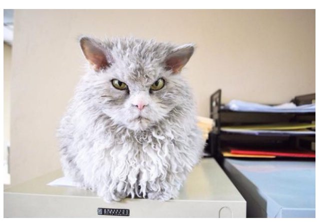
CHAPITRE 9

Variation d'une fonction

Extrait du programme



Référence :
Albert le chat vénère

Contenus

- Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et signe de sa fonction dérivée ;
  caractérisation des fonctions constantes.
- Nombre dérivé en un extremum, tangente à la courbe représentative.

Capacités attendues

- Étudier les variations d'une fonction. Déterminer les extremums.
- Résoudre un problème d'optimisation.
- Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité. Étudier la position relative de deux courbes représentatives.
- Étudier, en lien avec la dérivation, une fonction polynôme du second degré :
  variations, extremum, allure selon le signe du coefficient de x^2.

Démonstrations

Exemple d'algorithme

- Méthode de Newton, en se limitant à des cas favorables.

A la fin de ce chapitre

	Oui	Non	Qu'en pense mon professeur ?
• Je sais dériver une fonction	☐	☐	☐
• Je sais étudier le signe d'une fonction	☐	☐	☐
• Je sais étudier le sens de variation d'une fonction	☐	☐	☐
• Je sais construire une courbe représentative	☐	☐	☐

Vous retrouverez ce cours à l'adresse suivante :
`https://github.com/NaturelEtChaud/Math-premiere/tree/main/09%20Variation%20d'une%20fonction`

I. Sens de variation d'une fonction dérivable

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur I si et seulement si, $f' \geq 0$ sur I ;
- f est décroissante sur I si et seulement si, $f' \leq 0$ sur I ;
- f est constante sur I si et seulement si, $f' = 0$ sur I.

Exemple

Pour connaître le sens de variation d'une fonction, il nous suffit maintenant d'étudier le signe de la dérivée.
Étudions le sens de variation de la fonction $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. On calcule la fonction dérivée de $g(x)$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 - 6 \times 2x + 9 \times 1 + 0 \\ &= 3x^2 - 12x + 9 \end{aligned}$$

2. On étudie le signe de la dérivée.
   g' est une fonction trinôme du second degré avec $a = 3, b = -12, c = 9$
   $\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 108 = 36 = 6^2 > 0$.
   Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{12 - 6}{6} \qquad x_2 = \frac{12 + 6}{6}$$

$$x_1 = \frac{6}{6} \qquad x_2 = \frac{18}{6}$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 3$$

3. On en déduit le tableau de signe de g' puis le tableau de variation de g en fonction du signe de g'.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de $g(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	

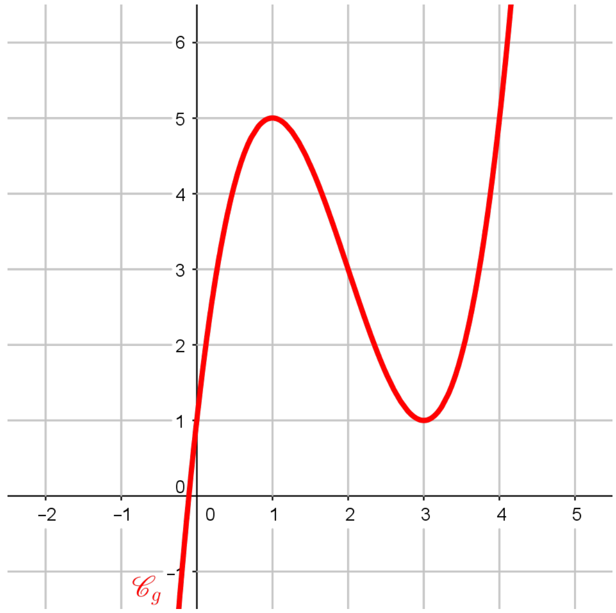


FIGURE 9.1 – Représentation graphique de la fonction $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Questions à Choix Multiple n° 1

Soit f une fonction dérivable sur $[-1; 5]$ qui admet le tableau suivant :

x	-1		0		5
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variation de $f(x)$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

