Лекція 9.

***Неперервність функції***

Функція  називається ***неперервною в точці*** **, якщо  кожен раз, як тільки послідовність  точок множини  збігається до  (***означення неперервності за Гейне***).

В ізольованій точці , згідно цього означення, функція  завжди неперервна.

Функція  називається ***неперервною в точці*** **, якщо   :    (***означення неперервності за Коші*).**



**Теорема 1.** *(Зв’язок означення неперервності за Коші та Гейне)*

Означення неперервності функції  в точці  за Коші та Гейне еквівалентні.

*Доведення* очевидно випливає з еквівалентності поняття границі за Коші та Гейне.

Функція , яка не є неперервною в точці  називається *розривною* в ній.

Приклад 1. Дослідити на неперервність *функцію Діріхле*: .

Легко довести, що вона розривна в кожній точці . Якщо , то вибираємо довільну послідовність , що збігається до , але тоді . Аналогічно доводиться для довільної ірраціональної точки.

**Теорема 2.** *(Арифметичні дії з неперервними функціями)*

Нехай функції  неперервні в точці , тоді неперервні в цій точці також і функції  та  (якщо ).

*Доведення* безпосередньо слідує з аналогічної теореми про границі функції.

**Теорема 3**. *(Неперервність композиції функцій)*

Нехай  неперервна в точці , а  неперервна в точці . Якщо , то композиція  неперервна в точці .

*Доведення*. Нехай  при  і  довільна послідовність значень аргумента складної функції. Тоді  і     при . Тобто



*Теорема доведена*.

**Наслідок**. *(Границя неперервної композиції)*

Нехай  – гранична точка множини . Якщо  і  неперервна в точці , то .

*Доведення*. Якщо замість функції  розглянути функцію  , то  неперервна в точці   .

*Наслідок доведено*.

Функція  називається *неперервною зліва* (*справа*) *в точці *, граничній для множини , якщо .

**Точки розриву функції та їх класифікація.**

Точки, в яких функція не володіє властивістю неперервності, називаються ***точками розриву функції.***

Нехай , . Якщо , то точка  називається ***особливою*** для функції .

Точки розриву та особливі точки функції , які є граничними одночасно для обох множин  та , ми будемо поділяти на такі типи (це може не співпадати з класифікацією в деяких підручниках):

***1)***  і  або не існує (особлива точка), або ; тоді точка  називається ***точкою усувного розриву*;**

,, lim  =, ;

***2)*** ,  і  називається ***точкою розриву першого роду***; число  називається ***стрибком функції***  у точці ;

***3)*** Всі інші точки називають ***точками розриву другого роду***.

***3.1)*** Інколи випадок точки розриву другого роду , для якого  називають ***точкою розриву другого роду типу полюсу***.

**Приклад 2.** Дослідити на неперервність та визначити тип точок розриву функції, що визначені на : ; ; ; .

Всі вони в неперервні в усіх точках, крім особливої точки . В цій точці функції мають такі розриви:  – *1-го* *роду,  – 2-го роду(не існують односторонні границі в 0),  – усувний,  – 2-го роду (типа полюс).*

Функція  називається ***неперервною на множині***  (на ***сегменті ***), якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини (цього сегменту). Клас усіх функцій, неперервних на  позначають символом .

Функція  називається ***кусково-неперервною***, якщо вона неперервна в усіх внутрішніх точках сегмента , за винятком скінченої множини точок, в кожній з яких має скінчені лівосторонню та правосторонню границю, і крім того має скінчені значення  та .

**Приклад 4.** Функції  є кусково-неперервними на довільному .

Функція  називається ***неспадною*** (***зростаючою***), якщо     . Функція  називається ***незростаючою*** (***спадною***), якщо     . Усі розглянуті функції називаються ***монотонними***. Зростаючі та спадні функції називаються ***строго монотонними***.

**Теорема 4.** *(Односторонні границі монотонної функції)*

Кожна монотонна функція має односторонню границю в будь-якій граничній точці множини .

*Доведення.* Нехай  – неспадна,  – гранична точка , припустимо, що  є граничною для множини . Позначимо . Так як , то . Якщо , то   і  : . Тоді    :        . Аналогічно для , розглядаємо . Так само все робиться, якщо  є граничною точки множини , і якщо  – незростаюча.

*Теорема доведена.*

**Наслідок 1***(Типи розривів монотонної функції)*

Монотонна функція  може мати на  лише розриви 1-го роду.

**Наслідок 2.** *(Кількість розривів монотонної функції).*

Монотонна функція  неперервна скрізь, за винятком не більш ніж зліченої множини точок.

*Доведення.* Нехай  – неспадна,  – точка розриву . Тоді за теоремою  і  – скінчені (інакше нема монотонності). Так само . Якщо , то значення  не можна задати без порушень монотонності. Тому .

