1. Лінійна залежність та лінійна незалежність системи векторів

Системою векторів в просторі V над полем F наз. ∀ скінченна множина векторів $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ – система векторів, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ – система скалярів. Сума $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$ наз. лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – коефіцієнтами лін. комбінації.

Лінійна комбінація наз. нетривіальною, якщо серед її коеф. є принаймні один ненульовий, і тривіальною, якщо всі її коеф. $= 0$.

Зрозуміло, що тривіальна лін. комб. ∀ сист. векторів $= \Theta$.

Система векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$ наз. лінійно незалежною, якщо для неї існує лише тривіальна лінійна комбінація $= \Theta$.

Система векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$ наз. лінійно залежною, якщо для неї існує нетривіальна лін. комб. $= \Theta$.

Якщо $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$, то будемо казати, що вектор x лінійно виражається через вектори $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Властивості лін. зал. та лін. незал. систем векторів

① Якщо система векторів містить Θ, то вона лінійно залежна

⌈Нехай $A = \{\Theta, a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Тоді $\underline{1} \cdot \Theta + 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \dots + 0 \cdot a_n = \Theta$

Лінійна комб. нетривіальна, оскільки є 1. ⌋

② Система векторів лінійно залежна $\Leftrightarrow$ принаймні один з них лінійно виражається через інші.

⌈Припустимо система век. $a_1, a_2, \dots, a_n$ лін. залежна.

За озн. ∃ нетрив. лін. комб. $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \Theta$

і серед коеф. є ненульовий. Нехай, наприклад, $\alpha_1 \neq 0$.

Тоді $a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} a_3 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} a_n$.

Нехай навпаки, один з век. $a_1, a_2, \dots, a_n$ лін. вираж. через інші, наприклад $a_1 = \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 + \dots + \beta_n a_n$

Тоді $a_1 - \beta_2 a_2 - \beta_3 a_3 - \dots - \beta_n a_n = \Theta$

і лін. комб. нетривіальна, бо коеф. при $a_1 = 1$.

③ Система векторів лінійно залежна $\Leftrightarrow$ принаймні один з них лін. виражається через попередні.

Достатність випливає з попередньої властивості.
Необхідність. Припустимо сист. век. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ лін. залежн.
Тоді $\exists$ нетривіальна лін. комб. $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = \Theta$.
Позначимо через k макс. індекс, до якого $\alpha_k \neq 0$.
Тобто $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = 0$ і $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \Theta$
Якщо $k = 1$, то $a_1 = \Theta$, інакше

$$a_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k} a_2 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} a_{k-1}.$$

④ Якщо підсистема системи векторів лінійно залежна, то і вся система лін. залежна

Припустимо, в системі век. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ підсистема векторів. $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ лінійно залежна.
Тоді $\exists$ нетривіальна лін. комб. $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \Theta$, серед коефіцієнтів є ненульовий, тому припустимо, наприклад, $\alpha_1 \neq 0$. Тоді

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + 0 \cdot a_{k+1} + \ldots + 0 \cdot a_n = \Theta.$$

лін. комб. нетривіальна, оскільки $\alpha_1 \neq 0$.

⑤ $\forall$ підсистема лінійно незалежної системи векторів є лінійно незалежною.

Наслідок попереднього твердження.

⑥ Порожня система векторів вважається лінійно незалежною.

2.

Теорема Жордана

Нехай F - деяке поле, $\lambda \in F$ - деяке число, $k \in \mathbb{N}$.

Озн. Жордановою клітиною порядку k з параметром λ наз. квадратна матриця

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

$$J_1(\lambda) = (\lambda), \quad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Озн. Жордановою матрицею наз. квадратна матриця, яка має таку будову: вздовж головної діагоналі стоять жорданові клітинки, решта елементів $= 0$.

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

Частковим випадком жорданової матриці є діагональна матриця. Всі її жорданові клітинки порядку 1.

Озн. Поле F наз. алгебраїчно замкненим, якщо кожен многочлен ненульового степеня з коефіцієнтами з цього поля має в цьому полі корінь.

З основної теореми алгебри випливає, що алгебраїчно замкненим полем є поле комплексних чисел.
В алгебраїчно замкненому полі кожен многочлен ненульового степеня можна розкласти в добуток лінійних многочленів.

Теорема (Жордана)
$\forall$ квадратна матриця A з елементами з алгебраїчно замкненого поля F подібна до деякої жорданової матриці з елементами з поля F.
Тобто $\exists$ така невироджена матриця T з елементами з поля F, що матриця $B = T^{-1}AT$ жорданова.
Матриця B наз. жордановою нормальною формою матриці A.

Сформулюємо теорему в термінах теорії лінійних операторів.

Для $\forall$ лінійного оператора $\mathcal{A}$ на скінченновимірному векторному просторі V над алгебраїчно замкненим полем F $\exists$ базис простору V, в якому оператору $\mathcal{A}$ відповідає жорданова матриця. Цей базис наз. жордановим базисом оператора $\mathcal{A}$.

3. $A=\begin{pmatrix}-6&2&3\\2&-3&6\\3&6&2\end{pmatrix}$ $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}-6-\lambda&2&3\\2&-3-\lambda&6\\3&6&2-\lambda\end{vmatrix} = (-6-\lambda)\begin{vmatrix}-3-\lambda&6\\6&2-\lambda\end{vmatrix} -$

$-2\begin{vmatrix}2&6\\3&2-\lambda\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}2&-3-\lambda\\3&6\end{vmatrix} = (-6-\lambda)(\lambda^2+\lambda-42)-2(-2\lambda-14)+3(3\lambda+21)=$

$=-\lambda^3-7\lambda^2+49\lambda+343=-(\lambda-7)(\lambda+7)^2$. $\lambda_1=7,\ \lambda_2=\lambda_3=-7$.

