




# Практикум з математичного аналізу

для студентів спеціальності “Інженерія програмного забезпечення”  
факультету комп’ютерних наук та кібернетики

Семестр 2

Ляшко С. І., Аджубей Л. Т., Затула Д. В.



# Зміст

Передмова . . . . .	3
---------------------	---

## Розділ 5. Первісна та інтеграл Ньютона-Лейбніца

Тема 11. Первісна. Елементарні методи інтегрування . . . . .	4
Тема 12. Інтегрування раціональних функцій . . . . .	9
Тема 13. Інтегрування ірраціональних функцій методом раціоналізації . . . . .	14
Тема 14. Інтегрування тригонометричних функцій та їх раціональних комбінацій . . . . .	23

## Розділ 6. Інтеграл Рімана

Тема 15. Означення інтеграла Рімана та його зв'язок з інтегралом Ньютона-Лейбніца . . . . .	27
Тема 16. Основні теореми інтегрального числення . . . . .	34
Тема 17. Застосування інтеграла Рімана . . . . .	41

## Розділ 7. Функції багатьох змінних

Тема 18. Простір $m$ -вимірних функцій, їх границя та неперервність . . . . .	45
Тема 19. Похідна і диференціал функції багатьох змінних. Похідні та диференціали вищих порядків . . . . .	54
Тема 20. Екстремуми функцій багатьох змінних . . . . .	64

## Розділ 8. Числові та функціональні ряди. Невласні інтеграли

Тема 21. Ряди з невід'ємними членами. Ряди з членами довільного знаку . . . . .	73
Тема 22. Функціональні послідовності і ряди. Степеневі ряди . . . . .	78
Тема 23. Ряди Фур'є . . . . .	83
Тема 24. Невласні інтеграли . . . . .	83
Відповіді та вказівки . . . . .	84
Рекомендовані джерела . . . . .	88

# Передмова

Курс математичного аналізу є основою фундаментальної математичної підготовки для випускників природничих спеціальностей у класичних університетах.

Даний практикум з математичного аналізу призначений студентам спеціальності 121 “Інженерія програмного забезпечення” факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Він відповідає програмі курсу, яка складається з 58 годин лекцій та 56 годин практичних занять. Практикум складається з двох частин, кожна з яких містить 14 практичних занять і відповідає матеріалу одного семестру.

Основною метою, яку переслідували автори, є забезпечення навчальним матеріалом практичних занять в рамках стислого курсу математичного аналізу. В посібнику кожна тема містить всі необхідні означення і твердження, що дозволяє розв’язувати запропоновані задачі без додаткової літератури. В якості основного теоретичного матеріалу і практичних завдань використані підручники і збірник задач з математичного аналізу авторів І.І. Ляшко, С.І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О.К. Боярчук, І.М. Александрович, О.І. Молодцов, Д.А. Номіровський, Б.В. Рубльов та інші [?, 1, 3, 4].

## Тематичний план практичних занять. Семестр 2

<b>Первісна та інтеграл Ньютона-Лейбніца</b>
15. Первісна. Елементарні методи інтегрування.
16. Інтегрування раціональних функцій.
17. Інтегрування ірраціональних функцій методом раціоналізації.
18. Інтегрування тригонометричних функцій та їх раціональних комбінацій.
<b>Інтеграл Рімана</b>
19. Означення інтеграла Рімана та його зв'язок з інтегралом Ньютона-Лейбніца.
20. Основні теореми інтегрального числення.
21. Застосування інтеграла Рімана.
<b>Функції багатьох змінних</b>
22. Простір $m$ -вимірних функцій, їх границя та неперервність.
23. Похідна і диференціал функції багатьох змінних. Похідні та диференціали вищих порядків.
24. Екстремуми функцій багатьох змінних.
<b>Числові та функціональні ряди. Невласні інтеграли</b>
25. Ряди з невід’ємними членами. Ряди з членами довільного знаку.
26. Функціональні послідовності і ряди. Степеневі ряди.
27. Ряди Фур’є.
28. Невласні інтеграли.

# Розділ 5. Первісна та інтеграл Ньютона-Лейбніца

## Тема 11. Первісна. Елементарні методи інтегрування

Нехай  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Функція  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається **первісною функції**  $f(x)$ , якщо  $D_f = D_F$  і  $\forall x \in D_f$  виконується:  $F'(x) = f(x)$ . Оскільки  $\frac{dF}{dx} = f(x)$ ,  $dF = f(x) dx$ , то  $F(x) = \int f(x) dx$  називається **невизначеним інтегралом**.

**Теорема (про структуру первісної).** Нехай  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — первісна для функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Тоді  $\forall x \in D_f = D_F: F'(x) = f(x)$ . Для того, щоб довільна функція  $\Phi(x)$  була первісною для  $f(x) \Leftrightarrow \Phi(x) - F(x) = C, C \in \mathbb{R}$ .

Сукупність всіх первісних функцій для  $f(x)$  називається **невизначеним інтегралом** і  $\int f(x) dx = \{F(x) + C \mid x \in D_f, C \in \mathbb{R}\}$ , де  $F'(x) = f(x)$ . Як правило, позначення множини опускають і пишуть  $F(x) + C$ .

### Інтеграл Ньютона-Лейбніца

Інтеграл Ньютона-Лейбніца, який запроваджується до розгляду, замінює собою невизначений інтеграл, який традиційно вивчають лише з точки зору правил та техніки його обчислення, не займаючись застосуваннями [1, с. 196].

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається **інтегрованою в сенсі Ньютона-Лейбніца** на множині  $X \subset D_f$ , якщо  $\forall x \in X$  вона має первісну, тобто

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \{F(a) = 0 \wedge \forall x \in X : F'(x) = f(x)\}.$$

Функція  $F(x)$  називається **інтегралом Ньютона-Лейбніца** з фіксованою нижньою межею  $a$  і змінною верхньою  $x$ . Її значення  $F(b)$  в точці  $b \in X$  називається **визначеним інтегралом Ньютона-Лейбніца** і позначається  $\int_a^b f(t) dt$ , де  $t$  — змінна інтегрування, від вибору якої величина інтегралу не залежить. Якщо  $f$  інтегровна в сенсі Ньютона-Лейбніца на множині  $X$  і множина точок її розриву — не більш ніж зліченна, то  $F(x)$  — це первісна у широкому розумінні.

**Теорема (формула Ньютона-Лейбніца).** Якщо  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  інтегровна в сенсі Ньютона-Лейбніца на  $D_f$  і  $F$  — її первісна, то  $\forall a \in D_f$  і  $\forall b \in D_f$  існує  $\int_a^b f(x) dx$ , однозначно визначений, і має місце рівність:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \stackrel{def}{=} F(x) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

**Властивості інтеграла Ньютона–Лейбніца** [1, с. 177–179]. Нехай функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  та  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  інтегровні в сенсі Ньютона–Лейбніца,  $D_f = D_g$  та  $a, b, c \in D_f$ .

1. *Антисиметричність*:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

2. *Адитивність*:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

3. *Диференційовність*:  $\forall x \in D_f$

$$\left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x); \quad \left( \int_x^a f(t) dt \right)' = -f(x).$$

4. *Лінійність*:  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  функція  $(\lambda f + \mu g)(x)$  також інтегровна в сенсі Ньютона–Лейбніца і

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

### Таблиця основних інтегралів

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\int 0 dx = C;$  | 2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$ |
| 3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln  x  + C;$  | 4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1;$                 |
| 5) $\int \cos x dx = \sin x + C;$  | 6) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$   |
| 7) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C;$   | 8) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C;$               |
| 9) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$  | 10) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$               |
| 11) $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C;$                           | 12) $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C.$ |
| 13) $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$              | 14) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$        |
| 15) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C, a \neq 0;$ |  |
| 16) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + C.$        |  |

### Методи обчислення інтеграла Ньютона–Лейбніца

**Теорема (метод заміни змінної).** Нехай  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , при цьому  $\exists \varphi'(x) \forall x \in X, X = D_{f \circ \varphi}$ . Якщо  $f(\tau)$ , де  $\tau = \varphi(x)$ , — інтегровна за Ньютоном–Лейбніцем функція на множині  $X$ , то функція  $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$  також інтегровна та  $\forall a, b \in X$  має місце формула заміни змінної в інтегралі:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\tau) d\tau, \quad \tau = \varphi(x).$$

**Зауваження.** Якщо в інтегралі чисельник є похідною від знаменника, то

$$\int_a^x \frac{f'(t) dt}{f(t)} = \ln |f(t)| \Big|_a^x = \ln |f(x)| - \ln |f(a)| \quad \forall \{a, x\} : f(a) \neq 0, f(x) \neq 0.$$

**Теорема (метод інтегрування частинами).** Нехай  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_u = D_v$ ,  $\exists u'(x), v'(x)$  для довільного  $x \in D_u$ , і нехай існує первісна для функції  $u'(x) \cdot v(x)$ . Тоді існує первісна для  $u(x) \cdot v'(x)$  і має місце формула інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} d(u \cdot v) &= u dv + v du, \quad u dv = d(u \cdot v) - v du \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_a^b u dv &= \int_a^b d(uv) - \int_a^b v du \Rightarrow \int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du, \quad \forall (a, b) \in D_u. \end{aligned}$$

### Первісна у широкому розумінні

Функція  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається **первісною у широкому розумінні** для функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  на множині  $X \subset D_F$ , якщо  $F$  неперервна та існує  $F'(x) = f(x)$  для всіх точок множини  $X$ , можливо, за виключенням не більш ніж зліченної її підмножини.

## Практичне заняття 15

**Приклад 1.** Обчислимо невизначений інтеграл  $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x}{3x^3} dx$ .

Г

В результаті почленного ділення чисельника на знаменник отримуємо суму степеневих функцій:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x}{3x^3} dx = \int \left( \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{4}{3x} - \frac{8}{3x^2} \right) dx.$$

Далі скористаємося лінійністю інтеграла і таблицею основних інтегралів:

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{4}{3x} - \frac{8}{3x^2} \right) dx &= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} \cdot x + \frac{4}{3} \cdot \ln |x| - \frac{8}{3} \cdot \left( -\frac{1}{x} \right) + C = \\ &= \frac{x^2}{6} - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \ln |x| + \frac{8}{3x} + C, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

┐

**Приклад 2.** Обчислимо невизначений інтеграл  $\int \frac{e^{x+1}}{2^{x-1}} dx$ .

Г

Перетворимо підінтегральну функцію до зручного вигляду та скористаємося табличним інтегралом  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ :

$$\int \frac{e^{x+1}}{2^{x-1}} dx = 2e \int \frac{e^x}{2^x} dx = 2e \int \left( \frac{e}{2} \right)^x dx = 2e \cdot \left( \frac{e}{2} \right)^x \left( \ln \frac{e}{2} \right)^{-1} + C.$$

┐

**Приклад 3.** Обчислимо невизначений інтеграл  $\int \frac{dx}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$ .

Зведемо інтеграл до табличного:  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ . Для цього зробимо лінійну заміну змінної:  $x + \frac{\pi}{6} = t$ ,  $dx = dt$ . Тоді  $\forall x \notin \left\{\frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ :

$$\int \frac{dx}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$$

**Приклад 4.** Обчислимо невизначений інтеграл  $\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}$ .

Зведемо інтеграл до табличного:  $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$ . Для цього винесемо сталу  $a$  з-під знаку інтеграла:

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2} x^2\right)} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{b}{a} x\right)^2}.$$

Тепер зробимо лінійну заміну змінної:  $t = \frac{b}{a} x$ ,  $dx = \frac{a}{b} dt$ . Тоді:

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{b}{a} x\right)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + t^2} \cdot \frac{a}{b} dt = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} x + C.$$

**Приклад 5.** Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца  $\int_a^x \frac{t^7}{\sqrt{1 - t^{16}}} dt$ .

Функцію  $f(t) = \frac{t^7}{\sqrt{1 - t^{16}}}$  можна представити у вигляді  $f(t) = g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ , де  $\varphi(t) = t^8$ . Тому зробимо раціональну підстановку  $y = \varphi(t)$ :

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{t^7}{\sqrt{1 - t^{16}}} dt &= \left| t = \sqrt[8]{y}, dt = \frac{1}{8\sqrt[8]{y^7}} dy \right| = \int_{a^8}^{x^8} \frac{\sqrt[8]{y^7}}{\sqrt{1 - y^2}} \cdot \frac{dy}{8\sqrt[8]{y^7}} = \\ &= \frac{1}{8} \arcsin y \Big|_{a^8}^{x^8} = \frac{1}{8} (\arcsin x^8 - \arcsin a^8), \quad \{a, x\} \subset [-1, 1]. \end{aligned}$$

**Приклад 6.** Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца  $\int_a^x \frac{e^{\operatorname{tg} t} + \operatorname{ctg} t}{\cos^2 t} dt$ .

Оскільки підінтегральна функція залежить лише від функції  $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$  та її похідної  $\varphi'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$ , то зробимо раціональну заміну змінної:

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{e^{\operatorname{tg} t} + \operatorname{ctg} t}{\cos^2 t} dt &= \left| y = \operatorname{tg} t, dy = \frac{dt}{\cos^2 t} \right| = \int_{\operatorname{tg} a}^{\operatorname{tg} x} \left( e^y + \frac{1}{y} \right) dy = \\ &= (e^y + \ln |y|) \Big|_{\operatorname{tg} a}^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x} - e^{\operatorname{tg} a} + \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \right|, \quad \{a, x\} \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Обчисліть невизначені інтеграли, використовуючи таблицю основних інтегралів:

$$15.1 \quad \int \frac{x^5 + 2x^3 - 4x^2 - x + 11}{x^2} dx;$$

$$15.2 \quad \int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx;$$

$$15.3 \quad \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx;$$

$$15.4 \quad \int 2 \cos^2 \frac{x}{2} dx;$$

$$15.5 \quad \int (\cos 2x \sin x - \sin 2x \cos x) dx;$$

$$15.6 \quad \int \operatorname{tg}^2 x dx;$$

$$15.7 \quad \int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x dx;$$

$$15.8 \quad \int \frac{3^{x+1} + e^{3x} - e^{x-1}}{e^x} dx.$$

Обчисліть невизначені інтеграли, використовуючи лінійну заміну змінної:

$$15.9 \quad \int \frac{dx}{(2x-3)^5};$$

$$15.10 \quad \int \sqrt[3]{(5-8x)^4} dx;$$

$$15.11 \quad \int e^{-3x+1} dx;$$

$$15.12 \quad \int \sin(2x-3) dx;$$

$$15.13 \quad \int \frac{dx}{2x^2+9};$$

$$15.14 \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$$

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца, використовуючи раціональну заміну змінної:

$$15.15 \quad \int_a^x \frac{t^3}{t^2-4} dt;$$

$$15.16 \quad \int_a^x \frac{t}{\sqrt{b^2 t^2 + a^2}} dt;$$

$$15.17 \quad \int_a^x t^4 \sin(t^5+3) dt;$$

$$15.18 \quad \int_a^x t \sqrt{b^2 t^2 + a^2} dt;$$

$$15.19 \quad \int_a^x \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}} dt;$$

$$15.20 \quad \int_a^x e^{\sin t} \cos t dt;$$

$$15.21 \quad \int_a^x \frac{dt}{t \ln t};$$

$$15.22 \quad \int_a^x \frac{dt}{t \ln t \ln \ln t}.$$



# Тема 12. Інтегрування раціональних функцій

**Раціональна функція однієї змінної** (або ж **дробово-раціональна функція**) — це алгебраїчний вираз, що є відношенням двох многочленів, коефіцієнти яких належать множині дійсних чисел, тобто має вигляд:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_mx^m + \dots + a_1x + a_0}{b_nx^n + \dots + b_1x + b_0},$$

де  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n$  — сталі,  $m$  та  $n$  — невід'ємні цілі числа.

Якщо  $m \geq n$ , то дріб неправильний. Кожен неправильний дріб може бути представлений у вигляді суми многочлена  $W(x)$  (ціла частина) та правильно-го дробу  $\left(\frac{R}{Q}\right)$ :  $\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ . З класу правильних дробів виділяють 4 типи основних *елементарних дробів*:  $\frac{A}{x-b}$ ,  $\frac{A}{(x-b)^n}$ ,  $\frac{Mx+N}{x^2+2px+q}$  та  $\frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^n}$ , де  $b, p, q, M, N \in \mathbb{R}$ , а  $n > 1$  — ціле число. При цьому  $x^2 + 2px + q$  не має дійсних коренів у випадку, якщо дискримінант  $D < 0 \Leftrightarrow p^2 - q < 0 \Leftrightarrow q - p^2 > 0$ .

## Розвинення правильних дробів на прості

Вигляд розвинення правильних дробів на прості залежить від розвинення многочлена  $Q_n(x)$  на множники. Кожен многочлен  $n$ -го степеня з дійсними коефіцієнтами і коефіцієнтом 1 при  $x^n$  можна однозначно представити у вигляді співмножників виду  $x - b$  та  $x^2 + px + q$ . Якщо маємо співмножники, що співпадають, то:

$$Q_n(x) = (x - a_1)^{n_1} (x - a_2)^{n_2} \dots (x - a_k)^{n_k} \times \\ \times (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{m_2} \dots (x^2 + p_rx + q_r)^{m_r},$$

де  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  — корені многочлена  $Q_n(x)$ ;  $n_i, i = \overline{1, k}$  — кратності коренів  $a_i$ ;  $p_j, q_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, r}$  — коефіцієнти тричленів;  $m_j, j = \overline{1, r}$  — кратності квадратичних тричленів. При цьому  $\sum_{i=1}^k n_i + 2 \sum_{j=1}^r m_j = n$ .

Будь-який правильний раціональний дріб єдиним способом розкладається на скінченне число елементарних дробів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^{n_1}} + \frac{A_2}{(x - a_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{A_{n_1}}{x - a_1} + \frac{B_1}{(x - a_2)^{n_2}} + \frac{B_2}{(x - a_2)^{n_2-1}} + \\ + \dots + \frac{B_{n_2}}{x - a_2} + \dots + \frac{K_1}{(x - a_k)^{n_k}} + \frac{K_2}{(x - a_k)^{n_k-1}} + \dots + \frac{K_{n_k}}{x - a_k} + \dots + \\ + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2-1}} + \dots + \frac{M_rx + N_r}{x^2 + p_rx + q_r}. \quad (1)$$

Для того, щоб визначити невідомі коефіцієнти, множимо обидві частини на  $Q(x)$ . Із рівності многочленів у лівій і правій частинах (1) впливає рівність

коефіцієнтів при однакових степенях  $x$ . Прирівнюємо їх і отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод знаходження коефіцієнтів розвинення правильного раціонального дробу у суму простих дробів називається **методом невизначених коефіцієнтів**.

## Практичне заняття 16

**Приклад 1.** Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца  $\int_a^x \frac{A dt}{t-b}$ , де  $b \cap [a, x] = \emptyset$ .

┐

Зведемо інтеграл до табличного лінійною заміною  $y = t - b \neq 0$ :

$$\int_a^x \frac{A dt}{t-b} = \int_{a-b}^{x-b} \frac{A dy}{y} = A \ln |y| \Big|_{a-b}^{x-b} = A (\ln |x-b| - \ln |a-b|), \quad [a, x] \cap \{b\} = \emptyset.$$

┐

**Приклад 2.** Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца  $\int_a^x \frac{dt}{(t-b)^n}$ , де  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .

┐

Зведемо інтеграл до табличного лінійною заміною  $y = t - b \neq 0$ :

$$\int_a^x \frac{dt}{(t-b)^n} = \int_{a-b}^{x-b} \frac{dy}{y^n} = \int_{a-b}^{x-b} y^{-n} dy = \frac{y^{1-n}}{1-n} \Big|_{a-b}^{x-b} = \frac{(x-b)^{1-n}}{1-n} - \frac{(a-b)^{1-n}}{1-n}.$$

┐

**Приклад 3.** Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца  $\int_a^x \frac{(Mt+N) dt}{t^2+2pt+q}$ , де  $M, N, p, q \in \mathbb{R}$  і квадратний тричлен  $x^2+2px+q$  не має дійсних коренів.

┐

Позначимо  $b^2 = q - p^2 > 0$  та зробимо лінійну заміну змінної  $y = t + p$ :

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(Mt+N) dt}{t^2+2pt+q} &= \int_a^x \frac{(Mt+N) dt}{(t+p)^2+q-p^2} = \left| \begin{array}{l} t = y - p \\ dy = dt \end{array} \right| = \\ &= \int_{a+p}^{x+p} \frac{(My - Mp + N) dy}{y^2 + b^2} = M \int_{a+p}^{x+p} \frac{y dy}{y^2 + b^2} + \int_{a+p}^{x+p} \frac{(N - Mp) dy}{y^2 + b^2} = \\ &= \frac{M}{2} \int_{a+p}^{x+p} \frac{dy^2}{y^2 + b^2} + (N - Mp) \int_{a+p}^{x+p} \frac{dy}{y^2 + b^2} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(y^2 + b^2) \Big|_{a+p}^{x+p} + (N - Mp) \cdot \frac{1}{b} \arctg \frac{y}{b} \Big|_{a+p}^{x+p} = \\ &= \left( \frac{M}{2} \ln |(t+p)^2 + q - p^2| + \frac{N - Mp}{\sqrt{q - p^2}} \arctg \frac{t+p}{\sqrt{q - p^2}} \right) \Big|_{t=a}^{t=x}. \end{aligned}$$

┐

**Приклад 4.** Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца  $\int_a^x \frac{(Mt+N) dt}{((t+p)^2+b^2)^n}$ , де  $M, N, p, b \in \mathbb{R}$  та  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .

┐

Позначимо  $b^2 = q - p^2 > 0$  та зробимо лінійну заміну змінної  $y = t + p$ :

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(Mt + N) dt}{((t + p)^2 + b^2)^n} &= \left| \begin{array}{l} t = y - p \\ dy = dt \end{array} \right| = \int_{a+p}^{x+p} \frac{M(y - p) + N}{(y^2 + b^2)^n} dy = \\ &= \frac{M}{2} \int_{a+p}^{x+p} \frac{2y dy}{(y^2 + b^2)^n} + (N - Mp) \int_{a+p}^{x+p} \frac{dy}{(y^2 + b^2)^n}.\end{aligned}$$

Тоді:

$$\begin{aligned}\int_{a+p}^{x+p} \frac{2y dy}{(y^2 + b^2)^n} &= \int_{a+p}^{x+p} \frac{d(y^2 + b^2)}{(y^2 + b^2)^n} = \frac{(y^2 + b^2)^{1-n}}{1-n} \Big|_{a+p}^{x+p} = \\ &= \frac{((x+p)^2 + q - p^2)^{1-n} - ((a+p)^2 + q - p^2)^{1-n}}{1-n}.\end{aligned}$$

Позначимо другий інтеграл як  $I_n = \int_{a+p}^{x+p} \frac{dy}{(y^2 + b^2)^n}$  та запишемо для нього рекурентну формулу, використовуючи формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned}I_n &= \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{(y^2 + b^2)^n}, \quad du = \frac{-2ny}{(y^2 + b^2)^{n+1}} dy \\ dv = dy, \quad v = y \end{array} \right| = \\ &= \frac{y}{(y^2 + b^2)^n} \Big|_{a+p}^{x+p} + 2n \int_{a+p}^{x+p} \frac{y^2 dy}{(y^2 + b^2)^{n+1}} = \\ &= \frac{t + p}{((t + p)^2 + b^2)^n} \Big|_a^x + 2n \int_{a+p}^{x+p} \frac{y^2 + b^2 - b^2}{(y^2 + b^2)^{n+1}} dy = \\ &= \frac{t + p}{((t + p)^2 + b^2)^n} \Big|_a^x + 2n \int_{a+p}^{x+p} \frac{dy}{(y^2 + b^2)^n} - 2nb^2 \int_{a+p}^{x+p} \frac{dy}{(y^2 + b^2)^{n+1}} = \\ &= \frac{t + p}{((t + p)^2 + b^2)^n} \Big|_a^x + 2nI_n - 2nb^2 I_{n+1}.\end{aligned}$$

Тобто

$$\begin{aligned}2nb^2 I_{n+1} &= \frac{t + p}{((t + p)^2 + b^2)^n} \Big|_a^x + (2n - 1)I_n; \\ I_{n+1} &= \frac{1}{2nb^2} \left( \frac{t + p}{((t + p)^2 + b^2)^n} \Big|_a^x + (2n - 1)I_n \right), \quad I_1 = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{t + p}{b} \Big|_a^x.\end{aligned}$$

**Приклад 5.** Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца  $\int_a^x \frac{2t^3 - 6t^2 - 11}{(1 - t)^2(4 + t^2)} dt$ .

┐

Оскільки підінтегральна функція є правильним раціональним дробом, то розкладемо її на прості дробі відповідно до формули (1):

$$\frac{2t^3 - 6t^2 - 11}{(1 - t)^2(4 + t^2)} = \frac{A}{1 - t} + \frac{B}{(1 - t)^2} + \frac{Ct + D}{t^2 + 4};$$

$$2t^3 - 6t^2 - 11 = A(1 - t)(t^2 + 4) + B(t^2 + 4) + (Ct + D)(1 - t)^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях  $t$ , отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти  $A, B, C$  та  $D$ :

$$\begin{aligned} t^3 : & \begin{cases} 2 = -A + C \end{cases} \\ t^2 : & \begin{cases} -6 = A + B - 2C + D \end{cases} \\ t^1 : & \begin{cases} 0 = -4A + C - 2D \end{cases} \\ t^0 : & \begin{cases} -11 = 4A + 4B + D \end{cases} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -3 \\ C = 2 \\ D = 1 \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{2t^3 - 6t^2 - 11}{(1-t)^2(4+t^2)} dt &= -3 \int_a^x \frac{dt}{(1-t)^2} + \int_a^x \frac{2t+1}{t^2+4} dt = \\ &= 3 \int_a^x \frac{d(1-t)}{(1-t)^2} + \int_a^x \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} + \int_a^x \frac{dt}{t^2+4} = \\ &= \left( -\frac{3}{1-t} + \ln(t^2+4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right) \Big|_a^x, \quad [a, x] \cap \{1\} = \emptyset. \end{aligned}$$

**Приклад 6.** Обчислимо інтеграл Ньютона-Лейбніца  $\int_a^x \ln t \, dt$ .

┐

Застосуємо формулу інтегрування частинами для того, щоб отримати інтеграл від похідної функції  $f(t) = \ln t$ :

$$\int_a^x \ln t \, dt = \left| \begin{array}{ll} u = \ln t, & du = \frac{1}{t} dt \\ dv = dt, & v = t \end{array} \right| = t \ln t \Big|_a^x - \int_a^x dt = t(\ln t - 1) \Big|_a^x, \quad [a, x] \subset (0, +\infty).$$

┐

**Приклад 7.** Обчислимо інтеграл Ньютона-Лейбніца  $\int_a^x e^{at} \cos bt \, dt$ .

┐

Двічі скористаємося формулою інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} I = \int_a^x e^{at} \cos bt \, dt &= \left| \begin{array}{ll} u = \cos bt, & du = -b \sin bt \, dt \\ dv = e^{at} \, dt, & v = \frac{1}{a} e^{at} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{a} e^{at} \cos bt \Big|_a^x + \frac{b}{a} \int_a^x e^{at} \sin bt \, dt = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = \sin bt, & du = b \cos bt \, dt \\ dv = e^{at} \, dt, & v = \frac{1}{a} e^{at} \end{array} \right| = \\ &= \frac{e^{at}}{a^2} (a \cos bt + b \sin bt) \Big|_a^x - \frac{b^2}{a^2} \int_a^x e^{at} \cos bt \, dt. \end{aligned}$$

Тобто отримали рівність, з якої можна виразити значення інтеграла:

$$I = \frac{e^{at}}{a^2} (a \cos bt + b \sin bt) \Big|_a^x - \frac{b^2}{a^2} I;$$

$$I = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} (a \cos bt + b \sin bt) \Big|_a^x.$$

┘

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца шляхом розкладу правильних дробів на прості:

$$\mathbf{16.1} \quad \int_a^x \frac{4t}{2t+1} dt;$$

$$\mathbf{16.2} \quad \int_a^x \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} dt;$$

$$\mathbf{16.3} \quad \int_a^x \frac{3t^4}{t^2 + t - 2} dt;$$

$$\mathbf{16.4} \quad \int_a^x \frac{t^4 + 1}{t^3 - t^2 + t - 1} dt;$$

$$\mathbf{16.5} \quad \int_a^x \frac{dt}{t^4 - 1};$$

$$\mathbf{16.6} \quad \int_a^x \frac{t^3 - 6t^2 + 9t + 7}{(t-2)^3(t-5)} dt;$$

$$\mathbf{16.7} \quad \int_a^x \frac{t^4 - 7t^3 - 8t^2 - 23t - 11}{(t^2 + 4t + 5)(t-3)^2(t+2)} dt;$$

$$\mathbf{16.8} \quad \int_a^x \frac{4t^4 - t^3 + 7t^2 + 2}{(t-1)(t^2 + 1)^2} dt.$$

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца за допомогою формули інтегрування частинами:

$$\mathbf{16.9} \quad \int_a^x t \cos t dt;$$

$$\mathbf{16.10} \quad \int_a^x t e^{-t} dt;$$

$$\mathbf{16.11} \quad \int_a^x e^t \sin t dt;$$

$$\mathbf{16.12} \quad \int_a^x \operatorname{arctg} \sqrt{t} dt;$$

$$\mathbf{16.13} \quad \int_a^x \arccos t dt;$$

$$\mathbf{16.14} \quad \int_a^x (\arcsin t)^2 dt;$$

$$\mathbf{16.15} \quad \int_a^x t \operatorname{tg}^2 t dt;$$

$$\mathbf{16.16} \quad \int_a^x 3t^2 \ln(1+t) dt;$$

$$\mathbf{16.17} \quad \int_a^x \sin \ln t dt;$$

$$\mathbf{16.18} \quad \int_a^x \frac{t \operatorname{arctg} t}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

# Тема 13. Інтегрування ірраціональних функцій методом раціоналізації

**Ірраціональна функція** — це елементарна функція, побудована зі степеневих функцій з раціональними показниками, яка не зводиться до раціональної або дробово-раціональної функції. Основним методом інтегрування ірраціональних функцій є пошук підстановок, які дають змогу позбутися від ірраціональностей у підінтегральній функції та звести задачу до інтегрування раціональної або дробово-раціональної функції. Такі підстановки називаються **раціоналізуючими**.

