

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, СТАТИСТИКА ТА ЙМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ

Лекція 9.

Розора Ірина Василівна

Київ, 2022

Зміст I

- 1 Випадкові величини загального типу
 - Властивості функції розподілу
 - Класифікація випадкових величин
- 2 Абсолютно неперервні випадкові величини (н.в.в.)
 - Щільність в.в. та її властивості
 - Знаходження моментів для н.в.в.
 - Приклади неперервних розподілів
 - Нормальний (гауссівський) розподіл
- 3 Випадкові вектори
 - Сумісні функції розподілу та щільності
- 4 Незалежні н.в.в.
- 5 Розподіл суми незалежних н.в.в.

Зміст

- 1 Випадкові величини загального типу
 - Властивості функції розподілу
 - Класифікація випадкових величин
- 2 Абсолютно неперервні випадкові величини (н.в.в.)
 - Щільність в.в. та її властивості
 - Знаходження моментів для н.в.в.
 - Приклади неперервних розподілів
 - Нормальний (гауссівський) розподіл
- 3 Випадкові вектори
 - Сумісні функції розподілу та щільності
- 4 Незалежні н.в.в.
- 5 Розподіл суми незалежних н.в.в.

Нехай (Ω, \mathcal{F}, P) — деякий ймовірнісний простір, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — борелівська σ -алгебра, задана на \mathbb{R} .

Означення

Якщо $\xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ для довільної борелівської множини A , то функцію $\xi(\omega) : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ називають вимірною.

Означення

Скінченну дійснозначну вимірну функцію називають *випадковою величиною* (в.в.).

Означення (Еквівалентне визначення в.в.)

Дійсна скін. функція $\xi : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ називається випадковою величиною, якщо

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in F.$$

Означення

Функцією розподілу (ф.р.) в.в. ξ називається

$$F_{\xi}(x) = F(x) = P(\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}) = P\{\xi \leq x\}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Лема

Функція розподілу $F(x) = P\{\xi \leq x\}$ в.в. ξ задовольняє власт.:

- для $x_1 < x_2$

$$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1);$$

-

$$P\{\xi < x\} = F(x-) = F(x - 0);$$

Доведення

Оскільки $\{\xi \leq x_2\} = \{\xi \leq x_1\} \cup \{x_1 < \xi \leq x_2\}$, то

$$P\{\xi \leq x_2\} = P\{\xi \leq x_1\} + P\{x_1 < \xi \leq x_2\} \Rightarrow$$

$$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Подано подію $\{\xi < x\}$ як об'єднання несумісних подій

$$\{\xi < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x - \frac{1}{n-1} < \xi \leq x - \frac{1}{n} \right\} =$$

$$= \{\xi \leq x-1\} \cup \{x-1 < \xi \leq x-\frac{1}{2}\} \cup \{x-\frac{1}{2} < \xi \leq x-\frac{1}{3}\} \cup \dots$$

Доведення

тому за власт. P3(сигма-адитивності)

$$\begin{aligned} P\{\xi < x\} &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{x - \frac{1}{n-1} < \xi \leq x - \frac{1}{n}\right\} = \\ &= F(x-1) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \left(F\left(x - \frac{1}{n}\right) - F\left(x - \frac{1}{n-1}\right)\right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} F\left(x - \frac{1}{N}\right) = F(x-). \end{aligned}$$

Наслідок

Якщо $F(x)$ — функція розподілу для в.в. ξ , то

1

$$P\{\xi = x\} = F(x) - F(x-);$$

2

$$P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1-);$$

3

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = F(x_2-) - F(x_1);$$

4

$$P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F(x_2-) - F(x_1-).$$

Доведення.

Вправа.



Теорема (про характеристичні власт. ф.р.)