1. f est strictement croissante sur :
   a) $[-1; 5]$ b) $[0; 5]$ c) $[-1; 0]$
2. Si $a < b$ appartiennent à $[0; 5]$ alors :
   a) $f(a) < f(b)$ b) $f(a) > f(b)$ c) $f(a)f(b) < 0$ d) $f(a)f(b) > 16$
3. L'équation $f(x) = 0$ admet de façon sûre :
   a) exactement une solution b) exactement deux solutions c) exactement trois solutions d) au moins trois solutions

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soient m et M des réels.

- M est le **maximum** de f sur I si et seulement si :
  $f(x) \leq M$ pour tout x de I, et il existe un réel α dans I tel que $f(\alpha) = M$.
- m est le **minimum** de f sur I si et seulement si :
  $f(x) \geq m$ pour tout x de I, et il existe un réel β dans I tel que $f(\beta) = m$.
- On appelle **extremum** de f sur I son maximum ou son minimum (s'il existe).
- Si m ou M est un extremum de f sur un intervalle ouvert D contenu dans I, on dit que M est un **extremum local** de f sur I.

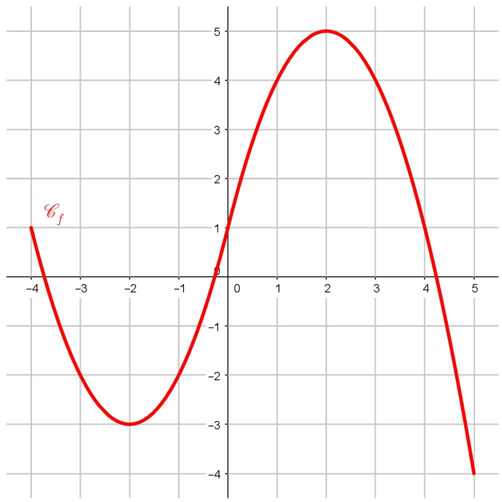


Figure 9.2 – La représentation graphique d'une fonction.

Exemple

La courbe ci-dessus est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $I = [-4; 5]$.

- Le maximum de la fonction f sur I est 5 ; il est atteint en $x = 2$.
- Le minimum de la fonction f sur I est -4 ; il est atteint en $x = 5$.
- Les extrema de f sur I sont -4 et 5.
- f admet un minimum local -3, car c'est le minimum de f sur $]-4; 2[$; il est atteint en $x = -2$.

Questions à Choix Multiple n° 2

Soit f une fonction dérivable sur $[-10;10]$ qui admet le tableau de variation suivant :

x	-10		-1		5		10
signe de $f'(x)$							
variation de $f(x)$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3	$\searrow$	-7

1. 3 est le maximum de f sur $[-10;10]$:
   a) Vrai b) Faux
2. -5 est le minimum de f sur $[-10;10]$:
   a) Vrai b) Faux
3. f', la dérivée de f est négative sur :
   a) $[-1;5]$ b) $[5;10]$ c) $[-10;-1] \cup [5;10]$
4. f', la dérivée de f est positive sur :
   a) $[-1;5]$ b) $[5;10]$ c) $[-10;-1] \cup [5;10]$
5. f', la dérivée de f est s'annule en :
   a) -10 b) -10 et un nombre entre -1 et 5 c) en -1 et en 5

Théorème
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
f admet un extremum en $a \in I$ si et seulement si, $f'(a)$ s'annule **en changeant de signe**.

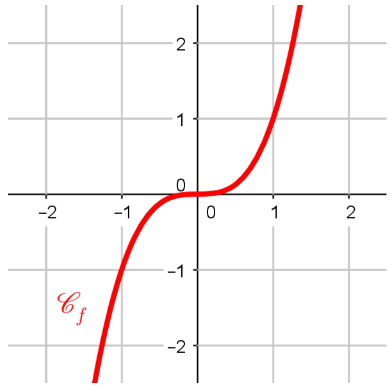


Figure 9.3 – La fonction cube.

Exemple (Contre exemple)
Soit $f(x) = x^3$ la fonction cube. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
variation de $f(x)$			$\nearrow$		

Bien que la dérivée de la fonction cube s'annule en 0, la fonction cube n'admet aucun extremum.

Questions à Choix Multiple n° 3
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = -x^3 + x^2 + x - 4$.

1. f admet un extremum local en $x = 1$:
   a) Vrai   b) Faux
2. $f\left(-\dfrac{1}{12}\right) > 0$:
   a) Vrai   b) Faux
3. Si $x \geq 0$, alors $f(x) \leq -3$:
   a) Vrai   b) Faux

II. Variation d'une fonction - Exercices

a) Exercices données au BAC de STMG

Exercice 1 (Polynésie, juin 2013)
Partie A. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\text{I} = [0{,}3\,;\,6]$ par

$$f(x) = 4x + \frac{9}{x}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan et f' sa fonction dérivée.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle I.
2. On admet que, pour tout réel x de l'intervalle I, on peut écrire

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(2x+3)}{x^2}.$$

   (a) Étudier le signe de f' sur l'intervalle I.
   (b) En déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle I.
3. (a) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0,3	0,5	1	2	3	4	4,5	5	6
$f(x)$									

   (b) Construire dans un repère orthogonal la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f sur une feuille de papier millimétré.
   Unités graphiques : 1 cm pour 0,5 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 2 unités sur l'axe des ordonnées.

Partie B. Application à l'économie

Une entreprise agroalimentaire peut produire entre $0,3$ et 6 tonnes de farine biologique par jour. Le coût moyen de production d'une tonne de farine biologique pour x tonnes produites est $f(x)$, où f est la fonction définie dans la **partie A**.
Ce coût moyen est exprimé en centaines d'euros.

1. En utilisant les résultats de la **partie A**, déterminer le coût moyen minimal exprimé en centaines d'euros.
2. La tonne de farine biologique est vendue 20 centaines d'euros.
   (a) Calculer la recette correspondant à la vente de 3 tonnes de farine vendues,
   (b) Calculer le coût total de production de 3 tonnes de farine.
   (c) En déduire le bénéfice réalisé par l'entreprise pour la production et la vente de 3 tonnes de farine.
3. On admet que l'entreprise vend toute sa production.
   On rappelle que l'entreprise réalise un profit lorsque le prix de vente d'une tonne est supérieur au coût moyen de production d'une tonne.
   À l'aide du graphique tracé dans la **partie A**, déterminer les quantités produites pour lesquelles l'entreprise réalise un profit.

b) Travail de recherche en autonomie

Exercice 2

Étudier, en lien avec la dérivation, les variations et les extremums d'une fonction polynôme du second degré quelconque (autrement dit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b, et c des réels quelconques, $a \neq 0$).

Exercice 3 (Les cinq signes - Exercice académique des Olympiades de mathématiques)

Dans cet exercice, on considère des fonctions f admettant le tableau de variations (T) suivant :

Nota bene : les trois questions sont indépendantes.

x	$-\infty$		2014		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	2015	$\nearrow$	$+\infty$

(T)

1. Donner un exemple de fonction f définie sur $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variation (T) ci-dessus (on répondra par une expression de $f(x)$ en fonction de x et on donnera l'allure de la représentation graphique de la fonction).

2. On considère maintenant une nouvelle fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
   - pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$,

   où a, b, c sont trois nombres réels ;
   - f admet le tableau de variations (T) ci-dessus.

   Déterminer le signe de chacun des trois nombres réels a, b, c.

3. On considère maintenant une nouvelle fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
   - f est le carré d'une fonction trinôme du second degré, c'est-à-dire :
     pour tout réel x, $f(x) = 耳(x)^2$ avec 耳$(x) = ux^2 + vx + w$,
     u, v et w désignant trois nombres réels, $u \neq 0$;
   - f admet le tableau de variations (T) ci-dessus.

