**ЛЕКЦІЯ 4**

**Монотонні послідовності**

Послідовність  називається ***неспадною*** (***зростаючою***), якщо  ; послідовність  називається ***незростаючою*** (***спадною***), якщо  . Усі послідовності, що задовольняють наведеним означенням, називаються ***монотонними***, а зростаючі та спадні послідовності називаються ***строго монотонними***.

- монотонно спадна,

- монотонно зростаюча,

- не є монотонною.

**Теорема1.**  *(теорема Вейєрштрасса)*

Кожна обмежена зверху (знизу) неспадна (незростаюча) послідовність (xn)збігається, причому



()

*Доведення:.*

Нехай xn M (M-const; n=1,2, 3…). Тоді для множини  значень послідовності у повному просторі R(простір називається повним, якщо в ньому кожна непорожня обмежена зверху множина має верхню межу) повинна існувати точна верхня межа a=sup{xn}. Це число a і буде границею послідовності. За означенням точної верхньої межі  і для . При  для монотонної послідовності , тобто , але для цих значень номера n виконуються нерівності , або 

Якщо послідовність не обмежена зверху, то  і з монотонності випливає, що , тобто .

Всі висновки справедливі і для , тобто послідовність *збіжна до скінченного числа* тоді і тільки тоді, коли вона обмежена.

**Приклад 1.**

Розглянемо послідовність , яка представляє невизначеність вигляду . Розглянемо , при n>a-1

послідовність стає спадною, а знизу вона обмежена нулем. За теоремою Вейєрштрасса вона має границю, яку позначимо с: . Щоб знайти границю, перейдемо до границі в рівності : .

Будемо мати с=с\*0, отже .

**Приклад 2.** Нехай . Дослідити послідовність  на збіжність.

Спочатку доведемо обмеженість зверху послідовності методом математичної індукції.  – виконується. Припустимо, що для деякого натурального     - обмеженість зверху доведена, знизу очевидно послідовність обмежена нулем, тобто послідовність  обмежена. Дослідимо на монотонність.  при    – неспадна  за теоремою Вейєрштрасса – послідовність збіжна . Позначимо її границю через . Внаслідок того, що її члени додатні, випливає, що . Перепишемо рекурентну рівність у такому вигляді: . Бачимо, що послідовність у лівій частині збіжна до , а у лівій – до . Робимо граничний перехід у останній рівності і маємо, що повинна виконуватись рівність:   , бо другий корінь цього рівняння .

**Число е як границя послідовності**

Розглянемо такі три послідовності , , . Проведемо дослідження стосовно їх збіжності, при цьому спробуємо це зробити якомога більш різними шляхами. Почнемо з . З формули бінома Ньютона одержимо:







, **(1)**

як легко побачити, порівнюючи відповідні доданки у  і , ця послідовність зростаюча. Крім того з нерівності **(1)** легко одержати таке обмеження: , а тому  як і  є монотонними та обмеженими (монотонність  очевидна). Тому вони обидві збіжні. ***Границю послідовності  називають числом ***. Знову розглянемо праву частину **(1)**. Якщо зафіксувати деяке , ми одержимо:

.**(2)**

Зробимо в цій нерівності граничний перехід при , ми одержимо, що ліва частина прямує до , а права до виразу . З теореми про перехід до границі в нерівностях одержимо, що , а тому з теореми про двох поліцаїв .

Для різноманіття проведемо дослідження останньої послідовності іншим чином.

 

  монотонно спадна, крім того з ланцюгу нерівностей ми маємо:

 

тобто вона й обмежена, а тому збіжна. З теореми про границю добутку одержимо:

,

таким чином усі розглянуті послідовності збігаються до .

**Приклад 3.** З одержаних вище властивостей послідовностей  та  можемо записати такі нерівності:

  .

**Приклад 4**. Розглянемо послідовність = .

Покажемо, що вона монотонна і обмежена. Розглянемо  ,  і послідовність спадна. Покажемо, що послідовність обмежена знизу:

= 

,отже послідовність є збіжною, її границю позначають за Ейлером константою С, =С. З теореми про структуру збіжної послідовності маємо:.

**Приклад 5**. Знайти границю :