**Раціональна функція**  $R(x_1; x_2; \dots; x_n)$  — це довільна функція, яка отримана в результаті скінченного числа арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення та ділення) над змінними  $x_1, x_2, \dots, x_n$  і довільними числами.

Нехай  $k_1, k_2, \dots, k_n$  та  $l_1, l_2, \dots, l_n$  — деякі цілі числа,  $n \in \mathbb{N}$ , а  $r$  — спільне кратне чисел  $l_1, l_2, \dots, l_n$ .

1.  $\int_a^x R\left(t; t^{\frac{k_1}{l_1}}; \dots; t^{\frac{k_n}{l_n}}\right) dt$  зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції за допомогою підстановки  $t = y^r$ ,  $dt = ry^{r-1} dy$ .

2.  $\int_a^x R\left(t; \left(\frac{bt+p}{ct+s}\right)^{\frac{k_1}{l_1}}; \dots; \left(\frac{bt+p}{ct+s}\right)^{\frac{k_n}{l_n}}\right) dt$  зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції підстановкою  $y^r = \frac{bt+p}{ct+s}$ ,  $dt = d\left(\frac{sy^r - p}{b - cy^r}\right)$ .

## Інтеграли, що містять квадратний тричлен

1. Для інтеграла вигляду  $\int_a^x \frac{P_m(t)}{\sqrt{\alpha t^2 + bt + c}} dt$ , де  $P_m(t)$  — многочлен степеня  $m \geq 1$ , має місце рівність:

$$\int_a^x \frac{P_m(t)}{\sqrt{\alpha t^2 + bt + c}} dt = Q_{m-1}(t) \cdot \sqrt{\alpha t^2 + bt + c} \Big|_{t=a}^{t=x} + \lambda \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{\alpha t^2 + bt + c}},$$

де  $Q_{m-1}(x)$  — многочлен  $(m-1)$ -го степеня з невизначеними коефіцієнтами,  $\lambda$  — стала, що також є невизначеним коефіцієнтом. Диференціюючи це рівняння, маємо, що

$$P_m(x) = Q'_{m-1}(x) \cdot (\alpha x^2 + bx + c) + Q_{m-1}(x) \cdot \frac{2\alpha x + b}{2} + \lambda.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $x$ , отримаємо систему лінійних рівнянь, з якої знаходяться всі невідомі коефіцієнти.

2.  $\int_a^x \frac{dt}{(t-d)^n \cdot \sqrt{\alpha t^2 + bt + c}}$ , де  $n \in \mathbb{N}$  та  $d \notin [a, x]$ , зводиться до інтеграла вигляду  $\operatorname{sgn}(d-x) \int \frac{y^{n-1} dy}{\sqrt{\alpha^* y^2 + b^* y + c^*}}$  заміною  $t-d = \frac{1}{y}$ .

**3.** Інтеграл  $\int_a^x R(t; \sqrt{\alpha t^2 + bt + c}) dt$  зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції при застосуванні однієї з **підстановок Ейлера**.

**Перша підстановка Ейлера**  $\sqrt{\alpha t^2 + bt + c} = y - \sqrt{\alpha t}$  застосовується у випадку, якщо  $\alpha > 0$ . У такому разі  $t = \frac{y^2 - c}{2\sqrt{\alpha}y + b}$  та

$$\sqrt{\alpha t^2 + bt + c} = y - \sqrt{\alpha} \cdot \frac{y^2 - c}{2\sqrt{\alpha}y + b} = \frac{\sqrt{\alpha}y^2 + by + c\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}y + b}.$$

Після інтегрування отриманого дробу повертаємось до змінної  $t$  підстановкою  $y = \sqrt{\alpha t^2 + bt + c} + \sqrt{\alpha t}$ .

**Друга підстановка Ейлера**  $\sqrt{\alpha t^2 + bt + c} = ty + \sqrt{c}$  застосовується у випадку, якщо  $c > 0$ . У такому разі  $t = \frac{2\sqrt{c}y - b}{\alpha - y^2}$  та

$$\sqrt{\alpha t^2 + bt + c} = y \cdot \frac{2\sqrt{c}y - b}{\alpha - y^2} + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}y^2 - by + \alpha\sqrt{c}}{\alpha - y^2}.$$

**Третя підстановка Ейлера**  $\sqrt{\alpha t^2 + bt + c} = y(t - t_1)$  застосовується у випадку, якщо квадратний тричлен  $\alpha t^2 + bt + c$  має різні дійсні корені  $t_1, t_2$  та коефіцієнт  $\alpha > 0$ . Тоді

$$\sqrt{\alpha t^2 + bt + c} = \sqrt{\alpha(t - t_1)(t - t_2)} = \sqrt{\alpha} |t - t_1| \sqrt{\frac{t - t_2}{t - t_1}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{\alpha(t - t_2)}{t - t_1}}$$

і маємо інтеграл  $\int_a^x R_1 \left( t; \sqrt{\frac{\alpha(t - t_2)}{t - t_1}} \right) dt$ .

Зазначимо, що застосування підстановок Ейлера призводить до громіздких обчислень. Тому, як альтернативу, використовують інші способи інтегрування. Зокрема, у тричлені можна виділити повний квадрат:

$$\alpha t^2 + bt + c = \alpha \left( \left( t + \frac{b}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha c - b^2}{4\alpha^2} \right).$$

Тоді інтеграл  $\int_a^x R(t; \sqrt{\alpha t^2 + bt + c}) dt$  за допомогою заміни  $y = t + \frac{b}{2\alpha}$  в залежності від знаків  $\alpha$  та  $(4\alpha c - b^2)$  зводиться до інтеграла одного з видів:

4.  $\int R(y; \sqrt{q^2 - y^2}) dy$ , що заміною  $y = q \sin u$  зводиться до  $\int R(\sin u, \cos u) du$ .
5.  $\int R(y; \sqrt{y^2 + q^2}) dy$ , що заміною  $y = q \operatorname{tg} u$  зводиться до  $\int R(\sin u, \cos u) du$ .
6.  $\int R(y; \sqrt{y^2 - q^2}) dy$ , що заміною  $y = \frac{q}{\cos u}$  зводиться до  $\int R(\sin u, \cos u) du$ .

### Інтегрування диференціальних біномів

Вираз  $x^m(a + bx^n)^p$ , де  $m, n, p$  — раціональні числа, називається **диференціальним біномом**.

**Теорема (Чебишева).** Первісна функції  $x^m(a + bx^n)^p$  виражається через елементарні функції тільки в наступних трьох випадках: 1)  $p$  — ціле число; 2)  $\frac{m+1}{n}$  — ціле; 3)  $\frac{m+1}{n} + p$  — ціле.

Для зазначених випадків наведемо підстановки, які призводять до інтегрування раціональних функцій.

1. Нехай  $p$  — ціле число,  $m = \frac{k}{l}$  та  $n = \frac{r}{s}$ , де  $k, l, r, s$  — цілі. Інтеграл  $\int x^m(a + bx^n)^p dx$  заміною  $x = y^\lambda$ ,  $dx = \lambda y^{\lambda-1} dy$ , де  $\lambda$  — найменше спільне кратне чисел  $l$  та  $s$ , зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції.

2. Нехай  $\frac{m+1}{n}$  — ціле число,  $p = \frac{\mu}{\lambda}$ . Тоді інтеграл  $\int x^m(a + bx^n)^p dx$  заміною  $a + bx^n = y^\lambda$  зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції.

3. Нехай  $\frac{m+1}{n} + p$  — ціле число,  $p = \frac{\mu}{\lambda}$ . Тоді інтеграл  $\int x^m(a + bx^n)^p dx$  заміною  $\frac{a + bx^n}{x^n} = y^\lambda$  зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції.

## Практичне заняття 17

**Приклад 1.** Обчислимо інтеграл Ньютона-Лейбніца  $\int_a^x \frac{\sqrt{t} + 1}{t^2 - \sqrt{t}} dt$ .

Г

Зведемо задачу до інтегрування дробово-раціональної функції за допомогою заміни  $t = y^2$ ,  $dt = 2y dy$ :

$$\int_a^x \frac{\sqrt{t} + 1}{t^2 - \sqrt{t}} dt = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} \frac{y + 1}{y^4 - y} \cdot 2y dy = 2 \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} \frac{y + 1}{y^3 - 1} dy.$$

Оскільки отримали правильний дріб під знаком інтеграла, то можемо розкласти його на прості дробі:

$$\frac{y + 1}{y^3 - 1} = \frac{y + 1}{(y - 1)(y^2 + y + 1)} = \frac{A}{y - 1} + \frac{By + C}{y^2 + y + 1};$$

$$y + 1 = A(y^2 + y + 1) + (By + C)(y - 1).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях  $y$ , отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти  $A, B$  та  $C$ :

$$\begin{aligned} y^2 : & \begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = A - B + C \\ 1 = A - C \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{2}{3}, B = -\frac{2}{3}, C = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\int_a^x \frac{\sqrt{t} + 1}{t^2 - \sqrt{t}} dt = 2 \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} \frac{\frac{2}{3}}{y - 1} dy - 2 \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} \frac{\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}}{y^2 + y + 1} dy =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{3} \ln |y-1| \Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} - \frac{2}{3} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} \frac{2y+1}{(y+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dy = \\
&= \frac{4}{3} \ln |\sqrt{t}-1| \Big|_a^x - \frac{2}{3} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{(y+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} d\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \\
&= \frac{4}{3} \ln |\sqrt{t}-1| \Big|_a^x - \frac{2}{3} \ln \left| \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right| \Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} = \\
&= \frac{2}{3} \left( 2 \ln |\sqrt{t}-1| - \ln |t+\sqrt{t}+1| \right) \Big|_a^x, \quad [a, x] \subset (0, +\infty) \setminus \{1\}. \quad \square
\end{aligned}$$

**Приклад 2.** Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца  $\int_a^x \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} dt$ , вважаючи, що проміжок інтегрування  $[a, x] \subset [1, +\infty)$ .

Зведемо задачу до інтегрування дробово-раціональної функції за допомогою заміни  $\frac{t-1}{t+1} = y^2 \Rightarrow t = \frac{y^2+1}{1-y^2}$ ,  $dt = \frac{4y}{(y^2-1)^2} dy$ . Тоді:

$$\int_a^x \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} dt = \int_{\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} y \cdot \frac{4y}{(y^2-1)^2} dy = \int_{\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \frac{4y^2}{(y^2-1)^2} dy.$$

Розкладемо правильний дріб під знаком інтеграла на прості дробі:

$$\frac{4y^2}{(y^2-1)^2} = \frac{4y^2}{(y-1)^2(y+1)^2} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{(y-1)^2} + \frac{C}{y+1} + \frac{D}{(y+1)^2};$$

$$4y^2 = A(y-1)(y+1)^2 + B(y+1)^2 + C(y+1)(y-1)^2 + D(y-1)^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях  $y$ , отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти  $A, B, C$  та  $D$ :

$$\begin{aligned}
y^3: & \begin{cases} 0 = A + C \end{cases} \\
y^2: & \begin{cases} 4 = A + B - C + D \end{cases} \\
y^1: & \begin{cases} 0 = -A + 2B - C - 2D \end{cases} \\
y^0: & \begin{cases} 0 = -A + B + C + D \end{cases}
\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -1 \\ D = 1 \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\int_a^x \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} dt &= \int_{\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \left( \frac{1}{y-1} + \frac{1}{(y-1)^2} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{(y+1)^2} \right) dy = \\
&= \left( \ln |y-1| - \frac{1}{y-1} - \ln |y+1| - \frac{1}{y+1} \right) \Big|_{\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \\
&= \left( \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| - \frac{2y}{y^2-1} \right) \Big|_{\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} =
\end{aligned}$$

$$= \left( \ln \left| \frac{\sqrt{t-1} - \sqrt{t+1}}{\sqrt{t-1} + \sqrt{t+1}} \right| + (t+1)\sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \right) \Big|_a^x, \quad [a, x] \subset [1, +\infty).$$

**Приклад 3.** Обчислимо інтеграл Ньютона-Лейбніца  $\int_a^x \frac{6t^3 - t - 1}{\sqrt{t^2 + 2t + 2}} dt$ .

Підінтегральна функція має вигляд  $\frac{P_3(t)}{\sqrt{at^2 + bt + c}}$ , тобто можемо представити інтеграл у вигляді

$$\int_a^x \frac{6t^3 - t - 1}{\sqrt{t^2 + 2t + 2}} dt = (At^2 + Bt + C)\sqrt{t^2 + 2t + 2} \Big|_{t=a}^{t=x} + \lambda \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2t + 2}}.$$

Після диференціювання даної рівності маємо:

$$6x^3 - x - 1 = (2Ax + B) \cdot (x^2 + 2x + 2) + (Ax^2 + Bx + C) \cdot (x + 1) + \lambda.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях  $x$ , отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти  $A, B, C$  та  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} x^3 : & \begin{cases} 6 = 3A \\ 0 = 5A + 2B \\ -1 = 4A + 3B + C \\ -1 = 2B + C + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -5 \\ C = 6 \\ \lambda = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{6t^3 - t - 1}{\sqrt{t^2 + 2t + 2}} dt &= (2t^2 - 5t + 6)\sqrt{t^2 + 2t + 2} \Big|_a^x + 3 \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2t + 2}} = \\ &= (2t^2 - 5t + 6)\sqrt{t^2 + 2t + 2} \Big|_a^x + 3 \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2 + 1}} = \\ &= (2t^2 - 5t + 6)\sqrt{t^2 + 2t + 2} \Big|_a^x + 3 \ln \left| t + 1 + \sqrt{(t+1)^2 + 1} \right| \Big|_a^x. \end{aligned}$$

**Приклад 4.** Обчислимо інтеграл Ньютона-Лейбніца  $\int_a^x \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2 + t - 1}}$ .

Зведемо інтеграл до більш простого вигляду заміною  $\frac{1}{t} = y$ ,  $-\frac{1}{t^2} dt = dy$  (розглянемо випадок  $[a, x] \subset (0, +\infty)$ ):

$$\int_a^x \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2 + t - 1}} = - \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{x}} \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} - 1}} = - \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{x}} \frac{y dy}{\sqrt{1 + y - y^2}}.$$

Оскільки  $1 + y - y^2 = \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{4} - y + y^2\right) = \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2} - y\right)^2$ , то лінійною заміною змінної  $z = \frac{1}{2} - y$  зведемо інтеграл до двох табличних:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{x}} \frac{y \, dy}{\sqrt{1+y-y^2}} &= \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}} \frac{(z + \frac{1}{2}) \, dz}{\sqrt{\frac{5}{4} - z^2}} = \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}} \frac{d(\frac{5}{4} - z^2)}{\sqrt{\frac{5}{4} - z^2}} + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{5}{4} - z^2}} = \\
&= -\sqrt{\frac{5}{4} - z^2} \Big|_{z=\frac{1}{2}-\frac{1}{a}}^{z=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2z}{\sqrt{5}} \Big|_{z=\frac{1}{2}-\frac{1}{a}}^{z=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}} = \\
&= -\sqrt{1+y-y^2} \Big|_{y=\frac{1}{a}}^{y=\frac{1}{x}} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1-2y}{\sqrt{5}} \Big|_{y=\frac{1}{a}}^{y=\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{dt}{t^2 \sqrt{t^2 + t - 1}} &= \left( \sqrt{1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1 - \frac{2}{t}}{\sqrt{5}} \right) \Big|_{t=a}^{t=x} = \\
&= \left( \frac{1}{t} \sqrt{t^2 + t - 1} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{t-2}{\sqrt{5}t} \right) \Big|_{t=a}^{t=x}, \quad [a, x] \subset (0, +\infty).
\end{aligned}$$

**Приклад 5.** Обчислимо інтеграл Ньютона-Лейбніца  $\int_a^x \frac{dt}{t - \sqrt{t^2 + 2t + 4}}$ .

Підінтегральна функція має вигляд  $R(t; \sqrt{\alpha t^2 + bt + c})$ , причому у даному випадку  $\alpha = 1 > 0$ . Тож зручно буде застосувати першу підстановку Ейлера  $\sqrt{t^2 + 2t + 4} = y - t \Leftrightarrow t = \frac{y^2 - 4}{2(y+1)}$ , в результаті чого отримаємо інтеграл від дробово-раціональної функції:  $\sqrt{t^2 + 2t + 4} = \frac{y^2 + 2y + 4}{2(y+1)}$ ;  $dt = \frac{y^2 + 2y + 4}{2(y+1)^2} dy$ ;

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{dt}{t - \sqrt{t^2 + 2t + 4}} &= \int_{a+\sqrt{a^2+2a+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} \frac{1}{\frac{y^2-4}{2(y+1)} - \frac{y^2+2y+4}{2(y+1)}} \cdot \frac{y^2 + 2y + 4}{2(y+1)^2} dy = \\
&= - \int_{a+\sqrt{a^2+2a+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} \frac{y^2 + 2y + 4}{2(y+1)(y+4)} dy = \\
&= - \frac{1}{2} \int_{a+\sqrt{a^2+2a+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} \left( 1 - \frac{3y}{(y+1)(y+4)} \right) dy.
\end{aligned}$$

Оскільки отримали правильний дріб під знаком інтеграла, то можемо розкласти його на прості дробі:

$$\frac{3y}{(y+1)(y+4)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+4} = \frac{(A+B)y + 4A + B}{(y+1)(y+4)}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях  $y$ , отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти  $A$  та  $B$ :

$$\begin{aligned} y^1 : \quad & 3 = A + B \\ y^0 : \quad & 0 = 4A + B \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 4 \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{dt}{t - \sqrt{t^2 + 2t + 4}} &= \\ &= -\frac{1}{2} \left( t + \sqrt{t^2 + 2t + 4} \right) \Big|_a^x + \frac{1}{2} \int_{a+\sqrt{a^2+2a+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} \left( \frac{-1}{y+1} + \frac{4}{y+4} \right) dy = \\ &= -\frac{1}{2} \left( t + \sqrt{t^2 + 2t + 4} \right) \Big|_a^x + \frac{1}{2} \left( -\ln |y+1| + 4 \ln |y+4| \right) \Big|_{a+\sqrt{a^2+2a+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} = \\ &= -\frac{1}{2} \left( t + \sqrt{t^2 + 2t + 4} + \ln \left| t + 1 + \sqrt{t^2 + 2t + 4} \right| \right) \Big|_a^x + \\ &+ 2 \ln \left| t + 4 + \sqrt{t^2 + 2t + 4} \right| \Big|_a^x. \end{aligned}$$

┘

**Приклад 6.** Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца  $\int_a^x \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{t} dt$ .

Оскільки вираз під знаком інтеграла  $\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{t} dt = t^{-1} \left( 1 + t^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dt$  є диференціальним біномом, то застосуємо теорему Чебишева. Маємо, що  $p = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ , але  $\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{\frac{1}{2}} = 0 \in \mathbb{Z}$ , тому використаємо другу підстановку Чебишева:  $y^3 = 1 + t^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow t = (y^3 - 1)^2$ ;  $dt = 6y^2(y^3 - 1) dy$ . Тоді:

$$\int_a^x \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{t} dt = \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{a}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{y}{(y^3 - 1)^2} \cdot 6y^2(y^3 - 1) dy = 6 \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{a}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{y^3 dy}{y^3 - 1}.$$

Після виділення із неправильного дробу під знаком інтеграла цілої частини маємо:

$$6 \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{a}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{(y^3 - 1 + 1) dy}{y^3 - 1} = 6 \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{a}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} dy + \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{a}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{6 dy}{y^3 - 1}.$$

Отриманий правильний дріб у другому інтегралі розкладемо на прості дробі:

$$\begin{aligned} \frac{6}{y^3 - 1} &= \frac{6}{(y-1)(y^2 + y + 1)} = \\ &= \frac{A}{y-1} + \frac{By + C}{y^2 + y + 1} = \frac{(A+B)y^2 + (A-B+C)y + A-C}{(y-1)(y^2 + y + 1)}. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях  $y$ , отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти  $A, B$  та  $C$ :

$$\begin{aligned} y^2 : & \begin{cases} 0 = A + B \\ 0 = A - B + C \\ 6 = A - C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -2 \\ C = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{a}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{6 dy}{y^3 - 1} &= \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{a}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{2 dy}{y - 1} - \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{a}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{(2y + 4) dy}{y^2 + y + 1} = \\ &= 2 \ln |y - 1| \Big|_{\sqrt[3]{1+\sqrt{a}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} - \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{a}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{2y + 4}{(y + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dy. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{a}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{2y + 4}{(y + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dy &= \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{a}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{d \left( (y + \frac{1}{2})^2 \right)}{(y + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + 3 \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{a}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{dy}{(y + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \left( \ln \left| \left( y + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right| + \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2(y + \frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \right) \Big|_{\sqrt[3]{1+\sqrt{a}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{t} dt &= \left( 6\sqrt[3]{1+\sqrt{t}} + 2 \ln \left| \sqrt[3]{1+\sqrt{t}} - 1 \right| - 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1+\sqrt{t}} + 1}{\sqrt{3}} - \right. \\ &\quad \left. - \ln \left| \sqrt[3]{(1+\sqrt{t})^2} + \sqrt[3]{1+\sqrt{t}} + 1 \right| \right) \Big|_a^x, \quad [a, x] \cap \{0\} = \emptyset. \end{aligned}$$

┘

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца:

$$17.1 \quad \int_a^x \frac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t^2} - \sqrt{t}} dt;$$

$$17.2 \quad \int_a^x \frac{dt}{t(\sqrt{t} + \sqrt[5]{t^2})};$$

$$17.3 \quad \int_a^x \frac{t^2}{\sqrt{t-1}} dt;$$

$$17.4 \quad \int_a^x \frac{t^2 + \sqrt{t+1}}{\sqrt[3]{t+1}} dt;$$

$$17.5 \quad \int_a^x \frac{t\sqrt[3]{2+t}}{t + \sqrt[3]{2+t}} dt;$$

$$17.6 \quad \int_a^x \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{dt}{t};$$

$$17.7 \quad \int_a^x \frac{3t^2 - 5t}{\sqrt{3-2t-t^2}} dt;$$

$$17.8 \quad \int_a^x \frac{3t^3}{\sqrt{t^2+4t+5}} dt;$$

$$17.9 \quad \int_a^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2+4t-4}};$$

$$17.10 \quad \int_a^x \frac{dt}{(t-1)\sqrt{t^2+t+1}};$$

$$17.11 \quad \int_a^x \frac{dt}{1 + \sqrt{t^2+2t+2}};$$

$$17.12 \quad \int_a^x \frac{2 dt}{\sqrt{t^2+t+1-t}};$$

$$\mathbf{17.13} \quad \int_a^x \frac{dt}{1 + \sqrt{1 - 2t - t^2}};$$

$$\mathbf{17.15} \quad \int_a^x \frac{t^5}{\sqrt{1 - t^2}} dt;$$

$$\mathbf{17.17} \quad \int_a^x \frac{dt}{t^{11} \sqrt{1 + t^4}};$$

$$\mathbf{17.14} \quad \int_a^x t^{-1} \left(1 + t^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} dt;$$

$$\mathbf{17.16} \quad \int_a^x \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{t}}}{2t} dt;$$

$$\mathbf{17.18} \quad \int_a^x \frac{\sqrt{1 + \sqrt[4]{t^3}}}{t^2 \cdot \sqrt[8]{t}} dt.$$

# Тема 14. Інтегрування тригонометричних функцій та їх раціональних комбінацій

Інтеграли вигляду  $\int_a^x R(\sin t; \cos t) dt$ , де у загальному випадку  $R$  — деяка раціональна функція, зводяться до інтегралів від дробово-раціональних функцій за допомогою **універсальної тригонометричної підстановки**  $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = y$ . При цьому  $t = 2 \operatorname{arctg} y$ ,  $dt = \frac{2 dy}{1 + y^2}$ ;

$$\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = 2 \cdot \frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} \cdot \cos^2 \frac{t}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} = \frac{2y}{1 + y^2};$$

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}.$$

Зазначимо, що застосування підстановки  $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = y$  можливе лише при  $t \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k)$ , де  $k$  — довільне ціле число.

У деяких частинних випадках існують такі способи інтегрування  $R(\sin t; \cos t)$ .

**1.** Якщо  $R(\sin t; \cos t)$  — непарна функція за змінною  $\sin t$ , тоді раціоналізація досягається заміною  $y = \cos t$ .

**2.** Якщо  $R(\sin t; \cos t)$  — непарна функція за змінною  $\cos t$ , тоді раціоналізація досягається заміною  $y = \sin t$ .

**3.** Якщо  $R(-\sin t; -\cos t) = R(\sin t; \cos t)$ , то заміна  $y = \operatorname{tg} t$  призведе до інтегрування дробово-раціональної функції, при цьому застосування підстановки можливе при  $t \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . У такому разі:  $\sin t = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}$ ,  $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$  та  $dt = \frac{dy}{1 + y^2}$ .

**4.** Інтеграл  $\int_a^x \sin^n t \cos^m t dt$  у випадку раціональних  $m$  і  $n$  зводиться до інтегрування диференціального біному підстановкою  $y = \sin^2 t$ ,  $dy = 2 \sin t \cos t dt$ :

$$\begin{aligned} \int_a^x \sin^n t \cos^m t dt &= \frac{1}{2} \int_a^x \sin^{n-1} t (1 - \sin^2 t)^{\frac{m-1}{2}} \cdot 2 \sin t \cos t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\sin^2 a}^{\sin^2 x} y^{\frac{n-1}{2}} (1 - y)^{\frac{m-1}{2}} dy. \end{aligned}$$

Якщо  $m, n$  — парні натуральні числа, то використовуємо формули пониження степеня:  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ,  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ .

Наведемо деякі інтеграли, що не обчислюються за допомогою елементарних функцій:  $\int_a^x e^{-t^2} dt$  — *інтеграл Пуассона*,  $\int_a^x \sin t^2 dt$  та  $\int_a^x \cos t^2 dt$  — *інтеграли Френеля*,  $\int_a^x \frac{dt}{\ln t}$  — *інтегральний логарифм*,  $\int_a^x \frac{\sin t}{t} dt$  — *інтеграл Діріхле*.

