**Лекція 6.**

**Теорема Коші. Теорема Штольца.**

Нехай  – числові послідовності. Послідовність  називається знехтуваною у порівнянні з , якщо  . Будемо записувати  та вважати, що ***послідовність  є малою в порівнянні з послідовністю ***.

**Лема 2.** *(Критерій о-малості послідовності)*

  .

*Доведення*.          .

*Лема доведена.*

**Теорема 2.** *(Винесення о-малого за знак суми)*

Нехай  ,  при  і . Тоді

.

*Доведення.* З умови ми маємо, що       . Крім того з умови  випливає, що :        .

*Теорема доведена.*

**Наслідок 1.** *(Границя відношення часткових сум)*

Нехай   і . Якщо , то .

*Доведення.* Нехай . Оскільки , і , то за теоремою 2 права частина прямує до нуля.

Якщо , то        за ,теоремою 2   . Аналогічно для випадку .

*Теорема доведена.*

**Наслідок 2.** *(теорема Коші)*

Якщо існує , то існує .

*Доведення.* Для доведення достатньо в останньому наслідку покласти .

*Теорема доведена.*

**Теорема 3.** *(Штольца)*

Якщо послідовність  монотонно прямує до , та , то .

*Доведення.* Для доведення достатньо в наслідку покласти , ; , . Тоді ,  .

*Теорема доведена.*

**Приклад 1.** Знайти .

;     .

Для довільних додатних дійсних чисел  визначимо:

***середнє арифметичне*** – ;

***середнє геометричне*** – ;

***середнє гармонічне*** – ;

***середнє степеневе порядку *** – .

**Приклад 2.** Границя середніх – арифметичного, гармонічного, геометричного.

Нехай послідовність додатних дійсних  чисел така, що . Довести тоді, що до тієї ж самої границі збігаються також середнє арифметичне , середнє геометричне  і середнє гармонічне  чисел .

Твердження для середнього арифметичного безпосередньо випливає з теореми Коші. Для середнього гармонічного також з цієї теореми легко одержати, що , тому що , з чого маємо: . Для середнього геометричного все випливає з теореми про двох поліцаїв та нерівності між середніми: , а тому і .

**Теорема 4.** *(Границя кореня n-го степеня)*

Якщо для послідовності додатних чисел  , то

.

*Доведення*. Якщо покласти  ,  , то

За останнім прикладом (для середнього геетричного) маємо:

.

*Теорема доведена.*