№6 (Ольховатий ІПС-21)

① Правило силогізму.

Правило силогізму або ж правило транзитивності стверджує:

$$\frac{A\to B,\ B\to C}{A\to C}$$

Виведення:

За теоремою дедукції відомо, що формула

$$(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$$

вивідна. Якщо формули $(A\to B)$ і $(B\to C)$ – вивідні, тоді формула $(A\to C)$ також вивідна за правилом modus ponens.

(Правило modus ponens стверджує:

якщо A і $A \to B$ – виводні формули ЧВ, тоді B – також виводна формула.)

Відповідно, ми одержали правило силогізму:

$$\frac{A \to B,\ B \to C}{A \to C}$$

2. Довести, що $\neg A,\ B,\ \neg C \vdash (A \wedge B) \to C$

Для доведення використаємо наступні леми:

I. $\neg P,\ Q \vdash \neg(P \wedge Q)$

II. $\neg P,\ \neg Q \vdash (P \to Q)$

Тоді:

1) $\neg A,\ B \vdash \neg(A \wedge B)$ (лема I)

2) $\neg(A \wedge B),\ \neg C \vdash ((A \wedge B) \to C)$ (лема II)

3) $\vdash \neg(A \wedge B) \to (\neg C \to (A \wedge B \to C))$

(за теоремою дедукції)

Маємо послідовність:

$\boxed{\neg A, B, \neg C}$, $\neg(A \land B)$, $\neg(A \land B) \to (\neg C \to (A \land B \to C))$,

$\neg C \to (A \land B \to C)$, C, $\neg C$, $\boxed{A \land B \to C}$

Ця послідовність і є виведенням формули $(A \land B \to C)$ з $(\neg A, B, \neg C)$

3. Дослідити формулу

$$\forall x (A(x) \to B) \to (\exists x A(x) \to B)$$

Обернене твердження:

$$\neg(\forall x (A(x) \to B) \to (\exists x A(x) \to B))$$

Зведемо до нормальної форми:

1) $\neg(\forall x (\neg A(x) \lor B) \to (\neg \exists x A(x) \lor B))$

2) $\neg(\neg \forall x (\neg A(x) \lor B) \lor (\neg \exists x A(x) \lor B))$

3) $\forall x (\neg A(x) \lor B) \land \neg(\neg \exists x A(x) \lor B)$

4) $\forall x (\neg A(x) \lor B) \land \exists x A(x) \land \neg B$

5) $\forall x \exists y ((\neg A(x) \lor B) \land A(y) \land \neg B)$

$x = a$ (константи)

$y = b$

$(\neg A(a) \vee B) \wedge A(b) \wedge \neg B$

Диз'юнкти:

$S = \{\neg A(a) \vee B, A(b), \neg B\}$.

1) $\neg(A(a)) \vee B$

2) $A(b)$

3) $\neg B$

4) $\neg A(a)$ (1), 3))

5) $A(y)$

6) $\neg A(y)$ (підстановка y замість x 4))

7) $\square$ (5), 6))

Прийшли до суперечності, а отже

початкова формула

$$\forall x (A(x) \to B) \to (\exists x A(x) \to B)$$

вірна.