## Практичне заняття 18

**Приклад 1.** Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца  $\int_a^x \cos^5 t \, dt$ .

┐

Оскільки підінтегральна функція є непарною по змінній  $\cos t$ , тобто виконується умова  $R(\sin t; -\cos t) = -R(\sin t; \cos t)$ , то застосуємо підстановку  $y = \sin t$ :

$$\begin{aligned} \int_a^x \cos^5 t \, dt &= \int_a^x \cos^4 t \, d(\sin t) = \int_a^x (1 - \sin^2 t)^2 \, d(\sin t) = \int_{\sin a}^{\sin x} (1 - y^2)^2 \, dy = \\ &= \left( y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_{\sin a}^{\sin x} = \left( \sin t - \frac{2\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{5} \right) \Big|_a^x. \end{aligned}$$

┘

**Приклад 2.** Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца  $\int_a^x \frac{dt}{3 \sin t + \cos t}$ .

┐

Оскільки підінтегральна функція не є непарною по змінним  $\sin t$  та  $\cos t$ , а також не виконується умова  $R(-\sin t; -\cos t) = R(\sin t; \cos t)$ , то застосуємо універсальну тригонометричну підстановку  $y = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ :

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{dt}{3 \sin t + \cos t} &= \int_{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \frac{1}{\frac{6y}{1+y^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2}} \cdot \frac{2 \, dy}{1+y^2} = -2 \int_{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \frac{d(y-3)}{(y-3)^2 - 10} = \\ &= -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{y-3-\sqrt{10}}{y-3+\sqrt{10}} \right| \Big|_{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} - 3 - \sqrt{10}}{\operatorname{tg} \frac{t}{2} - 3 + \sqrt{10}} \right| \Big|_a^x. \end{aligned}$$

┘

**Приклад 3.** Знайдемо рекурентну формулу для інтеграла Ньютона–Лейбніца

$$I_n = \int_a^x \frac{dt}{\cos^n t}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \text{ та } [x_0, x] \cap \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\} = \emptyset.$$

┐

Скористаємося формулою інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^x \frac{dt}{\cos^n t} = \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{(\cos t)^{n-2}}, \quad du = -\frac{n-2}{(\cos t)^{n-1}} \cdot (-\sin t) \, dt \\ dv = \frac{1}{\cos^2 t} \, dt, \quad v = \operatorname{tg} t \end{array} \right| = \\ &= \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^{n-2} t} \Big|_a^x - (n-2) \int_a^x \operatorname{tg} t \cdot \frac{\sin t}{\cos^{n-1} t} \, dt = \\ &= \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^{n-2} t} \Big|_a^x - (n-2) \int_a^x \left( \frac{1}{\cos^n t} - \frac{1}{\cos^{n-2} t} \right) \, dt = \\ &= \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^{n-2} t} \Big|_a^x - (n-2) \cdot (I_n - I_{n-2}). \end{aligned}$$

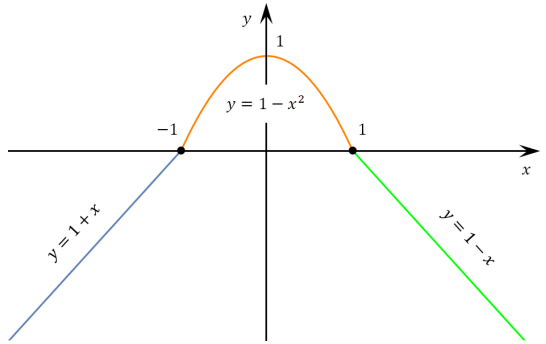
Отримали рівність, з якої можна виразити значення інтеграла  $I_n$  через  $I_{n-2}$ :



$$I_n = \frac{\sin t}{(n-1) \cos^{n-1} t} \Big|_a^x + \frac{n-2}{n-1} \cdot I_{n-2}.$$

**Приклад 4.** Знайдемо первісну у широкому розумінні для функції

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1; \\ 1 - |x|, & |x| > 1. \end{cases}$$



Побудуємо графік функції  $f(x)$ . На проміжках  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  та  $(1, +\infty)$  функція  $f$  має первісну  $F$ , причому

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + C_1, & x < -1; \\ x - \frac{x^3}{3} + C_2, & x \in (-1, 1); \\ -\frac{x^2}{2} + x + C_3, & x > 1. \end{cases}$$

Співвідношення між сталими  $C_1$ ,  $C_2$  та  $C_3$  визначимо з умови неперервності первісної  $F$  на множині  $D_f = \mathbb{R}$ :  $F(-1-0) = F(-1+0)$ ,  $F(1-0) = F(1+0)$ . Тому

$$\frac{1}{2} - 1 + C_1 = -1 + \frac{1}{3} + C_2, \quad 1 - \frac{1}{3} + C_2 = -\frac{1}{2} + 1 + C_3.$$

Отже,  $C_1 = C_2 - \frac{1}{6}$  та  $C_3 = C_2 + \frac{1}{6}$ , звідки первісна функції  $f$ :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{6} + C, & x < -1; \\ x - \frac{x^3}{3} + C, & x \in [-1, 1]; \\ -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{6} + C, & x > 1. \end{cases}$$

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца:

**18.1**  $\int_a^x \sin^3 t \cdot \sin 4t \, dt;$

**18.2**  $\int_a^x \sin^2 t \cdot \cos^3 t \, dt;$

**18.3**  $\int_a^x \frac{\sin^3 t}{\cos^4 t} \, dt;$

**18.4**  $\int_a^x \frac{dt}{\sin^4 t \cdot \cos^2 t};$

**18.5**  $\int_a^x \frac{dt}{\sin 2t};$

**18.6**  $\int_a^x \frac{dt}{\cos t};$

**18.7**  $\int_a^x \frac{dt}{3 - 2 \cos t};$

**18.8**  $\int_a^x \frac{dt}{5 - 3 \sin t};$

$$\mathbf{18.9} \quad \int_a^x \frac{dt}{1 + 5 \cos t};$$

$$\mathbf{18.10} \quad \int_a^x \frac{dt}{2 \sin t - \cos t + 5};$$

$$\mathbf{18.11} \quad \int_a^x \frac{8 \cos^2 t \sin t}{\sin t + \cos t} dt;$$

$$\mathbf{18.12} \quad \int_a^x \frac{2 \sin t \cos t}{1 + \sin^4 t} dt.$$

Знайдіть рекурентні формули для інтегралів Ньютона–Лейбніца:

$$\mathbf{18.13} \quad I_n = \int_a^x \cos^n t \, dt, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\mathbf{18.14} \quad J_n = \int_a^x \frac{dt}{\sin^n t}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть первісні у широкому розумінні для функцій:

$$\mathbf{18.15} \quad f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\mathbf{18.16} \quad f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 + x - 2), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\mathbf{18.17} \quad f(x) = [3x], \quad x \in \left(0, \frac{4}{3}\right);$$

$$\mathbf{18.18} \quad f(x) = \{x\}, \quad x \in (-1, 2);$$

$$\mathbf{18.19} \quad f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0; \\ x, & 0 < x \leq 1; \\ \sin \pi x, & x > 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{18.20} \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq \frac{\pi}{4}; \\ \cos x, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}; \\ 3 \sin 3x, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

# Розділ 6. Інтеграл Рімана

## Тема 15. Означення інтеграла Рімана та його зв'язок з інтегралом Ньютона–Лейбніца

Сукупність точок  $P = P([a, b]) = \{x_k \mid k = \overline{0, n}\}$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , таких, що

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b,$$

називається **розбиттям** відрізка  $[a, b]$ . Множина точок  $\xi_P = \{\xi_k \mid k = \overline{0, n-1}\}$ :  $\forall k = \overline{0, n-1} \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$  називається **сукупністю проміжних точок**, що відповідає розбиттю  $P$ . Величина  $\|P\| = \max_{k=\overline{0, n-1}} \Delta x_k$ , де  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ , називається **діаметром (нормою) розбиття  $P$** .

Нехай  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . **Інтегральною сумою Рімана** для функції  $f$  по розбиттю  $P = P([a, b])$  і набору проміжних точок  $\xi_P$  називається число

$$S_P(f, \xi_P) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Число  $I \in \mathbb{R}$  називається **інтегралом Рімана** функції  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ :

$$\forall (P = P([a, b]), \xi_P), \quad \|P\| < \delta \Rightarrow |I - S_P(f, \xi_P)| < \varepsilon.$$

При цьому зазвичай число  $I$  записують таким чином:  $\int_a^b f(x) dx$ .

Якщо існує скінченна границя  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_P(f, \xi_P) = I$ , яка не залежить ні від способу розбиття, ні від вибору сукупності проміжних точок, то  $f$  — **інтегровна за Ріманом** функція, а сама границя  $I = \int_a^b f(x) dx$ . Множина функцій, інтегровних за Ріманом на відрізку  $[a, b]$ , позначається як  $R([a, b])$ .

**Теорема (про інтегральні суми для інтеграла Ньютона–Лейбніца).**

Нехай  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  інтегровна в розумінні Ньютона–Лейбніца на  $[a, b]$  і  $\int_a^b f(x) dx$  — інтеграл Ньютона–Лейбніца. Тоді  $\forall P = P([a, b])$  існує така  $\xi_P$ , що виконується рівність:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = S_P(f, \xi_P).$$

**Теорема (про зв'язок інтегралів Рімана та Ньютона–Лейбніца).**

Якщо інтеграли Рімана та Ньютона–Лейбніца функції  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  існують одночасно, то вони рівні один одному.

**Теорема (інтегровність неперервної функції).** Якщо  $f \in C([a, b])$ , то  $f$  — інтегровна за Ріманом на відрізку  $[a, b]$ . Тобто  $C([a, b]) \subset R([a, b])$ .

**Теорема (інтегровність функції зі скінченною множиною точок розриву).** Якщо функція  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  обмежена на  $[a, b]$  та  $f \in C([a, b] \setminus A)$ , де  $A = \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \subset [a, b]$ , то  $f$  — інтегровна за Ріманом на відрізку  $[a, b]$ .

Нехай  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — обмежена на відрізку  $[a, b]$  функція. Для кожного  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  визначимо числа  $m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$  та  $M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$ .

Тоді *нижньою* та *верхньою інтегральними сумами Дарбу* для функції  $f$  і розбиття  $P = P([a, b])$  називаються, відповідно, числа

$$\underline{S}_P(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad \overline{S}_P(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Числа  $\int f(x) dx = \sup_P \underline{S}_P(f)$  та  $\bar{\int} f(x) dx = \inf_P \overline{S}_P(f)$  називаються, відповідно, *нижнім* та *верхнім інтегралами Дарбу* функції  $f$  на відрізку  $[a, b]$ .

**Лема (зв'язок між інтегралами Дарбу).** Для будь-якої обмеженої функції  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  виконується нерівність:  $\int f(x) dx \leq \bar{\int} f(x) dx$ .

Функція  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  називається *інтегровою за Дарбу* на  $[a, b]$ , якщо  $\int f(x) dx = \bar{\int} f(x) dx$ . При цьому спільне значення верхнього та нижнього інтегралів називається *інтегралом Дарбу*, який співпадає з інтегралом Рімана і позначається  $\int_a^b f(x) dx$ .

**Теорема (критерій інтегровності функції).** Для того, щоб обмежена функція  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  була інтегровою на  $[a, b]$ , необхідно і достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P = P([a, b]) : 0 \leq \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \varepsilon.$$

**Теорема (Дарбу).** [9, с. 142] Нехай  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , а також задано розбиття  $P = P([a, b])$  та набір проміжних точок  $\xi_P$ . Якщо  $\exists \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_P(f, \xi_P) = I$ , то  $f \in R([a, b])$  і при цьому  $\int_a^b f(x) dx = I$ .

Для формулювання критерію інтегровності за Ріманом (теорема Лебега) розглянемо деякі нові поняття.

**Мірою** сегмента  $[a, b]$  (інтервалу  $(a, b)$ , півінтервалу  $[a, b)$  чи  $(a, b]$ ) називають його довжину:  $\mu([a, b]) = b - a$ .

Множина  $X \subset \mathbb{R}$  має *лебегову (жорданову) міру нуль*, якщо  $\forall \varepsilon > 0$  існує зліченне покриття  $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$  (скінченне покриття  $(I_j)_{j=1, n}$ ) інтервалами, сумарна

довжина яких не перевищує  $\varepsilon$ , тобто  $\forall m \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^m \mu(I_j) < \varepsilon \left( \sum_{j=1}^n \mu(I_j) < \varepsilon \right)$ .

**Властивості множин лебегової та жорданової міри нуль.**

1. Якщо  $X$  має лебегову (жорданову) міру нуль, і  $X_1 \subset X$ , то й  $X_1$  має лебегову (жорданову) міру нуль.

2. Якщо  $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$   $\left( X = \bigcup_{j=1}^n X_j \right)$  і кожна з множин  $X_j$  має лебегову (жорданову) міру нуль, то множина  $X$  також має лебегову (жорданову) міру нуль.

3. Будь-яка множина жорданової міри нуль є множиною лебегової міри нуль.
4. Будь-яка зліченна (скінченна) множина точок має лебегову (жорданову) міру нуль.
5. Існує більш ніж зліченна (більш ніж скінченна) множина, що має лебегову (жорданову) міру нуль.

**Теорема (компакт лебегової міри нуль).** Компакт  $K \subset \mathbb{R}$  лебегової міри нуль є множиною жорданової міри нуль.

**Теорема (Лебега).** Нехай  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — обмежена функція і  $E$  — множина точок її розриву. Тоді  $f \in R([a, b]) \Leftrightarrow \mu(E) = 0$ .

### Властивості інтегровних за Ріманом функцій [1, с. 250].

Нехай функції  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  інтегровні за Ріманом на відрізку  $[a, b]$ .

1. *Лінійність:*  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  функція  $(\lambda f + \mu g) \in R([a, b])$  та

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

2. *Інтегровність модуля:*  $|f| \in R([a, b])$ .

3. *Інтегровність добутку:*  $f \cdot g \in R([a, b])$ .

4. *Інтегровність звуження:*  $\forall [a^*, b^*] \subset [a, b]$   $f \in R([a^*, b^*])$ .

5. *Адитивність по області інтегрування:* якщо  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in (a, b)$ ,  $f \in R([a, c])$  та  $f \in R([c, b])$ , то  $f \in R([a, b])$  і

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

6. *Інтеграл Рімана з нерівними функціями:* якщо  $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

**Наслідок (інтеграл від невід'ємної функції).** Якщо  $f \in R([a, b])$  та  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

**Наслідок (інтеграл Рімана від додатної функції).** Якщо  $f \in R([a, b])$ ,  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ , та  $\exists x_0 \in (a, b)$ , що  $f$  неперервна в точці  $x_0$  і  $f(x_0) > 0$ , то  $\exists c > 0$ :  $\int_a^b f(x) dx \geq c$ .

**Наслідок (двобічна оцінка інтеграла).** Якщо  $f \in R([a, b])$  та  $\forall x \in [a, b]$  виконується нерівність  $m \leq f(x) \leq M$ , то  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

**Наслідок (модуль інтеграла).** Якщо  $f \in R([a, b])$ , то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

## Практичне заняття 19

**Приклад 1.** Для функції  $f(x) = 2 - x$ ,  $x \in [a, b] = [-1, 3]$ , побудуємо нижню та верхню інтегральні суми Дарбу із розбиттям сегмента  $[a, b]$  на  $4n$  рівних частин та обчислимо інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$  як границю інтегральних сум.

Відповідно до умови,  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{4n} = \frac{1}{n} \quad \forall k = \overline{0, 4n-1}$ . Тому маємо таке розбиття відрізка  $[a, b]$ :  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = -1 + \frac{1}{n}$ ,  $\dots$ ,  $x_{4n} = -1 + \frac{4n}{n} = 3$ .

Оскільки функція  $f(x) = 2 - x$  є монотонно спадною на відрізку  $[a, b]$ , то  $\forall k = \overline{0, 4n-1}$ :

$$m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1}) = 2 - x_{k+1} = 3 - \frac{k+1}{n};$$

$$M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_k) = 2 - x_k = 3 - \frac{k}{n}.$$

Обчислимо нижню та верхню інтегральні суми Дарбу:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{P_{4n}}(f) &= \sum_{k=0}^{4n-1} m_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{4n-1} \left( 3 - \frac{k+1}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot 12n - \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{4n-1} (k+1) = \\ &= 12 - \frac{4n(4n+1)}{2n^2} = 4 - \frac{2}{n}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{S}_{P_{4n}}(f) &= \sum_{k=0}^{4n-1} M_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{4n-1} \left( 3 - \frac{k}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot 12n - \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{4n-1} k = \\ &= 12 - \frac{(4n-1)4n}{2n^2} = 4 + \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

При цьому оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{P_{4n}}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{P_{4n}}(f) = 4$ , то  $\int_{-1}^3 (2-x) dx = 4$ . ┐

**Приклад 2.** Обчислимо інтеграл Рімана  $\int_0^2 a^x dx$ , де  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$ , як границю інтегральних сум.

Функція  $f(x) = a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , є неперервною і тому інтегрованою за Ріманом на відрізку  $[0, 2]$ . Тому існує границя інтегральних сум, що за теоремою Дарбу співпадає з інтегралом Рімана:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_P(f, \xi_P) = \int_0^2 a^x dx.$$

Для обчислення цієї границі розіб'ємо відрізок  $[0, 2]$  на  $2n$  рівних частин:

$$P_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{2n-1}{n}, 2 \right\}, \quad n \geq 1,$$

та оберемо набір проміжних точок

$$\xi_{P_n} = \left\{ \xi_k = \frac{k}{n} \in \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \mid k = \overline{0, 2n-1} \right\}, \quad n \geq 1.$$

Тоді  $\Delta x_k = \frac{1}{n} \quad \forall k = \overline{0, 2n-1}$  та

$$S_{P_n}(f, \xi_{P_n}) = \sum_{k=0}^{2n-1} a^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a^2 - 1}{a^{\frac{1}{n}} - 1} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow \frac{a^2 - 1}{\ln a} = \int_0^2 a^x dx, \quad n \rightarrow \infty. \quad \lrcorner$$

**Приклад 3.** Дослідимо інтегровність за Ріманом функції Діріхле на довільному відрізку  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ :

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]; \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

┐

Множина точок розриву функції Діріхле — весь відрізок  $[a, b]$ , тобто її мірою є довжина відрізка  $b - a$ . Звідси за теоремою Лебега маємо, що функція  $D \notin R([a, b])$  для довільних  $-\infty < a < b < +\infty$ .

Також цей факт можна довести за означенням інтеграла Рімана як границі інтегральних сум. Для цього покажемо, що не існує границі інтегральних сум функції Діріхле. Оберемо довільне розбиття відрізка  $P = P([a, b]) = \{x_k \mid k = \overline{0, n}\}$ . Для кожного проміжку розбиття  $[x_k, x_{k+1}]$  існують точки  $\xi_k \in \mathbb{Q} \cap [x_k, x_{k+1}]$  та  $\theta_k \in [x_k, x_{k+1}] \setminus \mathbb{Q}$ . Складемо дві інтегральні суми Рімана для функції Діріхле по розбиттю  $P$  і наборів проміжних точок  $\xi_P = \{\xi_k \mid k = \overline{0, n-1}\}$  та  $\theta_P = \{\theta_k \mid k = \overline{0, n-1}\}$ :

$$S_P(f, \xi_P) = \sum_{k=0}^{n-1} D(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot (x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0 = b - a;$$

$$S_P(f, \theta_P) = \sum_{k=0}^{n-1} D(\theta_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 0 \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0.$$

Очевидно, що не існує границі інтегральних сум функції Діріхле на довільному відрізку  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . ┐

**Приклад 4.** Доведемо збіжність послідовності  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^2 n}$ ,  $n \geq 1$ , та виразимо значення границі цієї послідовності через визначений інтеграл.

┐

Перетворимо вираз із  $a_n$  так, щоб він набув вигляду, подібного до інтегральної суми Рімана:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2 + k^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n^2}{n^3 + n^2 \cdot n} - \frac{0^2}{n^3 + 0^2 \cdot n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}.$$

Розглянемо функцію  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ,  $x \in [0, 1]$ , значення якої присутні у сумі.

Оскільки  $f \in C([0, 1])$ , то  $f \in R([0, 1])$ . Таким чином,  $a_n - \frac{1}{2n}$  є інтегральною сумою Рімана для функції  $f$  по рівномірному розбиттю

$$P_n = P_n([0, 1]) = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}, \quad n \geq 1,$$

відрізка  $[0, 1]$  та набору проміжних точок

$$\xi_{P_n} = \left\{ \frac{k}{n} \in \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \mid k = \overline{0, n-1} \right\}, \quad n \geq 1.$$

Тобто  $a_n = S_{P_n}(f, \xi_{P_n}) + \frac{1}{2n}$ . Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$ , то

$$a_n \rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = (x - \arctg x) \Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

Для заданої функції  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  побудуйте нижню та верхню інтегральні суми Дарбу із розбиттям сегмента  $[a, b]$  на  $mn$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , рівних частин, якщо:

**19.1**  $f(x) = x^2$ ,  $[a, b] = [-1, 1]$ ,  $m = 2$ ;

**19.2**  $f(x) = x^3$ ,  $[a, b] = [-2, 3]$ ,  $m = 1$ ;

**19.3**  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ,  $[a, b] = [-2, 1]$ ,  $m = 3$ ;

**19.4**  $f(x) = |x|$ ,  $[a, b] = [-3, 2]$ ,  $m = 5$ ;

**19.5**  $f(x) = [x]$ ,  $[a, b] = [-4, 0]$ ,  $m = 4$ ;

**19.6**  $f(x) = \{x\}$ ,  $[a, b] = [1, 3]$ ,  $m = 2$ ;

**19.7**  $f(x) = \max \{x, 1-x\}$ ,  $[a, b] = [-2, 2]$ ,  $m = 8$ .

Для заданої функції  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  оцініть різницю між верхньою та нижньою інтегральними сумами Дарбу для деякого розбиття  $P = P([-1, 1])$ . Чи можливо за рахунок отриманої оцінки зробити висновок щодо інтегровності функції  $f$  за Ріманом на відрізку  $[-1, 1]$ ?

**19.8**  $f(x) = x$ ;

**19.9**  $f(x) = -|x|$ .

Обчисліть інтеграли Рімана, розглядаючи їх як границі інтегральних сум Рімана:

**19.10**  $\int_0^3 \{x\} dx$ ;

**19.11**  $\int_{-3}^2 \operatorname{sgn} x dx$ ;

**19.12**  $\int_{-\frac{3}{2}}^1 [x] dx$ ;

**19.13**  $\int_{-1}^5 (1 + |x|) dx$ ;

**19.14**  $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ ;

**19.15**  $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$ .



Знайдіть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  за допомогою інтегральних сум та інтеграла Рімана, де:

$$19.16 \quad a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2};$$

$$19.17 \quad a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k};$$

$$19.18 \quad a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{(4k-3)^3}{k^4};$$

$$19.19 \quad a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n};$$

$$19.20 \quad a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k}{n^2} \cdot \operatorname{arccctg} \frac{k}{n^3};$$

$$19.21 \quad a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \cdot \sin \frac{\pi k}{n^2};$$

$$19.22 \quad a_n = n \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n^2}} \cdot \sin \frac{k}{n^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{k^2}{n^3};$$

$$19.23 \quad a_n = \left( \prod_{k=1}^{2^n-1} \left(1 + \frac{k}{2^n}\right) \right)^{\frac{1}{2^n}};$$

$$19.24 \quad a_n = n \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \cdot \operatorname{arctg} \frac{k^2}{n^3};$$

$$19.25 \quad a_n = n \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^4 + k^4} \cdot \operatorname{arctg} \frac{k}{n} \cdot \sin \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}.$$

З'ясуйте, чи є функція  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  інтегрованою за Ріманом на  $[a, b]$ , якщо:

$$19.26 \quad f(x) = [x] \cdot x^{\alpha-1}, \alpha > 0, [a, b] = \left[1, \frac{17}{2}\right];$$

$$19.27 \quad f(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right], [a, b] = \left[\frac{1}{3}, 11\right];$$

$$19.28 \quad f(x) = \begin{cases} \left[\frac{2}{x}\right] - 2 \left[\frac{1}{x}\right], & x \neq 0; \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad [a, b] = [0, 1].$$

# Тема 16. Основні теореми інтегрального числення

**Теорема (перша теорема про середнє).** [1, с. 254] Якщо  $\{f, g\} \subset R([a, b])$  та  $\forall x \in [a, b] \quad g(x) \geq 0$  ( $g(x) \leq 0$ ), то існує таке  $\mu \in \mathbb{R}$ , що має місце рівність:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx, \quad (2)$$

де  $\inf_{x \in [a, b]} f(x) = m \leq \mu \leq M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ .

**Наслідок (для неперервної функції).** Якщо в умовах першої теореми про середнє  $f \in C([a, b])$ , то існує  $\xi \in [a, b]$  таке, що формула (2) набуває вигляду:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

**Наслідок (формула середнього значення).** Якщо  $f \in C([a, b])$ , то існує  $\xi \in [a, b]$ :  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a)$ .

**Теорема (заміна змінної в інтегралі Рімана).** Якщо  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C([a, b])$ ;  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною на  $[\alpha, \beta]$  і  $\varphi' \in R([\alpha, \beta])$ ,  $E_\varphi \subset D_f$ ,  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ , тоді має місце рівність:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi'(t) dt,$$

**Теорема (інтегрування частинами).** Нехай  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — диференційовні функції та  $f' \cdot g \in R([a, b])$ . Тоді  $f \cdot g' \in R([a, b])$  і виконується рівність:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g(x) f'(x) dx.$$

## Інтеграл Рімана як функція верхньої межі

Якщо  $f \in R([a, b])$  та  $x \in [a, b]$  — довільна точка, то за властивістю інтегровності звуження  $f \in R([a, x])$ . Таким чином, можемо визначити функцію  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , де

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

$\Phi(x)$  визначає інтеграл Рімана як *функцію верхньої межі інтегрування*.

**Теорема (про неперервність  $\Phi(x)$ ).** Якщо  $f \in R([a, b])$ , то  $\Phi \in C([a, b])$ .

**Теорема (основна теорема інтегрального числення).** Якщо функція  $f \in R([a, b])$ , то функція  $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , де  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ , диференційовна в кожній точці  $x \in [a, b]$ , в якій функція  $f$  — неперервна і  $\Phi'(x) = f(x)$ .

**Наслідок 1.** Якщо  $f \in C([a, b])$ , то функція  $f$  має на сегменті  $[a, b]$  первісну  $\Phi$ , де  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

**Наслідок 2.** Якщо  $f \in R([a, b])$  і множина точок розриву функції  $f$  не більш ніж зліченна, то функція  $\Phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , де  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ , є *первісною* (у широкому розумінні) функції  $f$  на сегменті  $[a, b]$ .

**Теорема (основна формула інтегрального числення).** Якщо функція  $f \in R([a, b])$  і множина точок розриву функції  $f$  не більш ніж зліченна, а  $F$  — будь-яка первісна (у широкому розумінні) функції  $f$  на сегменті  $[a, b]$ , то виконується рівність (*формула Ньютона-Лейбніца*):

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \stackrel{\text{def}}{=} F(b) - F(a).$$

**Теорема (друга теорема про середнє).** [1, с. 257] Нехай  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  є монотонною функцією,  $g \in R([a, b])$ . Тоді  $\exists \xi \in [a, b]$ , для якого виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx.$$

Якщо при цьому  $f$  — незростаюча на  $[a, b]$  і  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ , то  $\exists \xi \in [a, b]$ :  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx$ . Якщо  $f$  — неспадна на  $[a, b]$  і  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ , то  $\exists \xi \in [a, b]$ :  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(b) \int_\xi^b g(x) dx$ .

## Інтеграл Рімана як складна функція верхньої межі інтегрування

Нехай  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C([a, b])$ ,  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E_\varphi \subset [a, b]$ , існує похідна функції  $\varphi'(x) \quad \forall x \in [\alpha, \beta] \setminus X$  (за виключенням не більше, ніж зліченної множини точок  $X \subset [\alpha, \beta]$ ). Розглянемо  $\Phi(x) = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(y) dy$ , де  $\varphi(x_0) = t_0 \in [a, b]$ . Можемо розглядати цей інтеграл як композицію  $F \circ \varphi$ :  $F(t) = \int_{t_0}^t f(y) dy$ ,  $t \in [a, b]$ ,  $\Phi(x) = (F \circ \varphi)(x)$ . За правилом знаходження похідної складної функції будемо мати  $\Phi = F \circ \varphi$ ,  $\Phi'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ , тобто отримали, що 
$$\frac{d}{dx} \Phi(x) = \frac{d}{dx} \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(y) dy = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Якщо розглянути інтеграл Рімана як складну функцію нижньої межі інтегрування і об'єднати обидва випадки, то отримаємо:

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(y) dy = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \quad (3)$$

## Наближене обчислення інтеграла Рімана

Нехай  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in R([a, b])$ . Розіб'ємо відрізок  $[a, b]$  на  $n$  рівних проміжків:  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{n-1}, x_n]$ , де  $a = x_0$ ,  $b = x_n$ .

1. Замінюючи площі криволінійних трапецій  $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$  на площі відповідних прямокутників шириною  $(x_k - x_{k-1})$  та висотою  $f(y_k)$ ,  $y_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$ , отримаємо **формулу прямокутників** для наближеного обчислення інтеграла Рімана від функції  $f$  по проміжку  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + R_n \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right),$$

де  $R_n$  — залишковий член, значення якого визначає похибку обчислення. Зокрема, якщо  $f \in C^{(2)}([a, b])$ , то  $\exists \xi \in [a, b]$ :  $R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot f''(\xi)$ . Тоді величина абсолютної похибки у формулі прямокутників оцінюється так:

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

**2. Шляхом заміни  $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$  на площі відповідних трапецій, дістаємо *формулу трапецій*:**

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k)) + R_n \approx \frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k)),$$

де  $R_n$  — залишковий член. За умови, що  $f \in C^{(2)}([a, b])$ , існує таке  $\xi \in [a, b]$ :  $R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot f''(\xi)$ . Тоді справедливою є така оцінка абсолютної похибки у формулі трапецій:

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

## Практичне заняття 20

**Приклад 1.** Оцінимо значення інтеграла  $I = \int_0^1 \frac{x^5 dx}{1+x}$  за першою теоремою про середнє.

Позначимо  $f_1(x) = x^5$  та  $f_2(x) = \frac{1}{1+x}$  для  $x \in [0, 1]$ . Оскільки  $\forall x \in [0, 1]$ :  $f_i(x) \geq 0$ ,  $i = \overline{1, 2}$ , та  $\{f_1, f_2\} \subset R([0, 1])$  то, згідно із першою теоремою про середнє, можемо оцінити значення інтеграла  $I$  двома способами.

