Лекція 14

***Дослідження функцій за допомогою похідних***

Функція  ***зростає*** (***спадає***) ***в точці* **, якщо        .

**Теорема 1.** *(Достатня умова зростання функції в точці)*

Для того, щоб функція , яка диференційована в точці  зростала (спадала) в цій точці, достатньо, щоб  .

*Доведення.* Якщо , то :     і  .

*Теорема доведена.*

Зауважимо, що ця умова не є необхідною.

**Приклад 1.** ,   – зростає в точці , але .

**Наслідок.** *(Умова зростання функції в точці)*

Якщо функція  має в точці  відмінну від нуля неперервну похідну, то вона строго монотонна в деякому околі цієї точки.

**Приклад 2.** ,   – зростає в цій точці.

 – приймає в будь-якому околі нуля як додатні, так і від′ємні значення.

**Теорема 2.** *(Доведення нерівностей)*

Якщо функції  задовольняють такі умови 

***1)***  , ;

***2)*** , ;

***3)***  ,

то  .

*Доведення теореми.* Доведемо індукцією по . Для  розглянемо функцію: ,       – зростає при , але      .

Аналогічно .

*Теорема доведена.*

**Наслідок 1.** *(Доведення нерівностей для правої точки)*

Якщо для функцій **R** виконуються умови :

***1)***  , ;

***2)*** , ;

***3)***  ,

то  при парному  , при непарному  .

*Доведення.* Розглянемо випадок . Для функції ,  ми маємо  і     зростає при      .

Аналогічно .

*Наслідок доведено.*

**Наслідок 2.** *(Доведення нерівностей на розширеній дійсній осі)*

Теорема та наслідок залишаються чинними, якщо . Для  має місце наслідок 1 (тому що  має місце ), а для  має місце теорема (бо ).

**Приклад 3.** Довести нерівність:  .

; ;  – умови виконуються;

; ;  – знову виконуються;

; ;  – ще раз виконуються;

    .

**Приклад 4.** Довести нерівність: , .

; ;

, ;

  .

Для функції  точки, в яких  називаються ***стаціонарними***.

Функція  ***змінює знак*** при переході через точку , якщо : на проміжках  та  функція має значення різних знаків.

**Теорема 3.** *(Перша достатня умова екстремуму)*

Нехай  диференційована на , можливо за виключенням самої точки . Якщо при переході через   змінює знак, то в цій точці  має локальний екстремум. Якщо знак змінюється з “**+**” на “**–**”, то  – точка максимуму, інакше – точка мінімуму.

*Доведення теореми.* З формули Лагранжа можемо записати:

.

Якщо функція  змінює знак з ″плюса″ на ″мінус″, то права частина останньої формули від′ємна , тобто    – локальний максимум, аналогічно для мінімуму.

*Теорема доведена.*

**Приклад 5.** ;   .  змінює знак з “**+**” на “**–**”   – точка максимуму.

**Приклад 6.** ;  ( в точці  функція не диференційована).

При переході через   змінює знак з «–» на «+», тому  – точка мінімуму.

**Теорема 4.** *(Друга достатня умова екстремуму)*

Якщо функція  задовольняє в точці  умовам: , то  має локальний екстремум в точці . При  - - точка максимуму, інакше – точка мінімуму.

*Доведення теореми.* Якщо, наприклад, , то  існує на деякому околі  і зростає в цій точці  :   та     змінює знак в точці  з «–» на «+», тобто за теоремою 2 це – мінімум, аналогічно, якщо  – це є максимум.

*Доведення завершене.*

**Приклад 7.** .   , ; ;  – мінімум;  - максимум.

**Теорема 5.** *(Третя достатня умова екстремуму)*

Нехай функція  задовольняє умові:

***1)***  , ;

***2)*** .

Тоді при парному  в точці  є екстремум (максимум при ; мінімум при ), а при непарному  екстремуму не має.

*Доведення теореми.* Розглянемо локальну формулу Тейлора в околі точки : . Тобто знак  співпадає із знаком першого доданку. Далі все стає очевидним.

