**ЛЕКЦІЯ 2. Поняття відображення(функції)**

**Упорядкована пара та декартовий добуток.**

Поняття впорядкованої пари (x, y) є первісним як і поняття множини. Пара (x, y) є впорядкованою, якщо вказаний порядок: х – перший елемент, у – другий елемент. Пари (, ) і (, ) рівні тоді і тільки тоді, коли =∧=. Аналогічно визначається ***кортеж*** , що складається з  координат.



За допомогою упорядкованої пари вводиться ще одна операція над множинами – операція прямого або декартового добутку.

**Означення 1.**

***Декартовим (прямим) добутком*** множин  та  називається множина . За допомогою методу математичної індукції визначається упорядкований набір n+1 елементів (, ,…, )=((, ,…, ), ), n2 та декартів добуток n+1 множин . Так само ***декартовим добутком  множин***  називається множина . Якщо множини  співпадають ( ), то їх декартів добуток позначається як  ().



Треба розуміти різницю між такими декартовими добутками як  та  - елементами першого є впорядковані трійки , де  а елементами другого – впорядкована пара , першим елементом, якого є також впорядкована пара , а другим – елемент .

**Бінарне відношення.**

Відношення – це термін для зв’язку між поняттями, предметами та інше.

**Означення 2.**

Множина Г називається ***бінарним відношенням*** між елементами множин X та Y, якщо вона є підмножиною їх прямого добутку: Г⊂(XY).



Наприклад, множину  можна вважати бінарним відношенням між множинами .

Оскільки бінарне відношення – це множина, то над нею можна виконувати деякі операції.

**Означення 3.**

***Першою та другою*** ***проекцією*** бінарного відношення  називаються відповідно множини



**Означення 4.**

Першим перерізом за допомогою елемента x∊X бінарного відношення називається множина

(х)={y∊Y∣(x, y)∊Г}.



**Означення 5.**

Множина (у)={х∊Х∣(x, y)∊Г} називається другим перерізом за допомогою елемента у.



**Означення 6.**

Для кожного бінарного відношення  можна визначити ***обернене бінарне відношення***  за правилом: .

Бінарне відношення  називається ***функціональним***, якщо воно не містить різних упорядкованих пар з однаковими першими компонентами

|  |  |
| --- | --- |
| **Приклад 1.** | Знайти  для бінарного відношення , . |

Зобразимо це бінарне відношення (рис. 1), тоді можемо вже знайти усі перерізи та проекції:

, , , .

|  |  |
| --- | --- |
| . | 4 |
| *Рис. 1* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Приклад 2.** | Бінарне відношення  не є функціональним (бо ), а от бінарне відношення  є функціональним. |

**Означення 7.**

Упорядкована трійка множин  називається ***відображенням*** (або***функцією***) ***з множини  в множину ***, якщо  є функціональним бінарним відношенням між елементами множин  та . При цьому множина  називається ***областю відправленн відображення***,  - ***областю прибуття відображення,*** а  - ***графіком відображення***.

В більшості випадків прийнято позначати відображення якою-небудь малою латинською літерою, наприклад, . При цьому замість  записують , або , або , розуміючи, що графік відображення нам відомий.

Перша (друга) проекція графіка відображення  називається ***областю*** або***множиною визначення*** (***областю*** або ***множиною значень***) відображення  та позначається .

|  |  |
| --- | --- |
| **Приклад 3.** | Розглянемо відображення, що задається таким чином: . |
|  | 1) Якщо , то . |
|  | 2) Якщо , то . |
|  | 3) Якщо , то |

Якщо  і пара , то елемент  називається ***значенням функції***  на елементі  і позначається .

Якщо відома область визначення  і значення , то ***графі****к*  ***відображення***  будується за правилом: .

Якщо для відображення : , то воно **називається *відображенням множини  в множину *** і позначається ; якщо , то воно називається ***відображенням множини  на множину *** і позначається .

