1. **Біном Ньютона ;**

 справджується рівність: *Доведення*. Властивість біноміальних коефіцієнтів:

 При   - справджується. виконується , треба довести, що

1. **Нерівність Бернуллі;**

**Нерівність Бернуллі** стверджує: якщо x\geq -1, то (1+x)^n\geq 1 + nx для всіх n\in\mathbb{N}_0. Однак, **узагальнена нерівність Бернуллі** стверджую наступне: якщо  n\in(-\infty ;0)\cup(1;+\infty ), то (1+x)^n\geq 1 + nx, якщо  n\in(0;1) \!\ , то (1+x)^n\leq 1+nx,при цьому рівність досягається в двох випадках: \left[\begin{matrix} \forall x\neq -1, n=0 \\ \forall n\neq 0, x=-1 \end{matrix}\right.***Доведення*.** Доведення  \forall n\in\mathbb{N}_0 проводиться методом математичної індукції по *n*. При *n* = 0 нерівність, очевидно, вірна. Припустимо, що вона вірна для n, доведемо це вірно для n+1: (1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \geq (1+nx)+x = 1+(n+1)x

1. **Зв’язок між найбільшим елементом та супремумом;**

Нехай  найбільший елемент множини , тоді ця множина обмежена і . ***Доведення*.** Оскільки  - найбільший елемент, то     обмежена зверху множина та  її мажоранта. Якщо  довільна мажоранта   , але з того, що   , тобто  найменша мажоранта  .

1. **Теорема про перехід до верхньої межі в нерівностях;** Нехай . Якщо  має верхню межу, то . ***Доведення*.**  - є мажорантою , а  - найменша з мажорант, з чого безпосередньо слідує, що . *Теорема доведена*.
2. **Єдиність границі збіжної числової послідовності;** Послідовність не може мати більше однієї границі. ***Доведення*.** Припустимо, що послідовність { *xn* } має дві границі *a* і *b*, не рівні один одному. *xn* ® *a*; *xn* ® *b*; *a* ¹ *b*. Тоді за визначенням існує таке число *e* >0, що  . Запишемо вираз: http://konspekta.net/bazaimgstudall2/2426736159554.files/image032.gifА тому що e – **будь-яке** число, те http://konspekta.net/bazaimgstudall2/2426736159554.files/image034.gif , тобто a = b. *Теорему доведено*
3. **Теорема про три послідовності;** Нехай задані 3 послідовності (a_n), \ (b_n), \ (c_n) задовольняють умови: 1) існує \lim_{n \to \infty }a_n = \lim_{n \to \infty }b_n = a - число, 2) існує n_0 \in N, що для будь-якого n \ge n_0 : a_n \le c_n \le b_n.

Тоді існує \lim_{n \to \infty }c_n=a. **Доведення**. Нехай зафіксовано \varepsilon > 0. Тоді, за означенням, існують такі *n*0',*n*0'', що для всіх n \ge n_0': \ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, а для всіх n \ge n_0'': \ a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon. Позначимо через *n*0 найбільший з номерів *n*0',*n*0''. Тоді для всіх n > n_0 :\  a - \varepsilon < a_n \le b_n \le a + \varepsilon, тоді оскільки a_n \le c_n \le b_n, то  a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon, а це означає, що \lim_{n \to \infty} c_n = a.

1. **Арифметичні операції над символами Ландау.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | ; |  |
|  |  | ; |  |
|  |  |

1. **Сумою, та  з  називаються відповідно послідовність - .**

Границя суми дорівнює сумі границь.

***Доведення.*** Нехай, наприклад, Описание: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image374.png, Описание: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image457.png. Покажемо, що Описание: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image458.png. ДійсноОписание: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image459.png.Описание: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image460.png За Описание: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image385.png оберемо Описание: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image461.png та оцінимо модуль Описание: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image387.png, маємо: Описание: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image462.png Таким чином, Описание: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image463.pngОписание: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image464.png

.

1. ***Добутком***  та  з  називаються відповідно послідовності - .

Границя добутку дорівнює добутку границь.

***Доведення.*** Нехай, наприклад, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image374.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image457.png. Покажемо,що http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image465.png. Дійсно, якщоhttp://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image374.png, то за теоремою 2.3 http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image466.png, де http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image379.png – нескінченно мала величина. Аналогічно, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image467.png, де http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image468.png – нескінченно мала. Тоді http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image469.png. Оскільки константа є величиною обмеженою, а я Якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page7_files/image375.png – нескінченно мала, то http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page7_files/image374.png , тому http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image470.png є нескінченно малими, а оскільки Алгебраїчна сума (добуток) скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою тоhttp://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image471.png також є нескінченно малою. Оскільки сума трьох нескінченно малих величин є нескінченно малою, то http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page9_files/image472.png є нескінченно мала.*.*

1. **Теорема Вейєрштрасса про iснування границi монотонної обмеженої послiдовностi.** *Якщо послідовність монотонна і обмежена, то вона збіжна****.***

