. В даній задачі модальним є інтервал [7,7-8,1]. Отже, $x_{k-1} = 7{,}7$; $x_k = 8{,}1$; $m_{Mo-1} = 20$; $m_{Mo} = 32$; $m_{Mo+1} = 16$;

$$Mo = 7{,}7 + \frac{32-20}{(32-20)+(32-16)}(8{,}1-7{,}7) = 7{,}7 +$$

$$+\frac{12}{12+16}\cdot 0{,}4 = 7{,}7 + 0{,}171 = 7{,}87 .$$

Розмахом варіації R називають різницю між найбільшою і найменшою варіантами:

$R = x_{\max} - x_{\min}$ (6.2.5).

Аналогічно до поняття медіани для довільного $p \in [0,1]$ вводять квантиль розподілу порядку p. ***Квантиллю*** рівня p або ***p-квантиллю*** випадкової величини з неперервною функцією розподілу $F(x)$ називається таке число d_p, що імовірність $P\{X < d_p\}$ дорівнює заданій величині p, тобто d_p – розв'язок рівняння $F(d_p) = p$, медіана – квантиль порядку ½.

Якщо для розподілу відомі квантилі для кількох значень p, то вони дають певне уявлення про характер розподілу. Квантилі для p = 0,1; 0,2; ...; 0,9 називають ***децилями***. Квантилі, що розділяють сукупність на чотири рівні частини: перший Q_1, другий Q_2, третій Q_3 і знаходяться з рівнянь $F(Q_1) = 0{,}25$; $F(Q_2) = 0{,}5$; $F(Q_3) = 0{,}75$ називають ***квартилями***.

Середнім вибірковим (***арифметичним***) варіаційного ряду називається дріб, в чисельнику якого міститься сума добутків варіант x_i ряду на відповідні їм ваги n_i, а в знаменнику – сума ваг, тобто об'єм вибірки n:

$$\overline{X}_в = \overline{X} = \overline{x}_в = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_i n_i + \ldots + x_m n_m}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n} \quad (6.2.6).$$

За середню арифметичну неперервного варіаційного ряду приймають середню арифметичну дискретного розподілу, що відповідає даному неперервному. Це означає, що частоти неперервного розподілу відносять до середин відповідних інтервалів, які тепер стають варіантами.

Властивості середньої арифметичної.

1. Якщо всі варіанти збільшити (зменшити) в одне і те ж число k разів, то середня арифметична збільшиться (зменшиться) в стільки ж разів: $\overline{k \cdot x} = k \cdot \overline{x}$ (6.2.7).

2. Якщо всі варіанти збільшити (зменшити) на одне і те ж число c, то середня арифметична збільшиться (зменшиться) на те ж число c:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - c)n_i}{n} = \overline{X} - c \quad (6.2.8).$$

3. Сума добутків відхилень варіант від середньої арифметичної на відповідні їм ваги рівна нулю:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{X})n_i}{n} = \overline{X} - \overline{X} = 0 \quad (6.2.9).$$

4. При збільшенні і зменшенні ваг в одне і те ж число k разів середня арифметична не змінюється:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i k n_i}{\sum_{i=1}^{m} k n_i} = \overline{X} \quad (6.2.10).$$

5. Якщо кожне значення ознаки z є сумою (різницею) значень ознак x і y, то середня арифметична ознаки z рівна сумі (різниці) середніх арифметичних x і y:

$\overline{z} = \overline{x} \pm \overline{y}$.

Наведені властивості приводять до спрощеної формули:

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - c}{k}}{n} k + c \quad (6.2.11).$$

Дисперсією $D_в = \sigma_в^2$ варіаційного ряду називається середня арифметична квадратів відхилень варіант від їх середньої:

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{X})^2 n_i}{n} \quad (6.2.12).$$

Середнім квадратичним відхиленням називається арифметичне значення кореня квадратного з дисперсії:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} \quad (6.2.13).$$

Властивості дисперсії.

1. Якщо всі варіанти збільшити (зменшити) в k разів, то дисперсія збільшиться (зменшиться) в k^2 разів, а середнє квадратичне значення – в $|k|$ разів.

2. Якщо варіанти збільшити чи зменшити на одну і ту ж постійну величину, то дисперсія не зміниться.

3. Якщо ваги збільшити чи зменшити в одне і те ж число разів, то дисперсія не зміниться.

4. Дисперсія відносно середньої арифметичної дорівнює дисперсії відносно довільної постійної без квадрату різниці між середньою арифметичною і цією постійною:

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - c)^2 n_i}{n} - (\overline{X} - c)^2 \quad (6.2.14).$$

5. Дисперсія дорівнює середній арифметичній квадратів варіант без квадрату середньої арифметичної:

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i}{n} - (\overline{X})^2 \quad (6.2.15).$$

Наведені властивості приводять до спрощеної формули:

$$D_в = \sigma_в^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2}{n}k^2 - (\overline{X} - c)^2 \quad (6.2.16).$$

Коефіцієнтом варіації називається відношення середнього квадратичного відхилення $\sigma_в$ до середнього $\overline{X}_в$ виражене у відсотках (або частці одиниці):

$$V = \frac{\sigma_в}{\overline{X}_в} \cdot 100\% \quad (6.2.17).$$

Статистичні моменти розподілу.

1. Початкові статистичні моменти k-го порядку:

$$M_k = \sum_{i=1} x_i^k \frac{m_i}{n}, \ \sum_{i=1} m_i = n \quad (6.2.18).$$

Тоді при:

$$k = 0 \quad M_0 = \sum_{i=1} x_i^0 \frac{m_i}{n} = 1;$$

$$k = 1 \quad M_1 = \sum_{i=1} x_i \frac{m_i}{n} = \overline{X} \ – \text{ середня арифметична;}$$

$$k = 2 \quad M_2 = \sum_{i=1} x_i^2 \frac{m_i}{n} = \overline{X}^2 \ – \text{ середнє квадратичне;}$$

$$k = 3 \quad M_3 = \sum_{i=1} x_i^3 \frac{m_i}{n} = \overline{X}^3 \ .$$

2. Центральні статистичні моменту k-го порядку:

$$\overline{\mu}_k = \sum_i (x_i - \overline{X})^k \frac{m_i}{n}, \ \sum_i m_i = n \quad (6.2.19).$$

Тоді при:

$$k = 0 \quad \mu_0 = \sum_i (x_i - \overline{X})^0 \frac{m_i}{n} = 1;$$

$$k = 1 \quad \mu_1 = \sum_i (x_i - \overline{X}) \frac{m_i}{n} = 0;$$

$k = 2 \quad \mu_2 = \sum_i (x_i - \overline{X})^2 \frac{m_i}{n} = \sigma_в^2$ – статистична дисперсія;

$$k = 3 \quad \mu_3 = \sum_i (x_i - \overline{X})^3 \frac{m_i}{n};$$

$$k = 4 \quad \mu_4 = \sum_i (x_i - \overline{X})^4 \frac{m_i}{n}.$$

Асиметрія вибіркового розподілу обчислюється за формулою $As = \frac{\mu_3}{\sigma_в^3}$ (6.2.20). Якщо розподіл симетричний, то $As = 0$. ***Ексцесс*** вибіркового розподілу визначається за формулою $Ek = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ (6.2.21).

Задачі

6.2.1. Задана генеральна сукупність з 20 елементів. Виконати такі вправи:

1) побудувати статистичний розподіл вибірки та його емпіричну функцію розподілу;

2) обчислити числові характеристики вибірки: середнє, дисперсію і середнє квадратичне відхилення та зробити з їх допомогою висновок про генеральну сукупність;

3) побудувати полігони частот і відносних частот та гістограму, розбивши інтервал на 4 рівних підінтервали;

4) знайти моду, медіану, розмах і коефіцієнт варіації.

Розв’язок.

У нашому випадку задано таку генеральну сукупність: 15, 19, 13, 12, 9, 14, 15, 19, 12, 17, 13, 9, 15, 12, 15, 14, 18, 16, 15, 12.

1) Статистичний розподіл вибірки:

x_i	9	12	13	14	15	16	17	18	19
n_i	2	4	2	2	5	1	1	1	2

$$n = \sum_{i=1}^{9} n_i = 20 .$$

$$\frac{n_i}{n}; \quad \frac{n_1}{n} = 0{,}1; \quad \frac{n_2}{n} = 0{,}2; \quad \frac{n_3}{n} = 0{,}1; \quad \frac{n_4}{n} = 0{,}1; \quad \frac{n_5}{n} = 0{,}25;$$

$$\frac{n_6}{n} = 0{,}05; \quad \frac{n_7}{n} = 0{,}05; \quad \frac{n_8}{n} = 0{,}05; \quad \frac{n_9}{n} = 0{,}1.$$

Емпірична функція розподілу: $F^*(x) = \dfrac{n_x}{n}$, де n_x – число варіантів, менших від x; n – об'єм вибірки; $n = 20$.

Для $x = 9$, $F^*(x) = \dfrac{0}{20} = 0;$

$x = 12$, $F^*(x) = \dfrac{2}{20} = 0{,}1;$

$x = 13$, $F^*(x) = \dfrac{2+4}{20} = \dfrac{6}{20} = 0{,}3;$

$x = 14$, $F^*(x) = \dfrac{2+4+2}{20} = 0{,}4;$

$x = 15$, $F^*(x) = 0{,}5;$

$x = 16$, $F^*(x) = \dfrac{15}{20} = 0{,}75$

$x = 17$, $F^*(x) = \dfrac{16}{20} = 0{,}8;$

$x = 18$, $F^*(x) = \dfrac{17}{20} = 0{,}85;$

$x = 19$, $F^*(x) = \dfrac{18}{20} = 0{,}9;$

При $x > 19, F^*(x) = 1$.

Або:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 9 \\ 0{,}1 & \text{при} \quad 9 < x \le 12 \\ 0{,}3 & \text{при} \quad 12 < x \le 13 \\ 0{,}4 & \text{при} \quad 13 < x \le 14 \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 14 < x \le 15 \\ 0{,}75 & \text{при} \quad 15 < x \le 16 \\ 0{,}8 & \text{при} \quad 16 < x \le 17 \\ 0{,}85 & \text{при} \quad 17 < x \le 18 \\ 0{,}9 & \text{при} \quad 18 < x \le 19 \\ 1{,}0 & \text{при} \quad x > 19 \end{cases}$$

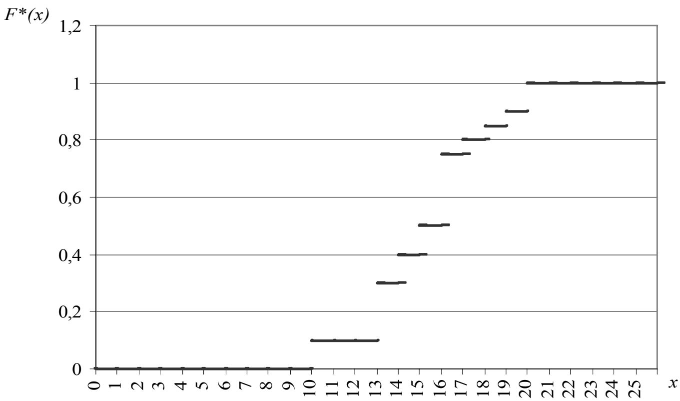


Рис. 6.2.1.