*Теорема доведена.*

**Приклад 8.** , .

Тоді ,   при парному  це точка мінімуму, а при непарному – екстремуму нема.

Зауважимо, всі ці умови є лише достатніми.

Функція  має в точці  – ***крайовий максимум*** (***мінімум***), якщо :  . Аналогічно крайові екстремуми визначається в точці .

**Теорема 6.** *(Достатня умова крайового екстремуму)*

Якщо функція  має похідну , то при умові  , то  досягає в точці  крайового мінімуму (максимуму). Якщо існує похідна  , то  досягає в точці  максимуму (мінімуму).

*Доведення.* Нехай   . : . Так як   . Аналогічно розглядаємо решту випадків.

*Теорема доведена*.

***Абсолютним***, або ***глобальним максимумом*** (***мінімумом***) функції  називається найбільше (найменше) значення  при , якщо воно існує.

Зауважимо, що за теоремою Вейєрштрасса для  існують абсолютний максимум та мінімум. Це можуть бути або точки локальних максимумів, або значення на краях. Дослідження проводиться за такою схемою: знаходимо множину всіх стаціонарних точок  і критичних точок ( – не існує), додаємо до цих множин точки  і , а тоді серед цих значень і шукаємо глобальні екстремуми.

**Приклад 10.** Знайти глобальні екстремуми функції: .

, а тепер залишається порівняти значення в усіх цікавих точках, в яких може досягатися глобальний екстремум:   .

***Опуклі функції, класичні нерівності***

***Дослідження опуклості функції***

Графік функції  має на  опуклість, направлену вниз (вгору), якщо він розташований не нижче (не вище) будь-якої дотичної до графіка на .

a

b

*y*

*x*

*опуклість вниз*

*y*

*x*

a

b

*опуклість вгору*

Розглянемо множину  і будь-які точки  та 

**Означення.**

Відрізком  називається множина 



Множина  називається опуклою, якщо  точок  відрізок 

Функція  визначена і неперервна на  називається *опуклою* (опуклою вниз), якщо   виконується нерівність ,  , .

Функція  визначена і неперервна на  називається *угнутою* (опуклою вгору), якщо . Вираз , (),  міститься між  і .

Поняття опуклої (угнутої) функції введено Ієнсеном.

Якщо , то 

***Умова опуклості функції***

**Теорема***(Критерій опуклості функції).*

Для того, щоб функція , двічі диференційована на  була опуклою вниз (вгору) на цьому інтервалі , щоб друга похідна  була невід”ємною (недодатньою) на , тобто: , ;

, .

Відомо, що умова  () є достатньою умовою строгої опуклості  і не є необхідною, наприклад,

 строго опукла на , але  – рівна 0 при .

**Доведення:**

Покажемо, що графік функції лежить не нижче дотичної, що проходить через точку .

Нехай ,  . Рівняння дотичної до  в точці  має вигляд , .













*y*

*x*

Розвинемо  в околі точки  за формулою Тейлора для .

, 

, .

***Дослідження точок перегину функції***

**Означення.**

Нехай функція  визначена в околі точки  за виключенням можливо самої точки . Якщо існють інтервали  і ,  на одному з яких вона строго опукла вниз, а на другому строго опукла вгору, то кажуть, що при переході через точку  функція змінює напрям опуклості .

**Означення.**

Нехай , неперервна в точці , існує похідна  скінченна або нескінченна. Тоді якщо  при переході через точку  змінює напрям опуклості, то точка  називається *точкою перегину функції* . Точка () – точка перегину графіка функції . Графік функції  переходить з одної сторони дотичної, проведеної в цій точці, на другу її сторону.

