**ЛЕКЦІЯ 3**

**Числові послідовності. Теорія границь послідовностей.**

В подальшому будемо розглядати лише УП  або , всі множини будуть вибиратися саме з цих просторів.

**Означення 1.**

***Числовою послідовністю***  називається відображення , де  називається ***n-м членом послідовності***. Іноді послідовності також позначають таким чином:  , або просто .

Кількість членів п-ті нескінченна, упорядкована подібно натуральному ряду за зростанням номерів (а не за величинами членів послідовності)

xn=n :NN, (x1=1, x2=2,…,xn= n…)

xn=n2 :NN, (x1=1, x2 =4,…,xn= n2…)

xn=1/n :NQ, (x1=1, x2=1/2,…,xn=1/n…)

xn=(-1)n :NZ

xn – член послідовності

**Означення 2.**

 - послідовності ***рівні,*** коли 

**Означення 3. *Сумою, різницею, добутком та часткою послідовностей***  та  з  називаються відповідно послідовності – , ,  та  (у випадку частки вважаємо ). Останнім обмеженням можна знехтувати, якщо розглядати послідовності  та  з простору , тоді можна вважати  , але при розгляданні подібних випадків, будемо наголошувати на цьому факті окремо.

**Означення 4.**

Послідовність називається ***обмеженою*** (***обмеженою зверху, обмеженою знизу***) відповідно до обмеженості множини її значень ,

або , якщо послідовність обмежена, то для запису використовують  (***О-велике***).

**Означення 5.**

Послідовність xn називається стаціонарною, якщо всі її елементи рівні, тобто 

**Означення 6.**

-*околом* т.  називається множина , або (а-, а+), - *околом* точки  називаються відповідно множини 

**Означення 7.**

***Точка  називається границею*** послідовності , якщо      (***метричне означення границі***), при цьому будемо записувати , або  при  (або просто ).

Якщо використати поняття околу в УП можна дати еквівалентне ***топологічне означення границі****:* точка  називається ***границею послідовності*** , якщо    .

**Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності**

**Означення 8.**

Послідовність (xn) називається *нескінченно малою*, якщо її границя дорівнює 0, або , або 

Наприклад, послідовність  стає нескінченно малою в процесі зміни n. .

Якщо , то при цьому будемо записувати  де о(1) – читається (***о-мале*** від одиниці).

Символи  називаються ***символами Ландау***.

**Означення 9.**

Послідовність (xn) називається *нескінченно великою*, якщо

, або .

Якщо всі члени послідовності з деякого номера стають додатними або від"ємними, то

;

.

Відміна топологічного означення від метричного полягає в тому, що воно спрацьовує у випадку  (тобто ), достатньо лише розглянути відповідний окіл такої точки .

В подальшому також будемо визначати:

Якщо послідовність має скінченну границю, вона називається ***збіжною***, в протилежному випадку – ***розбіжною***. Якщо послідовність має скінченну чи нескінченну границю одночасно, будемо казати, що вона ***збіжна в*** .

Має місце теорема про зв'язок нескінченно малої і нескінченно великої послідовностей.

**Теорема 1.**

Величина, обернена до нескінченно великої є нескінченно мала і навпаки.

*Доведення:*

Візьмемо  З того, що  і для тих же *n* *о*(1) ().

**Теорема 2.** *(Зв’язок метричного і топологічного означень границі послідовності)*

Метричне та топологічне означення границі числової послідовності еквівалентні .

*Доведення*. Проведемо його лише для випадку , випадки  розглядаються аналогічно. Нехай .

*Метричне  топологічне*. Нехай  – довільний окіл точки   . Покладемо  тоді      .

*Топологічне  метричне*. Нехай  - довільне додатне число, оскільки інтервал  є околом точки , то за топологічним означенням границі      .

*Теорема доведена.*

**Приклад 1.** Знайти границю: .

Доведемо, що . Виберемо довільне , тоді розглянемо   . Виберемо , тоді          – що й треба було показати.

**Теорема 3. (***Про структуру збіжної послідовності, або**критерій збіжності послідовності через нескінченно малу)*

Якщо послідовність (xn) збіжна і має границю aR, то вона представляється у вигляді суми стаціонарної послідовності та нескінченно малої і навпаки:



*Доведення:* З означення границі легко одержати:

        .

Таким чином, кожна збіжна послідовність є сумою стаціонарної послідовності та нескінченно малої.

**Теорема 4.** *(Про обмеженість зверху збіжної послідовності)*

Нехай . Якщо , то   .

*Доведення*. Ця теорема є безпосереднім наслідком топологічного означення границі послідовності, тому що промінь  є околом точки .

*Теорема доведена.*

**Наслідок 1.** *(Про обмеженість знизу збіжної послідовності)*

Нехай . Якщо , то   .

**Наслідок 2.** *(Про послідовності з різними границями)*

Нехай , . Якщо , то   .

*Доведення*. Нехай , тоді з теореми та першого наслідку    и   , тоді виберемо    .

*Наслідок доведено*.

**Наслідок 3.** *(Про єдиність границі)*

Якщо послідовність збіжна, то її границя єдина.

*Доведення*. Достатньо припустити, що  і , де , тоді з наслідку 2 ми одержимо, що   – суперечність, що завершує *доведення наслідку*.