**Доведення** (для випадку монотонно не спадної послідовності (*an*)). Розглянемо множину A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \}, \ A \ne \varnothing, яка складається з елементів цієї послідовності. Тоді А - обмежена зверху, бо послідовність (*an*) обмежена за мовою теореми. Звідси, за теоремою про існування супремуму, існує a^* = sup \ A*Доведемо*, що lim(a_n)=a^*, \ n \to \infty. Нехай \varepsilon > 0 заданий. Існує n_0 \in N, такий, що a^* - \varepsilon < a_{n_0} \le a^* \qquad (1), бо інакше для всіх n \ge 1:\  a_n \le a^* - \varepsilon. Тоді a^* - \varepsilon - верхня межа А, менша за a^* = sup \ A, а це неможливо. Оскільки (*an*) - не спадна, то із (1) випливає, що для всіх n \ge n_0 :\ \ a^* - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le a^* . Звідси, для всіх n \ge n_0 :\ \  |a_n - a^*| < \varepsilon. Номер *n*0 - шуканий. *Теорему доведено.*

1. **Число e. Довести збiжнiсть послiдовностi xn = (1+1/n)n .**





,

як легко побачити, порівнюючи відповідні доданки у  і , ця послідовність зростаюча. Крім того з нерівності легко одержати таке обмеження: , а тому  як і  є монотонними та обмеженими (монотонність  очевидна). Тому вони обидві збіжні. *Границю послідовності  називають числом *.

1. **Довести оцiнку 1/(n+1) < ln(1 + 1/n) < 1/n.**

*Доведення:*  .. *Що й треба було довести.*

1. **Довести, що 2+1/2! +1/3! + ... + 1/n! → e при n →∞.**

(Продовження 14) Зробимо в цій нерівності граничний перехід при , ми одержимо, що ліва частина прямує до , а права до виразу . З теореми про перехід до границі в нерівностях одержимо, що , а тому з теореми про двох поліцаїв .

1. **Стала Ейлера C. Довести формулу 1+1/2 +1/3 + ... + 1/n = C + ln n + o(1).**

Розглянемо послідовність = .

Покажемо, що вона монотонна і обмежена. Розглянемо  ,  і послідовність спадна. Покажемо, що послідовність обмежена знизу:

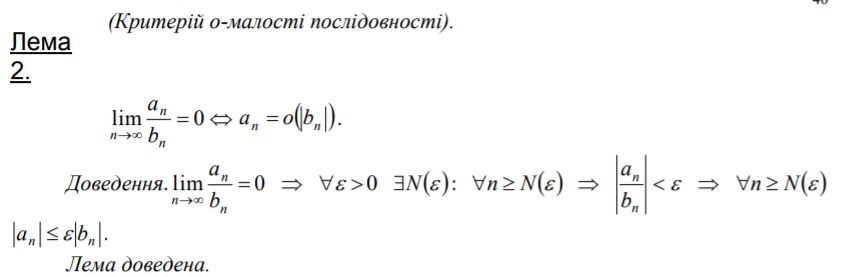
= 

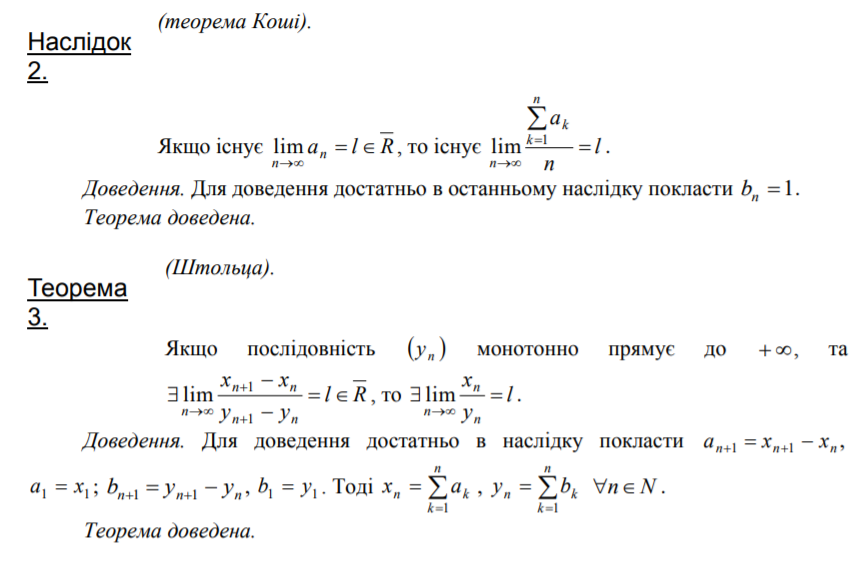
,отже послідовність є збіжною, її границю позначають за Ейлером константою С, =С. З теореми про структуру збіжної послідовності маємо:.

1. **Теорема про збiжнiсть довiльної пiдпослiдовностi збiжної послiдовностi.**

Нехай послідовність збігається і . Тоді будь-яка її підпослідовність також збіжна і.

***Доведення*.** Нехай  довільна підпослідовність послідовності . За означенням границі:     . З того, що  - зростаюча послідовність натуральних чисел, зрозуміло, що     . Поєднуючи два останні твердження, ми одержимо, що       , з чого слідує, що  при .*Теорема доведена.*

1. **Критерiй Кошi збiжностi числової послiдовностi.** Послідовність дійсних чисел збігається тоді і тільки тоді, коли вона фундаментальна. ***Доведення****. Необхідність*. Нехай існує . Тоді  : :    . *Необхідність доведена*. *Достатність.* Якщо  - фундаментальна, то вона обмежена, (див лему 1 з розділу 1.4). За теоремою Больцано-Вейєрштрасса існує збіжна підпослідовність . Із означення фундаментальності   , а далі за теоремою про суму двох збіжних послідовностей, одержимо, що  збігається. *Достатність доведена.Теорема доведена.*
2. **Критерій о-малості послідовності**
3. **Теореми Коші та Штольца.**

******