1) Оберемо  $f_1(x) = x^5$  в якості функції  $f$  у першій теоремі про середнє. Тоді існує таке  $\mu_1 \in \mathbb{R}$ , що має місце рівність:

$$I = \int_0^1 f_1(x) \cdot f_2(x) dx = \mu_1 \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \mu_1 \cdot \ln 2,$$

де  $0 = \inf_{x \in [0, 1]} x^5 \leq \mu_1 \leq \sup_{x \in [0, 1]} x^5 = 1$ . Тобто  $I \in [0, \ln 2]$ .

2) Тепер нехай  $f_2$  буде в якості функції  $f$  у першій теоремі про середнє. Тоді  $\exists \mu_2 \in \mathbb{R}$  таке, що:

$$I = \int_0^1 f_1(x) \cdot f_2(x) dx = \mu_2 \int_0^1 x^5 dx = \mu_2 \cdot \frac{1}{6},$$

де  $\frac{1}{2} = \inf_{x \in [0, 1]} \frac{1}{1+x} \leq \mu_2 \leq \sup_{x \in [0, 1]} \frac{1}{1+x} = 1$ . Тобто  $I \in \left[\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right]$ . Порівнюючи

дві оцінки, можемо зробити висновок, що оцінка значення інтеграла  $I$  другим способом — більш точна.  $\square$

**Приклад 2.** Оцінимо значення  $I = \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+x^2}$  за другою теоремою про середнє.

$\square$  Позначимо  $f_1(x) = e^x$  та  $f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}$  для  $x \in [0, 1]$ . Так як обидві функції є монотонними на відрізку  $[0, 1]$  та  $\{f_1, f_2\} \subset R([0, 1])$ , то застосуємо другу теорему про середнє до оцінювання значення інтеграла  $I$  двома способами.

1) Оскільки  $f_1$  зростає на  $[0, 1]$  та  $f_1(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ , то  $\exists \xi_1 \in [0, 1]$ :

$$I = \int_0^1 f_1(x) \cdot f_2(x) dx = f_1(1) \cdot \int_{\xi_1}^1 f_2(x) dx = e \cdot \left( \frac{\pi}{4} - \arctg \xi_1 \right).$$

Маємо, що  $\arctg \xi_1 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , звідки оцінка значення інтеграла:  $0 \leq I \leq \frac{e\pi}{4}$ .

2) Оскільки  $f_2$  — спадна функція на  $[0, 1]$  та  $f_2(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ , то  $\exists \xi_2 \in [0, 1]$ :

$$I = \int_0^1 f_1(x) \cdot f_2(x) dx = f_2(0) \cdot \int_0^{\xi_2} f_1(x) dx = 1 \cdot (e^{\xi_2} - 1).$$

Маємо, що  $e^{\xi_2} \in [1, e]$ , звідки оцінка значення інтеграла:  $0 \leq I \leq e - 1$ . У підсумку, ця оцінка є більш точною.  $\square$

**Приклад 3.** Обчислимо  $\int_0^3 [x] dx$ .

$\square$  На довільному проміжку  $(n, n+1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , функція  $f$  має первісну  $F$ :

$$F_{(n, n+1)}(x) = nx + C_n = [x] \cdot x + C_n.$$

Визначимо співвідношення між сталими  $\dots, C_{-2}, C_{-1}, C_0, C_1, C_2, \dots$  з умови неперервності первісної  $F$  на множині  $D_f = \mathbb{R}$ :

$$F(n-0) = F(n+0), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тому

$$\begin{aligned} (n-1) \cdot n + C_{n-1} &= n \cdot n + C_n \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C_n &= C_{n-1} - n. \end{aligned}$$

Продовжуючи за індукцією, отримаємо  $\forall n \in \mathbb{Z}$ :

$$C_n = (C_{n-2} - (n-1)) - n = \dots = C_0 - \sum_{i=1}^n i = C_0 - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Оскільки  $\forall x \in [n, n+1), n \in \mathbb{Z}: n = [x]$ , то остаточно маємо, що при  $C_0 = 0$ :

$$F(x) = [x] \cdot x - \frac{n(n+1)}{2} = [x] \cdot x - \frac{[x]([x]+1)}{2}$$

є первісною для  $f$ , неперервною  $\forall x \in D_F = D_f$  і при цьому  $F'(x) = f(x) = [x]$

$\forall x \in D_f \setminus \mathbb{Z}$ . Таким чином, за формулою Ньютона–Лейбніца:

$$\int_0^3 [x] dx = F(x) \Big|_{x=0}^{x=3} = \left( [x] \cdot x - \frac{[x]([x] + 1)}{2} \right) \Big|_{x=0}^{x=3} = 3.$$

Також цей результат можна отримати за допомогою властивості адитивності інтеграла Рімана:  $f \in R([n, n+1]) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ , тому

$$\int_0^3 [x] dx = \int_0^1 [x] dx + \int_1^2 [x] dx + \int_2^3 [x] dx = 0 + 1 + 2 = 3.$$

┐

**Приклад 4.** Для функції  $f = \int_{xt}^{\sqrt{x^2+t^2}} \cos y^2 dy$  знайдемо похідні  $\frac{df}{dx}$ , вважаючи  $t$  фіксованим параметром, та  $\frac{df}{dt}$ , вважаючи  $x$  фіксованим параметром.

┐

Розглянемо функцію  $f$  як складну функцію меж інтегрування і скористаємося формулою (3):

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx} \int_{xt}^{\sqrt{x^2+t^2}} \cos y^2 dy = \cos(x^2 + t^2) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + t^2}} - t \cdot \cos(x^2 t^2); \\ \frac{df}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{xt}^{\sqrt{x^2+t^2}} \cos y^2 dy = \cos(x^2 + t^2) \cdot \frac{t}{\sqrt{x^2 + t^2}} - x \cdot \cos(x^2 t^2). \end{aligned}$$

┐

**Приклад 5.** Обчислимо наближене значення інтеграла  $I = \int_3^5 \frac{dx}{\ln x}$  за допомогою формул прямокутників/трапецій із точністю до 0,01.

┐

Позначимо  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ ,  $x > 1$ . Первісна цієї функції визначається інтегральним логарифмом та не виражається у елементарних функціях. Для того, щоб застосувати формули наближеного обчислення інтеграла, визначимо необхідну кількість ( $n$ ) відрізків розбиття проміжку інтегрування  $[3, 5]$ . При  $x > 1$ :

$$f'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x}, \quad f''(x) = \frac{2 + \ln x}{x^2 \ln^3 x}, \quad f'''(x) = -2 \cdot \frac{\ln^2 x + 3 \ln x + 3}{x^3 \ln^4 x}.$$

Оскільки  $f'''(x)$  є неперервно-диференційовною функцією на множині  $(1, +\infty)$  і при цьому  $f'''(x) < 0 \quad \forall x > 1$ , то  $f''(x)$  монотонно спадає на  $(1, +\infty)$ . Таким чином,  $f''(x) \leq f''(3) \quad \forall x \in [3, 5]$ . Відповідно до оцінки абсолютної похибки у формулі прямокутників, маємо:

$$|R_n| \leq \frac{(5-3)^3}{24n^2} \cdot \max_{x \in [3,5]} |f''(x)| < 0,01 \Leftrightarrow n^2 > \frac{100 \cdot 2^3}{24} \cdot f''(3) \approx 8,66 \Leftrightarrow n \geq 3.$$

Тобто оптимальне значення  $n = 3$  для формули прямокутників та  $n = 5 \Rightarrow n^2 > 17,32$  для формули трапецій. Згідно із формулою прямокутників:

$$I = \int_3^5 \frac{dx}{\ln x} \approx \frac{5-3}{3} \cdot \left( f\left(\frac{10}{3}\right) + f(4) + f\left(\frac{14}{3}\right) \right) \approx 1,4674.$$

З іншого боку, за формулою трапецій отримуємо:

$$I \approx 0,2 \cdot (f(3) + 2 \cdot f(3,4) + 2 \cdot f(3,8) + 2 \cdot f(4,2) + 2 \cdot f(4,6) + f(5)) \approx 1,4736.$$

Справжнє значення  $I \approx 1,471$  узгоджується із заданою точністю обчислення.

Доведіть рівності:

$$\mathbf{20.1} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx, \quad \text{якщо } f \in C([0, 1]);$$

$$\mathbf{20.2} \quad \int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} t f(t) dt, \quad \text{якщо } a > 0 \text{ та } f \in C([0, a^2]);$$

$$\mathbf{20.3} \quad \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t dt}{\sin t}.$$

Обчисліть інтеграли Рімана:

$$\mathbf{20.4} \quad \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx;$$

$$\mathbf{20.5} \quad \int_0^2 |1 - x| dx;$$

$$\mathbf{20.6} \quad \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx;$$

$$\mathbf{20.7} \quad \int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx;$$

$$\mathbf{20.8} \quad \int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx;$$

$$\mathbf{20.9} \quad \int_0^2 [x^2] dx;$$

$$\mathbf{20.10} \quad \int_{-2\pi}^{8\pi} [\cos x] dx;$$

$$\mathbf{20.11} \quad \int_2^{\pi-1} \{x^2 - 1\} dx;$$

$$\mathbf{20.12} \quad \int_1^2 \frac{dx}{x + x^3};$$

$$\mathbf{20.13} \quad \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx.$$

Зробіть вказані заміни змінних у інтегралах (якщо це можливо):

$$\mathbf{20.14} \quad \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx, \quad x = \frac{1}{\cos t};$$

$$\mathbf{20.15} \quad \int_0^3 x \sqrt[3]{1 - x^2} dx, \quad x = \sin t;$$

$$\mathbf{20.16} \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{12 - 5 \cos x}, \quad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$\mathbf{20.17} \quad \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx, \quad f \in R([0, \pi]), \quad t = \sin x;$$

$$\mathbf{20.18} \quad \int_4^7 (x^2 - 6x + 13) dx, \quad t = x^2 - 6x + 13.$$

Чи справедливе формальне застосування формули Ньютона–Лейбніца у інтегралах:

$$\mathbf{20.19} \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2};$$

$$\mathbf{20.20} \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (2 + \operatorname{tg}^2 x)};$$

$$\mathbf{20.21} \quad \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) dx;$$

$$\mathbf{20.22} \quad \int_{-2}^3 \operatorname{sgn} x dx?$$

Знайдіть на області визначення похідні  $\frac{df}{dx}$ , вважаючи  $t$  фіксованим параметром, та  $\frac{df}{dt}$ , вважаючи  $x$  фіксованим параметром, якщо:

$$20.23 \quad f = \int_{t^2 \sin \sqrt{t}}^{x^2 t} \frac{e^y}{y} dy;$$

$$20.24 \quad f = \int_{\sin(t+x)}^{\cos(t^2+x^2)} y^2 \cos \sqrt{y} dy.$$

Знайдіть границі:

$$20.25 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt;$$

$$20.26 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{arctg} t^2 dt}{x^5};$$

$$20.27 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt};$$

$$20.28 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^3} \frac{\sin t^2}{t} dt}{\frac{x^2}{\int_0^x \sin t^{\frac{3}{2}} dt}}.$$

З'ясуйте, значення якого з двох інтегралів більше:

$$20.29 \quad \int_1^2 \ln^2 x dx \text{ чи } \int_1^2 \ln x dx?$$

$$20.30 \quad \int_0^1 2^{x^2} dx \text{ чи } \int_0^1 2^{x^3} dx?$$

$$20.31 \quad \int_0^\pi x \sin x dx \text{ чи } \int_\pi^{2\pi} x \sin x dx? \quad 20.32 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx \text{ чи } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx?$$

$$20.33 \quad \int_0^\pi e^{-x^2} \cos^2 x dx \text{ чи } \int_\pi^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx?$$

Оцініть значення інтегралів за допомогою теорем про середнє:

$$20.34 \quad \int_0^2 e^{x^2-x} dx;$$

$$20.35 \quad \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx;$$

$$20.36 \quad \int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}} dx;$$

$$20.37 \quad \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}} dx;$$

$$20.38 \quad \int_\pi^{2\pi} \sin x^2 dx;$$

$$20.39 \quad \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{1+x^2} dx;$$

$$20.40 \quad \int_{10}^{20} \frac{x^2}{x^4+x+1} dx;$$

$$20.41 \quad \int_0^{\sqrt{3}} (x-1) \operatorname{arctg} x dx.$$

Обчисліть наближені значення інтегралів за допомогою формул прямокутників/трапецій із точністю до 0,01:

$$20.42 \quad \int_2^3 \frac{e^x}{x+1} dx;$$

$$20.43 \quad \int_1^2 \sqrt{1+x^4} dx.$$



# Тема 17. Застосування інтеграла Рімана

**Площа плоскої фігури в декартових прямокутних координатах.** Нехай  $f(x)$  — неперервна невід’ємна на  $[a, b]$  функція. Площа  $S$  множини  $\Phi = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  (криволінійної трапеції) дорівнює

$$S \stackrel{\text{def}}{=} S([a, b]) = \int_a^b f(x) dx. \quad (4)$$

Якщо  $f(x) \leq 0$  на  $[a, b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx \leq 0$  і за абсолютною величиною він дорівнює площі  $S$  відповідної криволінійної трапеції  $-S = \int_a^b f(x) dx$ .

Площа, обмежена кривими  $y = f_1(x)$  та  $y = f_2(x)$ , ординатами  $x = a$ ,  $x = b$  за умови  $f_2(x) \geq f_1(x)$  обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (5)$$

**Випадок параметричної функції.** Нехай функція  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , задана параметрично:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ . При цьому функції  $x(t), y(t)$  неперервно-диференційовні та  $x^2(t) + y^2(t) \neq 0 \forall t \in [\alpha, \beta]$ , а також крива є замкнутою:  $x(\alpha) = x(\beta)$ ,  $y(\alpha) = y(\beta)$ . Тоді:

$$S(\Phi) = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \cdot y'(t) dt. \quad (6)$$

**Площа плоскої фігури в полярних координатах.** Криволінійним сектором називається плоска фігура, що обмежена неперервною кривою і променями, які виходять з полюса  $O$  і утворюють з полярною віссю кути  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$ :  $\Phi = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \rho \leq f(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$ . Тоді:

$$S \stackrel{\text{def}}{=} S([\varphi_1, \varphi_2]) = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi. \quad (7)$$

**Довжина дуги кривої.** Нехай  $f \in C^{(1)}([a, b])$  та крива задана рівнянням  $L = f(x)$  у прямокутних координатах. Довжина дуги  $AB$  кривої  $L$ , що міститься між вертикальними прямими  $x = a$  та  $x = b$ , визначається формулою

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (8)$$

Якщо крива  $\gamma$  задана у полярних координатах:  $x = \rho(\varphi) \cos \varphi$ ,  $y = \rho(\varphi) \sin \varphi$ , де  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ , то її довжина визначається за формулою:

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (9)$$

Якщо крива  $\gamma$  задана параметрично, тобто  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ , і при цьому  $\{\varphi, \psi\} \subset C^{(1)}([t_1, t_2])$ , то її довжина визначається за формулою:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \cdot \varphi'(t) dt. \quad (10)$$

**Обчислення об'ємів.** Якщо тіло  $T$  має об'єм і  $S = S(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , де  $S \in C([a, b])$  — площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі абсцис у точці  $x$ , то величина цього об'єму обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (11)$$

Якщо криволінійна трапеція  $\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ , де  $f \in C([a, b])$ , обертається навколо вісі  $Ox$ , то об'єм утвореного тіла обертання обчислюється за формулою:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (12)$$

Також за умови, що  $f$  є однозначною функцією, об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції  $\Phi$  навколо вісі  $Oy$ , обчислюється за формулою:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx. \quad (13)$$

## Практичне заняття 21

**Приклад 1.** Обчислимо площу фігури, обмеженої кривими  $y = 2 - x^2$ ,  $y = 0$  та  $y = \ln x + 1$  у прямокутній декартовій системі координат.

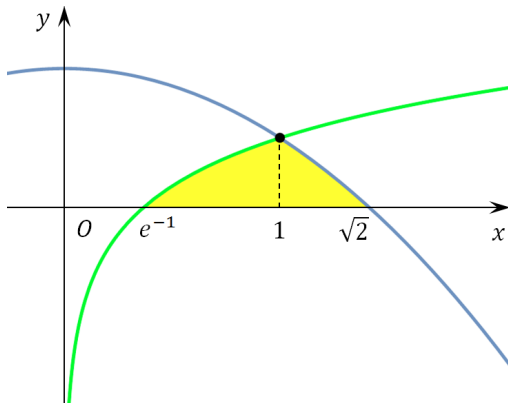
Г

Позначимо функції  $f_1(x) = 2 - x^2$  та  $f_2(x) = \ln x + 1$ . Оскільки  $f_2$  монотонно зростає на  $D_{f_2} = (0, +\infty)$  і при цьому  $f_1$  — монотонно спадна на тій же множині, то існує єдина точка перетину заданих кривих, абсциса якої дорівнює  $x_0 = 1$ .

Також можна визначити абсциси точок перетину кривих із віссю  $Ox$ :

$$2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2};$$

$$\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}.$$



Використовуючи формулу (4) та властивість лінійності інтеграла Рімана, маємо:

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^1 (\ln x + 1) dx + \int_1^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx = x \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + \left( 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{e} + \frac{5 + 4\sqrt{2}}{3}. \quad \text{Г}$$

**Приклад 2.** Обчислимо площу фігури, обмеженої петле лемніскати Бернуллі:  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ , де  $a > 0$ .

Г

Перейдемо до полярної системи координат:  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . Тоді рівняння лемніскати можна переписати таким чином:  $\rho^4 = a^2 \rho^2 \cos 2\varphi$ . Враховуючи

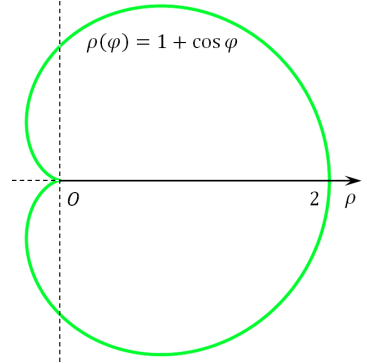
невід'ємність полярного радіуса, маємо таке рівняння кривої:  $\rho = |a|\sqrt{\cos 2\varphi}$ , де кут  $\varphi \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{3\pi}{4} + \pi n, \frac{5\pi}{4} + \pi n \right] \cap \mathbb{R}^+$ . Тоді, згідно із формулою (7), маємо:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos 2\varphi d(2\varphi) = \frac{a^2}{4} \sin 2\varphi \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}.$$

**Приклад 3.** Обчислимо довжину дуги кардіоїди:  $\rho = 1 + \cos \varphi$ .

Оскільки  $\forall \varphi \geq 0: \rho(\varphi) \geq 0$ , а також за рахунок симетричності графіка кардіоїди відносно полярної вісі, досить обрати довільний проміжок  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_1 + \pi$  та застосувати формулу (9) для обчислення довжини дуги цієї кривої:

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^\pi \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 2 \int_0^\pi \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = 2 \int_0^\pi \sqrt{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \\ &= 8 \int_0^\pi \cos \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 8 \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^\pi = 8. \end{aligned}$$



**Приклад 4.** Обчислимо довжину дуги однієї арки циклоїди:  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ , де  $a > 0$ .

Зафіксуємо деяке початкове значення параметра  $t_1$ . Враховуючи періодичність функції  $\cos t$ , маємо, що  $y(t_1 + 2\pi n) = y(t_1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тому одна арка циклоїди відповідає зміні параметра  $t$  на величину  $2\pi$ . Нехай  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 2\pi$ . При цьому маємо:  $x(t_1) = y(t_1) = y(t_2) = 0$ ,  $x(t_2) = 2a\pi$ . Для обчислення довжини дуги застосуємо формулу (10):

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left( \frac{(a(1 - \cos t))'}{(a(t - \sin t))'} \right)^2} \cdot (a(t - \sin t))' dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{(1 - \cos t)^2}} \cdot a(1 - \cos t) dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

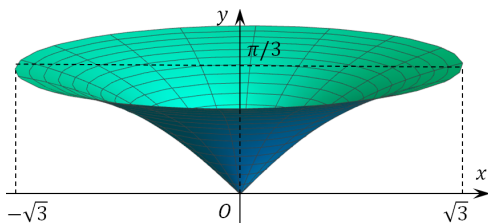
**Приклад 5.** Знайдемо об'єм тіла, утвореного обертанням фігури навколо вісі  $Oy$ , що обмежена лініями  $y = \arctg x$ ,  $y = 0$  та  $y = \frac{\pi}{3}$ .

Крива  $y = \arctg x$  і пряма  $y = \frac{\pi}{3}$  перетинаються у одній точці із абсцисою  $x = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ . Застосуємо формулу (13):

$$V_y = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \arctg x \, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \arctg x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x \, dx, \quad v = x^2/2 \end{array} \right| =$$

$$= \pi x^2 \cdot \arctg x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 \, dx}{1+x^2} = 3\pi \cdot \frac{\pi}{3} - \pi(x - \arctg x) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3} \pi. \quad \square$$



Обчисліть площі фігур, обмежених кривими у прямокутній декартовій СК:

**21.1**  $y = x^2, y = x^4;$

**21.2**  $x^2 + y^2 = 4x, y = x;$

**21.3**  $y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2};$

**21.4**  $y = \frac{16}{x^2}, y = 17 - x^2, x > 0;$

**21.5**  $xy = 20, x^2 + y^2 = 41, x \geq 0;$

**21.6**  $y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 8;$

**21.7**  $y = \sin^3 x, y = \cos^3 x, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right];$

**21.8**  $y = 2^x, y = 2, x = 0.$

Обчисліть площі фігур, обмежених кривими у полярній СК:

**21.9**  $\rho = a \sin 3\varphi, a > 0, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right];$

**21.10**  $\rho = \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$

**21.11**  $\rho = a(1 + \cos \varphi), a > 0;$

**21.12**  $\rho = 2 \cos \varphi, \rho \geq 1.$

Обчисліть площі фігур, обмежених петлями кривих, що задані параметрично або неявно (параметр  $a > 0$ ):

**21.13**  $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3;$

**21.14**  $x = \cos^3 t, y = \sin t;$

**21.15**  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy;$

**21.16**  $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2).$

Знайдіть довжини дуг кривих або петель кривих (параметр  $a > 0$ ):

**21.17**  $y = \ln x, x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}];$

**21.18**  $\rho = a \sin \varphi;$

**21.19**  $\rho = \frac{a}{1 + \cos \varphi}, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$

**21.20**  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$

**21.21**  $x = \sqrt{3}t^2, y = t - t^3;$

**21.22**  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, t \in [0, \ln \pi].$

Знайдіть об'єми тіл, обмежених поверхнями:

**21.23**  $x^2 + y^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2;$

**21.24**  $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}, z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9};$

**21.25**  $x + y + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями

**21.26**  $y = 2x - x^2, y = 0$ , навколо: а) вісі  $Ox$ ; б) вісі  $Oy$ ;

**21.27**  $xy = 4, x = 1$  та  $y = 0$ , навколо вісі  $Ox$ ;

**21.28**  $y = e^x, x = 0, x = 2$  та  $y = 0$ , навколо: а) вісі  $Ox$ ; б) вісі  $Oy$ .

# Розділ 7. Функції багатьох змінних

## Тема 18. Простір $m$ -вимірних функцій, їх границя та неперервність

Нехай  $E$  — певна множина, елементами якої є вектори. Кажуть, що на цій множині побудовано **лінійний (векторний) простір**, якщо введено операції додавання, множення на дійсне число елементів цієї множини, і вказані операції мають наступні властивості  $\forall (x, y, z \in E; \lambda, \mu \in \mathbb{R})$ :

1.  $x + y = y + x$ ;
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ;
3.  $\exists 0 \in E: x + 0 = x$  (існування 0-вектора);
4.  $\exists (-x) \in E: x + (-x) = 0$  (існування протилежного вектора);
5.  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ ;
6.  $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ ;
7.  $1 \cdot x = x$ .

Ці властивості називають **аксіомами векторного простору**.

Будемо розглядати  $m$ -вимірний простір,  $m \in \mathbb{N}$ , елементами  $x$  якого є впорядковані множини з  $m$  дійсних чисел:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , де  $x_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, m$ ;  $E = \mathbb{R}^m$ . Ці елементи по аналогії із просторами  $\mathbb{R}^2$  і  $\mathbb{R}^3$  (на площині  $\mathbb{R}^2$  і у просторі  $\mathbb{R}^3$  пари  $(x, y)$  і трійки  $(x, y, z)$  чисел можна розглядати як координати точок у прямокутній системі координат і як координати, відповідно, двовимірних і тривимірних векторів) будемо розглядати як точки, і як вектори ( $m$ -вимірні). У першому випадку для них визначається поняття відстані, у другому — відповідні векторні операції. Лінійна комбінація двох елементів  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  та  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  із дійсними коефіцієнтами  $\lambda$  і  $\mu$  визначається рівністю

$$\lambda x + \mu y \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \dots, \lambda x_m + \mu y_m);$$

зокрема,  $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m)$ .

### Нормований векторний простір

Відображення  $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$  називається **нормою (довжиною)** у векторному просторі, якщо  $\forall (x, y \in E; \lambda \in \mathbb{R})$  виконуються аксіоми норми:

1.  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ ;
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ;
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (нерівність трикутника).

Упорядкована пара  $(E, \|\cdot\|)$  називається **лінійним нормованим простором (ЛНП)** та  $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$ .

## Приклади норм:

1. Для довільного  $x \in \mathbb{R}$  введемо норму  $\|x\| = |x|$ . Тоді  $\mathbb{R}$  — ЛНП.

2. Для  $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  введемо норму  $\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^m |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $p \geq 1$ .

Відповідно

$$p = 2: \quad \|x\|_2 = \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2} \quad (\text{Евклідова норма});$$

$$p = 1: \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^m |x_k| \quad (\text{октаедрична норма});$$

$$p = \infty: \quad \|x\|_\infty = \max_{k=1, m} |x_k| \quad (\text{кубічна норма}).$$

## Метричні простори

Однією з фундаментальних характеристик взаємного розміщення точок множини є відстань між ними.

Нехай  $E$  — довільна множина. Відображення  $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  називається **метрикою**, якщо  $\forall x, y, z \in E$  виконуються аксіоми:

$$1) \quad \rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y;$$

$$2) \quad \rho(x, y) = \rho(y, x) \quad (\text{симетрія});$$

$$3) \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad (\text{нерівність трикутника}).$$

Упорядкована пара  $(E, \rho)$  називається **метричним простором**.

Норма в  $\mathbb{R}^m$  грає ту ж роль, що й абсолютна величина для точок числової прямої. Відстань від  $x$  до нуля визначається як  $d(x, 0) = \|x\|$ . Тоді всякий нормований векторний простір є метричним, якщо визначити у ньому метрику  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ .

Будемо розглядати точковий  $m$ -вимірний простір  $E = \mathbb{R}^m$  із метрикою  $\rho$ , а також послідовність  $(x^{(n)})$ ,  $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$ , точок простору  $\mathbb{R}^m$ , тобто відображення  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , де  $x^{(n)} = f(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Точка  $x \in \mathbb{R}^m$  називається **границею** послідовності  $(x^{(n)} \in \mathbb{R}^m \mid n = 1, 2, \dots)$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x^{(n)}, x) = 0$ . У цьому випадку пишуть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x$  і кажуть, що послідовність  $(x^{(n)})$  збігається до точки  $x$ .

Поняття границі послідовності точок  $m$ -вимірного простору може бути зведено до поняття границі числових послідовностей їх координат:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = x_k, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Вектор  $x$  називається **границею** послідовності векторів  $(x^{(n)})$ , тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x$ , якщо  $\|x^{(n)} - x\| = o(1)$ .

У теорії метричних просторів використовується мова класичної геометрії. Нехай  $(X, \rho)$  — метричний простір,  $x_0 \in X$ ,  $\delta > 0$ ,  $X \subset \mathbb{R}^m$ .

Множина  $O_\delta(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x_0, x) < \delta\}$  називається **відкритою кулею** радіуса  $\delta$  з центром у точці  $x_0 \in X$ , а також  **$\delta$ -околом** точки  $x_0$ .

Множина  $\overline{O}_\delta(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x_0, x) \leq \delta\}$  називається **замкненою кулею** радіуса  $\delta$  з центром у точці  $x_0 \in X$ .

Множина  $S(x_0, \delta) = \{x \in X \mid \rho(x_0, x) = \delta\}$  називається **сферою** радіуса  $\delta$  з центром у точці  $x_0 \in X$ .