Функція  називається ***звуженням функції*** , якщо . В цьому випадку функція  називається ***продовженням функції***  з множини  на множину . Якщо  - деяка підмножина , то існує таке звуження функції  функції , що має властивість , тоді функція  називається ***звуженням функції  на множину *** і позначається .

|  |  |
| --- | --- |
| **Приклад 4.** | Позначимо з **прикладу 3** функції , тоді ми маємо такий взаємозв’язок між ними:  є звуженням і , і ;  є звуженням ;  є продовженням  з множини  на , а також  з множини  на , крім того можна позначити . |

Нехай . Якщо , то елемент  називається ***образом елемента***  при відображенні , в свою чергу тоді елемент  називається ***прообразом елемента***  і позначається . Для будь-якої підмножини  підмножина , що задається умовою  називається ***образом множини***  і познача4ється символом . Аналогічно для будь-якої підмножини  підмножина , що задається умовою  називається ***прообразом множини***  і позначається символом .

**Приклад 5.**y=, X=Y=R, A=[-3, 5]⊂, f(A)={f(x)∣x∊A}=[0, 25], A´⊂, A´=[2, 3],



(A´)={x∣f(x)∊A´}=[-, -]⋃[].



|  |  |
| --- | --- |
| **Приклад 6.** | Для функції  знайти образи та прообрази множин . |
|  | не існують, тому що , а ; , . |

Відображення  називається ***оборотним***, якщо бінарне відношення  є функціональним бінарним відношенням між елементами множин  та . В цьому випадку відображення  називається ***оберненим відображенням*** до  і позначається .

Оборотне відображення  множини  на множину  називається ***взаємно-однозначним*** або ***бієктивним*** (***бієкція***) і позначається .

|  |  |
| --- | --- |
| **Приклад 7.** | Дослідити на оборотність відображення , , де . |
|  | В першому випадку відображення не є оборотним, бо  не функціональне . В другому випадку відображення оборотне і бієктивне, обернене задається формулою . |

Нехай задані відображення . ***Композицію відображень***  і  записують у вигляді . Її область визначення складається з усіх тих значень , для яких . Значення композиції обчислюються за формулою: .

|  |  |
| --- | --- |
| **Приклад 8.** | , . Знайти композицію . |
|  | Зрозуміло, що , але для яких  це виконується треба з’ясувати. ,     . |

Якщо задані відображення , то існує відображення . Його називають ***параметрично заданим*** за допомогою відображень  і . Змінна  при цьому називається *параметром*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Приклад 9.** | Визначити в явному вигляді функцію , що задається параметрично: , , . |
|  | Зрозуміло, що , тому в якості  можна вибрати множину , тоді , . |

Розглянемо відображення , а також рівняння

, **(1)**

де  - деяка точка. Якщо  таке, що , тоді вважаємо, що визначено функцію . При цьому  називається ***неявною функцією***, що задається за допомогою рівняння **(1)**.

***Терміни, рівносильні терміну «функція».***

Якщо X, Y – числові множини, то використовують поняття «числова функція». Якщо X – множина натуральних чисел, то функцію називають послідовністю. Якщо X – довільної природи, а Y – числова множина, то f – функціонал. Якщо X та Y деякі множини, то термін функція замінюють відображенням. Якщо X та Y векторні простори, то для функції використовують термін перетворення або «оператор».

**Класифікація функцій одного аргументу.**

В залежності від характеру дій, які потрібно виконати над значенням аргументу, щоб отримати відповідне значення функції, встановлена наступна класифікація функцій.

1)Якщо над значенням аргумента х і деякими сталими виконуються дії: +, -, , піднесення в цілу і додатню степінь (скінчену кількість раз), то виходить ціла раціональна функція або многочлен.



, m∊, – const.



2)Функція, яка представлена у вигляді частки від ділення двох цілих раціональних функцій, називається дробово – раціональною функцією:



Сукупність цілих раціональних і дробово – раціональних функцій утворюють клас раціональних функцій.

3)Якщо над аргументом х крім п’яти перерахованих алгебраїчних дій виконується дія добування кореня скінчену кількість разів і результат не є раціональною функцією, то вийде ірраціональна функція: . Сукупність раціональних і ірраціональних функцій утворюють клас явних алгебраїчних функцій.



4)Всяка неалгебраїчна функція називається трансцендентною функцією. Елементарними трансцендентними функціями є:

а) показникова функція



б)



в) тригонометричні функції sin x, cos x, tg x, ctg x, sec x, cosec x

г) обернені тригонометричні функції: Arcsin x, Arccos x, Arctg x, Arcctg x,

Arcsec x, Arccosec x.

Функції алгебраїчні, елементарні трансцендентні і скінченні їх комбінаціі носять назву елементарних функцій. Це основний запас функцій, які будемо використовувати в курсі.

**Відношення порядку і частково упорядкований простір**

Нехай задано множину . Бінарне відношення  називається ***відношенням часткового порядку*** на множині , якщо виконуються такі умови (аксіоми):

1.  (***рефлексивність***);

2.    (***антисиметричність***);

3.    (***транзитивність***).

Поряд з позначенням  будемо також вживати позначення  навіть, якщо частковий порядок не задається умовою “*менше або дорівнює*”.

Тоді запишемо умови більш звично:

1. ∀а∈М а≤а

2. (а≤b) Λ(b≤а) ⇒ а=b

3. (а≤b) Λ( b≤с) ⇒ а≤с

**Приклад 1.**Відношення часткового порядку:

1. На  звичайне відношення “*менше або дорівнює*” є частковим порядком.

2. На  звичайне відношення “*менше або дорівнює*” є також частковим порядком.

3. Для довільної множини  в просторі  бінарне відношення  є частковим порядком.

4. Для множини  бінарне відношення :  є частковим порядком.

5. На  визначимо відношення часткового порядку  таким чином:

.

Упорядкована пара  (або ), яка складається з множини  (***основний простір***) та відношення часткового порядку  на ній називається ***частково упорядкованим простором*** (*ЧУП*), елементи множини  – ***точками ЧУП***. Точки  називаються ***порівняними***, якщо  або , в протилежному випадку – ***непорівняними***. Якщо ЧУП не містить непорівняних елементів, то він називається ***упорядкованим простором*** (*УП*), або ***лінійно упорядкованим простором***.

**Приклад 2.** В попередньому прикладі ЧУП є приклади 3–5, УП – приклади 1, 2.

Якщо  – ЧУП, то очевидно, що обернене бінарне відношення  є також відношенням часткового порядку, а ЧУП  називається ***протилежним ЧУП*** по відношенню до  і позначається .

**Розширена множина дійсних чисел**

Розглянемо УП  і розширимо його за допомогою символів  Продовжимо на цю множину відношення порядку менше або дорівнює та арифметичні дії. Розширену дійсну вісь позначимо . У випадках, коли байдуже яку з двох нескінченостей використовувати, будемо вживати символ просто . Тоді для точок з  ми маємо такі визначення відповідних операцій:

***1.*** Якщо , то вирази , , ,  мають в  той самий зміст, що й в .

***2.***  ; ***3.***  ;

***4.*** ; ***5.*** ;

***6.***  .

**Верхня та нижня межі множини в частково упорядкованому просторі**

Нехай Ω=(М, σ) – частково упорядкований простір, а Х⊂М. Елемент   називається ***найбільшим*** (***найменшим***) ***елементом множини ***, якщо .

Зрозуміло, що навіть в УП зовсім не кожна множина має найбільший чи найменший елемент.

**Приклад 3.** В просторі  розглянемо множину . Вона не має ні найбільшого ні найменшого елемента .

Спробуємо узагальнити поняття найбільшого та найменшого елементів.