*Першій наслідок доведено.*

Виберемо довільну точку . Далі зрозуміло, що різним точкам розриву відповідають різні раціональні точки, і якщо   . Тобто множина точок розриву має потужність не більшу за потужність , тобто вона злічена.

*Наслідки доведено*.

***Неперервність основних елементарних функцій.***

Функція  називається ***раціональною***.

**Властивості.** *(Неперервних функцій)*

1. Алгебраїчний многочлен  є неперервною функцією .
2. Функція  називається ***раціональною***

Кожна раціональна функція  є неперервною : ;

***3)*** Функції , , , , , ,  неперервні ;

***4)*** Функції , ,  неперервні на своїх множинах визначення.

***5)*** Функція  неперервна на області визначення.

*Доведення.* Розглянемо, наприклад, функцію : тоді 

 –

знайшли потрібне . Аналогічно для решти функцій.

Множина  називається ***компактною в собі*** або ***компактом***, якщо з будь-якої послідовності точок  з  можна виділити підпослідовність  збіжну до деякої точки .

**Теорема 5.** *(Критерій компактності в собі)*

Множина  є компактом тоді і тільки тоді, коли вона одночасно замкнена і обмежена.

*Доведення.* *Необхідність*.  – компакт. Спочатку покажемо від супротивного обмеженість компакту. Якщо  не обмежена, то :    з неї не можна виділити підпослідовність, збіжну до деякої точки    – обмежена множина. Припустимо, що  не замкнена   : . Але тоді будь-яка підпослідовність . Суперечність з означенням компакту.

*Необхідність доведена.*

*Достатність.* Нехай  – замкнена і обмежена. Розглянемо довільну послідовність . Вона обмежена   (за *теоремою Больцано-Вейєрштрасса*), внаслідок замкненості  - гранична точка  .

*Достатність доведена*.

**Приклад 5.** На  можна навести такі приклади:

- компакти;

,  – не компакти.

**Наслідок.** *(Екстремальні властивості компакту)*

Нехай  – компакт, тоді в є найбільший та найменший елементи.

*Доведення*.  – замкнена і обмежена, а далі все маємо за наслідком з відповідної теореми про повний простір.

*Наслідок доведено.*

**Теорема 6.** *(Неперервний образ компакта)*

Нехай  неперервна на  функція, де  – компакт. Тоді і множина  – компакт.

*Доведення*. Розглянемо довільну послідовність , тоді : . Тоді  - підпослідовність: . З неперервності :    - компакт.

*Теорема доведена.*

**Наслідок.** *(Теорема Вейєрштрасса)*

Нехай  неперервна на компакті  функція. Тоді вона приймає найменше та найбільше значення.

*Доведення* безпосередньо випливає з останнього наслідку та теореми 6.

**Теорема 7.** *(Неперервність оберненої функції)*

Якщо ,  – компакт, якщо  – неперервна та оборотна на , то  також неперервна функція на .

*Доведення*. Нехай  – довільна послідовність, що збігається до . Розглянемо послідовність , і нехай  її часткова границя  . З неперервності  слідує, що  є частковою границею   . Тобто всі часткові границі  дорівнюють      також неперервна в точці . Оскільки  – довільна точка з    - неперервна.

*Теорема доведена.*

**Наслідок.** *(Існування оберненої функції)*

Якщо функція  строго монотонна і неперервна на компакті , то обернена їй функція існує, неперервна і монотонна на компакті .

*Доведення.* Достатньо показати існування та монотонність оберненої функції. Нехай зростаюча на . Тоді : . Покладемо . То, що вона дійсно обернена до , очевидно. Покажемо від супротивного, що вона зростаюча. Якщо :  і , тоді, якщо позначити   , але  суперечність.

*Наслідок доведено.*

Нехай , , , . ***Коливанням функції  на множині *** називається різниця . Якщо , кажуть, що  має ***нескінчене коливання*** на .

**Теорема 9.** *(Існування скінченого коливання)*

Якщо :  виконується нерівність: , то коливання  і його можна обчислити за формулою: .

**Теорема 10.** *(Критерій Бера неперервності функції в точці)*

Функція  неперервна в точці , граничній для  тоді і тільки тоді, коли   на множині  .,

Нехай ,  – гранична точка множини , , . ***Коливанням функції  у точці *** називається границя: .

**Наслідок.** *(Критерій неперервності через коливання в точці)*

Для того, щоб  була неперервною в точці , граничній для , необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова .

Нехай  – довільна множина. ***Покриттям множини***  називається така сукупність ,  підмножин , що .

**Теорема 12.** *(Коші)*

Якщо , і , то : .

**Наслідок.** *(теорема Коші про проміжні значення)*

Якщо , то функція  набуває усіх проміжних значень між  та .

*Доведення.* Достатньо застосувати попередню теорему для функцій , де  – довільне число між  та .