   L'expression développée réduite de $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :
   $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$,
   où a, b, c, d et e sont des nombres réels.
   Déterminer le signe – strictement positif ou strictement négatif – de chacun des cinq réels a, b, c, d et e (on prendra soin de vérifier que chacun des cinq réels est non nul).

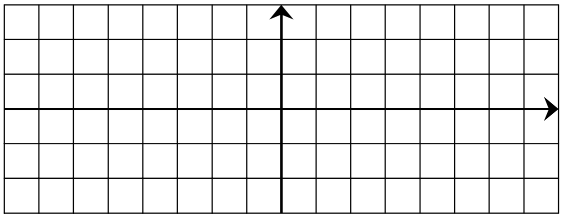
c) Feuille d'exercices du site Maths en ligne :

EXERCICE 2A.1

Dans chaque cas, compléter le tableau de variation de f, puis tracer une courbe qui pourrait être celle de f.

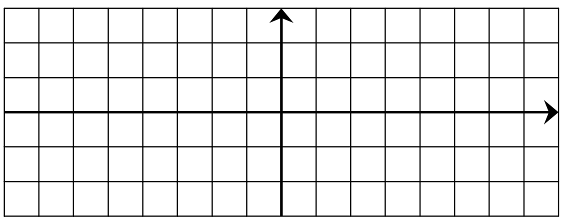
a.

x	-5		6
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-1		3



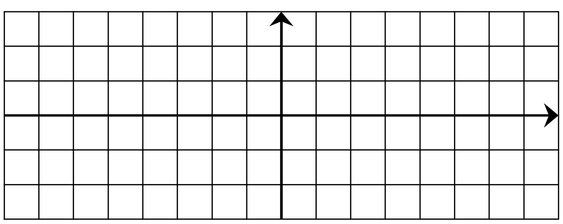
b.

x	-3		1		4
$f'(x)$		–	0	–	
$f(x)$	2		-1		-3



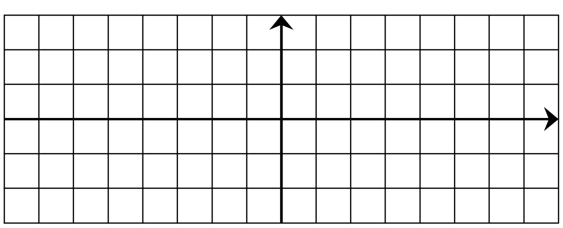
c.

x	-5		-3		1		3
$f'(x)$		–	0	+	0	–	
$f(x)$	3		-1		2		-3



d.

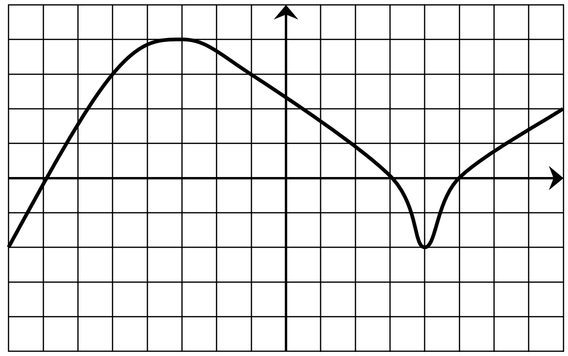
x	-7		-4		1		2
$f'(x)$		–	0	–	0	–	
$f(x)$	3		1		-1		-3



EXERCICE 2A.2

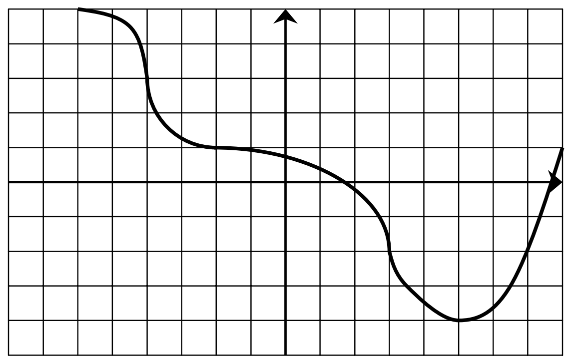
Dresser le tableau de variation chaque fonction (y compris le signe et les valeurs nulles de la dérivées) à partir de sa courbe.

a.