2) Числові характеристики вибірки.

Вибіркове середнє $\overline{X_в}$:

$\overline{X_в} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i$ (незміщена оцінка математичного сподівання генеральної сукупності):

$$\overline{X_в} = \frac{1}{20}(9\cdot 2 + 12\cdot 4 + 13\cdot 2 + 14\cdot 2 + 15\cdot 5 + 16 + 17 + 18 +$$

$$+19\cdot 2) = \frac{1}{20}(18 + 48 + 26 + 28 + 75 + 16 + 17 + 18 + 38) =$$

$$= \frac{284}{20} = 14{,}2 .$$

Вибіркова дисперсія (зміщена оцінка дисперсії генеральної сукупності):

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{k} x_i^{\,2}\cdot n_i - (\overline{X_в})^2 .$$

$$D_в = \frac{1}{20}(81\cdot 2 + 144\cdot 4 + 169\cdot 2 + 196\cdot 2 = 225\cdot 5 + 256 +$$

$$+289 + 324 + 361\times 2) - 14{,}2^2 = \frac{1}{20}(162 + 576 + 338 + 392 + 1125 +$$

$$+256 + 289 + 324 + 722) - 201{,}64 = 209{,}2 - 201{,}64 = 7{,}56 ;$$

$D_в = 7{,}56$. Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}, \sigma_в = \sqrt{7{,}56} = 2{,}7495 ;$$

$\sigma_в$ – характеризує середню величину розсіювання значень x_i навколо середньої вибіркової $\overline{X_в}$.

Незміщеною оцінкою генеральної дисперсії служить “виправлена” вибіркова дисперсія S^2 :

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{20}{19}\cdot 7{,}56 \approx 7{,}96 ;\ S = 2{,}82 .$$

3) Полігон частот – ламана, ланки якої з’єднують точки $(x_1, n_1),(x_2, n_2)...$ (рис. 6.2.2). Полігон відносних частот – ламана, яка з’єднує точки $(x_1, w_1)(i = 1,...k)$ (рис. 6.2.3).

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = 0{,}1;\ \ W_2 = 0{,}2;\ \ W_3 = 0{,}1;\ \ W_4 = 0{,}1;\ \ W_5 = 0{,}25;$$

$$W_6 = 0{,}05;\ W_7 = 0{,}05;\ W_8 = 0{,}05;\ W_9 = 0{,}1 .$$

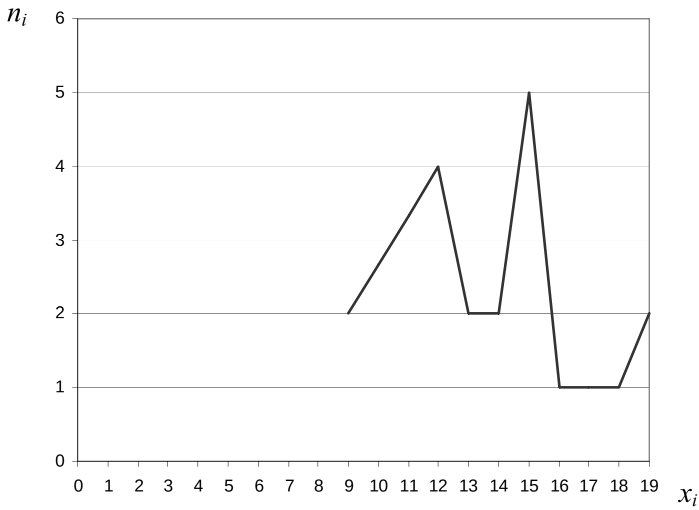


Рис. 6.2.2.

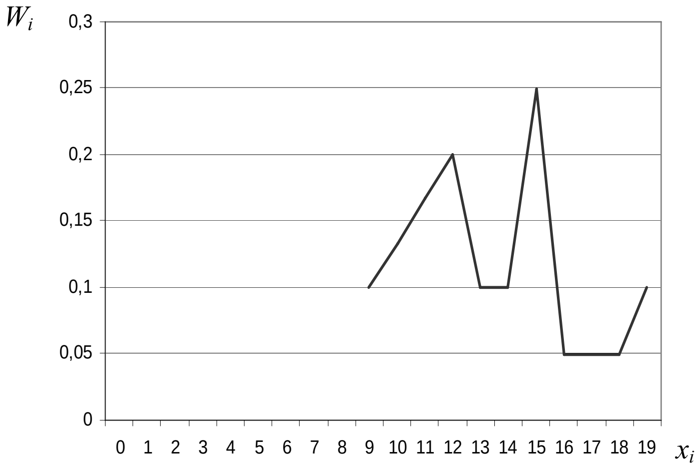


Рис. 6.2.3.

Розбиваємо інтервал на 4 підінтервали:

Інтервал	(x_i, x_i+1)	[9; 11,5]	[11,5; 14]	[14; 16,5]	[16,5; 19]
Сума частот n_i	n_i	2	6	8	4

Побудуємо гістограму (східчасту діаграму) частот.

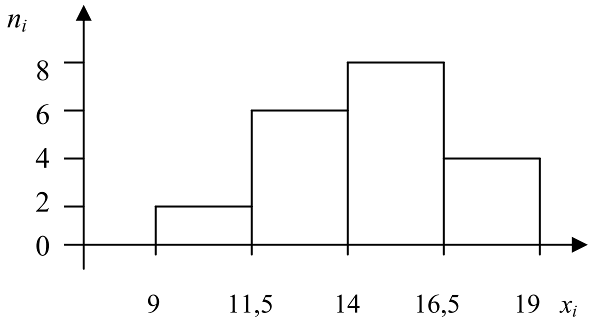


Рис. 6.2.4.

4) <u>Модою</u> Mo^* є варіанта, якій відповідає найбільша частота.

$Mo^* = 15.$

<u>Медіаною</u> називається число, яке ділить варіаційний ряд на дві частини, рівні по числу варіант.

$Me^* = (14+15)/2 = 14{,}5.$

<u>Розмах варіації</u> – це різниця між найбільшою та найменшою варіантами.

$R = x_{\max} - x_{\min}$; $R = 19 - 9 = 10.$

<u>Коефіцієнт варіації</u>: $V = \dfrac{\sigma_в}{\overline{X}_в} \cdot 100\%$;

$$V = \frac{2{,}7495}{14{,}2} \times 100\% = 19{,}36\%.$$

6.3. Статистичне оцінювання

Вибіркова числова характеристика, що використовується для отримання оцінки невідомого параметра генеральної сукупності, називається ***точковою оцінкою***. Для того, щоб точкові оцінки були близькими до істинного значення числової характеристики генеральної сукупності, вони повинні бути ***незміщеними***, ***спроможними*** і ***ефективними***. Оцінка називається незміщеною, якщо її математичне сподівання як випадкової величини $\tilde{\theta}_n$ дорівнює істинному значенню θ числової характеристики: $M(\tilde{\theta}_n) = \theta$.

Оцінка називається ***спроможною***, якщо вона збігається по імовірності до істинного значення параметра, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ $P\left\{ \left|\tilde{\theta}_n - \theta\right| \le \varepsilon \right\} \to 1$ при $n \to \infty$ (див. §5).

Оцінка називається ***ефективною***, якщо вона має мінімальну дисперсію в певному класі оцінок. Середня вибіркова $\overline{X}_в$ є незміщеною, спроможною і ефективною оцінкою генеральної сукупності. Статистична вибіркова дисперсія $D_в$ є спроможною, але зміщеною оцінкою, оскільки

$$M(D_в) = \frac{n-1}{n} D_г \quad (6.3.1).$$

Для отримання незміщеної оцінки помножимо статистичну вибіркову дисперсію на $\frac{n}{n-1}$ і отримаємо виправлену статистичну дисперсію:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \overline{X})^2 \quad (6.3.2).$$

6.4. Нерівноточні виміри

Визначення ***наближеного значення*** вимірюваної величини X у випадку ***нерівноточних вимірів***. Нехай є серія X_1,

X_2, …, X_n незалежних вимірів однієї і тієї ж величини X, які проводились в різних умовах, тому їх дисперсії відповідно рівні $\sigma_{x_1}^2$, $\sigma_{x_2}^2$, …., $\sigma_{x_n}^2$. Тоді оцінка $\overline{X}$ для математичного сподівання $M(X)$ вимірюваної величини X рівна:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i} \quad (6.4.1),$$

де вага i-того виміру $g_i = \dfrac{1}{\sigma_{x_i}^2}$ (6.4.2),

а $\dfrac{g_1}{\sum g_i} + \dfrac{g_2}{\sum g_i} + \ldots + \dfrac{g_n}{\sum g_i} = 1$ (6.4.3).

Чим більша дисперсія $\sigma_{x_i}^2$, тим менша вага g_i результату виміру X_i.

Задачі

6.4.1. Проводились виміри температури певного середовища по п'яти спектральних лініях. Результати виміру наведені в наступній таблиці:

Порядковий № виміру	Температура в K^0			
	Лінія №1	Лінія №2	Лінія №3	Лінія №4
1 2 2 4 5	500 600 470 700 530	650 730 550 600 580	800 500 600 700	900 500 600 700 750
$\sum$	2800	3110	2600	3450
$\overline{X}_i$	560	622	650	690
σ_i^2	8450	4970	16666,7	23000

Обчислити середнє значення температури.

Розв’язок.

1. Обчислимо середні значення $\overline{X}_i$, $i = \overline{1,4}$, по кожній лінії: $\overline{X}_i = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{m} x_k n_k}{n}$.