Для ф.р. $F(x)P\{\xi \leq x\}$ виконуються характеристичні властивості:

- (монотон.) $F(x)$ — неспадна;
- (неперер.) $F(x)$ — неперервна праворуч;
- (нормов.) $F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1$

Доведення

- Оскільки для $x_1 < x_2$
 $P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) \geq 0 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2).$
- Покажемо, що $F(x) = F(x+)$. Для цього розглянемо спадну послідовність подій

$$B_n = \left\{ x < \xi \leq x + \frac{1}{n} \right\} \downarrow \emptyset.$$

З властивості неперервності ймовірності випливає, що
 $P(B_n) \rightarrow 0$. Отже,

$$P(B_n) = P\left\{ x < \xi \leq x + \frac{1}{n} \right\} = F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\Leftrightarrow F(x+) = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right) = F(x).$$

- Доведемо нормованість. Подамо Ω через об'єднання несумісних подій:

$$\Omega = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \{\omega : n-1 < \xi(\omega) \leq n\}.$$

Оскільки $P(A_n) = F(n) - F(n-1)$, то звідси маємо

$$\begin{aligned} 1 = P(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P(A_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N P(A_n) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (F(N) - F(-N)). \end{aligned}$$

Отже,

$$F(+\infty) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 1; \quad F(-\infty) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(-N) = 0.$$

За функцією розподілу можна подати класифікацію в.в. Для цього спочатку сформулюємо такий результат.

Лема

Довільна функція розподілу $F(x)$ має не більш як зліченне число точок розриву першого роду.

Доведення.

Так як $P\{\xi = x\} = F(x) - F(x-)$, то в точках розриву $P\{\xi = x\} > 0$. Тому $\exists n_0 \in \mathbf{N} : P\{\xi = x\} \geq \frac{1}{n_0}$.

Оскільки при кожному натуральному n може бути не більше n точок x з $P\{\xi = x\} \geq \frac{1}{n}$, то у функції $F(x)$ є не більш як зліченне число точок розриву. □

Позначимо через x_1, x_2, \dots усі точки розриву функції $F(x)$.

Означення

Якщо ймовірності $P\{\xi = x_k\} = p_k$ такі, що $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, то говоримо, що в.в. ξ має дискретний розподіл.

Прикладами дискретних розподілів є біометричний, пуассонівський, геометричний і т.д.

Означення

Розподіл в.в. ξ називатимемо абсолютно неперервним, якщо існує вимірна функція $f(u)$, яка називається щільністю, така, що

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du.$$

Означення

Якщо функція розподілу в.в. ξ неперервна, але не має щільності, то розподіл ξ називається сингулярним.

Теорема (Теорема Лебега)

Будь-яку функцію розподілу $F(x)$ можна подати у вигляді

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x),$$

де $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$,

$F_1(x)$ — дискретна функція розподілу,

$F_2(x)$ — абсолютно неперервна функція розподілу,

$F_3(x)$ — сингулярна функція розподілу.

Зміст

- 1 Випадкові величини загального типу
 - Властивості функції розподілу
 - Класифікація випадкових величин
- 2 Абсолютно неперервні випадкові величини (н.в.в.)
 - Щільність в.в. та її властивості
 - Знаходження моментів для н.в.в.
 - Приклади неперервних розподілів
 - Нормальний (гауссівський) розподіл
- 3 Випадкові вектори
 - Сумісні функції розподілу та щільності
- 4 Незалежні н.в.в.
- 5 Розподіл суми незалежних н.в.в.

В.в. ξ та її функцію розподілу F_ξ називають *абсолютно неперервними*, якщо існує невід'ємна функція $f_\xi(x)$ така, що

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(u) du$$

для будь-якого $x \in \mathbf{R}$. Тут інтеграл треба розуміти як інтеграл Рімана-Стільтєса у разі кусково-неперервної функції $f_\xi(x)$ та як інтеграл Лебега-Стільтєса у разі вимірної функції $f_\xi(x)$.

Функцію $f_\xi(x)$ називають *щільністю розподілу* в.в. ξ та функції розподілу F_ξ .