## Відображення множин

Нехай  $(X, \rho_1)$  та  $(Y, \rho_2)$  — довільні метричні простори,  $E \subset X$ . Тоді відображення  $f: E \rightarrow Y$  означає, що кожному елементу  $x \in E$  ставиться у відповідність  $y \in Y$ , який називається **образом** цього елемента. Сукупність **прообразів** елементів  $y \in Y$ , тобто множин  $f^{(-1)}(y) = \{x \in E \mid f(x) = y\}$ , називається **повним прообразом простору  $Y$** .

Якщо  $X = \mathbb{R}^m$ ,  $Y = \mathbb{R}$  та  $f: E \rightarrow Y$ , тоді  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $E \subset \mathbb{R}^m$ .

Якщо  $X = \mathbb{R}^2$  та  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^2$ , тоді  $f = f(x, y)$  — функція двох змінних.

Якщо  $X = \mathbb{R}^3$  та  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^3$ , тоді  $f = f(x, y, z)$  — функція 3-х змінних, фізичний зміст якої є густина або кількість речовини.

**Лінією рівня** називається геометричне місце точок  $f(x, y) = C$ , в яких функція приймає одне стає значення. Наприклад, для функції  $f = x^2 + y^2$  рівняння  $x^2 + y^2 = c$  визначає сімейство концентричних кіл.

**Поверхнею рівня** називається Г.М.Т.  $f(x, y, z) = C$ , в яких функція приймає 1 стає значення. Розглянемо  $f = x^2 + y^2 - z^2$ ,  $f = c$ . Для різних значень  $c$  будемо мати: рівняння  $x^2 + y^2 - z^2 = c = 0$  визначає конус;  $c < 0$ :  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  — двопорожнинний гіперболоїд; при  $c > 0$  — однопорожнинний гіперболоїд.

## Границя і неперервність функції багатьох змінних

Будемо розглядати функції  $f = f(x)$ , які задані на множинах  $E$ , що належать  $m$ -вимірному простору і набувають числових значень. Оскільки точка  $m$ -вимірного простору описується  $m$  числами-координатами:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , то замість  $f(x)$ ,  $x \in E \subset \mathbb{R}^m$ , пишуть також  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  і називають **функцією  $m$  змінних**  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Функції  $f(x, y)$  двох змінних легко зобразити малюнком: їх графіки лежать у тривимірному просторі.

Поняття границі функції багатьох змінних є узагальненням поняття границі функції однієї змінної.

Нехай  $f = f(x_1, \dots, x_m): E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^m$ . Розглянемо  $P_0(x_1^0, \dots, x_m^0) \in E$  — граничну точку множини  $E$ . Також позначатимемо  $x = (x_1, \dots, x_m)$ .

Число  $A \in \mathbb{R}$  називається **границею за Коші** функції  $f(x)$  при  $x \rightarrow P_0$  (тобто  $A = \lim_{x \rightarrow P_0} f(x)$ ), якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, P_0) > 0$ :

$$\begin{cases} 0 < |x_1 - x_1^0| < \delta \\ \dots \\ 0 < |x_m - x_m^0| < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x_1, x_2, \dots, x_m) - A| < \varepsilon.$$

Також цей факт записують так:  $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ \dots \\ x_m \rightarrow x_m^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = A$ , і число  $A$  називають ***m*-кратною границею**.

Еквівалентне означення можна дати у термінах послідовностей (**означення границі за Гейне**):

$$\lim_{x \rightarrow P_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{P_n : n \geq 1\} \subset E \setminus \{P_0\}, P_n \rightarrow P_0 : f(P_n) \rightarrow A, n \rightarrow \infty.$$

Якщо  $m = 2$  та  $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A$ , то число  $A$  називають **подвійною границею**. Нехай у цьому випадку множина  $E = X \times Y$ , де  $X \subseteq \mathbb{R}$  та  $Y \subseteq \mathbb{R}$ . Якщо для кожного  $x \in X$ ,  $x \neq a$ , існує границя  $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) =: \varphi(x)$  та існує границя  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A \in \mathbb{R}$ , то число  $A$  називають **повторною границею** функції  $f$  у точці  $P_0(a, b)$  і записують як

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right) = A.$$

Аналогічно визначається повторна границя  $\lim_{y \rightarrow b} \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right)$ .

У загальному випадку ( $m \geq 2$ ) при послідовних граничних переходах по кожному з аргументів окремо (в тому чи іншому порядку) повторні границі визначаються так. Нехай  $E = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ , де  $X_i \subseteq \mathbb{R} \quad \forall i = \overline{1, m}$ . Якщо існують границі

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, \dots, x_m) &=: \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m), \\ \lim_{x_2 \rightarrow a_2} \varphi_1(x_2, \dots, x_m) &=: \varphi_2(x_3, x_4, \dots, x_m), \\ &\dots \\ \lim_{x_m \rightarrow a_m} \varphi_{m-1}(x_m) &= A, \end{aligned}$$

то  $\lim_{x_m \rightarrow a_m} \lim_{x_{m-1} \rightarrow a_{m-1}} \dots \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = A$  називається **повторною границею** за умови існування границі при  $x_m \rightarrow a_m$  та всіх фіксованих попередніх границях.

**Зауваження.** Теорема про арифметичні дії аналогічна теоремі про границю функції одного аргумента.

Нехай  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , точка  $P_0 \in E$  є граничною точкою множини  $E \subset \mathbb{R}^m$ .

Функція  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  є **неперервною в точці**  $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in E$ , якщо  $\exists \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ \dots \\ x_m \rightarrow x_m^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ .



Згідно із означенням границі за Коші, функція  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^m$ , є неперервною в точці  $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in E$ , якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, P_0) > 0$ :

$$|x_1 - x_1^0| < \delta, \dots, |x_m - x_m^0| < \delta \Rightarrow |f(x_1, x_2, \dots, x_m) - f(P_0)| < \varepsilon.$$

Виходячи зі значень  $\{x_i^0 \mid i = \overline{1, m}\}$ , надамо незалежним змінним  $x_i$  деякі прирости  $\Delta x_i$ . Назвемо **повним приростом** функції  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  у точці  $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  вираз

$$\Delta f(P_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0).$$

Відображення  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  — *неперервне в точці*  $x_0$ , якщо нескінченно малому приросту аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції:

$$\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta f(P_0) \rightarrow 0.$$

Нехай  $(X, \rho)$  — деякий метричний простір.

**Теорема (перша теорема Вейєрштрасса).** Якщо  $f$  — неперервне відображення компактного простору  $K$  в  $\mathbb{R}$ ,  $K \subset X$ , то  $f$  — обмежена на  $K$ .

**Теорема (друга теорема Вейєрштрасса).** Нехай  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $K \subset X$ ,  $M^* = \sup_{x \in K} f(x)$ ,  $m_* = \inf_{x \in K} f(x)$ . Тоді існують точки  $x_0, x_1 \in K$ , в яких функція досягає свого найбільшого і найменшого значення:  $M^* = f(x_0)$ ,  $m_* = f(x_1)$ .

Мають місце аналоги теорем Больцано–Коші. Аналогом скінченному проміжку в  $\mathbb{R}$  є обмежена зв'язна область.

Множина  $E \subset \mathbb{R}^2$  називається **зв'язною**, якщо будь-які дві точки множини можна з'єднати ламаною зі скінченною кількістю ланок, що цілком належать множині  $E$ .

**Теорема (перша теорема Больцано–Коші).** Нехай  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^2$ , є неперервним відображенням зв'язної множини з  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}$ . Якщо в двох точках  $P_1 \in E$  і  $P_2 \in E$ :  $f(P_1) \cdot f(P_2) < 0$ , то існує точка  $P_0 \in E$ :  $f(P_0) = 0$ .

Множина  $K \subset X$  називається **компактом** в просторі  $(X, \rho)$ , якщо будь-яка послідовність  $(x^{(n)}) \subset K$  містить збіжну до деякого  $x \in K$  підпослідовність.

## Практичне заняття 22

**Приклад 1.** Знайдемо  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0+}} \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ .

Г

Знаходження границі функції багатьох змінних часто зводиться до отримання оцінки значення функції або заміною змінної. Оскільки  $\forall x > 0, y > 0$ :

$$\frac{x+y}{x^2+xy+y^2} > \frac{x+y}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y},$$

то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0+}} \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} > \lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0+}} \frac{x+y}{(x+y)^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0+}} \frac{1}{x+y} = +\infty.$$

┘

**Приклад 2.** Для функції  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  знайдемо повторні та подвійну границі у точці  $(0, 0)$ .

Г

Оскільки при фіксованому  $x$ :  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$ , а також при фіксованому  $y$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = 0$ .

Перейдемо до подвійної границі. Довільна пряма (окрім  $x = 0$ ), що проходить через граничну точку  $(0, 0)$ , задається рівнянням  $y = kx$ , де  $k \in \mathbb{R}$  — кутовий коефіцієнт прямої. Якщо подвійна границя існує у точці  $(0, 0)$ , то за означенням Гейне вона не залежить від напрямку, у якому відбувається наближення до  $(0, 0)$  за сукупністю змінних функції  $f$ . Перевіримо цей факт:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Результат залежить від  $k$ , тому подвійної границі в точці  $(0, 0)$  не існує. ┐

**Зауваження.** Довільна пряма (окрім  $x = a$ ), що проходить через деяку точку  $(a, b)$ , де  $a \in \mathbb{R}$  та  $b \in \mathbb{R}$ , задається рівнянням  $y = k(x - a) + b$ , де  $k \in \mathbb{R}$  — кутовий коефіцієнт прямої.

**Приклад 3.** Доведемо, що подвійна границя  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x}{x + y^3}$  не існує.

Г

Перейдемо до полярної системи координат у границі. Оскільки гранична точка  $(0, 0)$  у декартовій СК відповідає граничному значенню  $\rho_0 = 0$  та довільному значенню полярного кута  $\varphi$  у полярній СК, то перевіримо, чи залишиться залежність від кута  $\varphi$  у границі:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x}{x + y^3} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho \cos \varphi}{\rho \cos \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi + \rho^2 \sin^3 \varphi} = \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi} = 2,$$

якщо  $\cos \varphi \neq 0$ . Якщо ж  $\varphi \in \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ , то границя дорівнює нулю. Отже, подвійної границі в точці  $(0, 0)$  не існує. ┐

**Приклад 4.** Для функції  $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ ,  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ , знайдемо повторні та подвійну границі у точці  $(0, 0)$ .

Г

Нехай  $y \notin \left\{ \frac{1}{k\pi} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ . Тоді  $y \sin \frac{1}{y} \neq 0$ . Підберемо дві послідовності  $x_n$  та  $x_n^*$  таким чином, щоб отримати різні граничні значення  $f(x_n, y)$  та  $f(x_n^*, y)$ . Наприклад, задамо послідовність  $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ,  $n \geq 1$ , а послідовність  $x_n^* = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ ,  $n \geq 1$ . У такому разі  $x_n \rightarrow 0$  та  $x_n^* \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , але  $f(x_n, y) = 0 \quad \forall n \geq 1$  та

$$f(x_n^*, y) = \left( \frac{2}{(4n+1)\pi} + y \right) \cdot \sin \frac{(4n+1)\pi}{2} \cdot \sin \frac{1}{y} \rightarrow y \sin \frac{1}{y}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отже,  $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  згідно означення границі за Гейне. Тому повторна границя  $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$  також не існує. Аналогічно не існує й границі  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ . Разом із цим, з нерівності

$$0 \leq \left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x+y| \leq |x| + |y| \rightarrow 0, \quad (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

випливає, що подвійна границя  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ .

┘

**Приклад 5.** Дослідимо на неперервність  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{2x+y}, & 2x+y \neq 0; \\ 0, & 2x+y = 0. \end{cases}$

┐

Оскільки подвійна границя  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow -2x_0}} f(x, y) = \infty \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , то функція  $f$  має розриви 2 роду у точках прямої  $2x+y=0$ , окрім, можливо,  $(0, 0)$ . Окремо перевіримо у точці  $(0, 0)$  за допомогою переходу до полярної СК:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2}{2x+y} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{2\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos^2 \varphi}{2 \cos \varphi + \sin \varphi} = 0 = f(0, 0),$$

якщо  $2 \cos \varphi + \sin \varphi \neq 0 \Leftrightarrow \varphi \notin \left\{ k\pi - \arctg 2 \mid k \in \mathbb{Z} \right\} =: A$ . Якщо ж  $\varphi \in A$ , то  $f(\rho, \varphi) = 0$ . Тобто значення границі не залежить від кута  $\varphi$ , звідки маємо, що функція  $f$  — неперервна у точці  $(0, 0)$ . Очевидно, що в інших точках площини функція також є неперервною. Отже,  $f \in C(\mathbb{R})$ .

┘

**Приклад 6.**  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 > 0; \\ 1, & x=y=0. \end{cases}$

┐

Функція  $f$  є неперервною у довільній точці  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  як частка двох неперервних функцій на цій множині. Дослідимо окремо, чи є вона неперервною в точці  $(0, 0)$ . Із нерівності  $\sin t \leq t$  при  $t \geq 0$  та нерівності Коші між середнім геометричним і середнім арифметичним маємо таку оцінку:

$$|\sin xy| \leq |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Враховуючи те, що умова  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  є еквівалентною умові  $\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0$ , отримаємо:

$$0 \leq \left| \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0, \quad (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Тому подвійна границя  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 \neq 1 = f(0, 0)$ , тобто функція  $f$  має розрив 1 роду у точці  $(0, 0)$ . ┘

Знайдіть повторні границі  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right)$  та  $\lim_{y \rightarrow b} \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right)$ , якщо:

**22.1**  $f(x, y) = \frac{x^y}{1 + x^y}, x > 0; a = \infty, b = 0+;$

**22.2**  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}; a = b = \infty;$

**22.3**  $f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}, y \neq -2x; a = b = +\infty;$

**22.4**  $f(x, y) = \log_x(x + y), x \in (0, 1) \cup (1, +\infty), x + y > 0; a = 1, b = 0.$

Знайдіть повторні та подвійну границі у точці  $(0, 0)$ , якщо вони існують, для функцій:

**22.5**  $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}, x \neq -y;$

**22.6**  $f(x, y) = \frac{\sin xy}{x}, x \neq 0;$

**22.7**  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2};$

**22.8**  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$

Знайдіть подвійні границі (якщо вони існують):

**22.9**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy^2}{x^2 + y^4};$

**22.10**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}};$

**22.11**  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) \cdot e^{-(x+y)};$

**22.12**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow +\infty}} x^y;$

**22.13**  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow a}} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}}, \text{ де } a \in \mathbb{R};$

**22.14**  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}.$

Дослідіть неперервність функцій на  $\mathbb{R}^2$ :

**22.15**  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0; \end{cases}$

**22.16**  $f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0; \end{cases}$

**22.17**  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y}{x^3 + y^3}, & x \neq -y, \\ 3, & x = -y; \end{cases}$

**22.18**  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x - y^2}{x + y^2}, & x \neq -y^2, \\ 0, & x = -y^2; \end{cases}$

**22.19**  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

Довизначте функцію  $f$ , задану на множині  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , таким чином, щоб вона була неперервною на  $\mathbb{R}^2$ :

$$\mathbf{22.20} \quad f(x, y) = \frac{1 - \cos(x^4 + y^4)}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\mathbf{22.22} \quad f(x, y) = \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2};$$

$$\mathbf{22.21} \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1};$$

$$\mathbf{22.23} \quad f(x, y) = \frac{\ln(1 + |xy|)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

# Тема 19. Похідна і диференціал функції багатьох змінних. Похідні та диференціали вищих порядків

Наведемо наступні означення для функцій трьох змінних, оскільки в подальшому будуть розглянуті приклади саме для функцій двох і трьох змінних. Узагальнення введених понять та означень для більшого числа змінних цілком очевидні.

## Частинні похідні, диференціал

Нехай  $f = f(x, y, z): E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^3$ . Розглянемо точку  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in E$  та  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  — довільні прирости змінних.

**Повним приростом** функції  $f$  у точці  $P_0$  називається різниця (значень)  $f(P) - f(P_0)$  і позначається як

$$\Delta f(P_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

**Частинним приростом** функції  $f$  по змінній  $x$  називається

$$\Delta_x f(P_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Аналогічно визначаються **частинні прирости по змінним**  $y$  та  $z$ .

Якщо існує скінченна границя відношення частинного приросту функції  $f$  по змінній  $x$  до приросту аргумента  $x$ :

$$L = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x},$$

то вона називається **частинною похідною** функції  $f$  по змінній  $x$  та позначається як  $f'_x(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = L$ . Аналогічно визначаються **частинні похідні**

по змінним  $y$  та  $z$ :  $f'_y(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}$ ,

$$f'_z(P_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}.$$

Також **частинним диференціалом** функції  $f$  по змінній  $x$  називається лінійна частина частинного приросту функції  $f$  по змінній  $x$ :

$$d_x f(P_0) = A \cdot \Delta x.$$

Функція  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^3$ , називається **диференційовною в точці**  $P_0 \in E$ , якщо повний приріст функції в цій точці можна подати у вигляді:

$$\Delta f(P_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + o(\rho),$$

де  $A, B, C$  — сталі, що не залежать від  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  та  $\Delta z$ , а відстань між точками  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  та  $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$  — це  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ .

Якщо функція  $f$  — диференційовна, то лінійна частина повного приросту  $f$  називається **повним диференціалом**:

$$df(P_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z.$$

**Теорема (про існування частинних похідних).** Для функції  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^3$ , що диференційовна в точці  $P_0 \in E$ , існують частинні похідні:  $f'_x(P_0) = A$ ,  $f'_y(P_0) = B$ ,  $f'_z(P_0) = C$ .

**Зауваження.** Зазначимо, що обернене до теореми твердження не справджується: існування частинних похідних не забезпечує диференційовності функції (це лише *необхідна умова диференційовності*).

У іншій формі означення диференційовності в точці  $P_0$  функції  $f$  набуде вигляду, який використовується на практиці для дослідження диференційовності.

**Наслідок.** Нехай існують всі частинні похідні функції  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^3$ , у точці  $P_0 \in E$ . Тоді  $f$  — диференційовна в точці  $P_0$ , якщо

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\Delta f(P_0) - f'_x(P_0) \cdot \Delta x - f'_y(P_0) \cdot \Delta y - f'_z(P_0) \cdot \Delta z}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}} = 0.$$

**Теорема (достатні умови диференційовності функції).** Для того, щоб функція  $f$  була диференційовною в точці  $P_0 \in D_f$ , достатньо існування неперервних частинних похідних по всім змінним у цій точці.

(вводимо пере-позначення для диференційовних у точці  $P_0$  функцій ?)

Головна лінійна частина повного приросту функції називається **повним диференціалом** і записується як  $df(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \cdot dz$ . Повний диференціал є сумою *частинних диференціалів*.

Оскільки  $\Delta f(P_0) = f(P) - f(P_0) = f'_x(P_0) \cdot \Delta x + f'_y(P_0) \cdot \Delta y + f'_z(P_0) \cdot \Delta z + o(\rho)$ , то має місце **наближена формула обчислення** значення функції:

$$f(P) \approx f(P_0) + f'_x(P_0) \cdot \Delta x + f'_y(P_0) \cdot \Delta y + f'_z(P_0) \cdot \Delta z.$$

Для функцій багатьох змінних має місце *інваріантність форми першого диференціала*. Також справедливі такі правила диференціювання:

1.  $dc = 0$ , де  $c$  — константа;
2.  $d(f \pm g) = df \pm dg$ ;
3.  $d(f \cdot g) = f dg + g df$ ;
4.  $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}$ ,  $g \neq 0$ .

## Похідна за напрямком, градієнт

Нехай  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^3$ , та  $P(x, y, z) \in E$ . Проведемо із точки  $P$  вектор  $S$  з напрямними косинусами  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ . Розглянемо на векторі  $S$  точку  $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ , яка знаходиться на відстані  $\Delta s$  від його початку. Тоді  $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ .

Якщо  $f = f(x, y, z)$  — неперервна і має неперервні частинні похідні на множині  $E$ , тоді

$$\Delta f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(P) \cdot \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(P) \cdot \Delta z + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y + \varepsilon_3 \cdot \Delta z;$$

$$\frac{\Delta f(P)}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x}(P) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial y}(P) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial z}(P) \cdot \frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3 \cdot \frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Оскільки  $\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos \alpha$ ,  $\frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos \beta$  та  $\frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos \gamma$ , то

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta f(P)}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x}(P) \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(P) \cdot \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z}(P) \cdot \cos \gamma = \frac{\partial f}{\partial s}(P).$$

Отже, /Таким чином визначається.../ **похідна функції  $f$  у точці  $P(x, y, z)$  за напрямком вектора  $S$**  визначається як  $\frac{\partial f}{\partial s}(P) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta f(P)}{\Delta s}$ .

У кожній точці множини  $E$ , де задана функція  $f = f(x, y, z)$ , визначимо вектор, проєкції якого на осі координат є значеннями частинних похідних:  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$ . Цей вектор називається **градієнтом** та позначається як

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{k},$$

де  $\vec{i} = \overrightarrow{(1, 0, 0)}$ ,  $\vec{j} = \overrightarrow{(0, 1, 0)}$  та  $\vec{k} = \overrightarrow{(0, 0, 1)}$  — **одичні вектори**.

### Похідні вищих порядків

Нехай  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^3$ . Якщо  $f$  — диференційовна в точці  $P_0(x_0, y_0, z_0) \in E$ , то існують частинні похідні  $f'_x(P_0)$ ,  $f'_y(P_0)$ ,  $f'_z(P_0)$ , які є функціями змінних  $x, y, z$  і від них можна брати похідні. **Частинні похідні другого порядку** позначають таким чином:  $f''_{xx}(P_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)$ , аналогічно по іншим змінним. **Частинні похідні по різним змінним** називають **мішаними похідними**:  $f''_{xy}(P_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)$  і т. д.

За означенням, **частинні похідні другого порядку** визначаються так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'_x(x, y_0, z_0) - f'_x(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'_x(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f'_x(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Для функції двох змінних  $z = f(x, y)$  маємо 2 частинні похідні 1-го порядку  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , та чотири частинні похідні 2-го порядку:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .



**Теорема (про мішані похідні).** Нехай  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^2$ , для якої існують неперервні в деякому околі точки  $P_0$  частинні похідні  $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ . Тоді в цій точці похідна не залежить від порядку її обчислення і  $f''_{xy}(P_0) = f''_{yx}(P_0)$ .

**Зауваження.** Якщо мішані похідні не є неперервними у точці  $P_0$ , то теорема може не виконуватись.

Після введення другої похідної можна послідовно ввести поняття третьої похідної, четвертої похідної і т.д., тобто індуктивно можна ввести поняття  $n$ -ої похідної.

Функція  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^m$ , називається  ***$n$  разів диференційовною*** в точці  $P_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ , якщо існує околі точки  $P_0$ , у якому існують частинні похідні по всім змінним до  $(n-1)$  порядку, і кожна з них, як функція, — диференційовна в точці  $P_0$ .

**Теорема.** Якщо  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^m$ , є двічі диференційовною у точці  $P_0 \in E$ , то справедлива рівність:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P_0)$ .

*Має місце також загальна теорема про мішані похідні.*

**Теорема.** Якщо  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^m$ ,  $n$  разів диференційовна у точці  $P_0 \in E$ , то похідна  $n$ -го порядку не залежить від послідовності її обчислення.

## Диференціали вищих порядків

Нехай  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^2$ , та точка  $P_0 = P_0(x_0, y_0) \in E$ . Також нехай існує такий околі  $O_\delta(P_0)$ , що  $f$  диференційовна  $\forall x \in O_\delta(P_0)$ :

$$df(P_0) = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} dy.$$

Якщо  $f$  —  $n$  разів диференційовна у точці  $P_0$ , то диференціали для цієї функції визначаються таким чином:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy;$$

$$d^2f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (dy)^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f(x, y);$$

(останній вираз є символічним записом)

$$d^3f(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (dx)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} (dx)^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx (dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} (dy)^3;$$

$$d^n f(x, y) = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot f_{x^k}^{(k)} \cdot f_{y^{n-k}}^{(n-k)} (dx)^k (dy)^{n-k} = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y).$$

## Формула Тейлора

Нехай функція  $f = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  задана в деякому  $\delta$ -околі точки  $P_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$  і  $(n+1)$  раз диференційовна в цьому околі. Тоді повний приріст  $\Delta f(P_0) = f(P) - f(P_0)$  даної функції в точці  $P_0$  для будь-якої точки  $P$  із вказаного  $\delta$ -околу може бути поданий/представлений/ у такій формі:

$$\Delta f(P_0) = df|_{P_0} + \frac{1}{2!} d^2 f|_{P_0} + \dots + \frac{1}{n!} d^n f|_{P_0} + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f|_N, \quad (14)$$

де  $N$  — деяка точка із  $\delta$ -околу, що залежить від  $P(x_1, \dots, x_m)$ , а диференціали  $dx_i$  змінних  $x_i$ , що входять у вирази  $d^k f|_{P_0}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , та  $d^{n+1} f|_N$ , дорівнюють  $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ . Формула (14) називається **формулою Тейлора функції**  $f = f(P)$  із центром розвинення у точці  $P_0$ .

**Теорема (локальна формула Тейлора).** Нехай функція  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  —  $n$  разів диференційовна в точці  $P_0(x_1^0, \dots, x_m^0) \in D_f$ . Тоді при  $\|h\| \rightarrow 0$ , де  $h = P - P_0$ , справджується формула:

$$f(P) = f(P_0) + df(P_0)(h) + \frac{d^2 f(P_0)(h)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(P_0)(h)}{n!} + o(\|h\|^n),$$

яка/що/ називається **формулою Тейлора із залишковим членом у формі Пеано**.

## Практичне заняття 23

**Приклад 1.** Дослідимо на диференційовність функцію  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$  на множині  $D_f = \mathbb{R}^2$ .

Г

1. За правилами диференціювання знаходимо частинні похідні:

$$f'_x(x, y) = \frac{\sqrt{|y|}}{2\sqrt{|x|}} \cdot \operatorname{sgn} x, \quad x \neq 0; \quad f'_y(x, y) = \frac{\sqrt{|x|}}{2\sqrt{|y|}} \cdot \operatorname{sgn} y, \quad y \neq 0.$$

Тобто на всій площині, окрім координатних осей, частинні похідні існують та неперервні, звідки робимо висновок про диференційовність функції на цій множині.

2. Перевіримо за означенням, чи існують частинні похідні на координатних осях:

$$\forall (x_0, 0), x_0 \neq 0: \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, 0 + \Delta y) - f(x_0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x_0 \cdot \Delta y|} - 0}{\Delta y} = \infty;$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0 = f'_y(0, 0);$$

$$\forall (0, y_0), y_0 \neq 0: \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, y_0) - f(0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot y_0|} - 0}{\Delta x} = \infty;$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0 = f'_x(0, 0).$$

Оскільки частинні похідні на відповідних координатних осях не існують (крім початку координат), то за теоремою про існування частинних похідних функція не є диференційовною на них.

**3.** Тепер можемо скористатися **наслідком із означення диференційовності**, щоб перевірити диференційовність функції окремо у точці  $(0, 0)$ :

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = |\Delta y = k \cdot \Delta x| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|k|} \cdot |\Delta x|}{\sqrt{1 + k^2} \cdot |\Delta x|} = \sqrt{\frac{|k|}{1 + k^2}}.$$

Отже, остання границя не існує, бо залежить від напрямку наближення до точки  $(0, 0)$ . Тому остаточний висновок: функція є диференційовною на всій площині, окрім координатних осей.  $\perp$

**Приклад 2.** Обчислимо похідну функції  $f(x, y) = \ln(6x + 7y)$  в точці  $M(-2, 2)$  за напрямком вектора  $\overrightarrow{MM_1}$  ( $\overrightarrow{P_0P_1}$ ), де  $M_1 = (2, -1)$ .

Г

Знайдемо одиничний вектор  $l$ , що має початок у точці  $M(-2, 2)$  та співпадає за напрямком із  $\overrightarrow{MM_1} = (4, -3) = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ . Так як  $|\overrightarrow{MM_1}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$ , то

$$l = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{|\overrightarrow{MM_1}|} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right), \quad \text{тобто} \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \beta = -\frac{3}{5}.$$

Знайдемо частинні похідні функції  $f$  в точці  $M(-2, 2)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{6}{6x + 7y} \Big|_M = 3; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{7}{6x + 7y} \Big|_M = \frac{7}{2}.$$

Тепер можемо обчислити похідну функції  $f$  в точці  $M(-2, 2)$  за напрямком вектора  $l$ :

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M) \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M) \cdot \cos \beta = 3 \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{10},$$

тобто функція  $f$  в точці  $M$  зростає у напрямі вектора  $\overrightarrow{MM_1}$  зі швидкістю  $0,3$ .  $\perp$

**Приклад 3.** Обчислимо наближене значення виразу  $\frac{\cos(\sin 89^\circ) + \ln 0,96}{1,99 \arctg 1,03}$  за допомогою першого диференціала.

