1.

## Поняття базису простору

**Озн.** Нехай $V$ – векторний простір над полем $F$.
Непорожня підмножина $B$ простору $V$ наз. базисом простору, якщо:
1) кожна скінченна підсистема векторів з множини $B$ лінійно незалежна;
2) кожен вектор простору $V$ лінійно виражається через вектори з множини $B$.

В кожному ненульовому векторному просторі $\exists$ базис, скінченний або нескінченний.
Векторний простір, в якому $\exists$ скінченний базис, наз. скінченновимірним. Якщо в просторі скінченного базису $\nexists$, то простір наз. нескінченновимірним.

## Теореми про базис.

**Теор. 1** Нехай в просторі $V$ $\exists$ базис $a_1, a_2, \dots, a_n$, який складається з $n$ векторів. Тоді $\forall$ система векторів простору, яка складається з $m$ векторів при $m > n$ лінійно залежна.

**Дов.** Нехай $m > n$ і $\{b_1, b_2, \dots, b_m\} = A$ - система век.
Тоді за озн. базису всі вектори системи $A$ лінійно виражаються через вектори $a_1, a_2, \dots, a_n$.
Оскільки $m > n$, то за лемою про 2 системи система векторів $A$ лінійно залежна □

**Наслідок** В скінченновимірному просторі всі базиси складаються з однакового числа векторів.

**Дов.** Нехай в пр. $V$ задано 2 базиси $B_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.
Припустимо спочатку, що $m > n$. Тоді за теор. 1 система век. $B_1$ лін. залежна, тобто не може бути базисом, тому $m \le n$.
Аналогічно показується, що $n \le m \Rightarrow n = m$. □

**Озн.** Розмірністю скінченновимірного простору $V$ наз. число векторів його базису і позн. $\dim V = n$.

**Теор 2** В скінченновимірному просторі $\forall$ лін. незалежну систему векторів можна доповнити до базису простору.

Дов. Припустимо в просторі $V$ задано лін. незал. систему векторів $A=\{a_1,a_2,..,a_k\}$. Якщо $\langle A\rangle=V$, то за озн. система $A$ утв. базис простору.

Інакше обираємо $\forall$ вектор $a_{k+1}$ з множини $V\setminus\langle A\rangle$ і складаємо систему век. $A_1=\{a_1,a_2,..,a_k,a_{k+1}\}$.

Система век. $A_1$ лінійно незалежна, оскільки в ній жоден век. не вираж. через попередні. Знову, якщо $\langle A_1\rangle=V$, то $A_1$ утв. базис, інакше продовжуємо процес: $a_{k+2}\in V\setminus\langle A_1\rangle$, $A_2=\{a_1,a_2,...,a_k,a_{k+1},a_{k+2}\}$.

Якщо $\dim V=n$, то через $n-k$ кроків ми прийдемо до базису простору. □

Наслідок В просторі розмірності $n$ $\forall$ система $n$ лін. незалежних векторів утворює базис.

Дов. Припустимо $A=\{a_1,a_2,..,a_n\}$ - лін. незал. сист. век.
За теор. 2 її можна доповнити до базису простору, але, якщо ми додамо до системи принаймні 1 вектор, то згідно з теор. 1 вона стає лінійно зал. Звідси випливає, що система $A$ сама утворює базис простору. □

Теор. 3 Нехай $S$ - деяка система векторів в скінч. вимірному пр. $V$, причому $\langle S\rangle=V$. Тоді з системи $S$ можна одержати деякий базис пр. $V$, якщо потрібно, викресливши деякі вектори.

Дов. Нехай $S=\{a_1,a_2,...,a_m\}$. Починаємо перевіряти вектори цієї системи починаючи з кінця: якщо век. $a_m$ лінійно вираж. через попередні, викреслюємо його, інакше залишаємо. Переходимо до век. $a_{m-1}$. Аналогічно, якщо він лін. вираж. через попередні, викреслюємо його, якщо ні — залишаємо.

Таким чином, за скінчене число кроків ми приходимо до системи век. $B=\{b_1,b_2,..,b_n\}$, яка лін. незалежна, і $\langle B\rangle=\langle S\rangle=V$. За озн. система век. $B$ утв. базис. □

Теор. 4 В скінч. вим. пр. $V$ $\forall$ век. лін. виражається через базис, розкладу однозначно.