**Наслідок 4.** *(Перехід до границі в нерівностях)*

Нехай нерівність  виконується для нескінченної кількості індексів . Якщо , , то .

*Доведення*. Припустимо, що , тоді з наслідку 2 одержимо, що   , тобто протилежна нерівність виконується лише для скінченої кількості індексів, що суперечить умові.

*Наслідок доведено*.

**Теорема 5.** *(Про двох поліцаїв)*

Якщо для послідовностей    і , то .

*Доведення*. З існування границь ми маємо:  

 нерівності виконуються одночасно



    .

*Теорема доведена*.

**Приклад 2.** Знайти границі: 1).

Розглянемо такі очевидні нерівності:

,

аналогічно , з попереднього прикладу ми знаємо, що ,  при , а тому за теоремою і .

2) , 

3)  .

Для довільної послідовності  позначимо через  (або ) та  відповідно верхню та нижню межу множини .

Має місце наступне **твердження**: *(Зв’язок між нижньою (верхньою) межею та границею послідовності)*

Нехай . Тоді послідовність  має нижню межу і , причому   .

Нехай . Тоді послідовність  має верхню межу і , причому   .

Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена, тобто :  .

***Дії над символами Ландау***

***1.***  (*сума двох обмежених – обмежена*);

***2.***  (*сума двох нескінченно малих – нескінченно мала*);

***3.*** ;

***4.***  (*добуток двох обмежених – обмежена*);

***5.***  (*добуток двох нескінченно малих – нескінченно мала*);

***6.***  (*добуток нескінченно малої на обмежену є нескінченно малою*).

*Доведення*. Доведемо деякі з них, наприклад ***2*** та ***6***.

***2.*** Позначимо    (   ) і (   )   , а тому .

***6.*** Позначимо   (    ) і (  )   .

*Теорема доведена.*

**Приклад 4.** Дослідити на збіжність послідовності: , , ,

  .



Для третьої послідовності .

, , отже послідовність нескінченно мала, її границя дорівнює 0.

**Наслідок.** *(Інші дії над символами Ландау).*

***1.*** ; ***2.*** 

***3.***  ; ***4.***  .

**Теорема 7.** *(Арифметичні дії над збіжними послідовностями)*

Якщо ,  то

***1.***  ***2.*** 

***3.***  .

*Доведення*. З теореми про структуру збіжної послідовності запишемо послідовності  , тоді одержимо, що

,

і твердження***1*** *доведене.*

Послідовності  обмежені, тобто дорівнюють , а тому

,

і твердження***2*** *доведене*.

**Приклад 5.** Знайти границю: .

Якщо , то поділимо чисельник та знаменник на :

;

Якщо , то , а тому  при ;

Якщо , то поділимо чисельник та знаменник на :

.

**Теорема 8.** *(Границя показникової та логарифмічної послідовностей)*

Нехай . Тоді послідовність   збігається до , а послідовність  до  (при ).

*Доведення*. Спочатку для показникової послідовності. При  все очевидно. Нехай, наприклад, . Тоді виберемо довільне  і розглянемо ланцюг нерівностей:

                .

Із збіжності  до  випливає, що для

    … ,

що й треба було довести. Випадок  розглядається аналогічно.

Так само випадок логарифмічної послідовності розглянемо при . Знову виберемо довільне  і розглянемо ланцюг нерівностей:

                .

І знову з умови  випливає, що

    … ,

що й треба довести. Другий випадок розглядається аналогічно.

*Теорема доведена.*

**Наслідок.** *(Границя степенево-показникової послідовності)*

Нехай , а . Тоді .

*Доведення*. Все випливає з перетворень: .

*Наслідок доведено.*

**Невизначені вирази**

При припущенні, що послідовності  мають скінченні границі, були розглянуті вирази . Розглянемо випадки, коли ,  або , якщо мова йде про частку.

1. Потрібно знайти границю частки , коли .

Ця границя, залежно від законів зміни xn, yn може приймати різні значення, або може не існувати. Покажемо це на прикладах.

Нехай ,  обидві послідовності прямують до нуля. Їх відношення. Якщо ж навпаки, , то 

Для  маємо  тобто границя частки є постійне число a.

Якщо  то відношення  немає границі.

Вираз  коли  називають невизначеністю вигляду 

1. У випадку коли  також може бути подібна обставина.

Наведемо приклади:







- не має границі.

Вираз  є невизначеністю вигляду .

1. Якщо  то при дослідженні поведінки добутку  зустрічаємось з особливістю, як і в 1) та 2).

Наприклад:

;

;

  - не має границі.

Говорять що вираз являє собою невизначеність вигляду 

1. Розглянемо суму (). Особливим тут є випадок, коли  та  прямують до нескінченостей різних знаків

;

;

;

- немає границі.

Це невизначеність вигляду 

**Розглянемо деякі важливі границі послідовностей**

1. Доведемо, що 

При а=1, рівність очевидна.

Нехай   і 

, звідси  при , тобто при .

Якщо 0<a<1, то  і, як позначено вище,  і зведено до першого випадку: 

1. Доведемо, що 

 при n>2

 при  і 

1. Доведемо, що  при k>0 є невизначеністю 

Покладемо при  і , і при k=1 маємо 

При k>1 принаймні для достатньо великих k вірно 

Цей результат тим більше вірний при k<1