ЛЕКЦІЯ 5

***Підпослідовності. Фундаментальні послідовності. Критерій Коші.***

Нехай  – деяка послідовність,  зростаюча послідовність натуральних чисел. Послідовність  називається ***підпослідовністю*** послідовності .

**Приклад 1.** Для послідовності  підпослідовностями є

***1)*** ; ***2)*** ; ***3)*** .

**Теорема 1.** *(Підпослідовності збіжної послідовності)*

Нехай послідовність  збігається і . Тоді будь-яка її підпослідовність  також збіжна і .

*Доведення*. Нехай  довільна підпослідовність послідовності . За означенням границі:     . З того, що  – зростаюча послідовність натуральних чисел, зрозуміло, що     . Поєднуючи два останні твердження, ми одержимо, що       , з чого випливає, що  при .

*Теорема доведена.*

Точка  називається ***частковою границею послідовності*** , якщо з неї можна вилучити підпослідовність , границя якої дорівнює .

**Приклад 2.** У послідовності  легко збагнути, що сукупністю часткових границь є множина .

**Приклад 3.** У послідовності  частковими границями є .

**Наслідок.** *(Множина часткових границь збіжної послідовності)*

Якщо послідовність  збігається до числа , то множина її часткових границь є одноелементна множина .

Нехай -множина часткових границь. . Серед часткових границь необхідно знайдуться найбільша і найменша, вони називаються найбільшою та найменшою границею послідовності і позначаються  та .

 , .

**Теорема 2.** *(Критерій збіжності послідовності через верхню та нижню границі)*

Для будь-якої обмеженої послідовності  виконується нерівність . Рівність можлива тоді і тільки тоді, коли

.

**Властивість 1.** *(Перша властивість верхньої (нижньої) границі)*

Верхня (нижня) границя послідовності  є її частковою границею.

**Властивість 2.** *(Друга властивість верхньої (нижньої) границі)*

Верхня (нижня) границя послідовності  є її найбільшою (найменшою) частковою границею.

**Теорема 3.** *(Про монотонну підпослідовність)*

З будь-якої обмеженої послідовності  можна виділити монотонну підпослідовність.

**Теорема 4.** *(Больцано-Вейєрштрасса)*

З кожної обмеженої послідовності  можна виділити збіжну підпослідовність.

Якщо тепер розглянути всі послідовності в просторі , то всі твердження та означення знову мають місце, якщо вважати збіжною послідовність, що прямує до  або . Для необмеженої зверху (знизу) послідовності  покладемо  . Тоді легко зрозуміти, що кожна послідовність має верхню та нижню границю, крім того, кожна монотонна послідовність має границю.

**Критерій Коші.**

Послідовність  називається ***фундаментальною***, якщо

 :    

**Теорема 1.** *(Критерій Коші)*

Послідовність  дійсних чисел збігається тоді і тільки тоді, коли вона фундаментальна.

*Доведення. Необхідність*. Нехай існує . Тоді  : :

   .

*Необхідність доведена*.

*Достатність.* Якщо  – фундаментальна, то вона обмежена, що випливає з раніше доведених тверджень. За теоремою Больцано-Вейєрштрасса існує збіжна підпослідовність . Із означення фундаментальності   , а далі за теоремою про суму двох збіжних послідовностей, одержимо, що  збігається.

*Достатність доведена.*

*Теорема доведена.*

Послідовність  ***має обмежену варіацію***, якщо  : .

**Лема 1.** *(Про послідовність з обмеженою варіацією)*

Послідовність , що має обмежену варіацію – збіжна.

*Доведення*. Позначимо , вона обмежена та неспадна, з чого слідує, що вона збіжна, і за критерієм Коші – фундаментальна 

      

 =

 – фундаментальна  збіжна.

*Лема доведена.*

**Приклад 4**.

Довести збіжність послідовності: 

Розглянемо







**Приклад 5**.

Довести розбіжність послідовності: 

Із критерія Коші та принципа двоїстості для доведення розбіжності послідовності випливає, що

 :    . Розглянемо 