Із властивостей функції розподілу впливають такі властивості щільності:

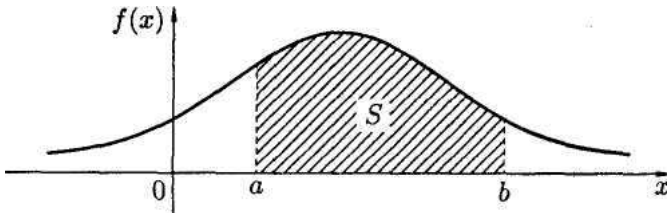
- невід'ємність: $f_{\xi}(x) \geq 0$; ($\leftarrow F(x) \uparrow$)
- нормованість: $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(y) dy = 1$ ($\leftarrow F(+\infty) = 1$).

Будь-яка невід'ємна інтегровна нормована функція є щільністю деякої функції розподілу, оскільки з властивостей інтегралу (Рімана чи Лебега) впливають характеристичні властивості функції розподілу. Якщо функція розподілу диференційовна, то щільність (майже всюди) збігається з похідною функції розподілу:

●

$$f_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) = \frac{dF_{\xi}(x)}{dx}.$$

$$P\{a < \xi \leq b\} = \int_a^b f_{\xi}(x) dx, \quad \forall a < b, a, b \in \mathbb{R}$$



Знаходження моментів для н.в.в.

Для в.в. $\xi(\omega)$, заданих на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) , загальне визначення математичного сподівання вводиться послідовно для дискретних в.в., далі для невід'ємних та знакозмінних інтегровних в.в..

Фактично, математичним сподіванням $M\xi$ в.в. $\xi \in \mathcal{I}$ інтеграл Лебега:

$$M\xi = \int_{\Omega} \xi dP.$$

Зауважимо, що $M\xi$ існує тоді і лише тоді, коли існує $M|\xi|$. Тоді в.в. ξ називають *інтегровною*.

Має місце рівність

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{\xi}(x),$$

у правій частині якого стоїть інтеграл Стільтєса. Якщо в.в. ξ абсолютно неперервна і має щільність $f_{\xi}(x)$, то

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{\xi}(x) dx.$$

Якщо X – дискретна в.в. з розподілом $\{(x_i, p_i)\}_{i \geq 1}$, то

$$M\xi = \sum_{i \geq 1} p_i x_i \quad \left(= \sum_{i \geq 1} x_i \mathbf{P}(\xi = x_i) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbf{P}(\omega) \right).$$

Нехай $g(x)$ – борелівська функція, т.б. дійсна функція, визначена на \mathbf{R} так, що для будь-якого $a \in \mathbf{R}$ множина $\{x: g(x) < a\}$ є борелівською. Тоді

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx.$$

Рівномірний розподіл

Означення

В.в. ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$, що позначається $\xi \sim \mathcal{U}[a, b]$, якщо її щільність є сталою всередині цього відрізку та дорівнює нулю поза ним, тобто

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{x \in [a, b]}. \quad (1)$$

Це означає, що ймовірність попадання величини в якусь множину всередині відрізку пропорційна довжині цієї множини (як інтеграл від щільності) і не залежить від її положення. Таким чином, виконується умова рівноймовірності значень.

Моменти:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2};$$

$$M\xi^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3};$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Експоненційний (показниковий) розподіл

Означення

В.в. ξ має показниковий розподіл з параметром λ , $\lambda > 0$, якщо її щільність має вигляд

$$f_{\xi}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Функція розподілу експоненційного розподілу:

$$F_{\xi}(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0;$$

Експоненційний розподіл часто використовують як просту модель тривалості життя певних типів обладнання.

Гамма-розподіл

Нагадаємо спершу, що гамма-функцію $\Gamma(\alpha)$ визначають для $\alpha > 0$ таким чином:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy.$$

Зокрема,

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$$

для $\alpha > 1$ (тобто коли n – ціле число, то $\Gamma(n) = (n - 1)!$) та $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Гамма-розподіл

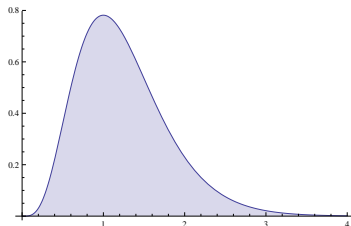
Сім'я гамма-розподілів має два додатних параметри і є дуже гнучкою. Щільність може набувати різної форми залежно від значень параметрів і визначена на додатній півосі $\{x: x > 0\}$.

