Лекція 7

***Границя функції***

Нехай  довільна точка на . Множина



називається **-*околом точки* **. Множина  називається проколотим **-*околом точки* **.

Множини

, , 

називаються відповідно ***–околами *** та просто ***.***

Нехай  деяка множина, . ***–околом точки  в множині *** називається перетин множин .

**Приклад 1.** Якщо розглянути множину , тоді при ,

***–околом точки  в множині *** буде множина .

**Означення 1.** Нехай , точка  називається ***граничною точкою*** множини , якщо  , іншими словами, гранична точка  множини  є точкою дотикання множини . Точка множини , яка не є граничною, називається ***ізольованою***. Можна розписати це визначення з використанням принципу двоїстості, тобто запишемо заперечення визначення граничної точки: : , тобто в деякому околі точка  є єдиною точкою множини, що повністю задовольняє уявленню про ізольовану точку.

**Лема 1.** *(Окіл граничної точки)*

Якщо  – гранична точка множини , то  множина  нескінченна.

*Доведення*. Від супротивного. Якщо множина  – скінчена, то позначимо  . Виберемо    – суперечність.

*Лема доведена.*

З цієї леми можна дати еквівалентне означення граничної точки та точки дотикання до деякої множини .

**Означення 2.** Точка  називається ***точкою дотикання*** (***граничною точкою***) множини , якщо можна виділити послідовність  точок з множини  , що збігається до .

Нехай  і  – гранична точка множини .

**Означення 3.** Число  називається ***частковою границею функції  в точці ***, якщо

:  при .

Множину всіх часткових границь функції  у точці  позначимо .

**Приклад 2.** Розглянемо функцію , , для неї ****, точка  – є граничною для . Тоді , так як       при . Крім того, очевидно, що зовні проміжку  часткових границь функції нема.

Аналогічно послідовностям, визначимо ***верхню*** та ***нижню границю функції***  ***в точці *** за формулами:

; .

**Означення 4.** Нехай  і ******. Якщо множина  складається з одного числа , то воно називається ***границею функції  в точці *** і позначається  (***границя за Гейне***).

В **Прикладі 2.** розглянемо дві послідовності .

Відповідні значення функції на цих послідовностях прямують до різних значень:

 .Отже, границі не існує.

**Означення 5.** Нехай  і ******. Число  називається ***границею функції  в точці *** (при ), якщо  : :    (***границя за Коші***).

**Теорема 1.** *(Зв’язок означень границі функції за Коші та Гейне)*

Означення границі функції в точці за Коші та Гейне еквівалентні.

*Доведення*. *Коші  Гейне*. Нехай  за Коші. Розглянемо довільну послідовність :  при . Тоді      , тоді :      . Тобто , за Гейне доведено.

*Гейне  Коші.* Нехай  за Гейне. Від супротивного, якщо  за Коші, то   :   . Виберемо , тоді  :             суперечність.

*Теорема доведена.*

**Теорема 2.** *(Арифметичні дії з границями функцій)*

Якщо ,  та , то , , і якщо , то .

*Доведення* спирається на аналогічну теорему для збіжних послідовностей та означення Гейне границі функції в точці.

**Приклад 3.** Остання умова  необхідна, бо інакше навіть за умови, що  є гранична точка для  та для  може бути невизначеною : , ; ,    – гранична точка для обох множин, але в околі точки  функція  не визначена.

**Наслідок 1.** *(Про функції з нерівними границями)*

Нехай , ,  та . Тоді :  .

**Наслідок 2.** *(Про нерівні функції)*

Нехай , , . Якщо :  виконується одна з умов:

***1)*** ; ***2)*** ; ***3)*** ; ***4)*** ,

то .

**Наслідок 3.** *(Теорема про двох поліцаїв для функцій)*

Нехай функції  мають спільну область визначення  та точка ******. Якщо :   та , , то .

*Доведення* *наслідків* проводиться за означенням Гейне границі функції в точці.

**Теорема 3.** *(Про границю композиції функції)*

Нехай  – гранична точка множини . Якщо , , і , що  , то .

*Доведення.* Нехай  – довільна послідовність, така що   і . Тоді  і . Тому  при . Згідно означення границі .

*Теорема доведена.*

**Означення 6.** Нехай  і  – гранична точка множини  . Покладемо  , якщо ця границя існує. Числа ,  називаються відповідно ***лівою*** та ***правою границями функції  в точці ***. Якщо , , то відповідні границі називається ***нескінченими***.

**Теорема 4.** *(Критерій існування границі функції в точці)*

Функція  має границю в точці , граничній для множин  і  тоді і тільки тоді, коли одночасно існують і рівні між собою односторонні границі  і .

*Доведення.* *Необхідність*. Якщо , то :   . Тоді легко зрозуміти, що :   , тобто . Аналогічно .

*Достатність*. Нехай , розглянемо довільну послідовність точок , що збігається до . Розіб’ємо її на дві частини, члени менші за , та члени більші за . Якщо обидві ці частини нескінчені, то ми маємо дві підпослідовності, які збігаються до , а їх значення збігаються до , і . Якщо одна з цих частин скінчена, то її можна відкинути, на збіжність це не впливає. Тобто .

*Теорема доведена.*

Зауважимо, що у випадках  мова йде лише про односторонні границі, які ми будемо позначати відповідно , .

**Приклад 4.** Розглянемо функцію  і границю в точці .

,   не існує .

**Означення 7.** Нехай ,  – гранична точка множини . Функція  ***задовольняє в точці  умову Коші***, якщо

 : :   .

**Теорема 5.** *(Критерій Коші існування границі функції в точці)*

Функція  має скінченну границю в точці  тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє в ній умову Коші.

*Доведення.* *Необхідність*. Якщо    : :      .

*Достатність*. Виберемо довільне . Тоді : :   . Зафіксуємо . Розглянемо довільну послідовність , що збігається до . :     за виконанням умови Коші одержимо:    – фундаментальна послідовність, тобто вона збіжна. Нехай , тобто . Залишилося показати, що . Якщо   :   при . Розглянемо послідовність . Ця послідовність також є фундаментальною, а тому збіжною  її границя єдина, що суперечить тому, що  є її різними частковими границями.

*Теорема доведена.*

**Приклад 5.**Границя показникової, логарифмічної та степенево-показникової функцій:

***1.***  . ***2.***  .

***3.*** , якщо ,  та .

Вибираємо довільну послідовність , тоді все випливає з відповідних властивостей послідовностей.