Г

Розглянемо функцію  $f(x, y, z, t) = \frac{\cos(\sin x) + \ln y}{z \arctg t}$ . Вона є диференційовною на множині  $M = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ , тому можемо обчислити її частинні похідні на цій множині:

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{-\sin(\sin x) \cdot \cos x}{z \arctg t}; & f'_z &= \frac{-(\cos(\sin x) + \ln y) \cdot \arctg t}{z^{1+\arctg t}}; \\ f'_y &= \frac{1}{y \cdot z \arctg t}; & f'_t &= -\frac{\cos(\sin x) + \ln y}{z \arctg t} \cdot \frac{\ln z}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Оберемо точку  $P_0$  із координатами  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $y_0 = 1$ ,  $z_0 = 2$  та  $t_0 = 1$ , яка належить множині  $M$ . Тоді для  $\Delta x = -\frac{\pi}{180}$ ,  $\Delta y = -0,04$ ,  $\Delta z = -0,01$  та  $\Delta t = 0,03$  за наближеною формулою обчислення значення функції маємо, що

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\sin 89^\circ) + \ln 0,96}{1,99 \arctg 1,03} &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z, t_0 + \Delta t) \approx \\ &\approx \frac{\cos 1}{2^{\frac{\pi}{4}}} + \frac{1}{2^{\frac{\pi}{4}}} \cdot (-0,04) - \frac{\cos 1 \cdot \frac{\pi}{4}}{2^{1+\frac{\pi}{4}}} \cdot (-0,01) - \frac{\cos 1}{2^{\frac{\pi}{4}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,03. \end{aligned}$$

**Приклад 4.** Для функції  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  знайдемо всі частинні похідні до другого порядку включно (в області їх існування), а також перший і другий диференціали, якщо  $f(x, y) = \ln(x + y^3)$ .

Нехай /Позначимо/  $x + y^3 = t$ . Тоді  $f(t) = \ln t \Rightarrow df = (\ln t)'_t dt = \frac{1}{t} dt$  при  $t > 0$ . Тепер продиференціюємо  $f(x, y)$  як складну функцію двох змінних:

$$df = \frac{1}{x + y^3} d(x + y^3) = \frac{1}{x + y^3} (dx + 3y^2 dy).$$

Із формули для першого диференціала функції двох змінних маємо:

$$df = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy.$$

Звідси можемо визначити частинні похідні першого порядку функції  $f$  за умови, що  $x + y^3 > 0$ :  $f'_x(x, y) = \frac{1}{x + y^3}$ ,  $f'_y(x, y) = \frac{3y^2}{x + y^3}$ . Обчислимо частинні похідні другого порядку функції  $f$  за правилами диференціювання:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= (f'_x(x, y))'_x = -\frac{1}{(x + y^3)^2}; & f''_{yy}(x, y) &= (f'_y(x, y))'_y = \frac{6xy - 3y^4}{(x + y^3)^2}; \\ f''_{xy}(x, y) &= f''_{yx}(x, y) = (f'_x(x, y))'_y = \frac{-3y^2}{(x + y^3)^2}. \end{aligned}$$

Відповідно до формули другого диференціала маємо, що при  $x + y^3 > 0$ :

$$\begin{aligned} d^2f &= f''_{xx}(x, y) (dx)^2 + 2f''_{xy}(x, y) dx dy + f''_{yy}(x, y) (dy)^2 = \\ &= -\frac{1}{(x + y^3)^2} (dx^2 + 6y^2 dx dy - 3y(2x - y^3) dy^2). \end{aligned}$$

**Приклад 5.** Знайдемо мішану похідну  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$  для функції  $f(x, y, z) = 2xy^2z^3$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= (f'_y(x, y, z))'_z = (2xy^2z^3 \cdot \ln 2 \cdot 2xyz^3)'_z = \\ &= 2xy^2z^3 \cdot \ln^2 2 \cdot 3xy^2z^2 \cdot 2xyz^3 + 2xy^2z^3 \cdot \ln 2 \cdot 2xy \cdot 3z^2. \end{aligned}$$

**Приклад 6.** Знайдемо розклад функції  $f(x, y) = e^x \cdot \operatorname{sh} y$  в околі точки  $P_0(0, 0)$  за формулою Тейлора *із залишковим членом у формі Пеано* з точністю до членів 3-го порядку.

Г

Скористаємося формулою Тейлора–Маклорена для функцій однієї змінної:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0;$$

$$\operatorname{sh} y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = y + \frac{y^3}{6} + o(y^3), \quad y \rightarrow 0.$$

Враховуючи, що  $P(x, y) \rightarrow P_0(0, 0) \Leftrightarrow \|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 0$ , маємо асимптотичний розклад:

$$\begin{aligned} e^x \cdot \operatorname{sh} y &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \cdot \left(y + \frac{y^3}{6} + o(y^3)\right) = \\ &= y + xy + \frac{x^2y}{2} + \frac{y^3}{6} + o(\|(x, y)\|^3), \quad \|(x, y)\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

┘

Дослідіть функцію  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  на диференційовність на множині  $\mathbb{R}^2$  ( $D_f$ ), якщо:

**23.1**  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3};$

**23.2**  $f(x, y) = \sqrt{x^3 y}, \quad xy \geq 0;$

**23.3**  $f(x, y) = xe^y + ye^x;$

**23.4**  $f(x, y) = \ln(x + y^2), \quad x > -y^2$

**23.5**  $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + 2y^2);$

**23.5\***  $f(x, y) = ;$

**23.6**  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0; \end{cases}$

**23.7**  $f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

Обчисліть похідну функції  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $P_0(x_0, y_0)$  за напрямком вектора  $\overrightarrow{P_0 P_1}$ , а також градієнт  $f$  у точці  $P_0$ , якщо:

**23.8**  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad P_0(1, 1), \quad P_1(2, 0);$

**23.9**  $f(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}, \quad P_0(1, 1), \quad P_1(2, 2).$

Обчисліть похідну функції  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  за напрямком вектора  $\vec{a}$ , а також градієнт  $f$  у точці  $P_0$ , якщо:

**23.10**  $f(x, y) = e^{x^2 + y^2 + z^2}, \quad P_0(1, 0, 0), \quad \vec{a} = (0, 1, 1);$

**23.11**  $f(x, y) = \ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \quad P_0(1, -1, 1), \quad \vec{a} = (1, 1, 1).$

За допомогою першого диференціала обчисліть наближено значення таких виразів:

$$\mathbf{23.12} \quad (0,92)^{\frac{1}{397}};$$

$$\mathbf{23.13} \quad \sqrt{3,98^2 + 3,01^2};$$

$$\mathbf{23.14} \quad \ln(1,02 + \sqrt[3]{0,97} - \sqrt{1,01});$$

$$\mathbf{23.15} \quad \frac{\operatorname{tg} 46^\circ \cdot \operatorname{arccctg} 0,01}{2,02\sqrt{4,03}}.$$

Знайдіть всі частинні похідні та диференціали першого і другого порядків (в області їх існування) для функції  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , якщо:

$$\mathbf{23.16} \quad f(x, y) = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4;$$

$$\mathbf{23.17} \quad f(x, y, z) = e^{x+y^2-z^3};$$

$$\mathbf{23.18} \quad f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \neq 0.$$

Нехай функції  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  та  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  мають неперервні похідні другого порядку (є двічі неперервно-диференційовними) на множинах визначення. Знайдіть диференціали першого та другого порядків наведених складних функцій:

$$\mathbf{23.19} \quad F(x, y, z) = g(x^2 + y^2 - z);$$

$$\mathbf{23.20} \quad F(x, y) = h(x + y, x - y);$$

$$\mathbf{23.21} \quad F(x, y) = h\left(x^2y, \frac{x}{y^2}\right);$$

$$\mathbf{23.22} \quad F(x, y, z) = u(xy, \sin y, x + z);$$

$$\mathbf{23.23} \quad F(x, y, z) = u(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xz).$$

Знайдіть вказану частинну/мішану/ похідну для функції  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\mathbf{23.24} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \text{ якщо } f(x, y) = (2x - 5) \cdot \cos \frac{1}{y^2}, \quad y \neq 0;$$

$$\mathbf{23.25} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}, \text{ якщо } f(x, y, z) = x^3 \cdot \sin(yz) + (x^2 + y^2) \cdot e^{x+z}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\mathbf{23.26} \quad \frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}, \text{ якщо } f(x, y, z) = x^5 - xy^2z^2 + x^2y^2z - \ln(x^2 - z), \quad z < x^2;$$

$$\mathbf{23.27} \quad \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} \text{ для } m, n \in \mathbb{Z}^+, \text{ якщо } f(x, y) = \sin(xy), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2;$$

$$\mathbf{23.28} \quad \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} \text{ для } m, n \in \mathbb{N}, \text{ якщо } f(x, y) = \ln(1 + x + y), \quad x + y > -1;$$

$$\mathbf{23.29} \quad \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} \text{ для } m, n \in \mathbb{Z}^+, \text{ якщо } f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{x-y}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Знайдіть всі частинні похідні першого і другого порядків (в області їх існування) для функції  $z = z(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , визначеної співвідношенням:

$$\mathbf{23.30} \quad x + y + z = e^{-(x+y+z)};$$

$$\mathbf{23.31} \quad x + y + z = e^z;$$

$$\mathbf{23.32} \quad x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z = 7;$$

$$\mathbf{23.33} \quad \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1.$$

Знайдіть розклад функції  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  в околі точки  $P_0(x_0, y_0)$  за формулою Тейлора із залишковим членом у формі Пеано з точністю до членів 2-го порядку

( $n = 2$ ), якщо:

$$\mathbf{23.34} \quad f(x, y) = e^x \cdot \ln(1 + y), \quad P_0(0, 0); \quad \mathbf{23.35} \quad f(x, y) = (1 + x)^y, \quad P_0(0, 0);$$

$$\mathbf{23.36} \quad f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}, \quad P_0(0, 0); \quad \mathbf{23.37} \quad f(x, y) = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} y}, \quad P_0(0, 0);$$

$$\mathbf{23.38} \quad f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy}, \quad P_0(0, 0); \quad \mathbf{23.39} \quad f(x, y) = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0, \quad P_0(1, 1);$$

$$\mathbf{23.40} \quad f(x, y) = \ln \frac{1 - x - y + xy}{1 - x - y}, \quad P_0(0, 0);$$

$$\mathbf{23.41} \quad f(x, y) = \frac{1}{x - y}, \quad x \neq y, \quad P_0(1, 2);$$

$$\mathbf{23.42} \quad f(x, y) = x \cdot \cos(x - y), \quad P_0(\pi, 2\pi);$$

$$\mathbf{23.43} \quad f(x, y) = \sin x \cdot \sin y, \quad P_0\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right).$$

# Тема 20. Екстремуми функцій багатьох змінних

## Деякі відомості про квадратичні форми

Функція

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} x_i y_k, \quad (15)$$

що залежить від  $x_i, y_k$ ,  $i, k = \overline{1, m}$ , називається **білінійною формою** від змінних  $x_i, y_k$ ,  $i, k = \overline{1, m}$ .

Функція  $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m; x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} x_i x_k$  називається **квадратичною формою (КФ)**, що відповідає білінійній формі (15). Якщо при цьому  $a_{ik} = a_{ki} \quad \forall i, k = \overline{1, m}$ , то квадратична форма називається **симетричною**.

Квадратична симетрична форма  $\Phi = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} x_i x_k$  називається **додатньою визначеною (від'ємно визначеною)**, якщо для довільних значень змінних  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , які одночасно не дорівнюють нулю ( $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \neq 0$ ),  $\Phi$  набуває строго додатніх (строго від'ємних) значень. Додатні та від'ємні КФ називаються **знаковизначеними**.

КФ називається **знакозмінною**, якщо при одному наборі  $x_1, x_2, \dots, x_m$  вона набуває додатнього значення, а при іншому — від'ємного. КФ — **квазізнаковизначена**, якщо вона набуває лише недодатніх або невід'ємних значень, при цьому обертається в нуль для значень  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , що одночасно не дорівнюють нулю.

## Означення та необхідна умова екстремума

Точка  $P_0 \in D_f$  називається точкою **локального максимуму (мінімуму)** функції  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , якщо існує  $S(P_0, \delta) \subset D_f$  така, що  $\forall x \in S(P_0, \delta)$  виконується нерівність:  $f(x) \leq f(P_0)$  ( $f(x) \geq f(P_0)$ ). Максимуми та мінімуми функції називаються її **екстремумами**. Якщо  $\forall x \neq P_0$  виконується строга нерівність, то відповідний екстремум називається **строгим**.

Таким чином, для локального екстремуму функції в деякому околі екстремальної точки приріст функції  $\Delta f(P_0) = f(x) - f(P_0)$  є знакосталим, причому недодатним для максимуму, та невід'ємним — для мінімуму.

**Теорема (необхідна умова екстремума).** Якщо в точці  $P_0$  функція  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  диференційовна і має в цій точці локальний екстремум, то  $df(P_0) = 0$  або, що те ж саме,  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0) = 0$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Точки області визначення функції  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , в яких  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0 \quad \forall j = \overline{1, m}$ , називаються **стаціонарними**.



## Достатні умови екстремума

Симетричну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

називемо **матрицею квадратичної форми**. **Кутовими мінорами**  $A$  називаються такі  $m$  визначників цієї матриці:

$$A_1 = |a_{11}|, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad A_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

**Теорема (критерій Сільвестра).** Для того, щоб КФ з симетричною матрицею  $A = (a_{ij})$  була додатно (від'ємно) визначеною, необхідно й достатньо, щоб для її кутових мінорів виконувались умови:  $A_1 > 0$ ,  $A_2 > 0$ ,  $\dots$ ,  $A_m > 0$ , тобто  $\operatorname{sgn} A_i = 1 \quad \forall i = \overline{1, m}$  (знаки  $A_i$  чергуються, починаючи з  $A_1 < 0$ , тобто  $\operatorname{sgn} A_i = (-1)^i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ).

Неважко помітити, що другий диференціал функції  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ :

$$d^2f = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f \Big|_{P_0} = \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k$$

є симетричною квадратичною формою відносно диференціалів незалежних змінних  $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$  і  $a_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = a_{ki}$ .

**Теорема (достатня умова локального екстремума).** Для того, щоб двічі диференційовна в точці  $P_0$  функція, в якій  $df(P_0) = 0$ , мала в цій точці екстремум, достатньо, щоб її другий диференціал був знаковизначеною КФ в точці  $P_0$ . Якщо  $d^2f(P_0)$  буде додатно (від'ємно) визначеною КФ, то в точці  $P_0$  функція  $f$  має локальний мінімум (максимум). Якщо  $d^2f(P_0)$  є знаковзмінною КФ, то в точці  $P_0$  локального екстремуму немає.

Якщо  $d^2f(P_0)$  — квазізнаковизначена КФ, то для дослідження на екстремум функції  $f$  треба продовжувати вивчення безпосередньо приросту функції, або за допомогою інших міркувань.

З урахуванням критерія Сільвестра, при  $n = 2$  достатні умови існування екстремума набувають такого вигляду: якщо точка  $P_0(x_0, y_0)$  — точка можливого екстремума, функція  $f(x, y)$  є двічі диференційовною в цій точці та  $a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ,  $a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ , то за умови  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$  функція  $f(x, y)$  має в точці  $P_0$  локальний екстремум: мінімум при  $a_{11} > 0$  і максимум при  $a_{11} < 0$ . Якщо  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ , то локального екстремума в точці  $P_0$  немає.

## Умовні екстремуми

Розглянемо задачу пошуку екстремумів функції, аргументи якої задовольняють додатковим умовам зв'язку. Екстремуми такого роду будемо називати умовними, щоб відрізнити їх від безумовних екстремумів функції, аргументи якої не пов'язані жодними додатковими умовами.

**Постановка задачі.** Знайти екстремум функції  $f$ , визначеної на області  $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ , якщо

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m), \quad (16)$$

за умов зв'язку

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0, \\ &\dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0, \quad m < n. \end{aligned} \quad (17)$$

Рівняння (17) також називають **рівняннями зв'язку**.

Функція  $f = f(P)$  має в точці  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$  **умовний максимум (мінімум)**, якщо  $\exists$  такий окіл точки  $P_0$ , в межах якого значення функції  $f = f(P)$  є найбільшим (найменшим) серед всіх її значень у всіх точках, координати яких задовольняють рівнянням зв'язку (17).

Досі ми розглядали екстремуми функції  $f$ , вважаючи, що змінні, від яких вона залежить, незалежні між собою. Це **абсолютні екстремуми**. Перейдемо до розгляду випадку, коли змінні, від яких залежить функція  $f$ , пов'язані деякими співвідношеннями. Дослідити функцію (16) на умовний екстремум можна так: знайти розв'язок системи (17), підставити цей розв'язок у рівняння (16) і одержану функцію дослідити на безумовний екстремум.

Для розв'язку системи (17) повинні виконуватись теореми про існування і диференційовність неявних функцій [?], а саме диференційовність в деякому околі точки  $P_0$  функцій  $F_i(P)$ , неперервність в точці  $P_0$  частинних похідних цих функцій по  $y_1, y_2, \dots, y_m$  і умова на якобіан системи:

$$\left. \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right|_{P_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(P_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(P_0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (18)$$

Тоді система (17) визначає однозначні неявні функції

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots \\ y_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (19)$$

Після підстановки (19) в (16) отримаємо функцію від  $n$  змінних:

$$f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) = \Phi(x_1, \dots, x_n).$$

Такий спосіб знаходження екстремума досить складний, оскільки потрібно розв'язати систему (17). Тому на практиці користуються іншим методом знаходження умовних екстремумів — **методом множників Лагранжа**.

Для дослідження функції на умовний екстремум складемо *функцію Лагранжа*

$$L = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_m F_m,$$

де  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , — *множники Лагранжа*.

**Необхідні умови умовного екстремума.** Нехай  $P_0$  — точка умовного екстремума функції (16) за умов зв'язку (17). *За умови, що  $f$  та  $F_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  — диференційовні в деякому околі  $P_0$  функції, а також виконується умова (18), можна вибрати такі числа  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , що*

$$P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$$

становить критичну точку функції Лагранжа  $L$ , тобто задовольняє систему рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad \frac{\partial L}{\partial y_j} = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad F_j = 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

**Достатні умови.** Припустимо, що:

1.  $P_0$  — критична точка функції  $L$  для деякого набору  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;
2. функції  $f$  і  $F_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , двічі неперервно-диференційовні в точці  $P_0$  та

$$d^2 L = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial y_m} dy_m \right)^2 L,$$

де  $dx_i$ ,  $dy_j$  задовольняють рівняння зв'язку (17). Якщо при цьому  $d^2 L(P_0) > 0$ , то функція  $f$  має в точці  $P_0$  умовний мінімум; якщо  $d^2 L(P_0) < 0$ , то в точці  $P_0$  функція має умовний максимум.

## Екстремуми функції на множині

Нехай  $G$  — відкрита множина в  $\mathbb{R}^k$ , функція  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  неперервна на компактній множині  $K \subset G$ . Згідно із теоремою Вейерштрасса, функція  $f$  у деяких точках множини  $K$  набуває своїх найменшого і найбільшого значень (екстремумів). При цьому якщо точка екстремуму є внутрішньою точкою множини  $K$ , то вона є точкою локального екстремуму. Якщо ж точка належить межі множини  $K$ , що описується рівняннями зв'язку (17) при  $m < k$ , то вона є точкою умовного локального екстремуму.

## Практичне заняття 24

**Приклад 1.** Дослідимо функцію двох змінних  $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$  на екстремуми.

Г

Знайдемо стаціонарні точки  $f$  за теоремою про необхідні умови екстремума:

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x(2x^2 - 1) \\ 2x^3(2x^2 - 1)^3 - 2x^3 = 0 \end{cases}$$

Із другого рівняння маємо, що або  $x = 0$ , або  $4x^6 - 6x^4 + 3x^2 - 1 = 0$ . Підставкою  $t = x^2$  у останній многочлен визначаємо його нулі:

$$4x^6 - 6x^4 + 3x^2 - 1 = 4t^3 - 6t^2 + 3t - 1 = (t - 1)(4t^2 - 2t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Таким чином, отримали три стаціонарні точки функції  $f$ :  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(1, 1)$  та  $P_3(-1, -1)$ . Тепер **знайдемо частинні похідні 2-го порядку та** запишемо другий диференціал функції  $f$ :

$$d^2f = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2 = (12x^2 - 2) dx^2 - 4 dx dy + (12y^2 - 2) dy^2.$$

Оскільки для точок  $P_2(1, 1)$  та  $P_3(-1, -1)$ :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 10$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$ , то квадратична форма  $d^2f$  є додатньо визначеною за критерієм Сільвестра ( $a_{11} = 10 > 0$ ,  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 100 - 4 > 0$ ). Звідси робимо висновок, що функція  $f(x, y)$  має у точках  $P_2(1, 1)$  та  $P_3(-1, -1)$  локальний мінімум;  $\text{loc min } f = -2$ .

Для точки  $P_1(0, 0)$ :  $d^2f = -2 dx^2 - 4 dx dy - 2 dy^2$ , тому за критерієм Сільвестра зробити висновок щодо наявності чи відсутності екстремума неможливо. Перевіримо цей факт за означенням — запишемо повний приріст функції  $f$  у точці  $P_1(0, 0)$ :

$$\Delta f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = (\Delta x)^4 + (\Delta y)^4 - (\Delta x + \Delta y)^2.$$

Якщо  $\Delta y = -\Delta x$ , то  $\Delta f(0, 0) = 2 \cdot (\Delta x)^4 > 0$  для довільного  $\Delta x \neq 0$ . Тепер нехай  $\Delta y = \Delta x$ . У цьому випадку  $\Delta f(0, 0) = 2 \cdot (\Delta x)^2 \cdot ((\Delta x)^2 - 2) < 0$  для довільного  $0 < |\Delta x| < \sqrt{2}$ . Таким чином, приріст функції  $f$  є знакозмінним у будь-якому околі точки  $P_1(0, 0)$ , тобто локального екстремума в точці  $P_1$  немає. ┘

**Приклад 2.** Дослідимо на екстремуми функцію трьох змінних:

$$f(x, y, z) = 2x^3 - 3x^2 + 6y^2 + z^2 - 6xy - 6x + 2z.$$

Г

Знайдемо стаціонарні точки  $f$  за теоремою про необхідні умови екстремума:

$$\begin{cases} f'_x = 6x^2 - 6x - 6y - 6 = 0 \\ f'_y = 12y - 6x = 0 \\ f'_z = 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 - 3y - 1 = 0 \\ x = 2y \\ z = -1 \end{cases}$$

Система має два розв'язки, які визначають стаціонарні точки функції  $f$ :  $P_1(2, 1, -1)$  та  $P_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1\right)$ . Перевіримо виконання достатніх умов екстремума. Для цього запишемо другий диференціал функції  $f$ :

$$d^2f = f''_{xx} dx^2 + f''_{yy} dy^2 + f''_{zz} dz^2 + 2f''_{xy} dx dy + 2f''_{yz} dy dz + 2f''_{xz} dx dz = \\ = (2x - 1) dx^2 + 2 dy^2 + 2 dz^2 - 2 dx dy.$$

Визначимо кутові мінори матриці квадратичної форми  $d^2f$ :  $A_1 = 2x - 1$ ,

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2x - 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4x - 3, \quad A_3 = \begin{vmatrix} 2x - 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8x - 6.$$

Оскільки для т.  $P_1(2, 1, -1)$  маємо, що  $A_1 = 3 > 0$ ,  $A_2 = 5 > 0$  і  $A_3 = 10 > 0$ , то за критерієм Сільвестра квадратична форма  $d^2f(P_1)$  є додатно визначеною. Отже, функція  $f$  має у точці  $P_1(2, 1, -1)$  локальний мінімум;  $\log \min f = -15$ .

Для точки  $P_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1\right)$ :  $A_1 = -2 < 0$ ,  $A_2 = -5 < 0$  і  $A_3 = -10 < 0$ , тобто  $d^2f(P_2)$  є знакозмінною квадратичною формою. Тому локального екстремума в точці  $P_2$  немає.  $\perp$

**Приклад 3.** Дослідимо на екстремуми неявну функцію  $z = f(x, y)$ , якщо

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

Г

Знайдемо диференціал функції  $F$  (як функції від незалежних змінних  $x, y, z$ ):

$$dF = 2x dx + 2y dy + 2z dz - 2 dx + 2 dy - 4 dz.$$

Враховуючи те, що  $F = 0 \Rightarrow dF = 0$ , маємо:

$$dz = \frac{1-x}{z-2} dx - \frac{y+1}{z-2} dy.$$

Згідно із необхідною умовою екстремума,  $dz = 0$ . Тобто (координати) стаціонарні точки отримаємо із системи:

$$\begin{cases} \frac{1-x}{z-2} = 0 \\ \frac{y+1}{z-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Відповідні значення функції  $z = f(x, y)$  у точці  $(1, -1)$  знайдемо із рівняння:

$$F(1, -1, z) = z^2 - 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2 \\ z = 6 \end{cases}$$

Тоді при  $z = -2$  маємо, що  $dz = \frac{x-1}{4} dx + \frac{y+1}{4} dy$ , звідки другий диференціал функції  $z = f(x, y)$  має вигляд:

$$d^2z = \frac{1}{4} dx^2 + \frac{1}{4} dy^2.$$

Тобто  $d^2z$  є додатно визначеною квадратичною формою при  $z = -2$ , що відповідає локальному мінімуму за достатніми умовами екстремума. Якщо ж  $z = 6$ , то  $dz = \frac{1-x}{4} dx - \frac{y+1}{4} dy$ . Звідси маємо:  $d^2z = -\frac{1}{4} dx^2 - \frac{1}{4} dy^2$ , що є

від'ємно визначеною квадратичною формою і відповідає локальному максимуму функції  $z = f(x, y)$ . Отже,  $\text{loc min } z = -2$ ,  $\text{loc max } z = 6$ .  $\square$

**Приклад 4.** Знайдемо екстремальні значення функції  $f(x, y) = x^2 - y^2$  на прямій  $2x - y - 3 = 0$ .

Г

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(2x - y - 3).$$

Координати критичних точок функції  $L(x, y, \lambda)$  знайдемо із системи:

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda = 0 \\ -2y - \lambda = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

Знайдемо другий диференціал функції Лагранжа:

$$d^2L(x, y, \lambda) = 2dx^2 - 2dy^2.$$

Оскільки  $d^2L$  є знаковмінною квадратичною формою (зокрема, при  $dx = 1$ ,  $dy = 0$ :  $d^2L = 2 > 0$ , а при  $dy = 1$ ,  $dx = 0$ :  $d^2L = -2 < 0$ ), то отримана із необхідних умов точка  $(2, 1, -2)$  не є екстремальною для функції  $L(x, y, \lambda)$ . Але ця точка може бути екстремальною для функції  $f = x^2 - y^2$  за умови зв'язку  $2x - y - 3 = 0$ . Із рівняння зв'язку маємо, що  $2dx = dy$ . Враховуючи це співвідношення, для другого диференціала функції  $L$  отримаємо вираз:

$$d^2L(x, y, \lambda) = 2dx^2 - 8dx^2 = -6dx^2,$$

який є від'ємно визначеною квадратичною формою і точка  $(2, 1)$  є точкою локального максимуму функції  $f = x^2 - y^2$  при умові зв'язку  $2x - y - 3 = 0$ .  $\square$

**Приклад 5.** Знайдемо найменше і найбільше значення функції  $f(x, y) = 2x^3 + 3a^2x + 2y^3 + 3a^2y$  на крузі  $x^2 + y^2 \leq a^2$  ( $a > 0$ ).

Г

1. Дослідимо на екстремуми функцію  $f$  у внутрішніх точках круга, тобто на множині  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < a^2\}$ . Для цього знайдемо стаціонарні точки  $f$  за теоремою про необхідні умови екстремума:

$$\begin{cases} f'_x = 6x^2 + 3a^2 = 0 \\ f'_y = 6y^2 + 3a^2 = 0 \end{cases}$$

Для довільного  $a > 0$  система не має розв'язків, тобто “підозрілі” точки безумовного екстремума функції  $f$  — відсутні.

2. Дослідимо поведінку функції  $f$  на межі області, тобто на колі  $x^2 + y^2 = a^2$ . Для цього запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 2x^3 + 3a^2x + 2y^3 + 3a^2y + \lambda(x^2 + y^2 - a^2).$$

Відповідно до необхідних умов умовного екстремума, знайдемо критичні точки функції  $L(x, y, \lambda)$  із системи:

$$\begin{cases} L'_x = 6x^2 + 3a^2 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 6y^2 + 3a^2 + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - a^2 = 0 \end{cases}$$

Додаючи перші два рівняння отриманої системи, маємо:  $\lambda(x + y) = -6a^2$ . Також розв'язки перших двох рівнянь системи відносно змінних  $x$  та  $y$  мають однаковий вигляд, тому  $x = \pm y$ . Підставляючи отримане співвідношення у третє рівняння, маємо, що  $x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ . Також знаходимо відповідні значення  $y$  та  $\lambda$ .