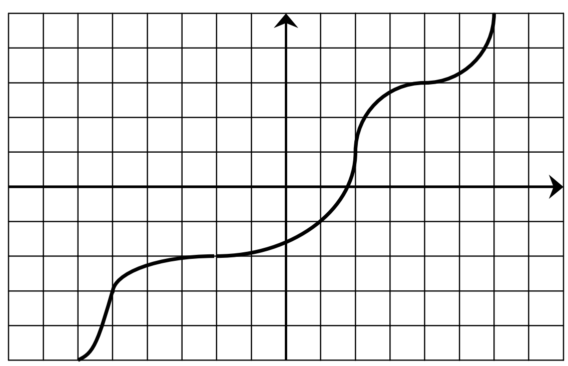
x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

b.



x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

c.



x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

d) Feuilles d'exercices du site Lycée d'Adultes

Sens de variation

Exercice 12

Déterminer et exécuter un programme permettant de tracer 31 tangentes de paramètre $m \in [-3; 3]$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$

On montrera que les tangentes de $\mathscr{C}_f$ en $x = m$ sont des droites (D_m) d'équations :

$$y = (m^3 - 4m)x - \frac{3}{4}m^4 + 2m^2 + 2$$

On prendra comme fenêtre : $x \in [-3; 3]$ et $y \in [-3; 5]$. On tracera ensuite $\mathscr{C}_f$.

Exercice 13

Pour les fonctions suivantes, déterminer la fonction dérivée, son signe en précisant l'ensemble pour lequel le calcul est valable. On cherchera à factoriser $f'(x)$ lorsque cela est possible. Dresser le tableau de variation de la fonction f

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$
2) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$
3) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2$
4) $f(x) = 4x + 3 + \dfrac{9}{x-2}$
5) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 6}{x - 1}$

Exercice 14

Pour les fonctions suivantes, déterminer la fonction dérivée, son signe en précisant l'ensemble pour lequel le calcul est valable. On cherchera à factoriser $f'(x)$ lorsque cela est possible. Dresser le tableau de variation de la fonction f

1) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$
2) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 4$
3) $f(x) = -x^4 - 4x^2 + 5$
4) $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x+4}$
5) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 9}$
6) $f(x) = 2x + 1 - \dfrac{2}{x-3}$
7) $f(x) = \dfrac{-3x}{1+x^2}$
8) $f(x) = 1 - x - \dfrac{1}{x-1}$
9) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 11}{x^2 - 2x - 3}$

Exercice 15

Pour les fonctions suivantes, déterminer la fonction dérivée, son signe en précisant l'ensemble pour lequel le calcul est valable. On cherchera à factoriser $f(x)$ lorsque cela est possible. Dresser le tableau de variation de la fonction f

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$
2) $f(x) = x\sqrt{x+3}$
3) $f(x) = \left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^2$

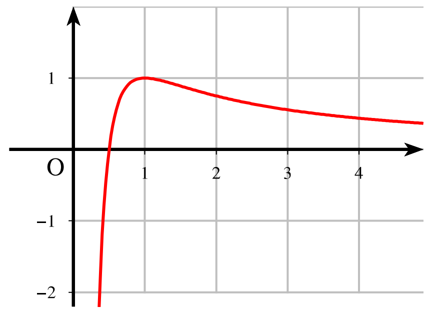
4) $f(x) = \sqrt{x-1}\,\sqrt{3-x}$ 5) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{x+3}$

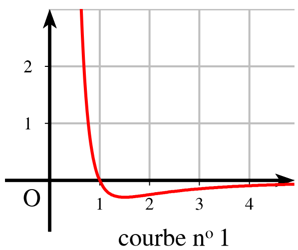
Exercice 16

Reconnaître une courbe

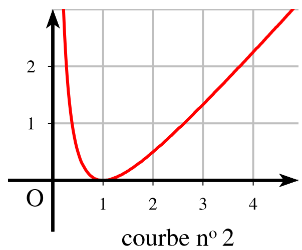
La figure ci-contre est la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$

Parmi les trois courbes ci-dessous, quelle est celle qui est susceptible de représenter la fonction dérivée f' de f.