$n(\lambda_1)=1$, $n(\lambda_2)=2$.

$(A-7E)=\begin{pmatrix}-13&2&3\\2&-10&6\\3&6&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&6&-11\\-13&2&3\\2&-10&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&16&-11\\0&210&-140\\0&-42&28\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&16&-11\\0&-42&28\end{pmatrix}\sim$

$\sim\begin{pmatrix}1&16&-11\\0&-3&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&-3&2\end{pmatrix}$ $x_2=\frac{2x_3}{3}$ $x_1=\frac{x_3}{3}$ ФСР:

x_1	x_2	x_3
1	2	3

$a_1=(1;2;3)$.

$(A+7E)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $x_1=-2x_2-3x_3$. ФСР:

x_1	x_2	x_3
-2	1	0
-3	0	1

$a_2=(-2;1;0)$
$a_3=(-3;0;1)$

Кількість векторів = кратності власних чисел => існує базис простору, складений з власних векторів перетворення.
$B=\{a_1,a_2,a_3\}$ $a_1=(1;2;3)$, $a_2=(-2;1;0)$, $a_3=(-3;0;1)$.
В базисі з власних векторів матриця лінійного перетворення буде мати діагональний вигляд: $D=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&-7&0\\0&0&-7\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}2&-2&6\\2&4&-3\\-1&4&6\end{pmatrix}$ $A=BQ$, $B=B^T$, $Q^{-1}=Q^T$

$A^TA=PCP^{-1}$, $C=\begin{pmatrix}\lambda_1&\dots&0\\0\ \lambda_2&\dots&0\\0&\dots&\lambda_n\end{pmatrix}$ $\lambda_i>0$, $i=\overline{1,n}$. $P^T=P$.

$D=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&\dots&0\\0\ \sqrt{\lambda_2}&\dots&0\\0\ 0&\dots&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}$. $B=P\cdot DP^T$, $Q=B^{-1}A$.

$AA^T=\begin{pmatrix}2&-2&6\\2&4&-3\\-1&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-2&4&4\\6&-3&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}44&-22&26\\-22&29&-4\\26&-4&53\end{pmatrix}$.

$$|AA^T-\lambda E| = \begin{vmatrix} 44-\lambda & -22 & 26 \\ -22 & 29-\lambda & -4 \\ 26 & -4 & 53-\lambda \end{vmatrix} = (44-\lambda)\begin{vmatrix} 29-\lambda & -4 \\ -4 & 53-\lambda \end{vmatrix} + 22\begin{vmatrix} -22 & -4 \\ 26 & 53-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ 26\begin{vmatrix} -22 & 29-\lambda \\ 26 & -4 \end{vmatrix} = (44-\lambda)(\lambda^2-82\lambda+1521) + 22\cdot(22\lambda-1062) +$$

$$+ 26(26\lambda-666) = -\lambda^3+126\lambda^2-3969\lambda+26244 = -(\lambda-9)(\lambda-36)(\lambda-81)$$

$\lambda_1=9,\ \lambda_2=36,\ \lambda_3=81.$

$$\lambda_1=9:\ (AA^T-9E) = \begin{pmatrix} 35 & -22 & 26 \\ -22 & 20 & -4 \\ 26 & -4 & 44 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 35 & -22 & 26 \\ -22 & 20 & -4 \\ 4 & 16 & 40 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 108 & 216 \\ 0 & -162 & -324 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad x_1=-2x_3, \quad x_2=-2x_3$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
-2	-2	1

$a_1=(-2;-2;1)$

$$\lambda_2=36:\ \begin{pmatrix} 8 & -22 & 26 \\ -22 & -7 & -4 \\ 26 & -4 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2{,}75 & 3{,}25 \\ 0 & -67{,}5 & 67{,}5 \\ 0 & +67{,}5 & -67{,}5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_2=x_3, \quad x_1=-\frac{x_3}{2}.$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
-1	2	2

$a_2=(-1;2;2)$

$$\lambda_3=81:\ \begin{pmatrix} -37 & -22 & 26 \\ -22 & -52 & -4 \\ 26 & -4 & -28 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -37 & -22 & 26 \\ -22 & -52 & -4 \\ 4 & -56 & -32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -14 & -8 \\ -22 & -52 & -4 \\ -37 & -22 & 26 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -14 & -8 \\ 0 & -360 & -180 \\ 0 & -540 & -270 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -14 & -8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad x_1=x_3 \quad x_2=-\frac{x_3}{2}$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
2	-1	2

$a_3=(2;-1;2).$

$$p_1=\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right),\ p_2=\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right),\ p_3=\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right).$$

$$P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.\quad B=PDP^T=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$Q=B^{-1}A.\quad B^{-1}:\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{19}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{3}{13} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{81}{13} & -\frac{5}{13} & -\frac{2}{13} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{17{,}5}{81} & \frac{7}{81} & -\frac{5}{81} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{81} & \frac{19}{81} & -\frac{2}{81} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{81} & -\frac{2}{81} & \frac{13}{81} \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \frac{1}{81} \cdot \begin{pmatrix} 17{,}5 & 7 & -5 \\ 7 & 19 & -2 \\ -5 & -2 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \frac{1}{81} \cdot \begin{pmatrix} 17{,}5 & 7 & -5 \\ 7 & 19 & -2 \\ -5 & -2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$