Теорія ймовірностей, статистика та ймовірнісні процеси

Лекція 2.

Розора Ірина Василівна

Київ, 2022

Зміст I

Зміст

$$\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\},$$

де ω_i, $i = \overline{1, n}$, —елементарні події.
Кожній ел. події ставиться у відповідність деяке число

$$\omega_i \longmapsto p_i$$

з властивостями

1. $$p_i \geq 0, \qquad i = \overline{1, n};$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Означення

Випадковою подією у скін. йм. схемі будемо називати підмножину з ПЕП, $A \subseteq \Omega$.

Нехай подія

$$A = \{\omega_{i_1}, \cdots, \omega_{i_k}\}$$

Означення

Ймовірність події A визначимо як

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \sum_{j=1}^{k} p_{i_j}.$$

$$P(\emptyset) = 0.$$

Властивості

1. (невід'ємність) $\forall A \subseteq \Omega$: $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. (нормованість) $P(\Omega) = 1$.
3. (адитивність) Якщо $A \cap B = \emptyset$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

4. $$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Якщо для скін. ймов. схеми виконується

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n},$$

то

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{1}$$

де $|A|$—потужність події A (кількість елементів в ній).
(1) ще називають **класичним означенням ймовірності.**

Приклад

Підкидають несиметричний кубик. Ймовірність випадання кожної грані пропорційна її номеру. Знайти ймовірність, що випало чило, яке кратне 3.

ПЕП

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{3, 6\}$$

Зауваження

Якщо б кубик був симетричний, то можна було б використати класичне означення ймовірності. І в цьому випадку

$$P(A) = \frac{2}{6}.$$

Приклад

Підкидають несиметричний кубик. Ймовірність випадання кожної грані пропорційна її номеру. Знайти ймовірність, що випало чило, яке кратне 3.

ПЕП

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{3, 6\}$$

Зауваження

Якщо б кубик був симетричний, то можна було б використати класичне означення йм. І в цьому випадку

$$P(A) = \frac{2}{6}.$$

$$\omega_i \longmapsto p_i, \qquad i \longmapsto i \cdot k,\ i = \overline{1,6}.$$

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$,то

$$1k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{21}.$$

Тому $p_i = \frac{i}{21}$

$$P(A) = p_3 + p_6 = \frac{9}{21}$$

$$\omega_i \longmapsto p_i, \qquad i \longmapsto i \cdot k,\ i = \overline{1,6}.$$

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$,то

$$1k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{21}.$$

Тому $p_i = \frac{i}{21}$

$$P(A) = p_3 + p_6 = \frac{9}{21}$$

$$\omega_i \longmapsto p_i, \qquad i \longmapsto i \cdot k,\ i = \overline{1,6}.$$

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$,то

$$1k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{21}.$$

Тому $p_i = \frac{i}{21}$

$$P(A) = p_3 + p_6 = \frac{9}{21}$$

Зміст

Розглянемо випадок зліч. ПЕП.

$$\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n \cdots\},$$

де ω_i, $i = \overline{1, \infty}$, —елементарні події.
Кожній ел. події ставиться у відповідність деяке число

$$\omega_i \longmapsto p_i$$

з властивостями

1. $$p_i \geq 0, \qquad i = \overline{1, \infty};$$
2. $$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Означення

Випадковою подією у зліч. йм. схемі будемо називати підмножину з ПЕП, $A \subseteq \Omega$.

Нехай подія

$$A = \{\omega_{i_1}, \cdots, \omega_{i_k}, \cdots\}$$

Означення

Ймовірність події A визначимо як

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{i_j}.$$

$$P(\emptyset) = 0.$$

Властивості

1. (невід'ємність) $\forall A \subseteq \Omega$: $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. (нормованість) $P(\Omega) = 1$.
3. (адитивність) Якщо $A \cap B = \emptyset$, то
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
4. $$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Приклад

Несиметрична монета (решка випадає з ймов. q, $q \in (0,1)$, герб — з ймовірністю $p = 1 - q$) підкидається до тих пір, поки не випаде Г. Підрахувати ймовірність того, що експеримент закінчиться на парному кроці.

ПЕП

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n \cdots ; \omega_\infty\}$$

Елементарна подія ω_n полягає в тому, що експеримент закінчився на n-му кроці.

$$\omega_n = \text{РР} \cdots \text{РГ}, \qquad \omega_\infty = \text{РР} \cdots \text{РР} \cdots$$

Визначимо ймовірності

$$P(\omega_n) = q^{n-1}p, \quad P(\omega_\infty) = 0.$$

Перевіримо, що виконується всі власт.