Означення

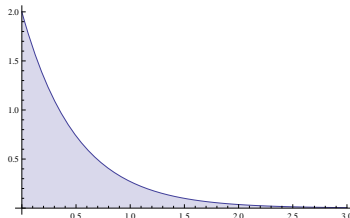
Щільність гамма-розподілу з параметрами α та λ має вигляд

$$f_{\xi}(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

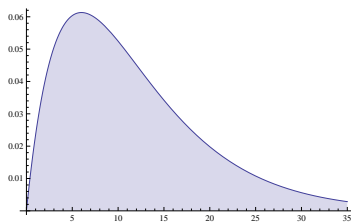
Гамма-розподіл



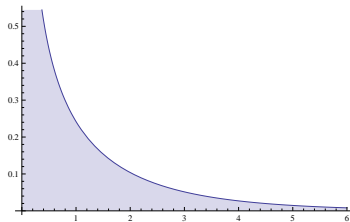
$$\alpha = 5, \lambda = 4$$



$$\alpha = 1, \lambda = 2$$



$$\alpha = 2, \lambda = 1$$



$$\alpha = 1, \lambda = 1 \quad (\nu = 1)$$

Гамма-розподіл

Зауваження

Експоненційний (показниковий) розподіл – це гамма розподіл з параметром $\alpha = 1$.

Зауваження

Хі-квадрат (χ^2) розподіл з параметром ν “ступеней вільності” – це гамма розподіл з параметрами $\alpha = \frac{\nu}{2}$, де ν – натуральне число, та $\lambda = \frac{1}{2}$. Щільність хі-квадрат розподілу з ν ступеней вільності:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$

Нормальний (гауссівський) розподіл

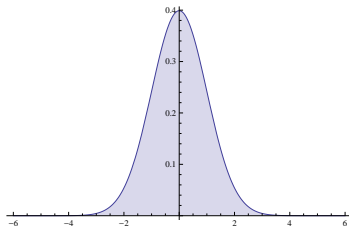
Цей розподіл, відомий за своєю симетричною дзвоноподібною формою, відіграє фундаментальну роль у теорії та практиці статистики, оскільки, по-перше, є гарною моделлю для розподілу вимірювань, які проводять на практиці у різного роду ситуаціях та, по-друге, гарним наближенням для різних інших розподілів, зокрема, є граничним для біноміального. Нормальний розподіл використовують для побудови багатьох інших розподілів (логнормальний, хі-квадрат, Фішера, Стюдента тощо), на ньому ґрунтується велика кількість статистичних висновків.

Нормальний (гауссівський) розподіл

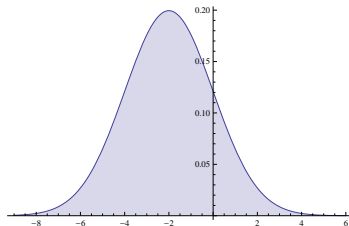
Нормальний розподіл $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ має два параметри, які зручним чином безпосередньо виражаються через середнє μ та стандартний відхил σ . Розподіл симетричний відносно μ .
Щільність нормального розподілу

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Нормальний (гауссівський) розподіл



$$\mu = 0, \sigma = 1$$



$$\mu = -2, \sigma = 2$$

Рис. Щільності нормального розподілу

Властивості

- $\xi \sim N(m, \sigma^2) \Rightarrow M\xi = m, D\xi = \sigma^2.$
- Якщо $\xi \sim N(m, \sigma^2)$, то $\xi a + b \sim N(ma + b, a^2 \sigma^2).$

Зауваження

Ця властивість дозволяє будь-яку нормально розподілену в.в. звести до стандартного гауссівського розподілу, а саме до $N(0, 1)$. Якщо $\xi \sim N(m, \sigma^2)$, то $z = \frac{\xi - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

- Якщо ξ_i — незалежні в.в. з $\xi_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$, $i = \overline{1, n}$, то

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n m_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right).$$

Властивості

- Якщо $\xi \sim N(m, \sigma^2)$, то

$$\begin{aligned} P\{a < \xi < b\} &= P\left\{\frac{a-m}{\sigma} < \frac{\xi-m}{\sigma} < \frac{b-m}{\sigma}\right\} = \\ &= \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

де $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функція розподілу для стандартної гауссівської в.в. Її значення знаходять зі статистичних таблиць.