*Наприклад:*

 , точка  не є точкою перегину, бо функція не є неперервною в точці , хоча напрямок опуклості змінюється в цій точці;

*y*

*x*

*y*

*x*

, точка  не є точкою перегину бо функція не змінює напрямок опуклості;

*y*

*x*

, точка  – точка перегину графіка функції;

*y*

*x*

, , точка  – точка перегину графіка функції;

*y*

*x*





,  не є точкою перегину, оскільки в точці  не існує похідної  ні скінченної, ні нескінченної,  

**Теорема.** *Необхідна умова існування точки перегину*.

Для того, щоб  функція диференційована на  мала перегин в точці  необхідно щоб  (якщо існує ). Точки перегину потрібно шукати серед критичних точок першої похідної.

**Доведення:**

Нехай точка  – точка перегину. В околі точки відбувається зміна напрямку опуклості. Похідна  як функція змінює знак:  в ,  в , або навпаки. Отже функція змінює монотонність, а це означає, що в точці  існує екстремум функції і .

***Достатні умови існування точки перегину***

**Перша умова.** Нехай ,  має в околі  різні знаки другої похідної, тоді графік функції  має в точці  перегин.

Дійсно, якщо  змінює знак ліворуч і праворуч т , то це означає зміну знаку опуклості функції і за означенням маємо точку перегину.

**Друга умова.** Нехай  має в точці  похідні порядка  і , .

Якщо , то точка графіка функції є точкою перегину, якщо , то точка  – не є точкою перегину.

**Доведення:**

Має місце формула Тейлора для функції : , де  при .

При переході через точку  знак  співпадає з  і при  екстремуму не існує, а при  знак  змінюється при переході через точку  і , отже точка  є точкою перегину.

Розглянемо частинний випадок: , , покажемо, що точка  – точка перегину .

Нехай . Це означає, що 

Із властивості границь випливає, що ,  виконується , а  виконується , отже відбувається зміна напямку опуклості і  точка є точкою перегину . Аналогічно можна довести при .

***Нерівність Ієнсена***

**Теорема.**

Якщо функція , , існує друга похідна    , то для довільної точки  , () і будь-яких ,  виконується  (знак “ = ”, коли )

*Наслідки:*

1. Теорема діє коли 
2. Якщо  (або  ), то знак нерівності змінюється на “”.

*Приклад:*

Довести нерівність

, 

Розглянемо . Оскільки , то функція опукла вниз на  і  і  , ,  справедливо . , покадемо, ,  і маємо  .

***Асимптоти графіка функції***

Нехай  задана параметричними рівняннями , , ,  – скінченний або нескінченний відрізок числової прямої

.

Пряма  на *Oxy* називається асимптотою графіка  при  (), якщо віддаль  від точки () графіка функції до прямої  0 і  при .

Можливі три випадки:

1. ,  і ,  – вертикальна асимтота;
2. , ,  – горизонтальна асимтота;
3. , ,  – похила асимтота

; .

Якщо функція задана явно, , .

*Приклад:*

Знайти асимптоти графіка функції, заданої параметрично.

, .

* 1. , ;

, , ;

* 1. , ,  – вертикальна асимптота;
  2. ,   – горизонтальна асимптота.

Дослідження функції і побудову графіка доцільно проводити за схемою:

1. Визначити, точки перетину графіка з координатними осями, парність непарність, періодичність,дослідити на неперервність;
2. Дослідити існування асимптот;
3. Знайти інтервали монотонності і дослідити на екстремум;
4. знайти інтервали зберігання опуклості графіка і дослідити точки перегину.

*Про опуклість додатково.*

Нехай ,  – дві точки на декартовій площині, ***відрізком *** називається множина точок

.

Множина  називається ***опуклою***, якщо .

Нехай  – графік функції , ***надграфіком*** (***підграфіком***) цієї функції називається множина

 .

При цьому будемо казати, що точка  ***лежить вище*** (***нижче***) графіка, якщо вона належить надграфіку (підграфіку) цієї функції.

Функція  називається ***опуклою*** (***угнутою***), якщо її надграфік (підграфік) є опуклою множиною.

