1. Функція(



не є ЧРФ. Довести.

Припустимо, що існує алгоритм, який обчислює значення цієї функції. Подаємо на вхід цього алгоритму пару (x,y). Якщо f(x,y) = 1, то K(x,y) – визначена в точці (x,y). Якщо f(x,y) = 0, то K(x,y) – не визначена в точці (x,y). Тобто, область визначення функції K (x,y) є рекурсивною. А це не так.

1. Чи є функція



ЧРФ?.

Розглянемо функцію g(x) = K(x,x). Ця функція – ЧРФ. Тому її область визначення є РПМ. Але область визначення цієї функції це множина

A = {x, K(x,x) визначена}.

Якщо f(x) – ЧРФ, то її область визначення є РПМ. Але область визначення цієї функції це множина

A′ = {x, f(x) = 1} = {x, K(x,x) не визначена}.

За теоремою Поста А – рекурсивна. Але А співпадає з множиною клінівських номерів {n0, n1, …. } функцій таких, що K(n0,n0), K(n1,n1), … – визначені і тому за теоремою Райса не може бути рекурсивною.

1. Множина всіх РПМ є зліченою. Довести.

Кожній РПМ А ставимо у відповідність число nA таке, що А є областю значень ПРФ D(nА,x). Таке відображення ін’єктивне, тобто A≠B ⇒ nA ≠ nB .

Існує, також сюр’єкція N→{РПM}. А саме, n ставимо у відповідність множину значень функції D(n,x). Отже, існує бієкція M↔N.

1. Довести, що функція, універсальна для одномісних ПРФ, приймає кожне значення нескінченну кількість разів.

Розглянемо функції:

f1(x) =  = D(n1,x)

f2(x) = = D(n2,x)

f3(x) = = D(n3,x)

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Тоді, універсальна функція приймає значення b нескінченну кількість разів, бо ni ≠ nj .

1. Довести, що область визначення функції w(x) = U(x,x) не може бути рекурсивною.

Розглянемо функцію



Області визначення функцій w(x) та V(x) співпадають. Якщо область визначення w(x) – рекурсивна, то V(x) має рекурсивне довизначення (Т.10.4).

А це не так.

1. Множина ЧРФ – зліченна.

Якщо відображення кожній ЧРФ f(x) ставить у відповідність номер n такий, що f(x) = T(n,x), то це відображення ін’єктивне (Якщо f(x) ≠ g(x) = T(m,x), то n ≠ m). Крім того, множина М номерів нескінченна, бо

f1(x) = x = T(n1,x)

f2(x) = x+1 = T(n2,x)

. . . . . . . . . . . . . . . .

Отже, маємо бієкції:

Множина ЧРФ ↔ M ↔ N.