Лекція 10.

***Рівномірна неперервність функції***

Функція  називається ***рівномірно неперервною на множині ***, якщо   :    (***Коші***).

**Теорема 1.** *(Кантора)*

Нехай функція  неперервна на множині . Якщо  – компакт, то  рівномірно неперервна на .

*Доведення.* Від супротивного. Функція неперервна, але не є рівномірно неперервною. Якщо це так, то

:  : .

Виберемо послідовність додатних чисел . Тоді  можна знайти таку пару, : . Виберемо підпослідовність (за теоремою Больцано-Коші, оскільки послідовність обмежена, бо задана на компакті) , тоді за означенням компакту  і    з одного боку , а з іншого – з неперервності функції

,

одержана суперечність завершує доведення.

*Теорему доведено.*

Функція  називається ***рівномірно неперервною на множині ***, якщо  з умови  випливає, що  (***Гейне***).

**Теорема 2.** *(Еквівалентність означень Коші та Гейне рівномірної неперервності)*

Означення за Коші та за Гейне еквівалентні.

**Властивість 1.** *(Рівномірна неперервність звуження)*

Якщо  рівномірно неперервна на , то  її звуження  також є рівномірно неперервною на .

*Доведення.* З умови   :   , але тоді достатньо вибрати теж саме  і ми одержимо для множини , що     :   .

*Властивість доведена.*

**Властивість 2.** *(Неперервність рівномірно неперервної функції)*

Якщо  – рівномірно неперервна на , то .

*Доведення.* Виберемо довільну точку  та покладемо в означенні рівномірної неперервності в якості . Одержали неперервність функції в точці 

*Властивість доведена.*

**Властивість 3.** *(Рівномірна неперервність на об’єднанні)*

Якщо функція  є рівномірно неперервною на множинах  та , то вона є рівномірно неперервною на , .

*Доведення.* Запишемо умови:   :   , і також   :   , але тоді  виберемо , і будемо мати, що :  одержимо , тому що: якщо  це слідує з першої умови; якщо  – все слідує з другої умови; якщо ж  ми одержимо:

.

*Властивість доведена.*

**Властивість 4.** *(Рівномірна неперервність на нескінченності)*

Якщо   і має скінчену границю  , то  є рівномірно неперервною на  .

*Доведення.*    :  . Виберемо довільне  і знайдемо відповідне . Розглянемо два проміжки:  та . На першому з них за теоремою Кантора

 :  ,

на другому

: .

Тепер  

1) якщо , то ;

2) якщо , то ;

3) якщо   .

*Властивість доведена.*

**Властивість 5.** *(Лінійність рівномірної неперервності)*

Якщо рівномірно неперервні на  функції, то  функція  рівномірно неперервна на .

Ця *властивість* очевидно *доводиться* з визначення рівномірної неперервності.

**Властивість 6.** *(Критерій рівномірної неперервності на інтервалі)*

Нехай . Якщо , , то  – рівномірно неперервна на , інакше –  не є рівномірно неперервною на .

*Доведення*. Спочатку доведемо рівномірну неперервність функції на  у випадку існування скінчених границь на краях. Розглянемо функцію: . За побудовою   з *теореми Кантора*  є рівномірно неперервною на   з властивості ***1)*** про рівномірну неперервність на звуженні  є рівномірно неперервною на  і перша частина властивості доведена.

Нехай тепер принаймні одна з двох границь ,  – або не існує, або дорівнює нескінченності. Без обмежень загальності, припустимо, що це відбувається з . Розглянемо по черзі і тут обидва випадки.

Якщо  дорівнює нескінченності, то :   . Але тоді легко побудувати її підпослідовність, яку позначимо , для якої виконується умова: . Інакше це буде суперечити умові . Але тоді ми можемо побудувати такі дві послідовності: , . Для цих послідовностей виконуються умови:

 та ,

звідки з означення за Гейне випливає відсутність рівномірної неперервності на проміжку .

Якщо , то звідси безпосередньо випливає, що :  та ,  та . Але тоді ми маємо, що для цих двох послідовностей виконуються умови: , , а тому випливає, що  не є рівномірно неперервною на .

*Властивість доведена.*

**Властивість 7.** *(Достатня умова рівномірної неперервності)*

Якщо на проміжку  функція має обмежену похідну. то вона рівномірно неперервна на .

*Доведення*. Нехай для деякого   , тоді покладемо    з теореми Лагранжа маємо, що :

,

що й треба було двести.

*Властивість доведена.*

**Приклад 1.** Дослідити на рівномірну неперервність функції на вказаних проміжках:

***1) , ; 2) , ;3) , ;***

***4) , ;5) , ; 6) , .***

1. Рівномірно неперервна за теоремою Кантора.
2. Функція не є рівномірно неперервною за властивістю ***5)***, оскільки .
3. Функція є рівномірно неперервною за властивістю ***5)***, оскільки , .
4. Функція не є рівномірно неперервною за властивістю ***5)***, оскільки , так як для послідовностей ; ;  ; .
5.  – рівномірно неперервна на  за властивістю ***3)***, оскільки  та .
6. , ;  при ; .