Отже, існують дві стаціонарні точки функції Лагранжа:  $M_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, -3\sqrt{2}a\right)$  та  $M_2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}, 3\sqrt{2}a\right)$ . Порівнюючи значення функції  $f$ , відповідно, у точках  $P_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$  та  $P_2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ , приходимо до висновку, що  $P_1$  є точкою умовного максимуму функції  $f$ , а  $P_2$  — умовного мінімуму. Таким чином,  $\min f = f(P_2) = -4\sqrt{2}a^3$ ,  $\max f = f(P_1) = 4\sqrt{2}a^3$ . ┘

Дослідіть функції двох змінних на екстремуми:

- 24.1**  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ ;      **24.2**  $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$ ;  
**24.3**  $f(x, y) = (x - y + 1)^2$ ;      **24.4**  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ;  
**24.5**  $f(x, y) = xy \cdot e^{-x^2 - y^2}$ ;      **24.6**  $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ ;  
**24.7**  $f(x, y) = x + y + 4 \sin x \sin y$ ;      **24.8**  $f(x, y) = (1 + e^y) \cdot \cos x - ye^y$ ;  
**24.9**  $f(x, y) = xy \cdot \ln(x^2 + y^2)$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Дослідіть функції трьох змінних на екстремуми:

- 24.10**  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ ;  
**24.11**  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x + 2z$ ;  
**24.12**  $f(x, y, z) = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z)$ ,  $a > 0$ ,  $x, y, z > 0$ ;  
**24.13**  $f(x, y, z) = xyz(4a - x - y - z)$ ,  $a > 0$ ;  
**24.14**  $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ ,  $x, y, z > 0$ ;  
**24.15**  $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$ ,  $x, y, z \in (0, \pi)$ .

Знайдіть локальні екстремуми неявно заданої функції  $z = f(x, y)$ , якщо:

- 24.16**  $F(x, y, z) = x^2 + 2x + y^2 - 2y + z^2 + 2z - 1 = 0;$   
**24.17**  $F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0;$   
**24.18**  $F(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0;$   
**24.19**  $F(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + 2y^2 - z^2x + z = 0;$   
**24.20**  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0;$   
**24.21**  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4xz + 4 + \frac{1}{2}(z^2 + z) = 0;$   
**24.22**  $F(x, y, z) = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 4x - 8y - 8z - \frac{32}{3} = 0.$

Знайдіть умовні локальні екстремуми функцій при вказаних рівняннях зв'язку:

- 24.23**  $f(x, y) = xy, \quad x - 2y = 1;$       **24.24**  $f(x, y) = xy, \quad x^2 + y^2 = 1;$   
**24.25**  $f(x, y) = x + 2y, \quad x^2 + y^2 = 5;$       **24.26**  $f(x, y) = e^{xy}, \quad x + y = 1;$   
**24.27**  $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2, \quad 4x^2 + y^2 = 25;$   
**24.28**  $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad ab \neq 0;$   
**24.29**  $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y, \quad x - y = \frac{\pi}{4};$   
**24.30**  $f(x, y, z) = x - 2y + 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1;$   
**24.31**  $f(x, y, z) = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z, \quad x + y + z = \pi, \quad x, y, z > 0;$   
**24.32**  $f(x, y, z) = xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3;$   
**24.33**  $f(x, y, z) = x^m y^n z^p, \quad x + y + z = a, \quad x, y, z > 0, \quad a > 0, \quad \{m, n, p\} \subset \mathbb{N}.$

Знайдіть найбільше та найменше значення функції  $f$  в області  $D$ , якщо:

- 24.34**  $f(x, y) = x - 2y - 3, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \quad y > 0, \quad x + y \leq 1\};$   
**24.35**  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\};$   
**24.36**  $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4, \quad D = [0, 1] \times [0, 1];$   
**24.37**  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 4\};$   
**24.38**  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\};$   
**24.39**  $f(x, y) = x^2 - y^2, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\};$   
**24.40**  $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^2 - 2y + 5, \quad D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq y \leq -\frac{x^2}{2}\right\};$   
**24.41**  $f(x, y) = \frac{xy}{2} \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right), \quad D = \left\{(x, y) \mid x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1\right\};$   
**24.42**  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\};$   
**24.43**  $f(x, y, z) = x + y + z, \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$



# Розділ 8. Числові та функціональні ряди. Невласні інтеграли

## Тема 21. Ряди з невід'ємними членами. Ряди з членами довільного знаку

### Поняття числового ряду

Розглянемо нескінченну числову послідовність  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ . Складений з її елементів вираз

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad (20)$$

називається **числовим рядом**, де  $x_n$  — загальний член ряду, виражений як функція номера  $n$ :  $x_n = \frac{1}{n}$ ,  $x_n = aq^{n-1}$  тощо. Складемо з елементів ряду такі суми, які називаються **частковими**:

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1, \\ S_2 &= x_1 + x_2, \\ &\dots \\ S_n &= x_1 + \dots + x_n. \end{aligned}$$

Числовий ряд називається **збіжним**, якщо існує скінченна границя послідовності його часткових сум; ця границя називається **сумою ряду** ( $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ). У протилежному випадку ряд називається **розбіжним** ( $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  або  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ ).

### Властивості числових рядів [с. XXX].

1. Збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  не порушується, якщо всі члени ряду помножити на одне й те саме число  $k \neq 0$ , причому  $\sum_{n=1}^{\infty} kx_n = k \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ .
2. Сума (різниця) двох збіжних рядів є збіжним рядом, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Якщо ряд (20) збіжний, то  $R_n = S - S_n$  називається  **$n$ -тим залишком ряду**, при цьому  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = 0$ .

Якщо в ряді  $x_1 + x_2 + \dots + x_p + x_{p+1} + x_{p+2} + \dots$  відкинути скінченне число перших  $p$  членів, то отримаємо ряд  $x_{p+1} + x_{p+2} + \dots$ , який збігається або розбігається одночасно з початковим рядом.

**Наслідок.** При дослідженні ряду на збіжність можна ігнорувати скінченне число його членів.

**Необхідна ознака збіжності ряду.** Якщо ряд (20) збіжний, то його  $n$ -тий член  $x_n$  при необмеженому зростанні  $n$  прямує до нуля:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**Наслідок.** Якщо  $n$ -тий член ряду при  $n \rightarrow \infty$  не прямує до 0, то ряд розбігається.

Питання про збіжність ряду, за означенням, еквівалентне питанню про збіжність послідовності часткових сум.

**Критерій Коші збіжності числового ряду.** Для того, щоб ряд (20) збігався  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ , або ж

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon.$$

## Додатні числові ряди

Розглянемо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , всі члени якого є невід'ємними:  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ;  
 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, S_{n+1} \geq S_n$ .

**Критерій збіжності додатнього числового ряду.** Для того, щоб ряд з додатніми членами був збіжним, необхідно і достатньо, щоб послідовність  $S_n$  була обмеженою зверху.

## Ознаки збіжності додатніх рядів

**1. Ознака порівняння рядів.** Якщо члени ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (20) додатні (невід'ємні) і не перевищують відповідних членів збіжного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad (21)$$

тобто  $a_n \leq b_n \quad \forall n > N \in \mathbb{N}$ , то ряд (20) збіжний, а із розбіжності (20) випливає розбіжність (21).

**2. Ознака збіжності Д'Аламбера.** Нехай всі члени ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  додатні та  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ . Тоді за умови, що  $l < 1$ , ряд є збіжним; при  $l > 1$  ряд розбіжний; при  $l = 1$  ознака відповіді не дає.

**3. Ознака Коші.** Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  строго додатній:  $a_n > 0$  та  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ , то при  $q < 1$  ряд збіжний, при  $q > 1$  ряд розбіжний, а при  $q = 1$  — невідомо.

**3\*. Узагальнена радикальна ознака Коші.** Для ряду  $\sum a_n$  позначимо  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ , тоді: якщо  $q < 1$ , то ряд  $\sum a_n$  - збіжний; якщо  $q > 1$ , то ряд  $\sum a_n$  - розбіжний.

**4. Ознака порівняння зі степенем.** Якщо  $a_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то за умови, що  $p > 1$ , ряд (20) збігається, а при  $p \leq 1$  — розбігається.

**5. Ознака Раабе.** Якщо ряд (20) є строго додатним та  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p$ , то при  $p > 1$  ряд — збіжний; при  $p < 1$  — розбіжний; при  $p = 1$  - ?  $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$  - послідовність Раабе.

**6. Ознака Гаусса.** Якщо для ряду (20) при  $n \rightarrow \infty$  виконується умова

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

де  $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$  — сталі, а послідовність  $\gamma_n = O(1)$ , то ряд (20): збіжний, якщо  $\alpha > 1$ , або  $\alpha = 1, \beta > 1$ ; розбіжний, якщо  $\alpha < 1$ , або  $\alpha = 1, \beta \leq 1$ .

## Ряди з членами довільного знаку

Розглянемо ряди, частина членів яких є додатніми, частина — від'ємними, частина дорівнює нулю. Частинний випадок такого ряду — ряд Лейбніца, тобто ряд вигляду

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots + (-1)^{n-1}a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}a_n, \quad (22)$$

де  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . (тут два поруч члени мають протилежні знаки)

**Теорема Лейбніца.** Якщо модулі членів ряду (22) монотонно спадають, тобто  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \dots$  при зростанні  $n$ , і  $n$ -тий член ряду прямує до 0, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то ряд збігається і  $0 < S \leq a_1$ .

**Наслідок.** Якщо знакозмінний ряд підмінити його частковою сумою, то похибка від його абсолютної величини не перевищує першого з відкинутих членів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}a_n = S_n + (-1)^n \cdot (a_{n+1} - a_{n+2} + \dots),$$

$$R_n = (-1)^n \cdot (a_{n+1} - a_{n+2} + \dots), \quad |R_n| \leq a_{n+1}.$$

Оскільки для збіжності знакозмінного ряду перевірка загальної умови збіжності ряду не є простою ( $a_n \rightarrow 0, S_{n+m} \rightarrow 0$ ), то почнемо з випадків, коли збіжність ряду зводиться до збіжності додатного ряду.

## Абсолютно та умовно збіжні ряди

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

При дослідженні рядів на абсолютну збіжність використовуємо ознаки збіжності для рядів з невід'ємними членами.

**Теорема.** Із збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  випливає збіжність  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  називається **умовно збіжним**, якщо цей ряд збіжний, а ряд із модулів, тобто  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  — розбіжний.

### Ознаки Абеля і Діріхле

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \dots, \quad (23)$$

де  $(a_n)$  та  $(b_n)$  — дві послідовності дійсних чисел.

**Ознака Абеля.** Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$  збігається, а числа  $a_n$  утворюють монотонну і обмежену послідовність ( $\exists M \in \mathbb{R} : |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ), то ряд (23) — збіжний.

**Ознака Діріхле–Абеля.** Якщо часткові суми ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  обмежені, тобто  $\exists M \in \mathbb{R} : |S_n| = \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , а числа  $a_n$  утворюють монотонну послідовність, що прямує до 0: ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ), то ряд (23) — збіжний.

*Ознака Лейбніца* є частковим випадком цієї ознаки при  $b_n = (-1)^{n+1}$ , ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  має обмежену послідовність часткових сум.

## Практичне заняття 25

**Приклад 1.** Дослідимо на збіжність ряди: а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^n + n^2}}$ , б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

а) Оскільки  $\frac{1}{\sqrt{4^n + n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{4^n}} = \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , і при цьому  $\sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} = \dots$ , то за ознакою порівняння рядів  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^n + n^2}}$  — збіжний ряд.

б)

•  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3}}$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0$ , тобто не виконується необхідна ознака збіжності ряду.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ :  $a > 0$ ,  $\frac{a^{n+1}n!}{(n+1)!a^n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 < 1$  (при  $n \rightarrow \infty$ ), ряд — збіжний.
- $\sum_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^S}$ :  $\frac{n^S}{(n+1)^S} \rightarrow 1$ , відповіді немає. Це узагальнений гармонічний ряд, збігається при  $S > 1$  і розбігається при  $S \leq 1$ , при  $S = 1$  маємо гармонічний ряд.

•  $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ : Застосуємо ознаку Д'Аламбера:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow \frac{1}{4} < 1$ , а тому ряд збіжний.

•  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$ ,  $\sqrt[n]{a_n} = \frac{a}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow a$ ,  $a \geq 1$  - розбіжний,  $a < 1$  - збіжний.

•  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1$  а тому ряд збіжний.

•  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{2n-1}}} = \frac{1}{2} < 1$  збіжний.

•  $a_n = \ln \cos \frac{e}{n} = \ln(1 - \frac{1}{2} \frac{e^2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})) = -\frac{e^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2})$  - ряд збігається,  $p = 2 > 1$ .

•  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$  збіжний, виконується т. Лейбніца.

•  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$  ( $0 < \alpha < 2\pi$ ),  $b_n = \sin n\alpha$ ,  $a_n = \frac{1}{n}$ .

Обчислимо часткові суми ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha$ ,  $|S_n| = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$

$S_n = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \{ [\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2}] + [\cos \frac{3\alpha}{2} - \cos \frac{5\alpha}{2}] + [\cos(n - \frac{1}{2})\alpha - \cos(n + \frac{1}{2})\alpha] \} = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} [\cos \frac{\alpha}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})\alpha]$ , тобто  $S_n$  обмежена, а послідовність  $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$  не зростаюча і нескінченно мала, тобто за ознакою Діріхле-Абеля — ряд збіжний.

•  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ . Оскільки  $\sin(n + \frac{1}{2})x - \sin(n - \frac{1}{2})x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos nx$ , просумуємо співвідношення по  $n = 1, k$ , матимемо:

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \sum_{n=1}^k \cos nx &= \sin(k + \frac{1}{2})x - \sin \frac{1}{2}x = 2 \sin \frac{x}{2} \sum_{n=1}^k \cos nx = \\ &= 2S_n \sin \frac{x}{2} \cdot S_n = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

$\forall x$  не кратного  $2\pi$  :  $|S_n| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$ . Ряд збігається для  $\forall x$  не кратного  $2\pi$ , якщо  $x$  кратне  $2\pi$ , то ряд перетворюється в гармонічний і розбігається.

# Тема 22. Функціональні послідовності і ряди. Степеневі ряди

Розглянемо послідовність

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots, \quad (24)$$

елементами якої є функції від змінної  $x$ . Границю послідовності  $\forall x \in X$ ,  $X \subset \mathbb{R}$  будемо називати **граничною функцією**  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

Відображення  $\Phi: \mathbb{N} \rightarrow F$ , де  $F$  — множина всіх функцій, називається **функціональною послідовністю (ФП)**. Значення відображення  $\Phi(n) = f_n$  називається  **$n$ -им членом**, та будемо її позначати  $(f_n)$ .

## Збіжність послідовності функцій

Функціональна послідовність (24) називається **збіжною** в т.  $x_0 \in X$ , якщо в цій точці збіжною є відповідна числова послідовність  $\{f_n(x_0)\}$ .

**Критерій Коші збіжності функціональної послідовності.** Для того, щоб функціональна послідовність (24) збігалася у довільній точці  $x_0 \in X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon, x_0) \in \mathbb{N}: \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ .

Функціональна послідовність  $(f_n)$  називається **поточково збіжною** до функції  $f$ , якщо  $\forall x \in X: f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Будемо це позначати як  $f_n \rightarrow f$ . У випадках, коли важливий сам факт поточної збіжності ФП, а не гранична функція, будемо це позначати як  $f_n \rightarrow$ .

Розглянемо також ряд, членами якого є функції:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (25)$$

Функціональна послідовність  $(S_n)$  називається **функціональним рядом (ФР)**, якщо існує така функціональна послідовність  $(f_n)$ , для якої виконується умова:  $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in X \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ . Такий функціональний ряд будемо позначати  $\sum f_n$ . Значення  $S_n$  називається **частковою сумою** ФР  $\sum f_n$ , а функція  $f_n$  її **загальним членом** ( $n$ -им членом) функціонального ряду.

## Збіжність функціональних рядів

Розглянемо функціональний ряд (25). Припускаючи збіжність, введемо його суму  $S(x)$ , часткову суму  $S_n(x)$  і його залишок після  $n$ -го члена

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = S(x) - S_n(x).$$

При цьому  $\forall x: \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ .

Функціональний ряд (25) — збіжний в т.  $x_0 \in X$ , якщо збіжний в цій точці відповідний числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$  або  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0)$  і абсолютно збіжний в т.  $x_0$ , якщо при  $x = x_0$  збігається ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ .

**Поточковою сумою** ФР  $\sum f_n$  на множині  $X$  називається поточкова границя його часткових сум, якщо вона існує. ФР називається **поточково збіжним** на  $X$ , якщо його поточкова сума існує та скінченна в кожній точці множини  $X$ .

Якщо ФР збігається до деякої функції  $S$ , то будемо це позначати  $\sum f_n \rightarrow S$ , якщо важливий сам факт збіжності ряду, то позначатимемо це так:  $\sum f_n \rightarrow$ . Поточкову суму ряду, якщо вона існує, будемо позначати  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ .

Множина точок  $x \in X$ , в кожній з яких функціональний ряд (25) збіжний, становить **область збіжності** функціонального ряду.

Для функції  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  число  $\sup_{x \in D_f} |f(x)| \in \mathbb{R}$  називається **рівномірною нормою** функції  $f$  на (множині)  $D_f$  та позначається  $\|f\|$ .

### Рівномірна збіжність функціональної послідовності

Функціональна послідовність  $(f_n)$  називається **рівномірно збіжною** до функції  $f$  на множині  $X$ , якщо  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . При цьому функція  $f$  називається **рівномірною границею** ФП  $(f_n)$ , саму збіжність будемо позначати як  $f_n \Rightarrow f$ , або  $f_n \Rightarrow$ , якщо важливий сам факт рівномірної збіжності, а не рівномірна границя.

**Теорема (зв'язок рівномірної та поточної збіжності ФП).** Якщо  $f_n \Rightarrow f$  на множині  $X$ , то на  $X$  також  $f_n \rightarrow f$ .

**Наслідок (єдиність рівномірної границі).** Якщо  $f_n \Rightarrow$  на множині  $X$ , то її рівномірна границя єдина.

Можна також дати означення рівномірної збіжності ФП в іншому формулюванні.

Послідовність функцій  $\{f_n(x)\}$  називається **рівномірно збіжною** до  $f(x)$  на множині  $X$ , якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon$  і для всіх  $x \in X$  одночасно виконується нерівність  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  або  $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

Тут суттєво, що  $N_\varepsilon$  не залежить від  $x$ . Для позначення рівномірної збіжності використовується запис:  $f_n(x) \xrightarrow{x} f(x)$ ,  $x \in X$ , або  $f_n \xrightarrow{x} f$ .

ФП  $(f_n)$  називається **рівномірно фундаментальною**, якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \|f_{n+p} - f_n\| < \varepsilon$ .

### Рівномірна збіжність функціонального ряду

ФР  $(25) \sum f_n$  називається **рівномірно збіжним**, якщо послідовність його часткових сум  $(S_n)$  рівномірно збігається, тобто  $S_n(x) \xrightarrow{x} S(x)$ ,  $x \in X$ , а са-

ме:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X$  одночасно, або  $\sup_{x \in X} |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ , або  $r_n(x) = S(x) - S_n(x) \xrightarrow{r} 0 \ \forall x \in X$ .

$\Phi P \sum f_n$  задовольняє **рівномірну умову Коші**, якщо послідовність його часткових сум є рівномірно фундаментальною.

**Теорема (Критерій Коші для  $\Phi P$ ).**  $\Phi P \sum f_n$  рівномірно збіжний тоді і тільки тоді, коли він задовольняє рівномірну умову Коші.

Це є просте переформулювання теореми для послідовностей.

Розглянемо найпоширенішу і найпростішу ознаку **Вейерштрасса** рівномірної збіжності функціональних рядів.

**Ознака Вейерштрасса.** Якщо для функціонального ряду (25)  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

можна вказати такий збіжний числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , що  $\forall n \geq n_0 \ \forall x \in X : |f_n(x)| \leq a_n$ , то ряд (25) збігається абсолютно і рівномірно на  $X$ .

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називають **мажоруючим** для  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ .

**Ознака Абеля рівномірної збіжності  $\Phi P$ .** Нехай  $\forall x \in X$  послідовність  $(f_n(x))$  — монотонна. Якщо  $\Phi P \sum \varphi_n \Rightarrow$  і  $\|f_n\| = O(1)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то ряд  $\sum f_n \varphi_n \Rightarrow$  на  $X$ .

**Ознака Діріхле рівномірної збіжності  $\Phi P$ .** Нехай  $\forall x \in X$  послідовність  $(f_n(x))$  — монотонна. Якщо  $\|f_n\| = o(1)$  і  $\left\| \sum_{k=1}^n \varphi_k \right\| = O(1)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то ряд  $\sum f_n \varphi_n \Rightarrow$  на  $X$ .

## Властивості рядів, що рівномірно збігаються

**Розглянемо/вивчимо** функціональні властивості суми функціонального ряду.

**Теорема (про неперервність суми  $\Phi P$ ).** Нехай функції  $f_n(x)$  визначені на  $X = [a, b]$  і всі є неперервними в деякій точці  $x = x_0$  з цього проміжку. Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  збігається рівномірно на  $X$ , то і сума ряду  $S(x)$  в точці  $x = x_0$  також буде неперервною.

**Теорема (Діні).** Нехай члени ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  є неперервними і невід'ємними на всьому проміжку  $X = [a, b]$  ( $f_n(x) \in C([a, b])$ ,  $f_n(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$ ). Якщо ряд має суму  $S(x)$ , неперервну на  $X$ , то він збігається рівномірно, тобто якщо  $S_n(x) \rightarrow S(x)$ , то  $S_n(x) \xrightarrow{r} S(x)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Це випадок, коли рівномірна збіжність є необхідною умовою.

**Теорема (почленне інтегрування  $\Phi P$ ).** Якщо  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , неперервні на  $X = [a, b]$  і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  збігається рівномірно ( $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{r} S(x)$ ), то інтеграл від  $S(x)$  представляється так:



$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx + \dots$$

Отже, якщо ряд рівномірно збіжний, то інтеграл від суми ряду дорівнює сумі ряду, складеного з інтегралів його членів, тобто можливе почленне інтегрування ряду.

**Теорема (почленне диференціювання ФР).** Нехай  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , визначені на  $X = [a, b]$  і мають неперервні похідні  $f'_n(x)$  на  $X$ . Якщо в цьому проміжку збігається ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ , а ряд, складений з похідних,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x) + \dots,$$

збігається рівномірно, то і сума ряду  $S(x)$  має на  $X$  похідну, причому  $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ .

Останні дві теореми носять достатній характер.

## Практичне заняття 26

**Приклад 1.** Знайдемо область (умовної) збіжності і абсолютної збіжності ряду: а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x)}{n}$ , б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ .

Г

а) Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}$  абсолютно збігається, якщо  $|q| < 1$  і розбігається, якщо  $|q| > 1$ ; при  $q = -1$  ряд збігається не абсолютно;  $q = 1$  - розбіжний. І тому  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x)}{n}$  — абсолютно збіжний, якщо  $|\ln x| < 1$ ,  $e^{-1} < x < e$  і не абсолютно збіжний якщо  $\ln x = -1$ ,  $x = e^{-1}$ . При інших  $x$  ряд розбіжний. Отже  $[e^{-1}; e)$  - область збіжності,  $(e^{-1}; e)$  - область абсолютної збіжності.

б)  $\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ , тому  $f(x) = 0$ .

$$\left| \frac{x}{1+n^2x^2} - 0 \right| = \frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n} < \varepsilon, \quad N \geq \left[ \frac{1}{2\varepsilon} \right], \quad f_n(x) \rightarrow 0.$$

┘

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1)$$

$$\bullet \quad f(x) = 0 \quad |f_n(x) - f(x)| = x^n \Big|_{x=n^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{1}{2} = 5 < 5 = H5 \varepsilon,$$

$$f_n(x) = 5 \rightarrow 0.$$

$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

$$\bullet \quad f(x) = 1. \quad |f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2}{n^2+x^2} \leq \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \quad > A : V; L : 8 \quad |x| \leq 1. \\ \frac{n^2}{n^2+x^2} \rightarrow 1, \quad x \in [-1, 1].$$

$$\bullet \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((n-1)x+1)(nx+1)}, \quad x = (0, +\infty)$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{((k-1)x+1)(kx+1)} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+1} - \dots + \frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1} \right) = \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{1}{nx+1} \right),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{x}. \quad S(x) = \frac{1}{x}.$$

$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x(nx+1)} - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x(nx+1)} \Big|_{x_n = \frac{1}{n}} = \frac{n}{2}$  не менше  $\varepsilon$ , ряд не є рівномірно збіжний.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}, \quad 0 < x < \infty, \quad |R_n(x)| \leq a_{n+1} < \frac{1}{n+1+x} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad .$

- Ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  рівномірно збігаються в  $X$ , як тільки

ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збігається абсолютно, бо  $|a_n \sin nx| \leq |a_n|$ ,  $|a_n \cos nx| \leq |a_n|$ , тут мажоруючий ряд є  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

- Довести абсолютну і рівномірну збіжність  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ , де  $f_n(x) = \frac{\arctg(n^2 x) \cos \pi n x}{n\sqrt{n}}$

$\mathbb{R}$ .  
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$  виконується  $|\arctg(n^2 x)| < \frac{\pi}{2}, \quad |\cos \pi n x| \leq 1$ , то  $|f_n(x)| < \frac{\pi}{2n^{\frac{3}{2}}}$ .

Із збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  випливає абсолютна і рівномірна збіжність на  $X$  ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  за ознакою Вейерштрасса.

- Розглянемо, чи законне диференціювання  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2}, x \in \mathbb{R}$ . Розглянемо ряд із похідних:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{n^4}} \cdot \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2},$

$\frac{n^2}{n^4 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}$  — ряд збіжний за ознакою Вейерштрасса, абсолютно і рівномірно, отже почленне диференціювання ряду є законним.

## Тема 23. Ряди Фур'є

### Практичне заняття 27

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## Тема 24. Невласні інтеграли

### Практичне заняття 28

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## Відповіді та вказівки

**15.1**  $\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 4x - \ln|x| - \frac{11}{x} + C$ ,  $x \neq 0$ ; **15.2**  $\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}} + C$ ; **15.3**  $\ln|x| + 2 \arctg x + C$ ,  $x \neq 0$ ; **15.4**  $x + \sin x + C$ ; **15.5**  $\cos x + C$ ; **15.6**  $\tg x - x + C$ ; **15.7**  $\frac{1}{4} \operatorname{ch} 2x + C$ ; **15.8**  $3 \cdot \left(\frac{3}{e}\right)^x \cdot \left(\ln \frac{3}{e}\right)^{-1} + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{x}{e} + C$ ; **15.9**  $-\frac{1}{8(2x-3)^4} + C$ ,  $x \neq \frac{3}{2}$ ; **15.10**  $\frac{3}{56} \sqrt[3]{(5-8x)^7} + C$ ; **15.11**  $-\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C$ ; **15.12**  $-\frac{1}{2} \cos(2x-3) + C$ ; **15.13**  $\frac{1}{3\sqrt{2}} \arctg \frac{\sqrt{2}}{3}x + C$ ; **15.14**  $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C$ ,  $|x| \leq \frac{2}{3}$ ; **15.15**  $\frac{1}{2}x^2 + 2 \ln|x^2-4|$ ,  $x \neq \pm 2$ ; **15.16**  $\frac{1}{b^2} \sqrt{b^2x^2+a^2}$ ; **15.17**  $-\frac{1}{5} \cos(x^5+3)$ ; **15.18**  $\frac{1}{3b^2}(b^2x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}$ ; **15.19**  $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}$ ,  $x \neq 0$ ; **15.20**  $e^{\sin x}$ ; **15.21**  $\ln|\ln x|$ ,  $x > 0$ ; **15.22**  $\ln|\ln \ln x|$ ,  $x > e$ .