2. Обчислимо дисперсії вимірів по кожній лінії за формулою $\sigma_i^2 = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{m} (x_k - \overline{X}_i)^2 n_k}{n-1}$, оскільки число вимірів мале.

$$\sigma_1^2 = \frac{(500-560)^2 + (600-560)^2 + (470-560)^2 + (700-560)^2 + (530-560)^2}{4} = 8450;$$

$\sigma_1 \approx 91{,}9$.

$$\sigma_2^2 = \frac{(650-622)^2 + (730-622)^2 + (550-622)^2 + (600-622)^2 + (580-622)^2}{4} = 4970;$$

$\sigma_2 \approx 70{,}5$.

$$\sigma_3^2 = \frac{(800-650)^2 + (500-650)^2 + (600-650)^2 + (700-650)^2}{3} = 16666{,}7;$$

$\sigma_3 \approx 129{,}1$.

$$\sigma_4^2 = \frac{(900-690)^2 + (500-690)^2 + (600-690)^2 + (700-690)^2 + (750-690)^2}{4} = 23000;$$

$\sigma_4 = 1517$.

Дані занесені в таблицю.

3. Обчислимо вагу g_i кожного середнього значення $\overline{X}_i$:

$$g_i = \frac{1}{\sigma_i^2};$$

$$g_1 = \frac{1}{8450} = 0{,}000118343195; \quad g_2 = \frac{1}{4970} = 0{,}000201207243;$$

$$g_3 = \frac{1}{16666{,}7} = 0{,}00005999988; \quad g_4 = \frac{1}{23000} = 0{,}000434782609 \cdot$$

Їх сума рівна $\sum g_i = 0{,}000814332927$.

4. Середнє значення $\overline{X}$ згідно формули нерівноточних вимірів рівне:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{4} g_i \overline{X}_i}{\sum g_i} = \frac{g_1}{\sum g_i}\overline{X}_1 + \frac{g_2}{\sum g_i}\overline{X}_2 + \frac{g_3}{\sum g_i}\overline{X}_3 + \frac{g_4}{\sum g_i}\overline{X}_4 =$$

$$= 0{,}1453253 \cdot 560 + 0{,}247082 \cdot 622 + 0{,}0736798 \cdot 650 +$$

$$+ 0{,}533913 \cdot 690 \approx 651{,}4\,.$$

Точкові оцінки параметрів розподілу.

Для знаходження точкових оцінок невідомих параметрів розподілу використовують метод моментів і метод найбільшої правдоподібності. Суть методів: маємо вибірку, розподіл якої невідомий, але він залежить від невідомих параметрів, які необхідно знайти.

6.5. Метод моментів

Метод моментів точкової оцінки ***невідомих параметрів*** заданого розподілу полягає в прирівнюванні теоретичних моментів цього ж порядку. Якщо розподіл визначається одним параметром, то для його визначення прирівнюють один теоретичний момент одному емпіричному моменту. Наприклад, початковий теоретичний момент першого порядку прирівнюють початковому емпіричному моменту першого порядку: $v_1 = \mu_1$. Оскільки $v_1 = M(X)$ і $\mu_1 = \overline{X}_в$, то $M(X) = \overline{X}_в$, де $\overline{X}_в$ обчислюєм з вибірки. Якщо розподіл визначається двома параметрами, то крім рівності $v_1 = \mu_1$, центральний теоретичний момент другого порядку прирівнюють до центрального емпіричного моменту другого порядку: $\mu_2 = m_2$. Але $\mu_2 = D(X)$, $m_2 = D_в$. Отримуєм систему рівнянь:

$$\begin{cases} M(X) = \overline{X}_в \\ D(X) = D_в. \end{cases}$$

Задачі

6.5.1. Випадкова величина v розподілена за законом Максвела (див. 4.10.1в). Обчислити методом моментів по вибірці x_1, x_2, … x_n точкову оцінку невідомого параметра h, що визначає цей розподіл.

Розв'язок.

а) $\overline{X}_в = M(v) = \dfrac{1{,}1284}{h}$, отже $h^* = \dfrac{1{,}1284}{\overline{X}_в}$.

б) $D_в = D(v) = \dfrac{0{,}22676}{h^2}$, звідки $h^* = \sqrt{\dfrac{0{,}22676}{D_в}}$.

Розв'язок наведений в п. а) простіший.

6.5.2. Випадкова величина розподілена за законом Пуассона $P_m(x_i) = \dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$, де m – число випробувань, проведених в одному досліді; x_i – число появи події в i-тому досліді. Обчислити невідомий параметр λ.

Розв'язок.

Як показано в задачі 4.5.4 $M(X) = \lambda$. Отже, $M(X) = = \overline{X}_в = \lambda$, $\lambda^* = \overline{X}_в$.

6.5.3. Випадкова величина підлягає рівномірному закону розподілу з невідомими параметрами a і b. Оцінити їх методом моментів.

Розв'язок.

Використаємо розв'язок задачі 4.7.4. Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \overline{X}_в = M(X) = \dfrac{a+b}{2} \\ D_в = D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12} \end{cases} \to \begin{cases} \overline{X}_в = \dfrac{a+b}{2} \\ D_в = \dfrac{(b-a)^2}{2\sqrt{3}} \end{cases} \to \begin{cases} a+b = 2\overline{X}_в \\ -a+b = 2\sqrt{3D_в} \end{cases} \to$$

$$\rightarrow \begin{matrix} (+)2b = 2\overline{X}_в + 2\sqrt{3D_в} \\ (-)2a = 2\overline{X}_в - 2\sqrt{3D_в} \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} b^* = \overline{X}_в + \sqrt{3D_в} \\ a^* = \overline{X}_в - \sqrt{3D_в} \end{cases}.$$

6.5.4. Випадкова величина X підлягає Гамма-розподілу. Знайти методом моментів точкові оцінки параметрів α і β даного розподілу.

Розв'язок.

Використовуємо розв'язок задачі 4.10.1а. Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \overline{X}_в = M(x) = \beta(\alpha+1) \ (1) \\ D_в = D(x) = \beta^2(\alpha+1) \ (2) \end{cases}$$

Ділимо рівняння (2) на (1). Отримуємо: $\dfrac{\beta^2(\alpha+1)}{\beta(\alpha+1)} = \dfrac{D_в}{\overline{X}_в}$,

або $\beta^* = \dfrac{D_в}{\overline{X}_в}$. Підставимо β в рівняння (1): $\overline{X}_в = \dfrac{D_в}{\overline{X}_в}(\alpha+1)$,

звідки $\alpha^* = \dfrac{(\overline{X}_в)^2}{D_в} - 1$. Отже, $\alpha^* = \dfrac{(X_в)^2}{D_в} - 1$; $\beta^* = \dfrac{D_в}{\overline{X}_в}$.

6.5.5. Випадкова величина X підлягає логнормальному закону розподілу. Обчислити методом моментів точкові оцінки параметрів α і β даного розподілу.

Розв'язок.

Використаємо розв'язок задачі 4.10.1б. Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \overline{X}_в = M(X) = e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} \\ D_в = D(X) = e^{2\alpha+\beta^2}(e^{\beta^2} - 1) \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} \overline{X}_в^2 = \left(e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} \right)^2 = e^{2\alpha+\beta^2} & (1) \\ D_в = e^{2\alpha+\beta^2}(e^{\beta^2} - 1) & (2) \end{cases}.$$

Розділимо рівняння (2) на (1). Отримаємо: $\dfrac{D_в}{\overline{X}_в^2} = \dfrac{e^{2\alpha+\beta^2}(e^{\beta^2} - 1)}{e^{2\alpha+\beta^2}} = e^{\beta^2} - 1$, звідси $e^{\beta^2} = \dfrac{D_в}{\overline{X}_в^2} + 1$. Прологарифмувавши ліву і праву частину рівняння, отримаємо: $\beta^2 = \ln\left(\dfrac{D_в}{\overline{X}_в^2} + 1 \right)$. Отже, $\beta = \sqrt{\ln\left(\dfrac{D_в}{\overline{X}_в^2} + 1 \right)}$.

Прологарифмувавши рівняння (1), отримаємо: $\ln \overline{X}_в = \alpha + \dfrac{\beta^2}{2}$. Отже, $\alpha = \ln \overline{X}_в - \dfrac{\beta^2}{2}$. Підставивши сюди значення β^2, отримаємо:

$$\alpha = \ln \overline{X}_в - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{D_в}{\overline{X}_в^2} + 1 \right) = \ln \overline{X}_в - \ln\sqrt{\frac{D_в}{\overline{X}_в^2} + 1} =$$

$$= \ln \overline{X}_в - \ln\sqrt{\frac{D_в + \overline{X}_в^2}{\overline{X}_в^2}} = \ln\left(\frac{\overline{X}_в^2}{\sqrt{D_в + \overline{X}_в^2}} \right).$$

Отже, $\alpha = \ln\left(\dfrac{\overline{X}_в^2}{\sqrt{D_в + \overline{X}_в^2}} \right)$; $\beta = \sqrt{\ln\left(\dfrac{D_в}{\overline{X}_в^2} + 1 \right)}$.

6.6. Метод найбільшої правдоподібності

Метод найбільшої правдоподібності точкової оцінки невідомих параметрів заданого розподілу полягає у знаходженні максимуму функції одного або декількох шуканих параметрів.

а) ***Дискретні випадкові величини***. Нехай X – дискретна випадкова величина, яка в результаті n дослідів набула значення x_1, x_2, $\dots x_n$. Нехай шукається параметр θ. Функцію правдоподібності дискретної випадкової величини X називають добуток ймовірностей $p(x_i;\theta)$ того, що випадкова величина набуде значення x_1, x_2, $\dots x_i \dots x_n$., причому значення x_i зустрічається m_i раз.

$$L(x_1, x_2, \dots x_n; \theta) = p^{m_1}(x_1;\theta) \cdot p^{m_2}(x_2;\theta) \dots p^{m_k}(k;\theta) \quad (6.6.1).$$

Оцінкою найбільшої правдоподібності параметра θ називають таке значення θ^*, при якому функція правдоподібності досягає максимуму.

θ^* знаходять з розв'язку рівняння:

$\dfrac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0$, (6.6.2) або системи рівнянь $\dfrac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_j} = 0$ (6.6.3), $j = \overline{1, r}$, якщо необхідно оцінити r невідомих параметрів.

Так як точки максимума функцій $L(x_1, x_2, \dots x_n; \theta)$ і $\ln L(x_1, x_2, \dots x_n; \theta)$ співпадають, іноді зручніше замість рівнянь (6.6.2) і (6.6.3) розв'язати рівняння: $\dfrac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots x_n; \theta)}{\partial \theta} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \dots x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0$ (6.6.4) або систему рівнянь:

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_j} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_j} = 0,$$

$j = \overline{1, r}$ (6.6.5).

Знаходять другу похідну $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}$ і якщо при $\theta = \theta*$ вона від'ємна, то θ^* - точка максимуму і її приймають за оцінку параметра θ.