1. $$p_n = q^{n-1}p \geq 0$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}p = \frac{p}{1-q} = 1.$$

Визначимо ймовірності

$$P(\omega_n) = q^{n-1}p, \quad P(\omega_\infty) = 0.$$

Перевіримо, що виконується всі власт.

1. $$p_n = q^{n-1}p \geq 0$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}p = \frac{p}{1-q} = 1.$$

Потрібно знайти йм. того, що експ. закінчиться на парному кроці.

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \cdots, \omega_{2k}, \cdots\}.$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k-1} p = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{q}{1+q}.$$

Потрібно знайти йм. того, що експ. закінчиться на парному кроці.

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \cdots, \omega_{2k}, \cdots\}.$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k-1} p = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{q}{1+q}.$$

Приклад

Симетрична монета підкидається до тих пір, поки вона не випаде два рази підряд однією стороною. Знайти ймовірність того, що число підкидань буде парним.

Приклад

Симетрична монета підкидається до тих пір, поки не випаде два герби (ГГ) підряд. Знайти ймовірність того, що число підкидань буде парним.

Приклад

Симетрична монета підкидається до тих пір, поки вона не випаде два рази підряд однією стороною. Знайти ймовірність того, що число підкидань буде парним.

Приклад

Симетрична монета підкидається до тих пір, поки не випаде два герби (ГГ) підряд. Знайти ймовірність того, що число підкидань буде парним.

Приклад

Припустимо, що кількість викликів, щи приходять на АТС протягом години, розподілені за законом Пуассона з деяким $\lambda > 0$, тобто

$$\Omega = \{\omega_n, n = 0, 1, 2, 3 \cdots\},$$

$$p_n = P(\omega_n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

Яку кількість більш ймовірно зареєструвати на АТС за деяку годину: парну чи непарну?

Зміст

Приклад.

Кидаємо точку на $[0,1)$. Вважаємо, що всі положення точки рівноможливі.

$$\Omega = [0,1).$$

Але не можна побудувати йм. модель есксперимента за доп. скін. або зліч. йм. схем, приписав ймовірності лише окремим ел.подіям.

Зауваження

Всі ймовірності ел. подій мають дорівнювати 0, так як інакше б сума незліч. кількості доданків дорівнювала б ∞.

Тому природньо перейти від ймовірності окремих точок до ймовірності інтервалів.

Очевидно, що

$$P([0,\frac{1}{2})) = P([\frac{1}{2},1))$$

$$P([0,\frac{1}{2})) > P([0,\frac{1}{3}))$$

Крім того, бажано, щоб клас всіх множин був замкнений відносно $\bigcap, \bigcup, \overline{A}$.
будемо вважати йм. попадання точки у $[a,b) \subset [0,1)$ дорівнює

$$P([a,b)) = b - a.$$

Якщо $[a_i,b_i)$, $i = \overline{1,m}$,— несумісні, то

$$P(\bigcup_{i=1}^{m}[a_i,b_i)) = \sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i).$$

Означення

Нехай $\Omega \subset R^n$ є обмеженою множиною евклідового простору. Стохастичний експеримент полягає у тому, що n-вимірна точка ω навмання кидається в область Ω. Розглянемо U—клас усіх підмножин Ω, які мають об'єм, т.б обмежені. $\forall A \in U$ будемо казати, що відбулась подія A, якщо в результаті експ. $\omega \in A$ і покладемо

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \tag{2}$$

де $m(A)$ — n-об'єм множини A.

(2) називається геометричним визначенням ймовірності.

Приклад

На відрізку AB, довжина якого l,навмання обирається т.М. Знайти ймовірність того, що $AM > MB$.

Нехай x— це відстань від т.М до т.А. Тоді

$$\Omega = \{x | x \in [0, l]\} = [0, l], \quad m(\Omega) = l,$$

$$AM = x, \quad BM = l - x$$

$$A = \{x \in \Omega | x > l - x\} = \{x \in \Omega | x > \frac{l}{2}\} = [\frac{l}{2}, l], \quad m(A) = \frac{l}{2}.$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{2}$$

Приклад

Задача про зустріч. Дві особи домовились про зустріч між 10-ою та 11-ою год. Відомо, що моменти їх приходу до місця зустрічі є випадковими. Прийшовши до місця, кожен чекає на іншого протягом 15 хв., а потім йде. Яка ймовірність того, що зустріч відбудеться?

x— час приходу першої особи,
y— час приходу другої.

$$\Omega = \{(x,y)|0 \le x,y \le 1\} = [0,1]^2, \quad m(\Omega) = 1$$

$$A = \{\text{зустріч}\} = \{(x,y) \in \Omega |\, |x-y| \le \frac{1}{4}\}$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1-(3/4)^2}{1} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \le x, y \le 1\} = [0, 1]^2, \quad m(\Omega) = 1$$

$$A = \{\text{зустріч}\} = \{(x, y) \in \Omega | \, |x - y| \le \frac{1}{4}\}$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1 - (3/4)^2}{1} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

Задача Бюффона (1707–1778)

Приклад

Площина розділена паралельними прямими на відстані $2a$. На цю площину навмання кидають голку завдовжки $2l$ ($2l < 2a$). Знайти ймовірність того, що голка перетне одну з прямих.