**16.1**  $2x - \ln|2x+1|$ ,  $x \neq -\frac{1}{2}$ ; **16.2**  $x - 2 \arctg x$ ; **16.3**  $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x + \ln|x-1| - 16 \ln|x+2|$ ,  $x \notin \{-2, 1\}$ ; **16.4**  $\frac{(x+1)^2}{2} + \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \arctg x$ ,  $x \neq 1$ ; **16.5**  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctg x$ ,  $x \neq \pm 1$ ; **16.6**  $\frac{3}{2(x-2)^2} + \ln|x-5|$ ,  $x \notin \{2, 5\}$ ; **16.7**  $\frac{2}{x-3} + 3 \ln|x+2| - 3 \arctg(x+2) - \ln(x^2+4x+5)$ ,  $x \notin \{-2, 3\}$ ; **16.8**  $3 \ln|x-1| + \ln \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{x^2+1} + \arctg x \right)$ ,  $x \neq 1$ ; **16.9**  $x \sin x + \cos x$ ; **16.10**  $-e^{-x}(x+1)$ ; **16.11**  $\frac{1}{2}e^x \cdot (\sin x - \cos x)$ ; **16.12**  $(x+1) \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$ ; **16.13**  $x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$ ,  $|x| \leq 1$ ; **16.14**  $x \cdot (\arcsin x)^2 + 2 \arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2} - 2x$ ,  $|x| \leq 1$ ; **16.15**  $x \tg x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x|$ ,  $x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ; **16.16**  $(x^3+1) \cdot \ln(1+x) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x$ ,  $x > -1$ ; **16.17**  $\frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x)$ ,  $x > 0$ ; **16.18**  $\sqrt{1+x^2} \cdot \arctg x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

**17.1**  $\frac{3}{2} \sqrt[6]{x^4} + 2 \sqrt[6]{x^3} + 3 \sqrt[6]{x^2} + 6 \sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x}-1|$ ,  $x \notin \{0, 1\}$ ; **17.2**  $\ln \frac{|x|}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}} + \frac{10}{\sqrt[10]{x}} - \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}$ ,  $x \neq 0$ ; **17.3**  $\frac{2}{5} \sqrt{(x-1)^5} + \frac{4}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1}$ ,  $x \neq 1$ ; **17.4**  $6 \sqrt[3]{(x+1)^2} \cdot \left( \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{x+1}{5} + \frac{\sqrt{x+1}}{7} + \frac{1}{4} \right)$ ,  $x \neq -1$ ; **17.5**  $\frac{3}{4}y^4 - \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{4} \ln|y-1| + \frac{15}{8} \ln(y^2+y+2) - \frac{27}{8\sqrt{7}} \arctg \frac{2y+1}{\sqrt{7}}$ , де  $y = \sqrt[3]{2+x}$ ,  $x \neq -1$ ; **17.6**  $\ln \left| \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \right| + 2 \arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ,  $x \in (-1, 0) \cup (0, 1]$ ; **17.7**  $-\frac{1}{2}(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2} + 14 \arcsin \frac{x+1}{2}$ ,  $x \in (-3, 1)$ ; **17.8**  $-15 \ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}| + (x^2-5x+20) \cdot \sqrt{x^2+4x+5}$ ; **17.9**  $\frac{\operatorname{sgn} x}{2} \cdot \arcsin \frac{x-2}{x\sqrt{2}}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus [-2-2\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2}]$ ; **17.10**  $\frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{\sqrt{3}} \cdot (\ln(2\sqrt{3}|x-1|) - \ln|\sqrt{3}(x+1) \cdot \operatorname{sgn}(x-1) + \sqrt{x^2+x-1}|)$ ,  $x \neq 1$ ; **17.11**  $\ln|x+1| + \sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{x+1} \cdot (1-\sqrt{x^2+2x+2})$ ; **17.12**  $-4 \ln|y| + 3 \ln|2y-1| + \frac{3}{2y-1}$ , де  $y = \sqrt{x^2+x+1} - x$ ,  $x \neq -1$ ; **17.13**  $\ln \left| \frac{y-1}{y} \right| - 2 \arctg y$ , де  $y = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$ ; **17.14**  $3 \cdot \left( \ln \left| \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} \right| + \frac{2\sqrt[3]{x+3}}{2(1+\sqrt[3]{x^2})} \right)$ ,  $x \notin \{-1, 0\}$ ; **17.15**  $-\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} - \frac{1}{5} \sqrt{(1-x^2)^5}$ ,  $x \neq \pm 1$ ; **17.16**  $3y + \ln \frac{|y-1|}{\sqrt{y^2+y+1}} - \sqrt{3} \arctg \frac{2y+1}{\sqrt{3}}$ , де  $y = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$ ,  $x \neq 0$ ; **17.17**  $-\frac{1}{10} \left( \frac{1+x^4}{x^4} \right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} \left( \frac{1+x^4}{x^4} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}$ ,  $x \neq 0$ ; **17.18**  $-\frac{8}{9} \sqrt{(1+x^{-3/4})^3}$ ,  $x \neq 0$ .

**18.1**  $\frac{4}{5} \sin^5 x - \frac{8}{7} \sin^7 x$ ; **18.2**  $\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x$ ; **18.3**  $-(\cos x)^{-1} + \frac{1}{3}(\cos x)^{-3}$ ,  $x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ; **18.4**  $\tg x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x$ ,  $x \notin \left\{ \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ; **18.5**  $\frac{1}{2} \ln|\tg x|$ ,

$x \notin \{\frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ; **18.6**  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right|$ ,  $x \notin \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ; **18.7**  $\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(\sqrt{5} \operatorname{tg} \frac{x}{2})$ ,  
 $x \notin \{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ; **18.8**  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\frac{5}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{3}{4})$ ,  $x \notin \{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ;  
**18.9**  $\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{6}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{6}} \right|$ ,  $x \notin \{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ 2 \cdot (\pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{2} + \pi k) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ;  
**18.10**  $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left( \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} \right)$ ,  $x \notin \{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ; **18.11**  $-2 \ln |\operatorname{tg} x + 1| - \ln \cos^2 x -$   
 $-2 \cos^2 x + \sin 2x$ ,  $x \notin \{-\frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ; **18.12**  $\operatorname{arctg}(\sin^2 x)$ ;  
**18.13**  $I_1 = \sin x$ ,  $I_2 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$  та  $\forall n \geq 3$ :  $I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$ ;  
**18.14**  $J_1 = \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}|$ ,  $J_2 = -\operatorname{ctg} x$  та  $\forall n \geq 3$ :  $J_n = -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \cdot J_{n-2}$ ;  
**18.15**  $|x| + C$ ; **18.16**  $x + 4 + C$  при  $x < -2$ ,  $-x + C$  при  $x \in [-2, 1]$  та  $x - 2 + C$   
при  $x > 1$ ; **18.17**  $\frac{1}{3} + C$  при  $x \in (0, \frac{1}{3})$ ,  $x + C$  при  $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $2x - \frac{2}{3} + C$  при  
 $x \in [\frac{2}{3}, 1)$  та  $3x - \frac{5}{3} + C$  при  $x \in [1, \frac{4}{3})$ ; **18.18**  $\frac{x^2}{2} + x + C$  при  $x \in (-1, 0)$ ,  $\frac{x^2}{2} + C$   
при  $x \in [0, 1)$  та  $\frac{x^2}{2} - x + 1 + C$  при  $x \in [1, 2)$ ; **18.19**  $e^x + C$  при  $x \leq 0$ ,  $\frac{x^2}{2} + 1 + C$   
при  $0 < x \leq 1$  та  $-\frac{1}{\pi} \cos \pi x + \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi} + C$  при  $x > 1$ ; **18.20**  $-\cos x + C$  при  $x \leq \frac{\pi}{4}$ ,  
 $\sin x - \sqrt{2} + C$  при  $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$  та  $-\cos 3x + 1 - \sqrt{2} + C$  при  $x \geq \frac{\pi}{2}$ .

**19.1**  $\overline{S_{P_{2n}}}(f) = \frac{2}{3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2}$ ,  $\overline{S_{P_{2n}}}(f) = \frac{2}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2}$ ; **19.2**  $\overline{S_{P_n}}(f) = 16\frac{1}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$ ,  
 $\overline{S_{P_n}}(f) = 16\frac{1}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$ ; **19.3**  $\overline{S_{P_{3n}}}(f) = -1 - \frac{1}{n}$ ,  $\overline{S_{P_{3n}}}(f) = -1 + \frac{1}{n}$ ; **19.4**  
 $\overline{S_{P_{5n}}}(f) = 6\frac{1}{2} - \frac{5}{2n}$ ,  $\overline{S_{P_{5n}}}(f) = 6\frac{1}{2} + \frac{5}{2n}$ ; **19.5**  $\overline{S_{P_{4n}}}(f) = -10$ ,  $\overline{S_{P_{4n}}}(f) = -10 + \frac{4}{n}$ ;  
**19.6**  $\overline{S_{P_{2n}}}(f) = 1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}$ ,  $\overline{S_{P_{2n}}}(f) = 1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}$ ; **19.7**  $\overline{S_{P_{8n}}}(f) = 6\frac{1}{4} - \frac{1}{n}$ ,  
 $\overline{S_{P_{8n}}}(f) = 6\frac{1}{4} + \frac{1}{n}$ ; **19.8** – **19.9**  $\overline{S_P}(f) - S_P(f) \leq 2 \cdot \|P\|$ , функція інтегровна  
за критерієм інтегровності; **19.10**  $\frac{3}{2}$ ; **19.11**  $-1$ ; **19.12**  $-2$ ; **19.13**  $19$ ; **19.14**  $1$ ;  
**19.15**  $\frac{3}{4}$ ; **19.16**  $\frac{1}{2}$ ; **19.17**  $\ln 3$ ; **19.18**  $\ln 2$ ; **19.19**  $\frac{1}{e}$ ; **19.20**  $\frac{\pi}{4}$ ; **19.21**  $\frac{5}{6}\pi$ ; **19.22**  $\frac{1}{4}$ ;  
**19.23**  $\frac{4}{e}$ ; **19.24**  $\frac{1}{4}$ ; **19.25**  $0$ ; **19.26** – **19.28** так.

**20.4**  $4$ ; **20.5**  $1$ ; **20.6**  $2 - \frac{2}{3}$ ; **20.7**  $200\sqrt{2}$ ; **20.8**  $200\sqrt{2}$ ; **20.9**  $5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ ; **20.10**  
 $-5\pi$ ; **20.11**  $9 - 3\pi - \pi^2 + \frac{\pi^5}{3}$ ; **20.12**  $\frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$ ; **20.13**  $e - \sqrt{e}$ ; **20.14** – **20.16** заміну  
зробити неможливо; **20.17**  $\int_0^1 (f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)) dt$ ; **20.18**  $\int_5^{20} \frac{t dt}{2\sqrt{t-4}}$ ;  
**20.19** – **20.21** ні; **20.22** так,  $1$ ; **20.23** ; **20.24**  $0$ ; **20.25**  $1$ ; **20.26**  $-\frac{2}{3}$ ; **20.27**  $0$ ;  
**20.28**  $\infty$ ; **20.29** другого; **20.30** першого; **20.31** першого; **20.32** другого; **20.33**  
першого; **20.34**  $[\frac{2}{\sqrt{e}}, 2e^2]$  за 1-ою теор. про середнє; **20.35**  $[\frac{1-e^{-100}}{200}, \frac{1}{100}]$  за 2-  
ою теор. про середнє; **20.36**  $[\frac{11}{21}, \frac{22}{21}]$  за 1-ою теор. про середнє; **20.37** ; **20.38**  
 $[\frac{\cos \pi^2 - 1}{2\pi}, \frac{\cos \pi^2 + 1}{2\pi}]$  за 2-ою теор. про середнє; **20.39**  $[\frac{\pi}{2} \cdot \cos 1, \frac{\pi}{2}]$  за 1-ою теор.  
про середнє; **20.40** ; **20.41**  $[\frac{\pi(3-2\sqrt{3})}{6}, \frac{\pi(2-\sqrt{3})}{3}]$  за 2-ою теор. про середнє; **20.42**  
 $I \approx 3,5618$  за формулою прямокутників при  $n = 4$ ,  $I \approx 3,5723$  за формулою  
трапецій ( $n = 6$ ); **20.43**  $I \approx 2,5576$  за формулою прямокутників при  $n = 4$ ,  
 $I \approx 2,5723$  за формулою трапецій ( $n = 5$ ).

**21.1**  $\frac{4}{15}$ ; **21.2**  $\pi - 2$ ; **21.3**  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ ; **21.4**  $18$ ; **21.5**  $\frac{41}{2} \arcsin \frac{9}{41} + 20 \ln \frac{4}{5}$ ; **21.6**  
 $\frac{4}{3} + 2\pi$ ; **21.7**  $\frac{5\sqrt{2}-2}{3}$ ; **21.8**  $2 - \frac{1}{\ln 2}$ ; **21.9**  $\frac{\pi a^2}{12}$ ; **21.10**  $\frac{3\pi-8}{32}$ ; **21.11**  $\frac{3\pi a^2}{2}$ ; **21.12**  
 $\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; **21.13**  $\frac{8}{15}$ ; **21.14**  $\frac{3\pi}{4}$ ; **21.15**  $a^2$ ; **21.16**  $\pi a^2 \sqrt{2}$ ; **21.17**  $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ ; **21.18**  
 $\sqrt{2}(\pi - 1)$ ; **21.19**  $2a$ ; **21.20**  $6a$ ; **21.21**  $4$ ; **21.22**  $\pi a$ ; **21.23**  $\frac{16}{3} a^3$ ; **21.24** ??; **21.25**  
 $\frac{4}{15}$ ; **21.26** а)  $\frac{16\pi}{15}$ , б)  $\frac{8\pi}{3}$ ; **21.27**  $12\pi$ ; **21.28** а)  $\frac{\pi}{2}(e^4 - 1)$ , б)  $4\pi e^2$ .

**22.1**  $\frac{1}{2}$ , 1; **22.2** 0, 1; **22.3** 0, 1; **22.4** 1,  $\infty$ ; **22.5**  $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 1$ ,  
 $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = -1$ ,  $\nexists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ ; **22.6** всі три границі дорівнюють нулю;  
**22.7**  $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 0$ ,  $\nexists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ ; **22.8** всі три гра-  
ниці дорівнюють 1; **22.9** не існує; **22.10**  $\ln 2$ ; **22.11** 0; **22.12** не існує; **22.13**  $e$ ;  
**22.14** 0; **22.15**  $f \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid xy = 0\})$ ; **22.16**  $f \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\})$ ;  
**22.17**  $f \in C(\mathbb{R}^2 \setminus A)$ , де  $A = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{1}{3}\}\}$ ; **22.18**  $f \in C(\mathbb{R}^2 \setminus A)$ , де  
 $A = \{(x, y) \mid x + y^2 = 0\}$ ; **22.19**  $f \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ ; **22.20** – **22.23**  $f(0, 0) = 0$ .

**23.1** диференційовна на  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ; **23.2** диференційовна на ??; **23.3** ди-  
ференційовна на  $\mathbb{R}^2$ ; **23.4** диференційовна на множині  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -y^2\}$ ;  
**23.5** диференційовна на  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ; **23.6** – **23.7** диференційовна на  $\mathbb{R}^2$ ; **23.8**  
 $\text{grad } f(1, 1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $f'_{P_0 P_1} = 0$ ; **23.9**  $\text{grad } f(1, 1) = (\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$ ,  $f'_{P_0 P_1} = \frac{2}{9}$ ; **23.10**  
 $\text{grad } f(1, 0, 0) = (2e, 0, 0)$ ,  $f'_a = 0$ ; **23.11**  $\text{grad } f(1, -1, 1) = \frac{1}{3+\sqrt{3}} \cdot (1, -1, 1)$ ,  $f'_a =$   
 $\frac{1}{3+\sqrt{3}}$ ; **23.12** 0,98; **23.13** 4,99; **23.14** 0,005; **23.15**  $\frac{\pi^2}{360} + \frac{797+4\ln 4}{3200}\pi - \frac{1}{200}$ ; **23.16**  
 $df = (y^3 - 6xy^2) dx + 2y(3xy - 3x^2 + 4) dy$ ,  $d^2f = -6y^2 dx^2 + 12y(y - 2x) dx dy +$   
 $2(6xy - 3x^2 + 4) dy^2$ ; **23.17**  $df = e^{x+y^2-z^3} \cdot (dx + 2y dy - 3z^2 dz)$ ,  $d^2f = e^{x+y^2-z^3} \cdot$   
 $(dx^2 + 4y^2 dy^2 + 9z^4 dz^2 + 4y dx dy - 6z^2 dx dz - 12yz^2 dy dz)$ ; **23.18**  $df = -2xz(x^2 +$   
 $y^2)^{-2} dx - 2yz(x^2 + y^2)^{-2} dy + (x^2 + y^2)^{-1} dz$ ,  $d^2f = 2(x^2 + y^2)^{-2} \cdot (z(3x^2 - y^2)(x^2 +$   
 $y^2)^{-1} dx^2 + z(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2)^{-1} dy^2 + 8xyz(x^2 + y^2)^{-1} dx dy - 2x dx dz - 2y dy dz)$ ;  
**23.19**  $dF = 2xg'_x dx + 2yg'_y dy - g'_z dz$ ,  $d^2F = 4x^2g''_{xx} dx^2 + 4y^2g''_{yy} dy^2 + g''_{zz} dz^2 +$   
 $8xyg''_{xy} dx dy - 4xg''_{xz} dx dz - 4yg''_{yz} dy dz$ ; **23.20**  $dF = (h'_1 + h'_2) dx + (h'_1 - h'_2) dy$ ,  
 $d^2F = (h''_{11} + 2h''_{12} + h''_{22}) dx^2 + (h''_{11} - 2h''_{12} + h''_{22}) dy^2 + (h''_{11} - h''_{22}) dx dy$ ; **23.21**  
 $dF = (2xyh'_1 + y^{-2}h'_2) dx + (x^2h'_1 - 2xy^{-3}h'_2) dy$ ,  $d^2F = (2(yh'_1 + 2x^2y^2h''_{11} +$   
 $2xy^{-1}h''_{12}) + y^{-4}h''_{22}) dx^2 + 2(2xh'_1 - 2y^{-3}h'_2 + 2x^3yh''_{11} - 3x^2y^{-2}h''_{12} - 2xy^{-5}h''_{22}) dx dy +$   
 $(6xy^{-4}h'_2 + x^4h''_{11} - 2xy^{-3}(1+x^2)h''_{12} + 4x^2y^{-6}h''_{22}) dy^2$ ; **23.22**  $dF = (yu'_1 + u'_3) dx +$   
 $(xu'_1 + \cos y u'_2) dy + u'_3 dz$ ,  $d^2F = (y^2u''_{11} + 2yu''_{13} + u''_{33}) dx^2 + (x^2u''_{11} + x \cos y u''_{12} -$   
 $\sin y u'_2 + \cos y \cdot (xu''_{12} + \cos y u''_{22})) dy^2 + u''_{33} dz^2 + 2(u'_1 + x(yu''_{11} + u''_{13}) + \cos y \cdot$   
 $(yu''_{12} + u''_{23})) dx dy + 2(yu''_{13} + u''_{33}) dx dz + 2(xu''_{13} + \cos y u''_{23}) dy dz$ ; **23.23**  $dF =$   
 $2(xu'_1 + xu'_2 + zu'_3) dx + 2y(u'_1 - u'_2) dy + 2xu'_3 dz$ ,  $d^2F = 2(u'_1 + u'_2 + 2x^2(u''_{11} + u''_{22}) +$   
 $2z^2u''_{33}) dx^2 + 2(u'_1 - u'_2 + 2y^2(u''_{11} + u''_{22})) dy^2 + 4x^2u''_{33} dz^2 + 8y(xu''_{11} - xu''_{22} + zu''_{13} -$   
 $zu''_{23}) dx dy + 4(u'_3 + 2x(xu''_{13} + xu''_{23} + zu''_{33})) dx dz + 8xy(u''_{13} + u''_{23}) dy dz$ ; **23.24** 0;  
**23.25**  $3x^2 \cos(yz) - 3x^2 yz \sin(yz) + 2ye^{x+z}$ ; **23.26** 4; **23.27**  $x^n y^m \sin(xy + \frac{\pi}{2}(m+n))$ ;  
**23.28**  $(-1)^{m+n-1}(m+n-1)!(1+x+y)^{-(m+n)}$ ; **23.29**  $(-1)^n \cdot ((x+m)^2 + (y-n)^2 -$   
 $m-n)$ ; **23.30**  $z'_x = z'_y = -1$ ,  $z''_{xx} = z''_{yy} = z''_{xy} = 0$ ; **23.31**  $z'_x = z'_y = (e^z - 1)^{-1}$ ,  
 $z''_{xx} = z''_{yy} = z''_{xy} = -e^z \cdot (e^z - 1)^{-3}$ ; **23.32**  $z'_x = \frac{2-x}{z+1}$ ,  $z'_y = \frac{2y}{z+1}$ ,  $z''_{xx} = \frac{-1}{z+1} - \frac{(2-x)^2}{(z+1)^3}$ ,  
 $z''_{yy} = \frac{2}{z+1} - \frac{4y^2}{(z+1)^3}$ ,  $z''_{xy} = \frac{2y(x-2)}{(z+1)^3}$ ; **23.33**  $z'_x = \frac{z}{x+z}$ ,  $z'_y = \frac{z^2}{y(x+z)}$ ,  $z''_{xx} = \frac{-z^2}{(x+z)^3}$ ,  
 $z''_{yy} = \frac{-xz^2}{y^2(x+z)^2}$ ,  $z''_{xy} = \frac{xz^2}{y(x+z)^3}$ ; **23.34**  $y + xy - \frac{1}{2}y^2 + o(\|h\|^2)$ ; **23.35**  $1 + xy + o(\|h\|^2)$ ;  
**23.36**  $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + o(\|h\|^2)$ ; **23.37**  $1 + x - y - xy + o(\|h\|^2)$ ; **23.38**  $x - y + o(\|h\|^2)$ ;

**23.39**  $1 + (x-1) - (y-1) - (x-1)(y-1) + (y-1)^2 + o(\|h\|^2)$ ; **23.40**  $xy + o(\|h\|^2)$ ; **23.41**  $-1 - (x-1) + (y-2) - (x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) - (y-2)^2 + o(\|h\|^2)$ ; **23.42**  $-\pi - (x-\pi) + \frac{\pi}{2}(x-\pi)^2 - \pi(x-\pi)(y-2\pi) + \frac{\pi}{2}(y-2\pi)^2 + o(\|h\|^2)$ ; **23.43**  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(x - \frac{\pi}{2})^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(y - \frac{\pi}{3})^2 + o(\|h\|^2)$ , де  $h = (x - x_0, y - y_0)$ .

**24.1**  $\text{loc min } f = f(1, 0) = -1$ ; **24.2**  $\text{loc min } f = f(0, 1) = 0$ ; **24.3**  $\text{loc min } f = f(x_0, x_0 + 1) = 0, x_0 \in \mathbb{R}$ ; **24.4**  $\text{loc min } f = f(1, 1) = -1$ ; **24.5**  $\text{loc min } f = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2e}$ ,  $\text{loc max } f = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2e}$ ; **24.6**  $\text{loc min } f = f(5, 2) = 30$ ; **24.7**  $\text{loc min } f = f(\frac{5\pi}{12} + \pi(k+m), -\frac{7\pi}{12} + \pi(k-m)) = -2 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $\text{loc max } f = f(\frac{7\pi}{12} + \pi(k+m), \frac{7\pi}{12} + \pi(k-m)) = 2 + \sqrt{3} + \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \{k, m\} \subset \mathbb{Z}$ ; **24.8**  $\text{loc max } f = f(2\pi k, 0) = 2, k \in \mathbb{Z}$ ; **24.9**  $\text{loc min } f = f(\pm \frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2e}}) = -\frac{1}{2e}$ ,  $\text{loc max } f = f(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}) = \frac{1}{2e}$ ; **24.10**  $\text{loc min } f = f(-1, -2, 3) = -14$ ; **24.11**  $\text{loc min } f = f(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1) = -\frac{4}{3}$ ; **24.12**  $\text{loc max } f = f(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7}) = (\frac{a}{7})^7$ ; **24.13**  $\text{loc max } f = f(a, a, a) = a^4$ ; **24.14**  $\text{loc min } f = f(\frac{1}{2}, 1, 1) = 4$ ; **24.15**  $\text{loc max } f = f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 4$ ; **24.16**  $\text{loc min } z = -3$  та  $\text{loc max } z = 1$  у точці  $(-1, 1)$ ; **24.17**  $\text{loc min } z = z(-2, 0) = 1$ ,  $\text{loc max } z = z(\frac{16}{7}, 0) = -\frac{8}{7}$ ; **24.18**  $\text{loc min } z = z(-1, -1) = -4$ ,  $\text{loc max } z = z(1, 1) = 4$ ; **24.19**  $\text{loc min } z = z(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0) = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ; **24.20**  $\text{loc min } z = z(-3 - \sqrt{6}, -3 - \sqrt{6}) = -4 - 2\sqrt{6}$ ,  $\text{loc max } z = z(-3 + \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6}) = -4 + 2\sqrt{6}$ ; **24.21**  $\text{loc min } z = z(-\frac{16}{7}, 0) = \frac{8}{7}$ ,  $\text{loc max } z = z(2, 0) = -1$ ; **24.22**  $\text{loc min } z = -1$  та  $\text{loc max } z = \frac{7}{3}$  у точці  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ; **24.23**  $\text{loc min } f = f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = -\frac{1}{8}$ ; **24.24**  $\text{loc min } f = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}$ ,  $\text{loc max } f = f(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$ ; **24.25**  $\text{loc min } f = f(-1, -2) = -5$ ,  $\text{loc max } f = f(1, 2) = 5$ ; **24.26**  $\text{loc max } f = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \sqrt[4]{e}$ ; **24.27**  $\text{loc min } f = f(2, -3) = f(-2, 3) = -50$ ,  $\text{loc max } f = f(\pm \frac{3}{2}, \pm 4) = \frac{425}{4}$ ; **24.28**  $\text{loc min } f = f(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ ; **24.29**  $\text{loc min } f = f(\frac{5\pi}{8} + \pi k, \frac{3\pi}{8} + \pi k) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\text{loc max } f = f(\frac{\pi}{8} + \pi k, -\frac{\pi}{8} + \pi k) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, k \in \mathbb{Z}$ ; **24.30**  $\text{loc min } f = f(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = -3$ ,  $\text{loc max } f = f(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 3$ ; **24.31**  $\text{loc max } f = f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{8}$ ; **24.32**  $\text{loc min } f = -1$  у точках  $(-1, -1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1)$  і  $(1, 1, -1)$ ;  $\text{loc max } f = 1$  у точках  $(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1)$  та  $(-1, -1, 1)$ ; **24.33**  $\text{loc max } f = f(\frac{am}{m+n+p}, \frac{an}{m+n+p}, \frac{ap}{m+n+p}) = m^m n^n p^p (\frac{a}{m+n+p})^{m+n+p}$ ; **24.34**  $\text{loc min } f = f(0, 1) = -5$ ,  $\text{loc max } f = f(1, 0) = -2$ ; **24.35**  $\text{loc min } f = f(0, 0) = 0$ ,  $\text{loc max } f = f(\pm 1, 0) = f(0, \pm 1) = 1$ ; **24.36**  $\text{loc min } f = f(0, 0) = f(1, 0) = -4$ ,  $\text{loc max } f = f(0, 1) = f(1, 1) = 17$ ; **24.37**  $\text{loc min } f = f(0, 4) = -12$ ,  $\text{loc max } f = f(4, 0) = 36$ ; **24.38**  $\text{loc min } f = f(3, -4) = -75$ ,  $\text{loc max } f = f(-3, 4) = 125$ ; **24.39**  $\text{loc min } f = f(0, \pm 2) = -4$ ,  $\text{loc max } f = f(\pm 2, 0) = 4$ ; **24.40**  $\text{loc min } f = f(\sqrt{2}, -2) = -4\sqrt{2} + 5$ ,  $\text{loc max } f = f(-\sqrt{2}, -2) = 4\sqrt{2} + 5$ ; **24.41**  $\text{loc min } f = 0$  у точках межі області  $D$ ,  $\text{loc max } f = f(1, \frac{4}{3}) = \frac{2}{9}$ ; **24.42**  $\text{loc min } f = 0$  у точках межі області  $D$ ,  $\text{loc max } f = f(0, 0) = 1$ ; **24.43**  $\text{loc min } f = f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ ,  $\text{loc max } f = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = 1 + \sqrt{2}$ .

## Рекомендовані джерела

- [1] Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. *Математичний аналіз. Частина 1.* — К: Вища школа, 1992. — 495 с.
- [2] Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. *Математичний аналіз. Частина 2.* — К: Вища школа, 1993. — 375 с.
- [3] Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г. и др. *Справочное пособие по математическому анализу. Часть 1. Введение в анализ, производная, интеграл.* — К.: Вища школа, 1978. — 696 с.
- [4] Ляшко С. И., Боярчук А. К. и др. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — Москва–Санкт-Петербург–Киев: Диалектика, 2001. — 432 с.
- [5] Дороговцев А. Я. *Математический анализ. Краткий курс в современном изложении.* — К.: Факт, 2004. — 560 с.
- [6] Фихтенгольц Г. М. *Основы математического анализа. Том 1.* — М.: Наука, 1968. — 440 с.
- [7] Фихтенгольц Г. М. *Основы математического анализа. Том 2.* — М.: Наука, 1968. — 464 с.
- [8] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — М.: Наука, 1977. — 528 с.
- [9] Денисьєвський М. О., Курченко О. О., Нагорний В. Н., Нестеренко О. Н., Петрова Т. О., Чайковський А. В. *Збірник задач з математичного аналізу. Частина I. Функції однієї змінної.* — К.: ВПЦ “Київський університет”, 2005. — 257 с.
- [10] Денисьєвський М. О., Чайковський А. В. *Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних.* — К.: ВПЦ “Київський університет”, 2012. — 276 с.