Властивості

- Якщо $z \sim N(0, 1)$, то для її функції розподілу справедлива властивість

$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a),$$

$$\text{де } \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Вона впливає з того, що щільність z $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}}$ є симетричною функцією.

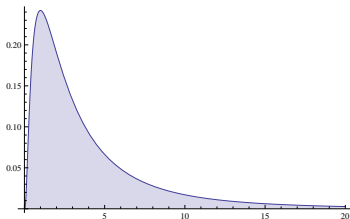
<https://edpuzzle.com/media/5f806112fe8cf440e1c3e234>

Логнормальний розподіл

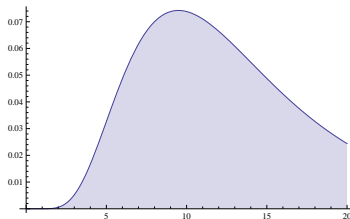
Якщо X відображає, наприклад, величину вимоги, а $Y = \ln X$ має нормальний розподіл, то кажуть, що в.в. X має логнормальний розподіл, $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$.

Щільність логнормального розподілу:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad 0 < x < \infty.$$



$$\mu = 1, \sigma = 1$$



$$\mu = \frac{5}{2}, \sigma = \frac{1}{2}$$

Рис. Щільності логнормального розподілу

Зміст

- 1 Випадкові величини загального типу
 - Властивості функції розподілу
 - Класифікація випадкових величин
- 2 Абсолютно неперервні випадкові величини (н.в.в.)
 - Щільність в.в. та її властивості
 - Знаходження моментів для н.в.в.
 - Приклади неперервних розподілів
 - Нормальний (гауссівський) розподіл
- 3 Випадкові вектори
 - Сумісні функції розподілу та щільності
- 4 Незалежні н.в.в.
- 5 Розподіл суми незалежних н.в.в.

Розглянемо ймовірнісний простір (Ω, F, P) , на якому визначені n в.в. X_1, \dots, X_n . Вектор $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ називають *випадковим вектором* або *n -вимірною в.в.*

Нехай X_1, \dots, X_n – довільні в.в.

Означення

Сумісною функцією розподілу випадкового вектора $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ називають функцію $F_{\mathbf{X}}(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, яка в точці $x = (x_1, \dots, x_n)$ дорівнює

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(x) &\equiv F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n). \end{aligned}$$

Як і в одновимірному випадку, багатовимірна функція розподілу має подібні властивості:

- (1) $F_X(x_1, \dots, x_n)$ – неспадна функція за будь-яким аргументом;
- (2) – неперервна праворуч за будь-яким аргументом;
- (3) – задовольняє співвідношення

$$F_X(+\infty, \dots, +\infty) = 1, \quad \lim_{x_k \rightarrow -\infty} F_X(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

для довільних значень інших аргументів.

На відміну від функції розподілу одновимірної в.в., сумісна функція розподілу має ще одну характеристичну властивість. Для її формулювання позначимо через $\Pi_{\mathbf{x}}$ кут

$$\Pi_{\mathbf{x}} = (-\infty, \mathbf{x}] = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n], \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Для початку припустимо, що розмірність $n = 2$. Зауважимо, що паралелепіпед $(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ можна зобразити у вигляді вкладеної різниці вкладених різниць кутів:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\Pi_{\mathbf{b}} \setminus \Pi_{\mathbf{b}'}) \setminus (\Pi_{\mathbf{a}} \setminus \Pi_{\mathbf{a}'}),$$

де точки $\mathbf{b}' = (a_1, b_2)$, $\mathbf{a}' = (a_2, b_1)$. Тоді

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= P(\mathbf{X} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = P(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{b}} \setminus \Pi_{\mathbf{b}'}) - P(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{a}} \setminus \Pi_{\mathbf{a}'}) = \\ &= P(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{b}}) - P(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{b}'}) - P(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{a}}) + P(\mathbf{X} \in \Pi_{\mathbf{a}'}). \end{aligned}$$

