① Лема про дві системи

Лема: Ⅰ Нехай у векторному просторі V задано дві системи векторів $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, причому всі вектори системи A лінійно виражаються через систему B. Якщо $m > n$, то система A лінійно залежна.

Ⅱ Нехай у векторному просторі V задано дві системи векторів $A = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, причому всі вектори системи A лінійно виражаються через систему B. Якщо система A лінійно незалежна, то $m \leq n$.

Зміст леми: лінійно незалежна система векторів не може лінійно виражатись через систему з меншим числом векторів

Доведення (в Ⅱ формулюванні від супротивного)

Нехай система A лінійно незалежна і $m > n$.
Складемо нову систему векторів $A_1 = \{a_1, B\} = \{a_1, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$
За припущенням $a_1 \in \langle B \rangle$, тому $\langle B \rangle = \langle A_1 \rangle$ і система A_1 лінійно залежна. В системі A_1 вибираємо перший вектор, що лінійно виражається через попередні, і позначимо його через c_1. Оскільки $a_1 \neq \Theta$ (бо A - лінійно незалежна), то $c_1 \neq a_1$, а тому $c_1 \in B$. Викреслимо вектор c_1 із системи векторів A_1. Одержимо систему векторів $B_1 = A_1 \setminus \{c_1\}$ і при цьому виконується $\langle B_1 \rangle = \langle A_1 \rangle = \langle B \rangle$ і в системі B_1 залишається n векторів. Аналогічно складемо систему векторів $A_2 = \{a_2, B_1\} = \{a_2, a_1, \ldots\}$. Оскільки $a_2 \in \langle B \rangle = \langle B_1 \rangle$, то сист. векторів A_2 лінійно залежна і $\langle A_2 \rangle = \langle B_1 \rangle = \langle B \rangle$.
Знову в системі A_2 вибираємо перший вектор, який лінійно виражається через попередні, і позначимо його c_2. Оскільки за умовою A - лінійно незалежна, то вектори a_2, a_1 - лінійно незалежні, а тому c_2 з ними не співпадає, тобто $c_2 \in B$. Викреслюємо вектор c_2 з системи A_2, одержимо $B_2 = A_2 \setminus \{c_2\}$, яка складається з n векторів, причому $\langle B_2 \rangle = \langle A_2 \rangle = \langle B \rangle$

Продовжуючи цей процес далі, через n кроків приходимо до системи векторів $B_n = \{a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1\}$, причому $\langle B_n \rangle = \langle B \rangle$. Але якщо $m > n$, то $\exists$ вектор $a_{n+1} \in A$, причому $a_{n+1} \in \langle B \rangle = \langle B_n \rangle$.

Таким чином, вектор a_{n+1} лінійно виражається через вектори $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$, що суперечить лінійній незалежності системи векторів A $\lrcorner$

(2) (Пов'язане з теоремою Жордана, не проходили)

(3) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)^3 = 0 \quad \lambda = 3$ кр. 3

$B_1 = A - 3E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim (1\ 1\ 1)$ $\quad x_2, x_3$ – вільні

ФСР:

x_1	x_2	x_3	
1	-1	0	$= a_1$
1	0	-1	$= a_2$

$h = 1$; a_1, a_2 – базис R_1

$B_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ДФСР:

x_1	x_2	x_3	
1	0	0	$= a_3$

a_1, a_2, a_3 – базис R_2

$\overset{h_2}{a_3}, \overset{h=1}{\psi(a_3)}$ $\quad \psi(a_3) = B_1 a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad (\psi^2(a_3) = \theta)$

$\lambda = 3 \begin{cases} f_1 = \psi(a_3) = (1, -2, 1) \\ f_2 = a_3 = (1, 0, 0) \end{cases} \sim J_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A_J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\lambda = 3 \ \{ f_3 = a_1 = (1, -1, 0) \sim J_1 = (3)$

(4) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2 =$

$(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 -$

$- 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2 = | y_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 | = y_1^2 + 4x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4 -$

$- 3x_4^2 = | y_2 = \sqrt{3}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 | = y_1^2 + y_2^2 - 3x_2^2 + 2x_2x_3 - \frac{1}{3}x_3^2 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4 -$

$- 3x_4^2 = | y_3 = \sqrt{3}x_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 + \sqrt{3}x_4 | = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_2 = \sqrt{3}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 \\ y_3 = \sqrt{3}x_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 + \sqrt{3}x_4 \\ y_4 = x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{\sqrt{3}}{3}y_2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}y_3 - y_4 \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}y_3 - \frac{1}{2}y_4 \\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_3 + \frac{3}{2}y_4 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & -1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$