1. Множина диз’юнктів S = {¬P(x) ∨ Q(f(x))} не є суперечливою. Довести.

Підказка: побудувати H-інтерпретацію, для якої не існує фальшивого основного приклада.

Побудуємо Ербранівський універсум наступним чином:

E0 = {a}

E1 = {a, f(a)}

E2 = {a, f(a), f(f(a))}

…

E∞ = {a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), …}

Нехай візьмемо ось таку інтерпретацію:

P(a) = 0, P(f(a)) = 0, P(f(f(a))) = 0, ………

Q(a) = 1, Q(f(a)) = 1, Q(f(f(a))) = 1, ………

Видно, що для даної інтерпретації множини диз’юнктів S відсутній фальшивий основний приклад, бо для довільного х приймає значення 1, отже S – не є суперечливою.

1. Множина диз’юнктів S = {P(x), ¬P(а)} є суперечливою. Довести.

Підказка: врахувати, що число H-інтерпретацій скінченне.

Побудуємо всі можливі H-інтерпретації для S:

Оскільки константи та функціональні символи відсутні, тоді існує єдина H-інтерпретація Е0 = {a}.

Тоді для існують 2 такі інтерпретації:

I1 : P(a) = 1;

I2 : P(a) = 0;

Як ми бачимо, при I1 та I2 принаймні один з диз’юнктів стає фальшивим, отже множина S – суперечлива, згідно з твердженням.

1. Множина диз’юнктів S = {P(x), ¬P(f(x))} є суперечливою. Довести.

Ербранівський універсум для S:

Е∞ = {a, f(a), f(f(a)), ……}

Нехай I0 – довільна інтерпретація:

I0 : P(a) = 0, P(f(a)) = 0, P(f(f(a))) = 0, ……

В I0 основний приклад С0 = P(a) – фальшивий

Нехай I1 – інтерпретація, в якій C0 – істинний:

I1 : P(a) = 1, P(f(a)) = 1, P(f(f(a))) = 1, ……

В інтерпретації C0 є істинний, а C1 = ¬P(f(x)) – фальшивий.

Зрозуміло, що інтерпретації I2 , для якої С0 ∧ С1 – істинний, не існує, тоді, {C1, C2} є скінченною множиною основних прикладів диз’юнктів, а отже, згідно теоремі Ербрана, S – суперечлива.

1. Множина диз’юнктів S = {¬P(x) ∨ Q(f(x),x), ¬P(g(b)), ¬Q(y,z)} є суперечливою. Довести.

Підказка: алгоритм знаходження суперечливої множини основних прикладів диз’юнктів.

Побудуємо Ербранівський універсум:

Е∞ = {a, f(a), g(a), f(f(a)), g(f(a)), f(g(a)), g(g(a)) ….. }

Нехай I0 – довільна інтерпретація:

I0 : P(a) = 1, Q(f(a), a) = 0, P(g(a)) = 1, Q(f(g(a)), f(g(a))) = 0, ……

C0 = ¬P(x) ∨ Q(f(x),x )– фальшивий

Нехай I1 – інтерпретація, в якій C0 – істинний:

I1 : P(a) = 1, Q(f(a), a) = 1, P(g(a)) = 1, Q(f(g(a)), f(g(a))) = 1, …….

C1 = ¬P(g(b))– фальшивий

Нехай I2 – інтерпретація, в якій С0 ∧ С1 – істинний:

I1 : P(a) = 1, Q(f(a), a) = 1, P(g(a)) = 0, Q(f(g(a)), f(g(a))) = 0, …….

C2 = ¬Q(y,z)– фальшивий

Зрозуміло, що не існує такої I3, що С0 ∧ С1∧ С2  - істинний, отже {C0, C1, С2} є скінченною множиною основних прикладів диз’юнктів, а отже, згідно теоремі Ербрана, S – суперечлива.

1. Формула ∀x(F(x)→G(x)) → (∀xF(x) →∀xG(x)) є тавтологією. Довести.

Припустимо, що формула є тавтологією, назвемо її А, тоді ¬А – суперечлива, перевіримо це:

¬ (∀x(F(x)→G(x)) → (∀xF(x) →∀xG(x)))

∀x(F(x)→G(x)) ∧ ¬ (∀xF(x) →∀xG(x))

∀x(¬ F(x) ∨ G(x)) ∧ (∀xF(x) ∧ ∃x¬G(x))

∀x(¬ F(x) ∨ G(x)) ∧ ∀x ∃y (F(x) ∧ ¬G(y))

∀x **∃**y ( (¬ F(x) ∨ G(x)) ∧ F(x) ∧ ¬G(z) )

∀x ( (¬ F(x) ∨ G(x)) ∧ F(x) ∧ ¬G(f(x)) )

Отримали:

S = {¬ F(x) ∨ G(x), F(x), ¬G(f(x))}

Ербранівський універсум:

Е∞ = {a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), ….. }

H0 = {a}

Рівень 0:

{¬ F(a) ∨ G(a), F(a), ¬G(a)}

1. ¬ F(a) ∨ G(a)
2. F(a)
3. ¬G(a)
4. 1 + 2 = G(a)
5. 4 + 3 =

Таким чином ми отримали порожній диз’юнкт на множині основних прикладів диз’юнктів рівня 0. Таким чином ¬А – суперечлива, а отже А – тавтологія.