б) ***Неперервні випадкові величини***. Нехай неперервна випадкова величина X в результаті n випробувань прийняла значення x_1, x_2, $\ldots x_n$. Якщо вид функції щільності $f(x)$ заданий, але невідомі параметри $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r$ якими визначається ця функція, то задають функцію правдоподібності неперервної випадкової величини X:

$$L = f(x_1, \theta_1, \theta_2, ...\theta_r) f(x_2, \theta_1, \theta_2, ...\theta_r) ... f(x_n, \theta_1, \theta_2, ...\theta_r) \quad (6.6.6).$$

Потім знаходять логарифмічну функцію правдоподібності і для знаходження її максимуму складають систему рівнянь:

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta_1, \theta_2, ..., \theta_r)}{\partial \theta_j} = 0; \; j = \overline{1, r} \quad (6.6.7)$$

Задачі

6.6.1. Знайти методом найбільшої правдоподібності за вибіркою x_1, x_2, $\ldots x_n$ точкову оцінку параметра p геометричного розподілу:

$P(X = x_i) = (1-p)^{x_i - 1} p$, де x_i – число випробувань, проведених до появи події, p – імовірність появи події в одному випробуванні.

Розв'язок.

Складемо функцію правдоподібності:

$L = P(x_1; p) \cdot P(x_2; p) \cdot ... \cdot P(x_n; p)$, врахувавши, що $\theta = p$ і $P(X = x_i) = (1-p)^{x_i - 1} p : L = (1-p)^{x_1 - 1} p \cdot (1-p)^{x_2 - 1} p \cdot \times$ $\times ... \cdot (1-p)^{x_n - 1} p = p^n (1-p)^{x_1 + x_2 + ... + x_i + ... + x_n - n}$.

Прологарифмуєм L: $\ln L = n \ln p + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n \right) \ln(1-p)$.

Знайдемо першу похідну:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = n \cdot \frac{1}{p} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n \right) \cdot \frac{1}{1-p} .$$

Прирівнявши вираз до нуля знайдем критичну точку:

$(1-p) \cdot n = p(\sum x_i - n)$, звідки

$$p^* = \frac{n}{\sum x_i} = \frac{1}{\frac{\sum x_i}{n}} = \frac{1}{\overline{X}_в} .$$

Знайдем другу похідну по p:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2} = -\frac{n}{p^2} + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n \right) \cdot \frac{1}{(1-p)^2} = *$$

Підставим сюди $p^* = \dfrac{n}{\sum x_i}$

$$* = -\frac{n\left(\sum x_i\right)^2}{n^2} + \frac{\left(\sum x_i - n\right)}{\left(1 - \frac{n}{\sum x_i}\right)^2} = -\frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n} + \frac{\left(\sum x_i - n\right)\left(\sum x_i\right)^2}{\left(\sum x_i - n\right)^2} .$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{n} x_i < n$, то $\dfrac{\left(\sum x_i\right)^2}{n - \sum x_i} < 0$ при $p^* = \dfrac{1}{\overline{X}_в}$. Отже ця точка є точкою її максимуму і за p слід прийняти вираз $p^* = \dfrac{1}{\overline{X}_в}$.

6.6.2. Обчислити методом найбільшої правдоподібності за вибіркою параметр h розподілу Максвела (див. задачу 4.10.1в).

Розв'язок.

Складем функцію найбільшої правдоподібності:

$$L = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_i, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta) =$$

$$=\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}v_1^2e^{-h^2v_1^2}\cdot\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}v_2^2e^{-h^2v_2^2}\cdot\ldots\cdot\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}v_i^2e^{-h^2v_i^2}\cdot\ldots\cdot\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}v_n^2e^{-h^2v_n^2}=$$

$$=\left(\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}\right)^n v_1^2\cdot v_2^2\cdot\ldots\cdot v_i^2\cdot\ldots\cdot v_n^2\cdot e^{-h^2(v_1^2+v_2^2+\ldots+v_i^2+..+v_n^2)}=$$

$$=\left(\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}\right)^n (v_1\cdot v_2\cdot\ldots\cdot v_i\cdot\ldots\cdot v_n)^2\cdot e^{-h^2\sum\limits_{i=1}^{n}v_i^2}\quad.$$

Знайдем логарифмічну функцію правдоподібності:

$$\ln L = n\ln\left(\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}\right)+2\ln(v_1\cdot v_2\cdot\ldots\cdot v_i\cdot\ldots\cdot v_n)-h^2\cdot\sum_{i=1}^{n}v_i^2=$$

$$=n\ln\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right)+3n\ln h+2\ln(v_1\cdot v_2\cdot\ldots\cdot v_i\cdot\ldots\cdot v_n)-h^2\cdot\sum_{i=1}^{n}v_i^2\ .$$

Знайдемо першу похідну і прирівняємо її до 0:

$\frac{\partial\ln L}{\partial h}=3n\cdot\frac{1}{h}-2h\sum\limits_{i=1}^{n}v_i^2=0$. Звідси, $h^{*2}=\frac{3n}{2\sum v_i^2}=\frac{3}{2\overline{v^2}}$;

Отже, $h^*=\sqrt{\frac{3n}{2\sum v_i^2}}=\sqrt{\frac{3}{2\overline{v^2}}}$.

Знайдемо другу похідну по h:

$\frac{\partial^2\ln h}{\partial h^2}=-3n\cdot\frac{1}{h^2}-2\sum\limits_{i=1}^{n}v_i^2<0$. Отже $h^*=\sqrt{\frac{3}{2\overline{v^2}}}$ є точкою максимуму.

6.6.3. Знайти методом найбільшої правдоподібності за вибіркою x_1, x_2, ….x_n точкову оцінку параметра β Гамма-розподілу (параметр α відомий).

Розв'язок.

(Див. задачу 4.10.1а).

Складемо функцію найбільшої правдоподібності:

$$L=\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}x_1^{\alpha}e^{-\frac{x_1}{\beta}}\cdot\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}x_2^{\alpha}e^{-\frac{x_2}{\beta}}\cdot\ldots\times$$

$$\times\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}x_n^{\alpha}e^{-\frac{x_n}{\beta}}=\frac{1}{(\beta^{\alpha+1})^n(\Gamma(\alpha+1))^n}(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^{\alpha}\times$$

$$\times e^{-\frac{x_1+x_2+\ldots+x_i+\ldots+x_n}{\beta}}=\beta^{-n(\alpha+1)}\left[\Gamma(\alpha+1)\right]^{-n}(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^{\alpha}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\beta}}.$$

Прологарифмуєм її:

$$\ln L=-n(\alpha+1)\ln\beta-n\ln\Gamma(\alpha+1)+\alpha\ln(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\beta}.$$

Знайдемо похідну по β і прирівняєм її до 0.

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\beta}=-n(\alpha+1)\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\beta^2}=0;$$

Отже, $\beta n(\alpha+1)=\sum x_i$, звідки $\beta^*=\dfrac{\sum x_i}{n(\alpha+1)}=\dfrac{\overline{X}_в}{\alpha+1}$.

Знайдемо другу похідну $\dfrac{\partial^2\ln L}{\partial\beta^2}=n(\alpha+1)\dfrac{1}{\beta^2}-\dfrac{2\sum x_i}{\beta^3}$.

Підставимо сюди $\beta^*=\dfrac{\overline{X}_в}{\alpha+1}$, отримаємо

$$\frac{\partial^2\ln L}{\partial\beta^2}=\frac{n(\alpha+1)(\alpha+1)^2}{\overline{X}_в^2}-\frac{2\sum x_i}{\overline{X}_в^3}(\alpha+1)^3=*$$

$$\sum x_i=n\overline{X}_в$$

$$*=\frac{n(\alpha+1)^3}{\overline{X}_в^2}-\frac{2n\overline{X}_в(\alpha+1)^3}{\overline{X}_в^3}=-\frac{n(\alpha+1)^3}{\overline{X}_в^2}<0.$$

Отже, в точці $\beta^*=\dfrac{\overline{X}_в}{\alpha+1}$ функція L досягає максимуму і β^* є оцінкою β.

6.6.4. Знайти методом найбільшої правдоподібності за вибіркою x_1, x_2, $\ldots x_n$ точкові оцінки параметрів a і σ нормального розподілу.

Розв'язок.

Функція найбільшої правдоподібності має вигляд:

$$L = f(x_1,\theta_1,\theta_2)\cdot f(x_2,\theta_1,\theta_2)\cdot\ldots\cdot f(x_n,\theta_1,\theta_2) =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x_1-a)^2/2\sigma^2}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x_2-a)^2/2\sigma^2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x_i-a)^2/2\sigma^2}\times$$

$$\times\ldots\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x_n-a)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \sigma^{-n}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Прологарифмуєм її:

$$\ln L = -n\ln\sigma - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{2\sigma^2}.$$

Продиференціюєм її по параметрах a і σ:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma} = -n\dfrac{1}{\sigma} + \dfrac{\sum(x_i-a)^2}{\sigma^3} = 0\\[2mm] \dfrac{\partial\ln L}{\partial a} = \dfrac{\sum(x_i-a)}{\sigma^2} = 0\end{cases} \to \begin{cases}\dfrac{\sum(x_i-a)^2}{\sigma^3} = \dfrac{n}{\sigma}\ (1)\times\dfrac{\sigma^3}{n}\\[2mm] \sum(x_i-a) = 0\ (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\sum(x_i-a)^2}{n} = \sigma^2\\[2mm] \sum x_i - na = 0\end{cases}.\ \text{Але}\ \frac{\sum(x_i-a)^2}{n} = \sigma_в^2;\ \ \frac{\sum x_i}{n} = \overline{X}_в,$$

тому $a = \overline{X}_в$, $\sigma = \sigma_в$.

Обчислимо другі похідні по a і σ:

$$\frac{\partial^2\ln L}{\partial a^2} = -\frac{n}{\sigma^2} < 0;\ \ \frac{\partial^2\ln L}{\partial\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3\sum(x_i-a)^2}{\sigma^4}.$$

Підставивши сюди $\sigma^2 = \sigma_в^2 = \dfrac{\sum (x_i - a)^2}{n}$, отримаємо

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{n^2}{\sum (x_i - a)^2} - \frac{3n^2}{\sum (x_i - a)^2} = -\frac{2n^2}{\sum (x_i - a)^2} < 0 .$$

Отже, функція L при даних значеннях a і σ досягає максимуму і a^* і σ^* є точковими оцінками a і σ.

6.6.5. Обчислити за вибіркою x_1, x_2, …x_n методом найбільшої правдоподібності параметри α і β логнормального закону.

Розв'язок.

(Див. задачу 4.10.1б).