Позначимо через $\Delta_{(a,b]} F_X$ приріст сумісної функції розподілу $F_X(x)$ на паралелепіпеді $(a, b]$. Тоді при $n = 2$ приріст F_X на прямокутнику $(a, b]$ дорівнює $\Delta_{(a,b]} F_X = F_X(b) - F_X(b') - F_X(a') + F_X(a)$. У загальному випадку $n > 2$ правило чергування знаків при значеннях функції у вершинах паралелепіпеда $(a, b]$ визначається аналогічно.

Зокрема, нехай $\Delta_{(a_k, b_k]}^k F_{\mathbf{X}} = F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ позначає k -ий частковий приріст на $(a_k, b_k]$. Використовуючи метод математичної індукції, легко показати, що приріст сумісної функції розподілу на паралелограмі $(\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ є результатом послідовних часткових приростів:

$$P(\mathbf{X} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \Delta_{(\mathbf{a}, \mathbf{b}]} F_{\mathbf{X}} = \Delta_{(a_1, b_1]}^1 \dots \Delta_{(a_k, b_k]}^{n-1} \Delta_{(a_k, b_k]}^n F_{\mathbf{X}}. \quad (2)$$

В одновимірному випадку перераховані властивості (1) – (3) є необхідними й достатніми для того, щоб функція $F_X(x)$ була функцією розподілу деякої в.в. X . У багатовимірному випадку цих властивостей вже недостатньо. Для того, щоб функція $F_X(x)$ була функцією розподілу деякого випадкового вектора X , треба додати ще одну:

(4) для довільних a, b вираз (2) невід'ємний.

Те, що ця умова може не виконуватися, незважаючи на наявність у функції $F_X(x_1, \dots, x_n)$ властивостей (1) – (3), показує наступний приклад. Нехай

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \geq 0, \text{ або } x + y \leq 1, \text{ або } y \leq 0; \\ 1, & \text{в іншій частині площини.} \end{cases}$$

Ця функція задовольняє умови (1) – (3), але для неї $F(1, 1) - (F(1, \frac{1}{2})) - F(\frac{1}{2}, 1) + F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -1$, і, відповідно, четверта умова не виконується. Отже, функція $F(x, y)$ не може бути сумісною функцією розподілу, оскільки інакше ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) в прямокутник $\frac{1}{2} < X \leq 1, \frac{1}{2} < Y \leq 1$ буде від'ємним числом.

Нехай випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ має сумісну функцію розподілу $F_{\mathbf{X}}$. Маргінальну функцію розподілу в.в. X_k визначають так:

$$F_{X_k}(x_k) = \mathbf{P}(X_k < x_k) = F_{\mathbf{X}}(\infty, \dots, \infty, x_k, \infty, \dots, \infty),$$

де x_k – k -ий аргумент функції $F_{\mathbf{X}}$.

Означення

Випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ та його сумісну функцію розподілу $F_{\mathbf{X}}$ називають абсолютно неперервними, якщо існує невід'ємна вимірна функція $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \equiv f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$ така, що

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{(-\infty, \mathbf{x})} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$$

для будь-якого $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Функцію $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ називають *сумісною щільністю* випадкового вектора та сумісної функції розподілу $F_{\mathbf{X}}$.

Якщо випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ має сумісну щільність $f_{\mathbf{X}}$, то його координати мають маргінальні щільності

$$f_{X_k}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, y_n) dy_1 \dots dy_{k-1} dy_{k+1} \dots dy_n.$$

Властивості сумісної щільності:

- $f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \geq 0$;
- $\int_{\mathbf{R}^n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$;
- $P(x_{11} < X_1 \leq x_{12}, \dots, x_{n1} < X_n \leq x_{n2}) = \int_{x_{11}}^{x_{12}} \dots \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$;
-

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n).$$

Зміст

- 1 Випадкові величини загального типу
 - Властивості функції розподілу
 - Класифікація випадкових величин
- 2 Абсолютно неперервні випадкові величини (н.в.в.)
 - Щільність в.в. та її властивості
 - Знаходження моментів для н.в.в.
 - Приклади неперервних розподілів
 - Нормальний (гауссівський) розподіл
- 3 Випадкові вектори
 - Сумісні функції розподілу та щільності
- 4 Незалежні н.в.в.
- 5 Розподіл суми незалежних н.в.в.