Позначимо через x відстань від середини голки до найближчої прямої, $x \in [0, a]$
а через φ— кут між голкою і прямою (кут відкладаємо від голки до прямої проти годинникової стрілки), $\varphi \in [0, \pi]$.
Пара (φ, x) цілком визначає положення голки відносно паралельних прямих, з іншого боку, задає на площині φ, x точку з координитами (φ, x), що належить $[0, \pi] \times [0, a]$. І навпаки.

Тому кидання точки на площину, розграфлену паралельними прямими, і реєстрація її положення відносно прямих рівносильне киданню навмання точки в прямокутник $[0, \pi] \times [0, a]$. Отже, ПЕП

$$\Omega = [0, \pi] \times [0, a], \quad m(\Omega) = a\pi.$$

При цьому голка перетинається з прямою тоді і тільки тоді, коли справджується нерівність $x \leq l \sin \varphi$.

$$A = \{(\varphi, x) \in \Omega | x \leq l \sin \varphi\}.$$

Тому кидання точки на площину, розграфлену паралельними прямими, і реєстрація її положення відносно прямих рівносильне киданню навмання точки в прямокутник $[0, \pi] \times [0, a]$. Отже, ПЕП

$$\Omega = [0, \pi] \times [0, a], \quad m(\Omega) = a\pi.$$

При цьому голка перетинається з прямою тоді і тільки тоді, коли справджується нерівність $x \leq l \sin \varphi$.

$$A = \{(\varphi, x) \in \Omega | x \leq l \sin \varphi\}.$$

Для того, щою знайти $m(A)$, потрібно обчислити площу криволінійної трапеції під кривою $l \sin \varphi$.

$$m(A) = \int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi = 2l,$$

отже,

$$P(A) = \frac{2l}{a\pi}$$

Для того, щою знайти $m(A)$, потрібно обчислити площу криволінійної трапеції під кривою $l \sin \varphi$.

$$m(A) = \int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi = 2l,$$

отже,

$$P(A) = \frac{2l}{a\pi}$$

Одержане співвідношення можна використати для експериментального визначення π. Уявімо, що голка кинута на площину n разів (n — велике), при цьому голка m разів перетнула пряму. За великих n частота $\frac{m}{n}$ числа перетинів голкою прямої має бути близькою до ймовірності $P(A)$, тобто

$$\frac{2l}{a\pi} \approx \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad \pi \approx \frac{2ln}{am}.$$

Дослідник, рік	$\frac{l}{a}$	Число підкид.	Число перет.	π
Вольф, 1850	0,8	5000	2532	3,1596
Сміт, 1855	0,6	3204	1218	3,1553
де Морган, 1860	1	600	383	3,137
Лаззерині, 1901	0,83	3408	1808	3,14159
Гриджеман,1960	0,786	2	1	3,143

Парадокс Бертрана(1822-1900)

Приклад

У крузі радіуса R навмання проводиться хорда. Нехай ξ — її довжина. Потрібно обчислити ймовірність того, що ξ буде більше за R.

В цій задачі фразу "навмання проводиться хорда" можна розуміти по-різному. Від цього буде залежати і розв'язок, і відповідь задачі.

Розглянемо три уточнення:

- середина хорди рівноможлива всередині круга;
- один кінець хорди закріплюється, а другий — рівноможливий на границі круга;
- фіксується напрямок, в середині хорди проводиться діаметр, паралельний даному напрямку. Тоді середина хорди — рівноможлива на діаметрі.

Розглянемо три уточнення:

- середина хорди рівноможлива всередині круга;
- один кінець хорди закріплюється, а другий — рівноможливий на границі круга;
- фіксується напрямок, в середині хорди проводиться діаметр, паралельний даному напрямку. Тоді середина хорди — рівноможлива на діаметрі.

Розглянемо три уточнення:

- середина хорди рівноможлива всередині круга;
- один кінець хорди закріплюється, а другий — рівноможливий на границі круга;
- фіксується напрямок, в середині хорди проводиться діаметр, паралельний даному напрямку. Тоді середина хорди — рівноможлива на діаметрі.

ПИТАННЯ?