Функція найбільшої правдоподібності має вигляд:

$$L = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_i \cdot \ldots \cdot x_n)^{-1} \beta^{-n} \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} (\ln x_i - \alpha)^2}{2\beta^2}} .$$

Логарифмічна функція має вигляд:

$$\ln L = -\ln(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_i \cdot \ldots \cdot x_n) - n \ln \beta - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{\sum_{i=1}^{n} (\ln x_i - \alpha)^2}{2\beta^2} \cdot$$

Продиференціювавши її по параметрах α і β і прирівнявши до 0, отримуємо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \dfrac{\sum (\ln x_i - \alpha)}{\beta^2} \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \beta} = -n \cdot \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{\sum (\ln x_i - \alpha)^2}{\beta^3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sum (\ln x_i - \alpha) = 0 \\ \sum (\ln x_i - \alpha)^2 = n\beta^2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sum \ln x_i}{n} = \alpha^* \\ \beta^{*2} = \dfrac{\sum (\ln x_i - \alpha)^2}{n}. \end{cases}$$

6.7. Інтервальні оцінки параметрів розподілу

Точкова оцінка визначається одним числом. Середня вибіркова $x_в$ і вибіркова дисперсія $D_в$ – точкові оцінки. Але при малих об'ємах вибірки точкові оцінки приводять до значних відхилень від оцінюваного параметру. Тому при малих вибірках використовують ***інтервальні*** оцінки, які визначаються випадковими кінцями інтервалу, тобто двома числами. Виберем яке завгодно мале наперед задане число $\delta > 0$, що характеризує ***точність оцінки***. Імовірність $\gamma = 1 - \alpha$ (де α – імовірність помилки) виконання нерівності $\left|\tilde{\theta} - \theta\right| < \delta$ називають ***надійністю*** або ***довірчою імовірністю***. Оскільки імовірність помилки α наперед задають малою, то надійність γ близька до одиниці: 0,95; 0,99; 0,999. Інтервал $\left(\tilde{\theta} - \delta, \tilde{\theta} + \delta\right)$, який покриває невідомий параметр θ з заданою надійністю γ називається ***довірчим***.

а) Нехай з генеральної сукупності, розподіленої за довільним законом з математичним сподіванням *а* і дисперсією σ^2, взята вибірка x_1, x_2, … x_n. Тоді, згідно центральної граничної теореми (теоретичний вибірковий розподіл середніх $\overline{X}$ при великому *n* може бути добре апроксимовано відповідним нормальним розподілом з параметрами $M(\overline{X}) = M(X)$ і $\sigma(\overline{X}) = \sigma(X)/\sqrt{n}$ і більшість числових характеристик вибірки має нормальний чи близький до нормального вибірковий розподіл) у формі Ліндеберга-Леві

$$P\left\{\left|\overline{X} - a\right| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t\right\} = 2\Phi(t) \quad (6.7.1),$$

де $\Phi(t)$ – функція Лапласа.

Отже, при достатньо великому *n* з надійністю γ можна стверджувати, що довірчий інтервал $(\overline{X} - t\sigma/\sqrt{n}, \overline{X} + t\sigma/\sqrt{n})$ покриває невідомий параметр *a*:

$$P(X - t\sigma / \sqrt{n} < a < X + t\sigma / \sqrt{n}) = 2\Phi(t) = \gamma = 1 - \alpha \ (6.7.2).$$

Точність оцінки $\delta = t\sigma / \sqrt{n}$ (6.7.3).

Число t визначають з рівності $\Phi(t) = \gamma / 2$ за таблицями функції Лапласа, що рівне $\gamma / 2$.

б) Але, як правило величина σ генеральної сукупності є невідомою. Тому на практиці її замінюють “виправленим” середнім квадратичним відхиленням S.

Якщо задана надійність γ , то має місце така рівність:

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - a}{S / \sqrt{n}} < t_\gamma\right|\right) = 2\int_0^{t_\gamma} \widetilde{S}(t, n)dt = \gamma \ (6.7.4),$$

де щільність розподілу Стьюдента

$$\widetilde{S}(t, n) = B_n\left[1 + \frac{t^2}{n - 1}\right]^{-n/2} \quad (6.7.5)$$

залежить лише від об’єму вибірки n і не залежить від невідомих параметрів a і σ . Отже,

$$P(\overline{X} - t_\gamma S / \sqrt{n} < a < \overline{X} + t_\gamma S / \sqrt{n}) = \gamma \ (6.7.6).$$

Для заданого об’єму вибірки n (числа ступенів вільності) і надійності γ значення t_γ протабульовані (табл. 3). Для $n > 30$ розподіл Стьюдента практично співпадає з нормальним, тому різницею в довірчих інтервалах можна знехтувати. Для малих вибірок $n < 30$ заміна розподілу нормальним приводить до звуження довірчого інтервалу, тобто до підвищення точності оцінки. При малих вибірках для отримання з неї надійних оцінок параметрів їх довірчі інтервали суттєво розширюють.

в) Якщо кількісна ознака генеральної сукупності розподілена нормально і за вибіркою обчислене “виправлене” середнє квадратичне відхилення S, то довірчий інтервал, що покриває середнє квадратичне відхилення σ генеральної сукупності з заданою надійністю γ знаходиться згідно формули: $S(1 - q) < \sigma < S(1 + q)$ при $q < 1$ (6.7.7), $0 < \sigma < S(1 + q)$ при

$q > 1$ (6.7.8), де параметр $q(\gamma, n)$ знаходиться з таблиць 4, обчислених для χ^2 – розподілу для заданого рівня надійності γ і об'єму вибірки *n*.

Задачі

6.7.1. За даними 16 незалежних рівноточних вимірів деякої фізичної величини знайдено середньоарифметичне результатів вимірів $\overline{X_в} = 42{,}8$ і "виправлене" середнє квадратичне відхилення $S = 8$.

а) Визначити істинне значення вимірюваної величини з надійністю $\gamma = 0{,}999$.

б) Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю $\gamma = 0{,}999$.

Розв'язок.

$\overline{X_в} = 42{,}8;\ S = 8;\ \gamma = 0{,}999;\ n = 16.$

а) Істинне значення вимірюваної величини рівне її математичному сподіванню *a*.

За допомогою довірчого інтервалу знайдемо оцінку *a*:

$$\overline{X} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}$$

З таблиць 3 при $\gamma = 0{,}999;\ n = 16$ знаходимо $t_\gamma = 4{,}07$. Отже,

$$42{,}8 - 4{,}07 \frac{8}{\sqrt{16}} < a < 42{,}8 + 4{,}07 \frac{8}{\sqrt{16}} \text{ або}$$

$$34{,}66 < a < 50{,}94.$$

б) За таблицею 4 для $\gamma = 0{,}999$, $n = 16$ знаходимо $q(0{,}999;16) = 1{,}07$. Так як $q > 1$, то підставивши $S = 8$, $q = 1{,}07$ в співвідношення (6.7.8), отримаємо шуканий довірчий інтервал $0 < \sigma < 8(1 + 1{,}07) \to 0 < \sigma < 16{,}56$.

6.7.2. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю 0,95 точність оцінки математичного сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності за вибірковою середньою рівна 2, якщо відоме середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності $\sigma = 16$.

Розв'язок.

Точність оцінки математичного сподівання генеральної сукупності при відомому середньому квадратичному відхиленні σ генеральної сукупності визначається формулою: $\delta = t\sigma / \sqrt{n}$. Отже, $n = t^2\sigma^2 / \delta^2$. Згідно умови $\gamma = 0{,}95$, звідси з таблиці 2 з умови $\Phi(t) = 0{,}95/2 = 0{,}475$ знаходимо $t = 1{,}96$. Підставивши $t = 1{,}96$; $\sigma = 16$; $\delta = 2$, отримаємо шуканий об'єм вибірки $n = \dfrac{1{,}96^2 \cdot 16^2}{2^2} \approx 246$.

6.8. Статистична перевірка гіпотез

Статистичною гіпотезою *H*, називається будь-яке припущення відносно виду або параметрів розподілу випадкової величини *X*, яке може бути перевірене за результатами вибірки. ***Простою*** називають гіпотезу, що містить лише одне припущення. Якщо гіпотеза складається з скінченного або нескінченного числа простих гіпотез, то вона називається ***складною***. При цьому одне з припущень вибирається за основне і називається ***нульовою*** (основною) гіпотезою H_0. Інші гіпотези (припущення або можливості), що суперечать нульовій, називають ***альтернативними*** або ***конкуруючими*** гіпотезами H_1, H_2, … Сформульовані гіпотези перевіряють з допомогою статистичних критеріїв, тобто правил, які встановлюють, коли отримане розходження між припущеним теоретичним і дослідним (вибіркою) розподілами слід прийняти несуттєвим, випадковим і слід прийняти висунуту гіпотезу H_0, а коли – суттєвим, невипадковим і нульову гіпотезу слід відкинути.

Статистичним критерієм називають випадкову величину $K(X)$, яка служить для перевірки нульової гіпотези. ***Емпіричним*** (спостережним) значенням $K_{\text{спост}}$ називають значення критерію, що обчислене за даними вибірки.

Критичною областю називають множину Ω_0 значень критерію, при яких нульову гіпотезу відкидають,. Якщо спостережне значення критерію не належить критичній області, то H_0 приймається. Вірний висновок може бути прийнятий двома способами: коли гіпотеза H_0 приймається, тому що вона вірна, і коли гіпотеза H_0 відкидається, тому що вона хибна. При цьому можливі два типи помилок. Коли відкидається гіпотеза H_0, коли вона вірна, а приймається гіпотеза H_1, то має місце ***помилка першого роду***. Її імовірність називають ***рівнем значущості*** і позначають через α . Допустима імовірність похибки першого роду близька до нуля і найбільш вживані такі її значення: 0,05; 0,01; 0,001.

Помилка другого роду полягає в прийнятті гіпотези H_0, коли вона невірна, а вірна насправді гіпотеза H_1. Імовірність похибки другого роду позначають через β. Імовірність попадання критерію в критичну область, коли вірна конкуруюча гіпотеза або імовірність того, що гіпотеза H_0 буде відкинута, коли вірна конкуруюча гіпотеза, називається ***потужністю критерію***.

Отже, потужність критерію $\delta = 1 - \beta$ – імовірність нездійснення помилки другого роду. Чим більша потужність критерію, тим менша імовірність прийняття невірної гіпотези.

Критичними точками (границями) $K_{\text{кр}}$ називають точки, які відділяють критичну область від області прийняття гіпотези.

