Індексні множини. Теорема Райса

Індексна множина — множина всіх номерів (індексів) деякої множини об'єктів (з ЧРФ чи РПМ).

Нехай $\varphi: \mathbb{N} \to \mathcal{K}$ — ефективна нумерація множини об'єктів з $\mathcal{K}$. Тоді $\varphi^{-1}(B)$, де $B \subseteq \mathcal{K}$ — індексна множина.

Позначимо її $N(B)$.

Наприклад, $N(\text{РФ}) = \{x \mid \varphi_x \in \text{РФ}\}$ — номери всіх РФ,

$N(f_\emptyset)$ — номери всіх всюди невизначених ф-й,

$N(\text{ПРМ})$ — номери всіх ПРМ,

$\{x \mid D_x \text{ скінченна}\}$.

Теорема Райса.
Нехай $B \subset ЧРФ^n$ та $B \neq \emptyset$.
Тоді множина $N(B)$ нерекурсивна.
Наслідок: Нехай $B \subset РПМ$ та $B \neq \emptyset$.
Тоді $N(B)$ нерекурсивна.

Отже, жодна нетривіальна властивість у класах всіх n-арних ЧРФ та всіх РПМ не може бути ефективно розпізнана!

Теорема (дуальна до Th Rice)
Нехай $B \subset ЧРФ^n$ та $f_\emptyset \in B$.
Тоді $N(B)$ — не РПМ.
Для множин:
якщо $B \subset РПМ$ та $\emptyset \in B \Rightarrow N(B)$ не РПМ

Приклад 1. $A = \{x \mid D_x \neq \varnothing\}$ — РПМ
не РМ

$\ulcorner$ "$D_x \neq \varnothing$" $\in$ ЧРП $\Rightarrow$ A — РПМ.
За Th Rice A — нерекурсивна. $\lrcorner$

Приклад 2. $A = \{x \mid D_x \in РМ\}$ —
не РПМ.

$\ulcorner$ Бо $\varnothing$ — рекурсивна множина,
$f_\varnothing \in \{\varphi_x \mid D_x \in РМ\}$. $\lrcorner$