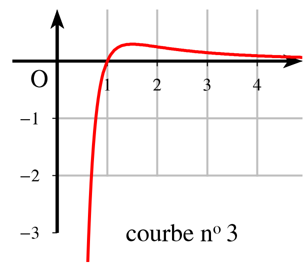




courbe n° 1



courbe n° 2



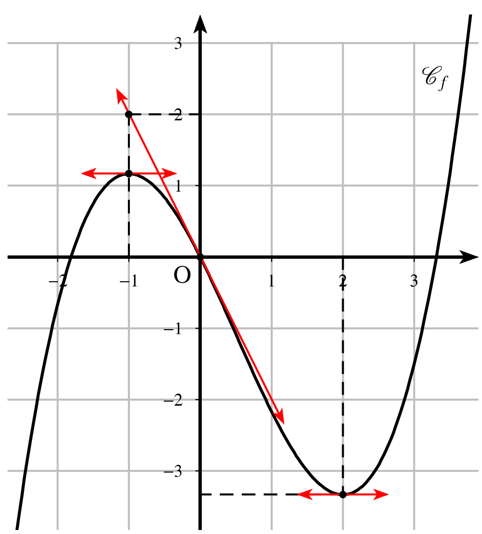
courbe n° 3

Reconnaître une fonction

Exercice 17

Soit une fonction f du 3^e^ degré définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation $\mathscr{C}_f$ se trouve ci-après.

1) Justifier que la fonction f peut se mettre sous la forme : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
2) D'après la courbe, justifier les égalités suivantes :
   - $f(0) = 0$ et $f'(0) = -2$
   - $f'(-1) = f'(2) = 0$
3) À partir des égalités de la question 2), déterminer les coefficients a, b, c et d.
4) Tracer la fonction f sur votre calculatrice pour vérifier votre solution



Exercice 20

Encadrement

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$.

Trouver un encadrement de la fonction f pour $x \in [-2\,;\,2]$

Exercice 21

Minimum

1) Étudier les variations de la fonction f définie par : $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$
2) En déduire le minimum sur $[-2; 2]$ de la fonction g définie par ;

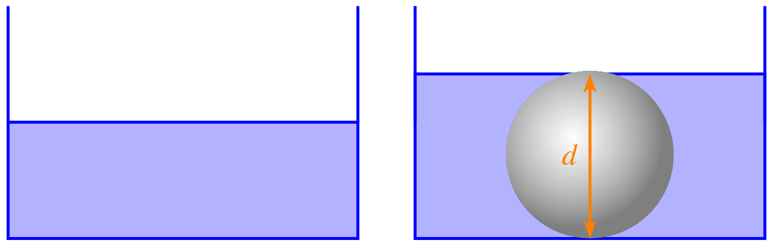
$$g(x) = \frac{1}{-x^2 + 4x - 3}$$

Optimisation

Exercice 22

Problème d'immersion

On dispose d'un récipient cylindrique de rayon 40 cm contenant de l'eau dont la hauteur est 20 cm. On y plonge une bille sphérique de diamètre d (en cm) et on constate que le niveau de l'eau est tangent à la bille. Le but de cet exercice est de calculer le diamètre d de la bille.



1) Vérifier que d est solution du système : $\begin{cases} 0 \leqslant d \leqslant 80 \\ d^3 - 9\,600d + 192\,000 = 0 \end{cases}$

2) f est la fonction sur $[0\,;\,80]$ par : $f(x) = x^3 - 9\,600x + 192\,000$
   a) Déterminer la dérivée de la fonction f. En déduire le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,80]$.
   b) D'après le tableau de variation, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[0\,;\,80]$.
   c) Déterminer un algorithme permettant de calculer cette solution à 10^{-2} près.