Дов. Припустимо вкр. $V$ зафікс. деякий базис $B=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ і $x\in V$ – довільний вектор.

За озн. базису, век. $x$ лін. вираж. через базис $B$.

Тому залишилось довести тільки однозначність.

Припустимо $x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\dots+\lambda_n a_n$,

$x=\gamma_1 a_1+\gamma_2 a_2+\dots+\gamma_n a_n$.

Тоді $\theta = x-x = (\lambda_1-\gamma_1)a_1+(\lambda_2-\gamma_2)a_2+\dots+(\lambda_n-\gamma_n)a_n$.

Ми одержали лін. комб. базису $=\theta$. Тому $\lambda_1-\gamma_1=0$, $\lambda_2-\gamma_2=0,\dots,\lambda_n-\gamma_n=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\gamma_1,\ \lambda_2=\gamma_2,\dots,\lambda_n=\gamma_n$. □

З цієї теореми випливає, що при фіксованому базисі $a_1,a_2,\dots,a_n$ простору $V$ кожен вектор $x\in V$ можна однозначно розкласти в лін. комб. $x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\dots+\lambda_n a_n$. Коефіцієнти цієї лін. комб. наз. координатами вектора $x$ в базисі $a_1,a_2,\dots,a_n$. Ці координати визначаються однозначно, тому при фікс. базисі $a_1,a_2,\dots,a_n$ вектор $x\in V$ можна задавати в координатній формі: $x=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$.

2. Евклідові простори

Озн. Векторний простір $V$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел наз. евклідовим, якщо кожній упорядкованій парі елементів $x,y\in V$ ставиться у відповідність дійсне число $(x,y)$ і при цьому виконуються умови:

1) $\forall x,y\in V:\ (x,y)=(y,x)$;

2) $\forall x,y,z\in V:\ (x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;

3) $\forall x,y\in V,\ \forall \alpha\in\mathbb{R}:\ (\alpha x,y)=\alpha(x,y)$;

4) $\forall x\in V:\ (x,x)\geq 0$; $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=\theta$.

Функція двох аргументів $(x,y)$, яка вводиться на евклідовому просторі, наз. скалярним добутком.

На одному й тому ж векторному просторі $V$ над $\mathbb{R}$

скалярний добуток можуть задавати за різними правилами. Якщо евклідові простори співпадають як векторні простори, але скалярні добутки на них задані по різному, то такі евклідові простори вважають різними.

## Найпростіші наслідки аксіом евклідового простору

1) $\forall x, y, z \in V: (x, y+z) = (x,y) + (x,z)$;
2) $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}: (x, \alpha y) = \alpha (x,y)$;
3) $\forall x \in V: (x, \theta) = 0$;
4) Якщо для фіксованого $x \in V$: $(x,y)=0$ $\forall y \in V$, то $x = \theta$
5) Якщо для $x_1, x_2 \in V$ і всіх $\forall y \in V: (x_1, y) = (x_2, y) \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 = x_2$.

## Нерівність Коші - Буняковського

$\forall x, y \in V$ (евкл. пр.) виконується: $(x,y)^2 \leq |x|^2 |y|^2$.
При цьому рівність виконується $\Leftrightarrow$ вектори $x, y$ лінійно залежні, тобто пропорційні.

Дов. Якщо принаймні один з векторів $x, y$ співпадає з $\theta$, то нерівність виконується, причому як рівність.
Припустимо, що $x \neq \theta$, $y \neq \theta$.
Нехай $t$ - довільна змінна. Тоді $\forall t$:
$(x - ty, x - ty) \geq 0$ за 4 аксіомою.
Розкриємо: $(x,x) - 2t(x,y) + t^2 (y,y) \geq 0$.
Одержимо квадратний тричлен від змінної $t$, причому $(y,y) > 0$.
Якщо для дискримінанту виконується $D > 0$, то тричлен має різні дійсні корені, а тому при деяких значеннях він приймає від'ємні значення, чого бути не може. Тому $D \leq 0$, або
$4(x,y)^2 - 4(x,x)(y,y) \leq 0$
$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$

$\Rightarrow (x,y)^2 \le |x|^2\,|y|^2$.

Рівність виконується $\Leftrightarrow D=0$.