Кожна в.в. породжує випадкові події, які є прообразами борелівських множин. Незалежність в.в. означає, що всі такі породжені події незалежні.

Означення

Отже, в.в. X_1, \dots, X_n незалежні в сукупності, якщо всі породжені ними випадкові події незалежні в сукупності, тобто для довільних $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(X_k \in B_k).$$

Зокрема, в.в. X_1, \dots, X_n незалежні в сукупності тоді й лише тоді, коли відповідна сумісна функція розподілу для всіх $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ розкладається у добуток

$$\begin{aligned} F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) &= \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(X_k \leq x_k) = \prod_{k=1}^n F_{X_k}(x_k). \end{aligned}$$

Коли випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ має сумісну щільність $f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$, то абсолютно неперервні в.в. X_1, \dots, X_n незалежні в сукупності тоді й лише тоді, коли

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f_{X_k}(x_k).$$

Теорема про спадковість незалежності

Має місце наступна теорема про перетворення незалежних в.в.

Теорема

Нехай в.в. X_1, \dots, X_n незалежні в сукупності, а $g_1(x), \dots, g_n(x)$ – борелівські функції. Тоді в.в.

$$g(X_1), \dots, g(X_n)$$

незалежні в сукупності.

Доведення.

Для довільних множин $B_k \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, $1 \leq k \leq n$ розглянемо

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(g_1(X_1) \in B_1, \dots, g_n(X_n) \in B_n) = \\ &= \mathbf{P}(X_1 \in g_1^{-1}(B_1), \dots, X_n \in g_n^{-1}(B_n)) = \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(X_k \in g_k^{-1}(B_k)) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(g(X_k) \in B_k). \end{aligned}$$

Отже, $g(X_1), \dots, g(X_n)$ – незалежні в сукупності. □

Зміст

- 1 Випадкові величини загального типу
 - Властивості функції розподілу
 - Класифікація випадкових величин
- 2 Абсолютно неперервні випадкові величини (н.в.в.)
 - Щільність в.в. та її властивості
 - Знаходження моментів для н.в.в.
 - Приклади неперервних розподілів
 - Нормальний (гауссівський) розподіл
- 3 Випадкові вектори
 - Сумісні функції розподілу та щільності
- 4 Незалежні н.в.в.
- 5 Розподіл суми незалежних н.в.в.

Теорема

Якщо X та Y – незалежні в.в. із щільностями $f_X(x)$ і $f_Y(x)$, то сума $X + Y$ має функцію розподілу

$$F_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x-y) dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(x-y) dF_X(y),$$

яку називають згорткою функцій розподілу $F_X(x)$ і $F_Y(x)$ і позначають $F_X * F_Y(x) = F_{X+Y}(x)$; та щільність, яка дорівнює згортці щільностей $f_X(x)$ і $f_Y(x)$, тобто

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(a-y) f_X(y) dy.$$

Доведення

Оскільки в.в. X та Y незалежні, то $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.
Тому

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq a) &= \iint_{\{(x,y): x+y \leq a\}} f_X(x) \cdot f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{a-y} f_X(x) \cdot dx \right) f_Y(y) dy = \end{aligned}$$

використовуючи заміну $x = u - y$ ($u \in (-\infty, a)$, $du = dx$),
маємо

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^a f_X(u - y) \cdot du \right) f_Y(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u - y) f_Y(y) dy du. \end{aligned}$$

Якщо взяти похідну за a цієї функції, то отримаємо щільність в.в. $X + Y$:

$$f_{X+Y}(a) = F'_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)f_Y(y)dy.$$

ПИТАННЯ?