6.9. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності. Критерій згоди Пірсона

Емпіричний розподіл заданий у вигляді послідовності ***рівновіддалених варіант*** і ***відповідних їм частот***:

Варіанти	x_i	x_1	x_2	…	x_N
Емпіричні частоти	n_i	n_1	n_2	…	n_N

Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0: "генеральна сукупність розподілена нормально", необхідно спочатку обчислити теоретичні частоти n_i', а потім спостережне значення критерію:

$$\chi^2_{спост} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} \quad (6.9.1),$$

де n_i – емпірична частота і за таблицею 6 критичних точок розподілу χ^2 (*хі*-квадрат), за заданим рівнем значущості α і числу ступенів вільності $k = s - 1 - r$, де s – число груп (часткових інтервалів) вибірки, r – число параметрів розподілу знайти критичну точку $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$.

Оскільки у нормальному законі розподілу два параметри a і σ, то $r = 2$ і $k = s - 3$.

Якщо $\chi^2_{спост} < \chi^2_{кр}$ – нема підстав відкидати нульову гіпотезу. Якщо $\chi^2 \geq \chi^2_{кр}$ – нульову гіпотезу відкидають.

Об'єм вибірки повинен бути не меншим 50. Кожна група повинна містити не менше 5-8 варіант, малочисельні групи ($n_i < 5$) слід об'єднати в одну сумарну частоту: в цьому випадку слід також просумувати і відповідні їм теоретичні частоти. За s прийняти число груп після об'єднання.

Оскільки теоретичні частоти $n_i' = nP_i$, (6.9.2) де n – об'єм вибірки, P_i – імовірність попадання в i-тий інтервал, то для обчислення P_i можна використати дві формули:

а) Нехай різниця між двома сусідніми варіантами стала й рівна $h = x_{i+1} - x_i$. Тоді

$$P(x_i < X < x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx f(x_i)(x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \frac{h}{\sigma_в \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{h}{\sigma_в} e^{-\frac{(x_i - \bar{x}_в)^2}{2\sigma_в^2}} = \frac{h}{\sigma_в} e^{-\frac{u_i^2}{2}}, \text{ де } u_i = \frac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma_в} \quad (6.9.3).$$

б) Емпіричний розподіл заданий у вигляді послідовності інтервалів однакової довжини і відповідних їм частот.

Розбивають весь інтервал спостережних значень X на s частотних інтервалів $\left(x_i; x_{i+1}\right)$ однакової довжини h так, що середина інтервалу рівна $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

Підраховують число варіант n_i, які попали в i-й інтервал $\left(\sum n_i = n\right)$. Отриманий варіаційний ряд, аналогічний в п а),

x_i^*	$x_1^*(x_1, x_2)$	$x_2^*(x_2, x_3)$	$\cdots$	$x_s^*(x_s, x_{s+1})$
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_s

Теоретичні імовірності P_i попадання X в інтервали (x_i; x_{i+1}) знаходять з рівності:

$$P_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}_в^*}{\sigma_в^*}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_в^*}{\sigma_в^*}\right) \text{(6.9.4), де середня вибіркова}$$

$\bar{x}_в^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{s} x_i^* n_i}{n}$; середнє квадратичне відхилення $\sigma_в^* = \sqrt{D_в^*} =$

$= \dfrac{\sum_{i=1}^{s} (x_i^* - \bar{x}_в^*)^2 n_i}{n}$, $\Phi(\,)$ – інтегральні функції Лапласа, значення яких знаходять з таблиць 2. При цьому найменше значення, тобто $\dfrac{x_1 - \overline{x}_в^*}{\sigma_в^*}$ покладають рівним $-\infty$, а найбільше, тобто $\dfrac{x_{s+1} - \overline{x}_в^*}{\sigma_в^*}$ покладають рівним ∞.

Оскільки в основу критерію згоди Пірсона покладений вибір міри розходження між теоретичним і емпіричним розподілами, він може бути застосований до встановлення чи вибірковий розподіл належить певному розподілу (нормальному, біномному, показниковому, рівномірному, Пуассона).

Задачі

6.9.1. Задана генеральна сукупність. За допомогою критерію Пірсона перевірити гіпотезу про нормальний закон розподілу при рівні значущості α = 0,05.

98,06	100,02	97,9	96,32	99,97
101,25	99,2	103,9	102,72	103,97
101,25	99,4	105,9	100,72	98,97
96,25	98,2	100,9	100,72	99,97
100,85	98,2	99,9	101,72	96,27
101,25	97,2	101,9	96,42	96,97
98,85	94,2	101,81	96,42	98,97
99,25	100,6	99,9	98,72	100,97
100,55	98,2	103,3	100,22	98,97
100,45	96,2	101,9	101,72	100,97

Розв’язок.

Найменше значення 94,2, а найбільше 105,9.

Розмах варіації R = 105,9 – 94,2 = 11,7.

Поділимо діапазон зміни даної ознаки на 6 частинних інтервалів довжиною h = 2.

1) [94; 96): 94,2;

2) [96; 98): 96,25; 97,2; 96,2; 97,9; 96,32; 96,42; 96,42; 96,27; 96,27;

3) [98; 100): 98,06; 98,85; 99,25; 99,2; 99,4; 98,2; 98,2; 98,2; 99,9; 99,9; 98,72; 99,97; 98,97; 99,97; 98,97; 98,97;

4) [100; 102): 101,25; 101,25; 100,85; 101,25; 100,55; 100,45; 100,02; 100,6; 100,9; 101,9; 101,81; 101,9; 100,72; 100,72; 101,72; 100,22; 101,72; 100,97; 100,97;

5) [102; 104): 103,9; 103,3; 103,97; 102,72;

6) [104; 106]: 105,9.

Інтервальний ряд

$[x_i; x_{i+1})$	[94; 96)	[96; 98)	[98; 100)	[100; 102)	[102; 104)	[104; 106)
Середина x^*_i	95	97	99	101	103	105
Частота n_i	1	9	16	19	4	1

Знайдемо середню вибіркову, дисперсію та середнє квадратичне відхилення:

$$\overline{X_в} = \frac{\sum x_i^* n_i}{n} = \frac{95 \cdot 1 + 97 \cdot 9 + 99 \cdot 16 + 101 \cdot 19 + 103 \cdot 4 + 105 \cdot 1}{50} =$$

$$= \frac{1073 + 1584 + 1919 + 412}{50} = 99{,}76 .$$

$$D_в = \frac{\sum (x_i^*)^2 n_i}{n} - (\overline{X_в})^2 =$$

$$= \frac{9025 \cdot 1 + 9409 \cdot 9 + 9801 \cdot 16 + 10201 \cdot 19 + 10609 \cdot 4 + 11025 \cdot 1}{50} -$$

$$-(99{,}76)^2 = \frac{104731 + 156816 + 193819 + 42436}{50} - 99{,}76^2 =$$

$$= 9956{,}04 - 9952{,}0576 = 3{,}9624 .$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{3{,}9824} = 1{,}996 .$$

Об'єднаємо I і II та V і VI інтервали.

За таблицею 6 критичних точок розподілу $\chi^2_{кр}$ при $\alpha = 0{,}05$ і $k = 4 - 3 = 1$ (4 – число інтервалів вибірки) знайдемо критичну точку $\chi^{*2}_{кр}$ (0,05; 1) = 3,8.

Значення критерію $\chi^2_{спост}$ обчислюємо за формулою:

$$\chi^2_{спост} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i}$$, де $n_i' = nP_i$ – теоретичні частоти.

$$P_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x}_в^*}{\sigma_в^*}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}_в^*}{\sigma_в^*}\right);$$

$\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Результати допоміжних розрахунків в процесі знаходження теоретичних частот $n_i' = nP_i$ розташуємо в нижченаведеній таблиці, де $\overline{X}_в = 99{,}76$; $\sigma_в = 1{,}996$.

Інтервал $(x_i; x_{i+1})$	$(-\infty;98)$	[98; 100)	[100; 102)	$[102;\infty)$	Всього
n_i	10	16	19	5	50
$x_{i+1} - \overline{X}_в$	– 1, 76	0,24	2,24	∞	
$x_i - \overline{X}_в$	$-\infty$	– 1,76	0,24	2,24	
$\frac{x_{i+1} - \overline{X}_в}{\sigma_в}$	– 0,8817	0,12	1,12	∞	
$\frac{x_i - \overline{X}_в}{\sigma_в}$	$-\infty$	– 0,88	0,12	1,1222	
$\Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{X}_в^*}{\sigma_в^*}\right)$	– 0,3111	0,04776	0,36864	0,5	
$\Phi\left(\frac{x_i - \overline{X}_в^*}{\sigma_в^*}\right)$	– 0,5	– 0,31057	0,04776	0,369	
$\Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{X}_в^*}{\sigma_в^*}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \overline{X}_в^*}{\sigma_в^*}\right)$	0,1889	0,35833	0,32088	0,131	
$n_i' = nP_i = 50P_i$	9,445	17,9165	16,044	6,55	50
$n_i' \approx$	9,5	17,9	16,0	-	50

Для обчислення $\chi^2_{спост}$ складаємо таку таблицю

i	n_i	n_i'	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	10	9,445	0,03261
2	16	17,9	0,2017
3	19	16,0	0,5625
4	5	6,55	0,3668
$\sum$	50	50	1,1636 = $\chi^2_{спост}$

Оскільки $\chi^2_{спост} = 1{,}1636 < 3{,}8 = \chi^2_{кр}$, то гіпотеза про нормальний закон розподілу приймається.

6.10. Метод Романовського перевірки гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності

Обчислюють відношення $R = (\chi^2 - v)/\sqrt{2v}$ (6.10.1), де $v = s - r - 1$ – число ступенів вільності; χ^2 – значення отримане за таблицею 6 критичних точок розподілу для даного рівня значущості α. Якщо R < 3, то розбіжність між емпіричним і теоретичним розподілами можна вважати несуттєвими, і емпіричний розподіл повністю характеризується нормальним розподілом; якщо ж це R > 3, то розбіжність суттєва. Використаємо приклад 6.9.1. Тут $v = 4 - 2 - 1 = 1$, $\chi^2(0{,}05;1) = 3{,}8$. Отже, $R = \dfrac{3{,}8 - 1}{\sqrt{2 \cdot 1}} = \dfrac{2{,}8}{\sqrt{2}} = \dfrac{2{,}8}{1{,}14142} \approx 2 < 3$ і розбіжність між емпіричними і теоретичними розподілами несуттєва. Тому можна вважати на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$, що генеральна сукупність підлягає нормальному закону.

