Похідна

1. ***Визначення похідної, правила диференціювання***

**Означення1**.(Похідна за Ферма)Нехай функція , . Функція  називається ***диференційованою в точці ***, якщо існує така неперервна в точці  функція , що  виконується рівність :

 **(1)**

Якщо  - гранична точка множини , то число  називається ***похідною функції  в точці *** і позначається символом .

**Приклад 1.** Розглянемо функції , , 

=  

Якщо  - гранична точка множини , то число =  

**Означення 2.**Нехай ,  є граничною точкою цієї множини. Функція  диференційована в точці , якщо існує скінченна границя

 **(2)**

Це безпосередній наслідок формули **(1).** 

**Наслідок.** *(Необхідна умова диференційованості)*

Якщо функція  диференційована в точці , граничній для множини , то вона неперервна в точці  і її похідна  визначена однозначно.

**Приклад 2.** Знайти похідні в точці  функцій: , , .



;

;

 .

**Теорема 1.** *(Про похідну композиції)*

Нехай функція  диференційована в точці , а функція  диференційована в точці . Якщо  і  – гранична точка множини , тоді композиція  диференційована в точці  і справджується рівність:

 **(3)**

*Доведення.* За означенням диференційованості  в точці , існує неперервна в точці  функція , , така що : . Нехай     . З диференційованості  ми одержимо, що існує неперервна в точці  функція :  виконується рівність: . Підставивши це в останню рівність, одержимо: , з чого випливає диференційованість композиції та рівність **(3).**

**Приклад 3.** .

**Основні правила диференціювання.**

Нехай функції ,  диференційовані в точці  граничній для множини . Тоді  функція  диференційована в точці  і виконується рівність:

.

Дійсно:

,  

.

*Диференціювання добутку функцій*:

Якщо функції ,  диференційовані в точці  граничній для множини , то функція  диференційована в точці  і виконується рівність:

 **(4)**

*Похідна частки*:

Нехай ,  диференційовані функції в точці , граничній для множини . Якщо , то функція  – диференційована в точці  і виконується рівність:

 **(5)**

*Похідна оберненої функції*:

Нехай функція  – оборотна, , і  є граничною точкою множини , . Якщо існує  і обернена функція  неперервна в точці , то вона диференційована в цій точці. Якщо, крім того,  – гранична точка множини , то

 **(6)**

*Доведення(6)* : З означеності диференційованості функції  в точці  існує неперервна в цій точці функція : : , з взаємної однозначності  слідує, що  при , і , якщо покласти , одержимо: . Функція  неперервна в точці    диференційована в точці . Якщо  - гранична точка множини , то, згідно означення похідної, маємо:

.

**Приклад 3.** Знайти .

    , бо .

Враховуючи правила диференціювання елементарних функцій, одержимо ***таблицю похідних***:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**Приклад 4.** Знайдемо похідну ***степенево-показникової функції***:

.

Якщо функція  диференційована в кожній точці деякої множини , то вона називається ***диференційованою на множині ***.

***2. Односторонні похідні, диференціал***

Нехай , якщо  – гранична точка множини  , то  . Числа  та , якщо вони існують, називаються відповідно ***лівою*** та ***правою похідними функції  у точці ***.

**Теорема 2.** *(Критерій диференційованості функції)*

Для того, щоб неперервна функція  була диференційованою в точці , граничній для множин  та , необхідно й достатньо, щоб вона мала в цій точці скінчену ліву й праву похідні, і при цьому .

*Доведення.* Згідно теореми про існування границі функції в точці для функції , , можемо сказати, що  має скінченну границю в точці  тоді і тільки тоді, коли , але ж , .

*Теорему доведено.*

**Приклад 5.** , , дослідити на диференційованість в точці .

,   вона не диференційована в цій точці.

Для функції  виберемо дві довільні точки  та  з . Різницю  називають ***приростом функції  в точці ***, відповідним приросту незалежної змінної , і позначають через . Якщо  – диференційована в точці  функція, граничній для множини , то формулу для її приросту можна надати у вигляді:

, **(7)**

де  – неперервна в точці  функція, і . Оскільки , то , тоді рівність **(7)** можна переписати у вигляді:

 **(8)**

Відображення  називається ***лінійним***, якщо  виконуються умови:

***1)*** ,  (***адитивність***);

***2)*** ,  (***однорідність***).

За означенням, ,та для : , 

**Лема 1.** *(Загальний вигляд лінійного відображення)*

Загальний вигляд лінійного відображення з  має вигляд , де .

*Доведення*. Позначимо . Легко зрозуміти, що відображення  є лінійним. Тепер треба показати, що будь-яке інше лінійне відображення має такий самий вигляд. Дійсно: .

*Лема доведена.*

**Теорема 3.** *(Приріст диференційованої функції)*

Нехай ,  – гранична точка множини . Якщо існує таке лінійне відображення , , що  виконується рівність:

, **(9)**

то функція  диференційована в точці  і .

*Доведення.* З рівності **(9)** маємо .

Якщо функція  диференційована в точці , граничній для множини , то лінійна функція , яка задовольняє умову **(9),** називається ***диференціалом функції  у точці *** і позначається символом . Для будь-якого  вона набуває значення

. **(10)**

Таким чином, приріст функції , диференційованої в точці , граничній для , складається з суми двох доданків, перший з них значення диференціала  при , а другий є функцією вигляду: , де  – неперервна в точці  функція, що в точці  дорівнює нулеві.

Розглянемо функцію , . Тоді :

. **(11)**

Тобто диференціали функції  в будь-якій точці рівні між собою, і їх позначають через . Цей диференціал, що не залежить від , називають диференціалом незалежної змінної. З цього можна одержати:

 

. **(12)**

**Приклад 6.** , **.**

, .

Нехай визначені функції , , такі, що , і , є граничною для цієї множини, і композиція  диференційована в точці . Тоді її похідна записується у вигляді: , а диференціал набуває вигляду:

,

де , . З останнього співвідношення, а саме  – форма диференціала така сама, як і для випадку незалежної змінної , ця властивість називається ***інваріантність першого диференціалу***.

**Приклад 7.** , , , .

. .

.

**Приклад 8.** .

Беручи до уваги, що з формули **(12)** похідну функції  можна розглядати як частку диференціалів функції та незалежної змінної: , а саму похідну позначити як .

Для наближеного обчислення значень диференційованої функції з деякого - околу точки  при малих  користуються наближеною формулою:

, **(13)**

тобто ми відкидаємо нескінченно малу, а залишаємо лінійну частину доданку. З формули **(7)** одержуємо формулу для наближених обчислень ():

. **(14)**

**Приклад 9.** Знайти наближено .

.

Нехай функція  задана параметрично, тобто , , . Припустимо, що  , ,  і виконані всі умови теореми про диференціювання функції  як оберненої. Тоді, якщо , , і для  одержимо правило диференціювання параметрично заданої функції:

 **(15)**

**Приклад 10.** ,   .

**Приклад 11.** Неявно задана функція , визначається рівнянням: , якщо припустити, що , то    .