Нехай  – ЧУП,  – деяка множина простору, елемент   називається ***мажорантою*** (***мінорантою***) ***множини*** , якщо . Якщо множина  має мажоранту (міноранту) вона називається ***обмеженою зверху*** (***знизу***). Множина, що обмежена зверху і знизу називається ***обмеженою***. Найменша мажоранта (найбільша міноранта) множини , якщо вона існує називається ***верхньою*** (***нижньою***) ***межею*** множини , або ***супремумом*** (***інфімумом***) та позначається .

Відмітимо, що якщо множина має скінчену верхню межу (нижню межу), то одночасно вона має ∞ кількість верхніх (нижніх) меж.

Нехай Ω – горизонтальна пряма, упорядкована зліва направо. Множина Х=[0,1) точок прямої, розташованих між точками 0 та 1, де 0∈ Х , 1 не∈ Х , не має найбільшого елемента, але має верхню межу sup X = 1. Ця множина має найменший елемент, що дорівнює 0, і одночасно має inf X=0. Якщо розглянути Х як самостійний упорядкований простір, то в ньому немає верхньої межі (оскільки точка 1 не належить Х) і одночасно немає найбільшого елемента.

**Приклад 4.** В просторі  для наведених множини маємо

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *множина* |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  | - | - |  |  |
|  | - | - |  |  |
|  |  | - |  |  |

Розглянемо деякі властивості меж множин. Всі множини розглядаються в деякому ЧУП .

**Теорема 1*.*** *(Про зв'язок між найбільшим елементом та верхньою межею множини)*

Нехай  найбільший елемент множини , тоді ця множина обмежена і .

*Доведення*. Оскільки  – найбільший елемент, то     обмежена зверху множина та  її мажоранта. Якщо  довільна мажоранта   , але з того, що   , тобто  найменша мажоранта  .

*Теорема доведена.*

**Теорема 2.** *(Перехід до верхньої межі в нерівностях)*

Нехай . Якщо  має верхню межу, то .

*Доведення*.  – є мажорантою , а  – найменша з мажорант, з чого безпосередньо слідує, що .

*Теорема доведена*.

**Теорема 3.** *(Монотонність верхньої межі)*

Нехай . Якщо  та  мають верхні межі, то .

*Доведення*. Нехай   , але ж      за теоремою 2 .

*Теорема доведена*.

**Спеціальні множини в упорядкованому просторі**

Визначимо в довільному ЧУП  спеціальні множини, які нам добре відомі у випадку . Для їх кращого розуміння в довільному просторі, ми їх проілюструємо для двох прикладів. Будемо вважати, що в просторі  параметри дорівнюють , а в просторі  – .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Проміжок | Визначення |  |  |
| ***сегмент*** |  |  |  |
| ***інтервал*** |  |  |  |
| ***напівінтервали*** |  |  |  |
|  |  |  |
| ***ліві промені*** |  |  |  |
|  |  |  |
| ***праві промені*** |  |  |  |
|  |  |  |

Якщо  – найбільша (найменша) точка УП . Множина  називається ***околом*** цієї точки, якщо   . Якщо  довільна точка  (ні найменша, ні найбільша), то множина  називається її ***околом***, якщо  .

.

**Означення 1.**

Множина Х ∈ М називається *відкритою* в просторі , якщо вона або порожня, або є околом  своєї точки.

**Означення 2.**

Множина Х ⊂ М називається *замкненою*, якщо її заповнення, тобто множина С=М\Х відкрита

**Означення 3.**

Точка x0 X M називається *внутрішньою* множини X, якщо множина X є її околом.

**Означення 4.**

Точка x0M називається *точкою дотикання* множини X, якщо в  її околі знайдеться точка з множини X.  x X є точкою дотикання цієї множини, але не навпаки.

**Означення 5.**

Точка x0M називається *граничною* точки X. Якщо  окіл цієї точки містить в собі хоча б одну точку множини X, відмінну від X0.

**Означення 6.**

Упорядкований простір (а також частково упорядкований простір) називається *повним*, якщо в ньому кожна не порожня і обмежена зверху множина Х має верхню межу.