Легко з означення опуклої множини зрозуміти, що мова про опуклу (угнуту) функцію має сенс, якщо вона визначена на зв’язній множині, тобто в якості області визначення в цьому розділі опуклих функцій ми будемо розглядати лише сегменти, інтервали та півінтервали, промені, або усю дійсну вісь.

Нагадаємо, що число  визначає ***кутовий коефіцієнтом прямої***, що проходить через точки  та .

**Теорема 1.** *(Існування односторонніх похідних опуклої функції)*

Нехай функція  – опукла. Тоді в кожній точці  існують односторонні похідні  та .

**Наслідок.** *(Неперервність опуклої функції)*

Кожна опукла функція  неперервна.

*Доведення*. З того, що існує ліва похідна в кожній точці слідує, що функція неперервна зліва, аналогічно – вона неперервна справа. А це і означає неперервність функції в кожній точці.

*Наслідок доведено.*

**Наслідок 3.** *(Критерій опуклості двічі диференційованої функції)*

Якщо функція  має другу похідну , то для опуклості  необхідно і достатньо, щоб  .

**Теорема 3.** *(Ієнсена)*

Нехай функція  опукла. Тоді , , ,  виконується нерівність Ієнсена:

. **(1)**

*Доведення теореми.* Для  маємо: покладемо   . Розглянемо точки , . Тоді точка , де

, 

належить відрізку , тому з означення опуклої функції , тобто  – доведено для .

Нехай **(1)** має місце для , доведемо з цього його істинність для .

Позначимо . Очевидно, що . Використаємо нерівність **(1)** для ( вона вже доведена).

.

*Теорему доведено.*

**Наслідок.** *(Нерівність між середніми)*

Якщо , , то .

*Доведення.* Розглянемо на  функцію . ,  – опукла, тому, поклавши в нерівності **(1)** , матимемо:

, або   .

*Наслідок доведено.*

**Теорема 4.** *(Еквівалентний критерій опуклості функції)*

Функція  опукла тоді і тільки тоді, коли   виконується нерівність:

. **(2)**

*Необхідність* випливає з нерівності Ієнсена при , , .

*Достатність*. Нехай . Тоді

 .

Покладемо , тоді ,  

     – опукла.

*Теорему доведено.*

З останньої теореми можна дати еквівалентне означення опуклій функції.

Функція  називається ***опуклою*** (***строго опуклою***), якщо ,  виконується нерівність

.

Функція  називається ***угнутою*** (***строго угнутою***), якщо функція  опукла (строго опукла).

**Теорема 5.** *(Лінійність опуклості)*

Нехай функції ,  опуклі (угнуті), а  – довільні додатні числа. Тоді функція  опукла (угнута).

*Доведення* очевидно проводиться методом математичної індукції.

**Теорема 7.** *(Нерівність Гельдера)*

Нехай , . Тоді ,  виконується нерівність:

. **(4)**

*Доведення теореми.* Розглянемо нерівність Ієнсена **(1)** для опуклої функції  , покладаючи , ,  маємо:

 

.

*Теорему доведено.*

**Наслідок.** *(Нерівність Мінковського)*

Нехай , , тоді  виконується нерівність:

. **(5)**

*Доведення*. Застосуємо нерівність Гельдера до кожної частини одержаної нерівності:





   **(5)**

*Наслідок доведено.*

Якщо функція  диференційована в точці  і при переході через точку  змінює характер опуклості, то  називається ***точкою перегину графіка функції***.

**Теорема 8.** *(Необхідна умова перегину)*

Нехай функція  диференційована на , і в точці  існує . Якщо  – точка перегину графіка , то .

*Доведення теореми.* З критерію опуклості диференційованої функції : на  та   – монотонна з різним характером монотонності   має в цій точці екстремум, а тому .

*Теорема доведена.*

**Теорема 9.** *(Достатня умова перегину)*

Нехай функція  має  похідних в точці  і , , . Якщо  – непарне, то  – точка перегину , якщо  – парне, то  не є точкою перегину.

*Доведення теореми.* ,  при   знак виразу співпадає зі знаком , а далі зрозуміло, він змінюється, чи ні.