Тобто тричлен має єдиний корінь $t=t_0$.

А тому $(x-t_0y,\ x-t_0y)=0$.

За останньою аксіомою: $x-t_0y=\Theta$, $x=t_0y$.

Тобто вектори лінійно залежні.

Навпаки, якщо $x,y$ – лін. залежні, то вони кратні,

а тому при деякому $\alpha\in\mathbb{R}$: $x=\alpha y$

$\Rightarrow (x,y)^2=(\alpha y,y)^2=\alpha^2(y,y)^2=\alpha^2|y|^4=|y|^2|\alpha y|^2=|x|^2|y|^2$. $\square$

## <u>Нерівність трикутника</u>

Для $\forall$ двох векторів $x,y$ з евк. пр. $V$ викон.:

$$|x+y|\le|x|+|y|$$

<u>Дов.</u> З нер. К.-Б. випливає:

$$|x+y|^2=(x+y,\ x+y)=(x,x)+2(x,y)+(y,y)=$$
$$=|x|^2+2(x,y)+|y|^2\le|x|^2+2|x||y|+|y|^2=(|x|+|y|)^2$$

$\Rightarrow |x+y|\le|x|+|y|$. $\square$

3. $a_1=(1;-3;2;1)$, $a_2=(1;7;-3;-2)$, $a_3=(2;-2;3;1)$

$$\begin{pmatrix}1&-3&2&1\\-1&7&-3&-2\\2&-2&3&1\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}a_1\\a_2\\a_3\end{array}\begin{pmatrix}1&-3&2&1\\0&4&-1&-1\\0&4&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}a_1\\a_2\end{array}\begin{pmatrix}1&-3&2&1\\0&4&-1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow B=\{a_1,a_2\}.$$

$(a_1,a_2)=-1-21-6-2=-30\neq0 \Rightarrow a_1\not\perp a_2.$

$b_1=a_1=(1;-3;2;1).$

$$b_2=a_2-\alpha_{21}b_1=a_2-\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)}b_1=a_2-\frac{-30}{15}b_1=a_2+2b_1=(1;1;1;0)$$

$B_{орт}=\{b_1,b_2\}$, где $b_1=(1;-3;2;1)$, $b_2=(1;1;1;0)$.

4. $7x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-8x_1x_2+8x_2x_3$

$$A=\begin{pmatrix}7&-4&0\\-4&5&4\\0&4&3\end{pmatrix}\quad |A-\lambda E|=\begin{vmatrix}7-\lambda&-4&0\\-4&5-\lambda&4\\0&4&3-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda&4\\4&3-\lambda\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-4&4\\0&3-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(7-\lambda)(\lambda^2-8\lambda-1)+4(4\lambda-12)=-\lambda^3+15\lambda^2-39\lambda-55=$$

$$=-(\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda-11).\quad \lambda_1=-1,\ \lambda_2=5,\ \lambda_3=11.$$

Для $\lambda_1=-1$: $(A+E)=\begin{pmatrix}8&-4&0\\-4&6&4\\0&4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&0\\-2&3&2\\0&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

ФСР:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | -2 |

$a_1=(1;2;-2)$.

Для $\lambda_2=5$: $(A-5E)=\begin{pmatrix}2&-4&0\\-4&0&4\\0&4&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&0&-1\\0&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$

ФСР:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 |

$a_2=(2;1;2)$

Для $\lambda_3=11$: $(A-11E)=\begin{pmatrix}-4&-4&0\\-4&-6&4\\0&4&-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&-2\\0&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-2\\0&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-2\end{pmatrix}$

ФСР:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|
| -2 | 2 | 1 |

$a_3=(-2;2;1)$.

$b_1=\left(\frac13;\frac23;-\frac23\right)$, $b_2=\left(\frac23;\frac13;\frac23\right)$, $b_3=\left(-\frac23;\frac23;\frac13\right)$. $Q=(b_1|b_2|b_3)=\frac13\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\-2&2&1\end{pmatrix}$

$$B=Q^TAQ=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&5&0\\0&0&11\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac13y_1+\frac23y_2-\frac23y_3\\x_2=\frac23y_1+\frac13y_2+\frac23y_3\\x_3=-\frac23y_1+\frac23y_2+\frac13y_3\end{cases}$$