On rappelle que :

- *le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est égal à :* $\pi r^2 h$
- *le volume d'une sphère de rayon r est égal à :* $\frac{4}{3}\pi r^3$

III. Variation d'une fonction - Correction des exercices

b) Travail de recherche en autonomie

Correction de l'exercice 2

$f(x) = ax^2 + bx + c$
$f'(x) = a \times 2x + b \times 1 + 0$
$f'(x) = 2ax + b$

$2ax + b$ s'annule en :

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \iff & 2ax + b = 0 \\ \iff & 2ax = -b \\ \iff & x = -\frac{b}{2a} \qquad \text{car } a \neq 0 \text{ donc on ne prend pas le risque de diviser par } 0 \end{aligned}$$

- Si $a > 0$, on a :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variation de $f(x)$	$\searrow$		$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$		$\nearrow$

- Si $a < 0$, on a :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variation de $f(x)$	$\nearrow$		$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$		$\searrow$

d) Feuilles d'exercices du site Lycée d'Adultes

Correction de l'exercice 13

5) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 6}{x - 1}$

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 + 2x + 6 & v(x) = x - 1 \\ u'(x) = 2x + 2 & v'(x) = 1 \end{cases}$

$f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$f'(x) = \dfrac{(2x + 2) \times (x - 1) - (x^2 + 2x + 6) \times 1}{(x - 1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2 - 2x + 2x - 2 - x^2 - 2x - 6}{(x - 1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{(x-1)^2}$

Pour $x^2 - 2x - 8$,
$a = 1, b = -2$ et $c = -8$
$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 32 = 36 = 6^2 > 0$
Il y a deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-6}{2} = -2$
$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+6}{2} = 4.$

Pour $(x-1)^2$,
c'est un carré, donc est positif et s'annule en $x = 1$, notre valeur interdite.

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$x^2 - 2x - 8$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variation de $f(x)$		$\nearrow$	$f(-2) = -2$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$f(4) = 10$	$\nearrow$	

Avec :
$f(-2) = \dfrac{(-2)^2 + 2 \times (-2) + 6}{(-2) - 1} = -2$
$f(4) = \dfrac{4^2 + 2 \times 4 + 6}{4 - 1} = 10$

Correction de l'exercice 14

4) $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x+4}$

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x - 3 & v(x) = 2x + 4 \\ u'(x) = 2 & v'(x) = 2 \end{cases}$

$f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$f'(x) = \dfrac{2 \times (2x+4) - (2x-3) \times 2}{(2x+4)^2}$

$f'(x) = \dfrac{4x + 8 - 4x + 6}{(2x+4)^2}$

$f'(x) = \dfrac{14}{(2x+4)^2}$

Pour $(2x+4)^2$,
c'est un carré, donc est positif et s'annule en $x = -2$, notre valeur interdite.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
14		$+$		$+$	
$(2x+4)^2$		$+$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
variation de $f(x)$		↗	$\Vert$	↗	

IV. Variation d'une fonction - Les démonstrations

a) Sens de variation d'une fonction dérivable

Démonstration

- Supposons f croissante sur I.
  Si $h>0$, alors $f(a+h) \geq f(a)$ donc $f(a+h)-f(a) \geq 0$.
  Si $h<0$, alors $f(a+h) \leq f(a)$ donc $f(a+h)-f(a) \leq 0$.
  Donc h et $f(a+h)-f(a)$ sont de même signe, donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$.
  Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \geq 0$.
  La réciproque est hors-programme.
- Supposons f décroissante sur I.
  Si $h>0$, alors $f(a+h) \leq f(a)$ donc $f(a+h)-f(a) \leq 0$.
  Si $h<0$, alors $f(a+h) \geq f(a)$ donc $f(a+h)-f(a) \geq 0$.
  Donc h et $f(a+h)-f(a)$ sont de signes différents, donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$.
  Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \leq 0$.
  La réciproque est hors-programme.
- Supposons f constante sur I.
  Pour tout h, $f(a+h)=f(a)$ donc $f(a+h)-f(a)=00$.
  Donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=0$.
  Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = 0$.
  La réciproque est hors-programme.