6.11. Метод Колмогорова

Метод Колмогорова для перевірки гіпотези про вид емпіричного розподілу використовує критерій, що ґрунтується на мірі λ відхилення емпіричної функції розподілу $\widetilde{F}(x)$ вибірки від гіпотетичної функції розподілу $F(x)$ випадкової величини X:

$$\lambda = \frac{\max\limits_{x}\left|\widetilde{F}(x) - F(x)\right|}{\sqrt{n}} = \frac{D}{\sqrt{n}} \quad (6.11.1).$$

Величина D є випадковою величиною, яка в припущенні, що гіпотеза вірна при $n \to \infty$ має граничний розподіл:

$$P(D_n < \lambda) = P(D\sqrt{n} < \lambda) \underset{n\to\infty}{\to} K(\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda \le 0 \end{cases} \quad (6.11.2).$$

за умови, що теоретична функція розподілу $F(x)$ неперервна.

Функція $K(\lambda)$ названа функцією Колмогорова не залежить від виду висунутого теоретичного розподілу.

Задаючи рівень значущості α, з співвідношення

$$P(\lambda > \lambda_\alpha) = P(D\sqrt{n} \ge \lambda_\alpha) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda_\alpha^2} = \alpha \quad (6.11.3).$$

можна знайти критичні значення розподілу Колмогорова за таблицею 7.

Алгоритм застосування критерію згоди Колмогорова:

1. Знаходять значення $\widetilde{F}(x)$ емпіричної функції розподілу для правих кінців всіх інтервалів дослідного розподілу неперервної випадкової величини. Якщо перший інтервал замкнутий, вводять додатковий інтервал, включивши в нього значення X, що менші лівої границі першого інтервалу.

2. Для тих самих значень аргумента, що й в п. 1, обчислюють значення функції $F(x)$ висунутого закону розподілу випадкової величини.

3. Вибирають найбільшу абсолютну величину різниці між відповідними значеннями емпіричної і теоретичної функцій розподілу:

$D^* = \max\left|\widetilde{F}(x) - F(x)\right|$.

4. Обчислюють величину $\lambda_{спост} = D^*\sqrt{n}$.

Для знаходження критичних значень критерію розраховані різні таблиці.

5а. Використовуючи додаток 7 знаходять критичні значення функції $\lambda_\alpha (\lambda \ge \lambda_\alpha)$ при заданому рівні значущості.

Якщо $\lambda_{спост} \geq \lambda_\alpha$, то нульова гіпотеза відхиляється. Якщо $\lambda_{спост} < \lambda_\alpha$, то гіпотеза H_0 про даний вид закону приймається.

5б. В додатку 6 наведена таблиця значень функції $P(\lambda) = 1 - K(\lambda)$, якою користуються так. Знаходять критичне значення $\beta_{крит} = P(\lambda_{спост})$. Якщо $\beta_{крит} = P(\lambda_{спост}) > \alpha$, то робиться висновок про те, що розбіжність між емпіричним і теоретичними розподілами може бути випадковою і дані розподіли можна вважати узгодженими: нульова гіпотеза H_0 приймається. Якщо $\beta_{крит} = P(\lambda_{спост}) \leq \alpha$, то розбіжність невипадкова – нульова гіпотеза H_0 відкидається.

5в. Розраховані критичні значення критерію $K_{n,\alpha}$ для даного об'єму вибірки n і рівня значущості α (таблиця 8). Якщо $D^* < \ < K_{n,\alpha}$, то нульова гіпотеза H_0 приймається, якщо $D^* \geq K_{n,\alpha}$, то нульова гіпотеза H_0 відкидається.

Задачі

6.11.1. За останні 10 місяців деякою фірмою були укладені угоди на суми l_i, які відбувались n_i раз.

Перевірити з допомогою критерію Колмогорова гіпотезу про те, що дана вибірка добута з генеральної сукупності, що рівномірно розподілена в інтервалі [40,24-40,44].

Розв'язок.

Якщо статистичний розподіл інтервальний, то вибирають односторонню критичну область.

Гіпотеза H_0 – статистичний розподіл є рівномірним.

Будуємо $F^*(x)$ – емпіричну функцію розподілу

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}; \ n = 80.$$

Теоретична функція рівномірного розподілу:

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \text{ якщо } x \in [a, b]$$

a = 40,24; b = 40,44.

$$F(x) = \frac{x - 40{,}24}{40{,}44 - 40{,}24}; \; F(x) = \frac{x - 40{,}24}{0{,}2} \text{ – пряма.}$$

При x = 40,24 маємо $F(x) = 0$, а при x = 40,44 $F(x) = \dfrac{40{,}44 - 40{,}24}{40{,}44 - 40{,}24} = 1$.

x	n_x	$F^*(x)$	$F(x)$	$\lvert F^*(x) - F(x) \rvert$
40,24	0	0	0	0
40,26	1	$\frac{1}{80} = 0{,}0125$	0,1	0,0875
40,28	1 + 4 = 5	$\frac{5}{80} = 0{,}0625$	0,2	0,1375
40,30	5 + 6 = 11	$\frac{11}{80} = 0{,}1375$	0,3	0,1625
40,32	22	0,275	0,4	0,125
40,34	37	0,4625	0,5	0,0375
40,36	53	0,6625	0,6	0,0625
40,38	65	0,8125	0,7	0,1125
40,40	72	0,9	0,8	0,1
40,42	77	0,9625	0,9	0,0625
40,44	80	1	1	0

Побудуємо графіки $F^*(x)$ і $F(x)$ (рис. 6.11.1).

$$D^* = \max\lvert F^*(x) - F(x) \rvert = 0{,}1625 .$$

$$\lambda_{спост} = D^* \sqrt{80} = 1{,}453 .$$

а) За табл. 7 критичних значень розподілу Колмогорова для заданої імовірності $\alpha = 0{,}05$ знаходимо $\lambda_{0,05} = 1{,}358$. Так як $\lambda_{спост} = 1{,}453 > \lambda_{0,05} = 1{,}358$, то нульова гіпотеза про рівномірний розподіл генеральної сукупності відкидається.

б) За таблицею 5 знаходимо, що цьому значенню відповідає імовірність β що рівна $P(\lambda \geq 1{,}45) \approx 0{,}0298$.

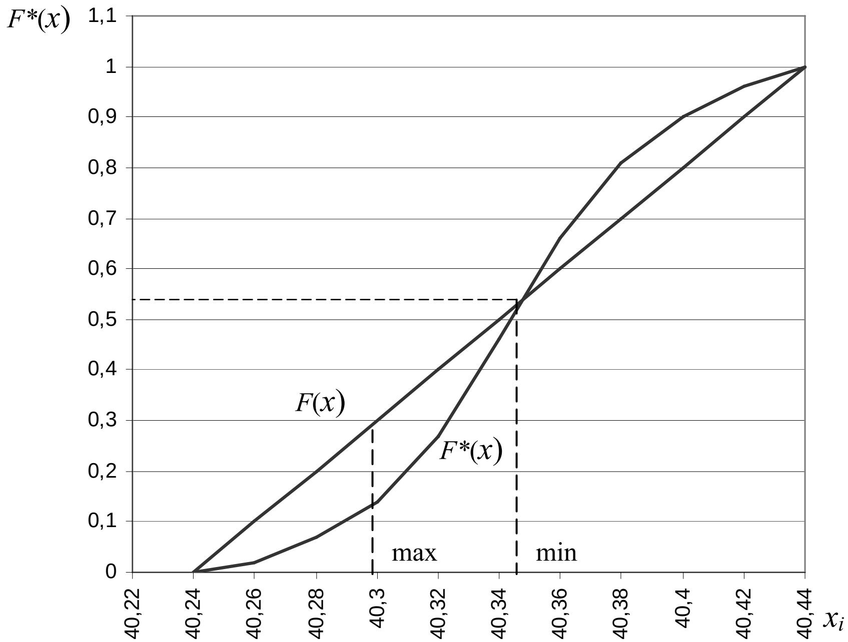


Рис. 6.11.1.

Дана імовірність β є малою і оскільки $0{,}0298 <$ $< \alpha = 0{,}05$; то розбіжність між емпіричним і теоретичним розподілами не є випадковою. Тому генеральна сукупність не розподілена за рівномірним законом.

в) $D^* = 0{,}1625$; з таблиці 8 $K_{n,\alpha} = 0{,}15$.

$D^* = 0{,}1625 > K_{n,\alpha} = 0{,}15$. Отже, нульова гіпотеза відкидається.

Література

1. Агапов Г. И. Задачник по теории вероятностей. – М.: Высш. школа, 1986.

2. Бугір М. К. Практикум з теорії ймовірності та математичної статистики: Навчальний посібник. – Тернопіль: Т.О.В. “ЦМДС”, 1998.

3. Булдык Г. М. Теория вероятностей и математическая статистика. – Минск: Вышэйшая школа, 1989.

4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Физматиз. – М.: Наука, 1969.

5. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – 8-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2002.

6. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – 5-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 1999.

7. Гурский Б. И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1971.

8. Гурский Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике.

9. Єрьоменко В. О., Шинкарик М. І. Теорія імовірностей. Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей. – Тернопіль: Економічна думка, 2000.

10. Жалдак М. И., Квитко А. Н. Теория вероятностей с элементами информатики: Практикум: Учеб. пособие / Под. общ. ред. М. И. Ядренко. – К.: Выща шк., 1989.

11. Карасев А. И. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Статистика, 1970.

12. Кармелюк Г. І. Рейтингові індивідуальні завдання з дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика” для студентів всіх форм навчання. – Тернопіль: ТАНГ, 2005.

13. Коваленко И. Л., Гнеденко Б. В. Теория вероятностей: Учебник. – К.: Выща шк., 1990.

14. Колемаев В. А., Староверова О. В., Турундаевский В. Б. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для экон. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1991.

15. Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Наука, 1980.

16. Теорія ймовірностей: Зб. Задач / За ред. А. В. Скорохода. – К.: Вища шк. Гол. Вид-во, 1976.

17. Солодовников А. С. Теория вероятностей: Учебн. пособие для студентов пед. ин-тов по матем. спец. – М.: Просвещение, 1983.

18. Четыркин Б. М., Калихман И. Л. Вероятность и статистика. – М.: Финансы и статистика, 1982.

19. Черняк О. І., Обушна О. М., Ставицький А. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: Збірник задач: навч. посіб.. – К.: Т-во “Знання”, КОО, 2002.

20. Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей. – К.: Вища шк., 1994.

Додатки

Додаток 1.

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013

Продовження додатку 1.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2.

Таблиця значень функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-x^2/2}dx$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289

x	Ф (x)	x	Ф (x)	x	Ф (x)	x	Ф (x)
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3461	1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,22	0,3883	1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4875	3,40	0,49966
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,499997
1,36	0,4131	1,77	0,4616				

Додаток 3.

