Лекція 13

***Правила Лопіталя***

(*Гільом Франсуа де Лопіталь-французький математик (1601-1704))*

Відношення двох функцій  представляє собою при  невизначеність

, якщо .

**Теорема 1.** *(Перше правило Лопіталя)*

Нехай функції  задовольняють такі умови:

***1)*** ;

***2)***   та ;

***3)***  ;

***4)*** , то .

*Доведення.* Розглянемо розширення функцій на півінтервал , доповнивши їх нулями в точці . Виберемо довільну послідовність значень аргументу : . Тоді , очевидно  і будуть неперервні на всьому сегменті  і диференційовані у всіх внутрішніх точках цього сегмента. Таким чином , для і  на цьому сегменті будуть виконуватись всі умови теореми Коші для скінчених приростів і  . Нехай ,тоді , :

,

І за означенням Гейне одержимо, що .

*Теорему доведено.*

**Приклад 1.** .

Маємо невизначеність , виконуються усі вимоги теореми 1, а тому розглянемо відношення похідних:   наша границя теж дорівнює .

Зауважимо, що в зворотній бік теорема місця не має.

**Приклад 2.** ; , 

Бачимо, що  ; ,   .

**Наслідок 1.** *(Перше правило Лопіталя для -х похідних)*

Якщо для функцій  виконуються такі умови:

***1)***   ;

***2)***  ;

***3)***  , ;

***4)***   .

*Доведення.* Доведення полягає в використанні правила Лопіталя  разів по черзі для пар функцій (,), (,),…,(, ).

**Наслідок 2.** *(Перше правило Лопіталя на нескінченності)*

Якщо , , і для цих функцій виконуються умови:

***1)*** ;

***2)*** ;

***3)***  ,  ;

***4)*** , тоді .

**Приклад 3.** .

   , зрозуміло, що , а тому далі достатньо лише знайти границю: , знайдемо границю відношення похідних:   .

**Теорема 2.** *(Друге правило Лопіталя)*

Нехай  задовольняють умовам:

***1)*** ;

***2)***  ;

***3)***  ;

***4)***   .

**Приклад 4.**  .

Маємо невизначеність , застосуємо друге правило Лопіталя:

  .

**Наслідок 1.** *(Друге правило Лопіталя для -х похідних)*

Якщо функції , і задовольняють умови:

***1)***   ;

***2)*** , ;

***3)***   ;

***4)***   .

**Наслідок 2.** *(Друге правило Лопіталя на нескінченності)*

Теорема залишається чинною, якщо .

**Приклад 5.** Знайти , .

Використаємо правило Лопіталя  разів, кожен раз маємо невизначеність : ; ; … , ;  .

***Формула Тейлора***

*(Брук Тейлор - англійський математик (1685-1731)*

Формула Тейлора є однією з основних формул математичного аналізу і має багато застосувань як в аналізі, так і в суміжних дисциплінах.

**Теорема 1.** *(Локальна формула Тейлора)*

Нехай ,  раз неперервно-диференційована в цьому околі і має скінчену похідну -го порядку в точці . Нехай -деяке значення аргумента із цього околу. Тоді має місце формула:

 **(1)**

=   , де =-многочлен Тейлора степеня n, -відповідна похибка, так званий залишковий член.

*Доведення.* Покажемо, що  є нескінченно малою порядка вище ніж при

 . Розглянемо , , і знайдемо за правилом Лопіталя . Використовуючи наслідок з правила Лопіталя, ми бачимо, що  . Розглянемо відношення:

.

З існування  випливає, що   .

*Теорему доведено.*

Доданок  називається ***залишковим членом в формі Пеано***, а формула **(1)** називається ***формулою Тейлора із залишковим членом в формі Пеано***.

З локальності цієї формули її називають асимптотичним представленням функції  в околі точки . Вона дуже ефективна при знаходженні границь. Якщо , то формулу **(1)** називають ***формулою Маклорена***.

Для дослідження функції не в околі точки, а на цілому проміжку нам будуть потрібні сильніші обмеження на .

**Теорема 2.** *(Формула Тейлора)*

Нехай  і має  похідну в кожній точці , можливо за виключенням точки . Тоді   між точками  і  така, що

, **(2)**

де

, , , **(3)**

доданок , що визначається формулою **(3)** називається ***залишковим членом в формі Шлемільха-Роша,*** а сама формула **(2)** називається ***формулою Тейлора із залишковим членом в формі Шлемільха-Роша***.

Вибираючи різні значення параметру , одержимо деякі відомі важливі часткові випадки залишкових членів.

При :

, **(4)**

де ,  – ***залишковий член у формі Лагранжа.***

При :



, **(5)**

***залишковий член у формі Коші***.

Формули **(2)**,**(4)**,**(5**) при  набувають вигляду (залишкові члени для формул Маклорена):

; **(6)**

, ; **(7)**

, . **(8)**

Якщо позначити , то формулу **(1)** можна записати за допомогою диференціала:

. **(9)**

Тепер випишемо так звані п’ять основних розкладів Маклорена, для кожного з яких візьмемо залишковий член у формі Лагранжа (в усіх випадках ):

, **(10.1)**

, **(10.2)**

, **(10.3)**

, **(10.4)**

. **(10.5)**

З допомогою цих формул можна оцінити похибку наближення відповідних функцій многочленами. Набагато простіше виглядають залишкові члени в формі Пеано. В такому вигляді вони використовуються для знаходження границь. Але спочатку покажемо, як одержувати відповідні формули Маклорена для інших функцій, що не попадають в п’ять вищерозглянутих. Крім простого знаходження похідних є більш прості можливості.

**Приклад 1.**  розкласти за формулою Тейлора до :







.

**Приклад 2.** Знайти границю: .



**Приклад 3.** Оцінити похибку формули  при .

;  ; ; ; 

Похідна є в запису , розглянемо його в формі Лагранжа та оцінимо зверху:

