ЛЕКЦІЯ №12

***3. Похідні та диференціали вищих порядків***

Нехай область визначення функції  не має ізольованих точок. Назвемо її ***1-диференційованою***, якщо  вона має першу похідну . Функція  називається ***першою похідною функції *** і позначається  (або як раніш ), саму функцію тоді можна позначити як .

Нехай . Якщо функція  диференційована, то її похідна  називається ***ю похідною функції* ** і позначається . При цьому функція  називається ***(n+1)–диференційованою***.

**Приклад 1.** Знайти –похідні функцій: , , , , .

***1) ; 2) ; 3) ;***

***4) ; 5) .***

Якщо функція має -ту похідну в кожній точці , то кажуть, що вона ***n-диференційована на множині ***. Якщо при цьому , то пишуть, що  (*n* разів неперервно-диференційована на множині ) і кажуть, що функція  класу  (на множині ). Якщо  функція має похідну  в точці , то вона називається ***нескінченно диференційованою***, якщо   , то функція називається ***нескінченно диференційованою на множині *** і позначається , і про неї кажуть, що вона класу .

**Теорема 1.** *(Лінійність n-ї похідної)*

Якщо функції  мають -ту похідну в точці , то і функція  також - диференційована в точці  і має місце рівність

.

*Доведення.* Очевидно доводиться за індукцією.

**Теорема 2.** *(Лейбніца)*

Якщо функції  мають -ту похідну в точці , то і функція  теж -диференційована в цій точці і має місце ***формула Лейбніца***:

.

*Доведення.* Доведемо методом математичної індукції. Для  все очевидно. Нехай формула має місце для деякого .

Доведемо її для :

.

*Теорему доведено.*

**Приклад 2.** Знайти .

 .

Нехай функція , -диференційована в точці , граничній для множини . Тоді в цій точці існують та неперервні похідні  до го порядку. ***Другим диференціалом функції  в точці ***, що відповідає значенню , називається диференціал функції  і позначається :

. **(1)**

***Диференціалом -го порядку*** (або ***-диференціалом***) ***функції  в точці ***, що відповідає значенню , визначається індукцією, як диференціал функції  в цій точці і позначається :

, , **(2)**

тут враховуємо, як і раніше, що :

, . **(3)**

Тепер зрозуміло, чому для ї похідної вживають позначення: .

**Властивості.** *(Диференціалів вищих порядків)*

***1)*** ; ***2)*** ; ***3)*** , .

Нехай функції дійсного аргументу  та  задовольняють умові: ,  - гранична для цієї множини, і композиція  є двічі диференційованою в цій точці. Тоді, при фіксованому : інваріантність першого диференціалу, але тепер  є функцією від , тому праву частину треба вважати добутком двох функцій, залежних від :  і , де  не залежить від .

, де .

Тобто інваріантність першого диференціалу не зберігається. Лише для випадку, коли  (лінійна), інваріантність диференціалів вищих порядків зберігається, тому що , при .

**Приклад 3.** Знайти усі диференціали функції , , вважаючи, що  – незалежний аргумент.

; ; ; ; .

**Приклад 4.** Знайти  функції , вважаючи  – функціями.

;

.

**Приклад 5.** Знайти три диференціали функції , де  – функція.

; ;

.

В припущенні існування відповідної похідної для параметрично заданої функції, легко одержати:

    ,

повністю аналогічно знаходяться похідні вищих порядків.

Аналогічно, для оберненої функції:

; .

**Приклад 6.** Так само для неявної функції:

   ;

.

**Приклад 7.** . , .

**Приклад 8.**     .

***4. Теореми про середнє***

Функція  має в точці  ***локальний максимум*** (***мінімум***), якщо :  . Якщо при цьому  виконується нерівність  , то ***максимум*** (***мінімум***) називається ***строгим***, інакше – ***нестрогим***. Локальні максимуми та мінімуми називаються ***екстремумами***.

**Теорема 1.** *(Ферма)*

Нехай  і  - внутрішня точка множини . Якщо функція  набуває в точці  найбільшого або найменшого значення і диференційована в ній, то .

*Доведення.* Нехай  набуває найбільшого значення в точці  і   . З означення диференційованої функції в точці  можемо записати рівність: . При  , при     і   

*Теорему доведено.*

**Теорема 2.** *(Ролля)*

Нехай , диференційована в кожній точці . Якщо , то : .

*Доведення.* Якщо , то твердження очевидне. Якщо , то, за теоремою Вейєрштрасса, вона набуває найбільшого та найменшого значень на , які не співпадають. Одне з цих значень досягається в деякій середній точці , тоді, за теоремою Ферма, .

*Теорему доведено.*

**Наслідок.** *(Узагальнення теореми Ролля)*

Нехай ,  – диференційована в кожній точці . Якщо , то : .

**Приклад 1.** Якщо  має похідну в кожній точці , , то  рівняння  має принаймні один розв’язок на .

Розглянемо функцію . Тоді  і вона задовольняє теорему Ролля  :  

,

з того, що   : .

**Теорема 3.** *(Дарбу)*

Якщо  диференційована в кожній точці : , то : .

*Доведення.* За теоремою Вейєрштрасса  на  набуває найбільшого та найменшого значень. Якщо принаймні одне з них досягається в точці , то, за теоремою Ферма, . Покажемо, що інше не можливо, тобто екстремуми не можуть досягатися на краях. Якщо припустити, що,   ,  і умова  не виконується.

Аналогічно, коли , .

*Теорема доведена.*

**Наслідок 1.** *(Про проміжні значення похідної)*

Якщо  диференційована на , то її похідна  набуває усіх проміжних значень між  і .

*Доведення.* Нехай  довільне дійсне число між  і . Розглянемо функцію : , тоді   :     .

*Наслідок доведено.*

**Наслідок 2.** *(Про збереження знаку похідною)*

Якщо  диференційована на  і  , то  зберігає цілком певний знак на .

*Доведення.* Якщо :   :  - суперечність.

*Наслідок доведено.*

**Теорема 4.** *(Лагранжа)*

Нехай функція  неперервна на , диференційована в кожній точці . Тоді :

 **(1)**

*Доведення.* Нехай , тоді розглянемо функцію , . ;

,

звідси за теоремою Ролля :  .

*Теорема доведена.*

Запишемо цю формулу трохи інакше: зрозуміло, що  ; тому можна покласти   , . Тоді, якщо , і на цьому проміжку  задовольняє умову теореми Лагранжа  останню формулу можна записати у вигляді:

, , **(2)**

яка називається ***формулою скінчених приростів Лагранжа***.

**Приклад 2.** Довести нерівність .

.

Формулу **(1)** можна узагальнити таким чином:

.

**Теорема 5.** *(Коші)*

Нехай функції  неперервні на , диференційовані на . Тоді :

 **(3)**

*Доведення.* Розглянемо функцію , де

.

Тоді  – диференційована на  і   :   **(3)**.

*Теорему доведено.*

**Наслідок.** *(Переформулювання теореми Коші)*

Якщо в умовах теореми Коші виконується одна з умов:

***1)***  ;

***2)***  ,

то формулу **(6)** можна записати у вигляді:

. **(4)**