**Лекція 8.**

Для вивчення поведінки функції в околі деякої точки та порівняння різних функцій в околі точки, корисно запровадити ***символи Ландау***  і  – ***О-велике*** та ***о-мале*** відповідно аналогічно тому, як вони були визначені для послідовностей.

Нехай функції , , , де . Тоді:

***1)*** якщо існує  і окіл  точки , такі що  виконується нерівність: , то записуємо  (***–велике***);

***2)*** якщо одночасно , то кажуть, що  і  – ***функції одного порядку***;

***3)*** якщо  існує окіл  такий, що  , то записуємо  (***–мале***);

***4)*** якщо , то функції  і  називаються ***еквівалентними***, при цьому записують .

**Теорема 6.** *(Про функції одного порядку та критерій еквівалентності функцій)*

Функції , , , де , тоді:

***1.*** якщо :   і **,** то функції  і  одного порядку в околі точки ;

***2.*** якщо :  , то   .

*Доведення.* ***1.***Якщо , то    : :          , аналогічно, враховуючи, що , то , тобто  і  – одного порядку.

***2.***    : .         .

Аналогічно в зворотному напрямі.

*Теорема доведена.*

**Приклад 6.** Якщо розглянути функції  та  в околі , то зрозуміло, що  та , але не існує , що підкреслює лише достатність відповідної умови.

Сформулюємо тепер властивості символів Ландау, вважаємо при цьому, що для всіх функцій є однаковими множини визначення, всі властивості розписуються в околі точки  – граничній для спільної області визначення.

**Властивості.** *(Символів Ландау)*

***1.***  ; ***2.*** ; ***3.***  ;

***4.*** ; ***5.*** ; ***6.*** ;

***7.*** ; ***8.*** ; ***9.*** 

Функція  називається ***обмеженою*** на множині , якщо множина  обмежена.

**Наслідок 1.** *(Умова обмеженості функції в точці)*

Якщо , то , де функція обмежена.

**Наслідок 2.** *(Умова нескінченної малості функції в точці)*

Якщо , то .

Якщо в деякому околі   , то , при цьому функція   називається ***головною частиною функції  при ***.

При обчисленні границь функцій часто дуже зручним виявляється замінювати їх на головні частини. Спочатку згадаємо деякі відомі зі школи границі:

**Приклад 7.** .

**Приклад 8.** .

***1)*** Якщо , то нехай  – довільна числова послідовність, що прямує до нуля, тоді існує послідовність натуральних чисел

:   .

Ліва і права частини нерівності прямують до , тому середина теж прямує до .

***2)*** Якщо , то покладемо    

  .

Тепер ці границі можемо використати для одержання так званих асимптотичних формул.

   **(1)**

 

 **(2)**

 

 **(3)**

 

 **(4)**

 **(5)**

 

 **(6)**

Дуже часто в околі точки  головну частину функції надають у вигляді , . Тоді можна виписати деякі корисні практичні властивості символів Ландау саме для таких степеневих функцій. При цьому вважаємо, що , а .

**Властивості.** *(о-малих функцій)*

***1.*** , ; ***2.*** , ;

***3.*** , ; ***4.*** ;

***5.*** ; ***6.*** .

Легко побачити, що формули **(1)-(6)** записані саме у вигляді виділення головної частини степеневого вигляду. Покажемо як останні властивості та формули **(1)-(6)** використовувати для перетворень та знаходження границь.

**Приклад 9.** 

.

**Приклад 10.**

.

**Приклад 11.** , тепер знайдемо таку границю при :

  .

Перелічимо всі типи невизначеностей, для всіх інших випадків достатньо підставити граничні значення з  і одержати відповідь:

***1.*** ; ***2.*** ; ***3.*** ;

***4.*** ;

***5.*** ; ***6.*** ; ***7.*** .

**Приклад 12.** , де ***1) ***; ***2)*** ; ***3)*** .

***1)*** ;   ;

***2)*** ;  ;

***3)*** ; ; .