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ 0,95	0,99	0,999	n	γ 0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 4.

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n	γ 0,95	0,99	0,999	n	γ 0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Додаток 5.

Таблиця значень функції

$$P(\lambda) = 1 - K(\lambda) = P(D \geq \lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k\lambda}$$

λ	P(λ)	λ	P(λ)	λ	P(λ)	λ	P(λ)	λ	P(λ)
<0,29	1,00000	0,76	0,6104	1,23	0,0970	1,70	0,0062	2,17	0,0002
0,30	0,99999	0,77	0,5936	1,24	0,0924	1,71	0,0058	2,18	0,0001
0,31	0,99998	0,78	0,5770	1,25	0,0879	1,72	0,0054	2,19	0,0001
0,32	0,99995	0,79	0,5605	1,26	0,0836	1,73	0,0050	2,20	0,0001
0,33	0,99991	0,80	0,5441	1,27	0,0794	1,74	0,0047	2,21	0,0001
0,34	0,99983	0,81	0,5280	1,28	0,0755	1,75	0,0044	2,22	0,0001
0,35	0,9997	0,82	0,5120	1,29	0,0717	1,76	0,0041	2,23	0,0001
0,36	0,9995	0,83	0,4962	1,30	0,0681	1,77	0,0038	2,24	0,0001
0,37	0,9992	0,84	0,4806	1,31	0,0646	1,78	0,0035	2,25	0,0001
0,38	0,9987	0,85	0,4653	1,32	0,0613	1,79	0,0033	2,26	0,0001
0,39	0,9981	0,86	0,4503	1,33	0,0582	1,80	0,0031	2,27	0,0001
0,40	0,9972	0,87	0,4355	1,34	0,0551	1,81	0,0029	2,28	0,0001
0,41	0,9960	0,88	0,4209	1,35	0,0522	1,82	0,0027	2,29	0,0001
0,42	0,9945	0,89	0,4067	1,36	0,0495	1,83	0,0025	2,30	0,0001
0,43	0,9926	0,90	0,3927	1,37	0,0469	1,84	0,0023	2,31	0,000046
0,44	0,9903	0,91	0,3791	1,38	0,0444	1,85	0,0021	2,32	0,000042
0,45	0,9874	0,92	0,3657	1,39	0,0420	1,86	0,0020	2,33	0,000038
0,46	0,9840	0,93	0,3527	1,40	0,0397	1,87	0,0019	2,34	0,000035
0,47	0,9800	0,94	0,3399	1,41	0,0375	1,88	0,0017	2,35	0,000032
0,48	0,9753	0,95	0,3275	1,42	0,0354	1,89	0,0016	2,36	0,000030
0,49	0,9700	0,96	0,3154	1,43	0,0335	1,90	0,0015	2,37	0,000027
0,50	0,9639	0,97	0,3036	1,44	0,0316	1,91	0,0014	2,38	0,000024
0,51	0,9572	0,98	0,2921	1,45	0,0298	1,92	0,0013	2,39	0,000022
0,52	0,9497	0,99	0,2809	1,46	0,0282	1,93	0,0012	2,40	0,000020
0,53	0,9415	1,00	0,2700	1,47	0,0266	1,94	0,0011	2,41	0,000018
0,54	0,9325	1,01	0,2594	1,48	0,0250	1,95	0,0010	2,42	0,000016
0,55	0,9228	1,02	0,2492	1,49	0,0236	1,96	0,0009	2,43	0,000014
0,56	0,9124	1,03	0,2392	1,50	0,0222	1,97	0,0009	2,44	0,000013
0,57	0,9013	1,04	0,2296	1,51	0,0209	1,98	0,0008	2,45	0,000012
0,58	0,8896	1,05	0,2202	1,52	0,0197	1,99	0,0007	2,46	0,000011
0,59	0,8772	1,06	0,2111	1,53	0,0185	2,00	0,0007	2,47	0,000010
0,60	0,8643	1,07	0,2024	1,54	0,0174	2,01	0,0006	2,48	0,000009
0,61	0,8508	1,08	0,1939	1,55	0,0164	2,02	0,0006	2,49	0,000008
0,62	0,8368	1,09	0,1857	1,56	0,0154	2,03	0,0005	2,50	0,0000075
0,63	0,8222	1,10	0,1777	1,57	0,0145	2,04	0,0005	2,55	0,0000044
0,64	0,8073	1,11	0,1700	1,58	0,0136	2,05	0,0004	2,60	0,0000026
0,65	0,7920	1,12	0,1626	1,59	0,0127	2,06	0,0004	2,65	0,0000016
0,66	0,7764	1,13	0,1555	1,60	0,0120	2,07	0,0004	2,70	0,0000010
0,67	0,7604	1,14	0,1486	1,61	0,0112	2,08	0,0004	2,75	0,0000006
0,68	0,7442	1,15	0,1420	1,62	0,0105	2,09	0,0003	2,80	0,0000003
0,69	0,7278	1,16	0,1356	1,63	0,0098	2,10	0,0003	2,85	0,00000018
0,70	0,7112	1,17	0,1294	1,64	0,0092	2,11	0,0003	2,90	0,00000010
0,71	0,6945	1,18	0,1235	1,65	0,0086	2,12	0,0002	2,95	0,00000006
0,72	0,6777	1,19	0,1177	1,66	0,0081	2,13	0,0002	3,00	0,00000003
0,73	0,6609	1,20	0,1122	1,67	0,0076	2,14	0,0002		
0,74	0,6440	1,21	0,1070	1,68	0,0071	2,15	0,0002		
0,75	0,6272	1,22	0,1019	1,69	0,0066	2,16	0,0002		

Додаток 6.

Критичні точки розподілу χ^2

Число ступенів вільності k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Додаток 7.

Таблиця критичних значень λ_α розподілу Колмогорова

$$P(\lambda > \lambda_\alpha) = \alpha$$

Рівень значущості	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
λ_α	1,073	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950

Критерій Колмогорова

Значення функції λ_α **:** $p = P(D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| > \lambda_\alpha$

n	α		
	0,10	0,05	0,01
1	0,950	0,975	0,995
2	0,776	0,842	0,929
3	0,636	0,708	0,829
4	0,565	0,624	0,734
5	0,509	0,563	0,669
6	0,468	0,519	0,617
7	0,436	0,483	0,576
8	0,410	0,454	0,542
9	0,387	0,430	0,513
10	0,369	0,409	0,489
11	0,352	0,391	0,468
12	0,338	0,375	0,449
13	0,325	0,361	0,432
14	0,314	0,349	0,418
15	0,304	0,338	0,404
16	0,295	0,327	0,392
17	0,286	0,318	0,381
18	0,279	0,309	0,371
19	0,271	0,301	0,361
20	0,265	0,294	0,352
25	0,238	0,264	0,317
30	0,218	0,242	0,290
35	0,202	0,224	0,269
40	0,189	0,210	0,252
45	0,179	0,198	0,238
50	0,170	0,188	0,226
55	0,162	0,180	0,216
60	0,155	0,172	0,207
65	0,149	0,166	0,199
70	0,144	0,160	0,192
75	0,139	0,154	0,185
80	0,135	0,150	0,179
85	0,131	0,145	0,174
90	0,127	0,141	0,169
95	0,124	0,137	0,165
100	0,121	0,134	0,161

Зміст

Передмова 3

Частина I. Випадкові події 4
§1. Основні поняття теорії ймовірності 4
1.1. Простір елементарних подій. Відношення між подіями ...4
1.2. Формула включень та виключень 14
1.3. Елементи комбінаторики 20
1.4. Класичне означення імовірності 29
1.5. Геометричне означення імовірності 56
§2 Теореми додавання та множення імовірностей та наслідки з них 64
2.1. Теореми додавання для несумісних подій 64
2.2. Формула повної імовірності. Формули Байєса. 134
§3. Повторні незалежні випробування 193
3.1. Формула Бернуллі 193
3.2. Формула Пуассона 211
3.3. Локальна теорема Лапласа 225
3.4. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа 230
3.5. Імовірність відхилення відносної частоти події від її постійної імовірності 247

Частина II. Випадкові величини 255
§4. Дискретні і неперервні випадкові величини і їх числові характеристики 255
4.1. Закони розподілу дискретних випадкових величин. Їх числові характеристики 255
4.2. Початкові і центральні теоретичні моменти. 277
4.3. Неперервні випадкові величини і їх числові характеристики 279
4.4. Функція розподілу імовірностей випадкової величини та її властивості 311
4.5. Асиметрія і ексцес розподілу 328
4.6. Основні розподіли дискретних випадкових величин ...338

4.7. Закон рівномірного розподілу неперервних
випадкових величин 355
4.8. Показниковий (експоненціальний) розподіл 362
4.9. Нормальний розподіл 370
4.10. Інші закони розподілу ……………………..……..378
4.11. Функція одного випадкового аргумента 405
4.12. Функція двох випадкових аргументів 430
4.13. Система двох випадкових величин 440
§5. Закон великих чисел 483

Частина III. Елементи математичної статистики ……..519
§ 6. Задачі математичної статистики ……………..……..519
6.1 .Графічне зображення вибірки ………………………..520
6.2. Основні характеристики вибірки ……………………523
6.3. Статистичне оцінювання ……………………………..536
6.4. Нерівноточні виміри …………………………….....536
6.5. Метод моментів ………………………………………539
6.6. Метод найбільшої правдоподібності ………………..…542
6.7. Інтервальні оцінки параметрів розподілу ……………...550
6.8. Статистична перевірка гіпотез ………………………553
6.9. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл
генеральної сукупності. Критерій згоди Персона …………555
6.10. Метод Романовського перевірки гіпотези про
нормальний розподіл генеральної сукупності ……………560
6.11. Метод Колмогорова …………………………………560

Література 565

Додатки 567

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Ганна Іванівна Кармелюк

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Посібник з розв'язування задач

Керівник видавничих проектів – *Б.А.Сладкевич*
Друкується в авторській редакції
Дизайн обкладинки – *Б.В. Борисов*

Підписано до друку 25.05.2007. Формат 60х84 1/16.
Друк офсетний. Гарнітура PetersburgC.
Умовн. друк. арк. 36.

Видавництво "Центр учбової літератури"
вул. Електриків, 23
м. Київ, 04176
тел./факс 425-01-34, тел. 451-65-95, 425-04-47, 425-20-63
8-800-501-68-00 (безкоштовно в межах України)
e-mail: office@uabook.com
сайт: WWW.CUL.COM.UA
Свідоцтво ДК №2458 від 30.03.2006