*Теорему доведено.*

І взагалі, дослідження  на точки перегину рівносильне дослідженню  на екстремуми, тому до можливих точок перегину слід віднести і критичні точки .

**Приклад 1.** **; ; ,  - перегин.

**Приклад 2.** ;  в точці  не існує, але там перегин, оскільки

.

***Побудова графіків функцій***

Нехай функція  задана параметрично за допомогою рівнянь , , , де  – проміжок (скінчений чи нескінчений) числової прямої. Якщо деяка пряма  задається рівнянням  на декартовій площині, тоді як відомо з аналітичної геометрії – відстань від точки   до прямої  обчислюється за формулою:

. **(1)**

Пряма , що задається рівнянням , називається ***асимптотою графіка***  при  (або , , ), якщо виконується дві умови: ***1)*** ; ***2)***  при .

Розглянемо можливі випадки.

***1)***        ,  і рівняння асимптоти має вигляд  – така пряма називається ***вертикальною асимптотою графіка функції***.

***2)***        ,  і рівняння асимптоти має вигляд  – така пряма називається ***горизонтальною асимптотою графіка функції***.

***3)***          і рівняння асимптоти набуває вигляду  – така пряма називається ***похилою асимптотою графіка функції***.

У випадку явного надання функції ці три випадки переписуються таким чином:

Нехай функція , де  – проміжок числової функції.

***1)***  – вертикальна асимптота, якщо  (або );

***2)***  – горизонтальна асимптота, якщо  ();

***3)***  – похила асимптота, якщо при  () .

Схема побудови графіка функції:

1. перевірка на парність, періодичність, , , можливі точки розриву;
2. асимптоти графіка;
3. проміжки монотонності, екстремуми;
4. проміжки зберігання опуклості, точки перегину.

**Приклад 1.** , .

Спочатку побудуємо .

*Вертикальна асимптота*: .

*Горизонтальних асимптот* немає.

,   *похила асимптота* .

|  |  |
| --- | --- |
| ; . | *Зміна знаків похідної*: |
| **0**  **1**  **2**  **+**  **+**  **--**  **--**  **max**  **min** |

Графік функції зображено на рисунку.

|  |
| --- |
| **T**  **X**  **O**  **1**  **2**  **4**  **1**  **-1** |

Далі будуємо .

*Вертикальні асимптоти*: .

*Горизонтальна асимптота* .

*Похилих асимптот* немає.

  функція спадає на всій осі.

Графік функції зображено на рисунку.

|  |
| --- |
| **T**  **Y**  **O**  **1**  **1**  **-1** |

Тепер переходимо до побудови загального параметричного графіку.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Починаємо з досліджень на асимптоти, вибираємо усі можливі значення, де принаймні одна з двох змінних  чи  прямує до нескінченності: |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Висновок: *горизонтальна асимптота*: ; *вертикальна асимптота*: ; при  можлива похила асимптота, з’ясуємо, чи є вона там насправді.

;  (по Лопіталю) 

  *похила асимптота*: .

|  |  |
| --- | --- |
|  | *Зміна знаків похідної*: |
| **-1**  **0**  **2**  **–**  **–**  **–**  **+** |

Екстремумів немає.

 ,

для подальшого з’ясуємо, які корені має множник . Її похідна . Тобто функція  - зростає, а тому має рівно один дійсний корінь. З того, що , а  ми маємо, що корінь лежить на проміжку , позначимо його  та будемо наближено вважати рівним . Таким чином для другої похідної остаточно маємо такий вигляд: , де функція  - додатна.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Зміна знаків другої похідної*: | | | | | | | | | | Після усього цього ми можемо скласти остаточну табличку для побудови загального графіка. | | | | |
| **-1**  **2**  **–**  **–**  **–**  **+**  **1**  **0**    **+**  **+** | | | | | | | | | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
| Y  X  -0,5  -0,75  4  0,7 | | | | | | | | | | | | | | |