CHAPITRE 12

Trigonométrie II

Extrait du programme

Le roi du caméo

Contenus

- Cercle trigonométrique. Longueur d'arc. Radian.
- Enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique. Image d'un nombre réel.
- Cosinus et sinus d'un nombre réel. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle. Valeurs remarquables.
- Fonctions cosinus et sinus. Parité, périodicité. Courbes représentatives.

Capacités attendues

- Placer un point sur le cercle trigonométrique.
- Lier la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique.
- Traduire graphiquement la parité et la périodicité des fonctions trigonométriques.
- Par lecture du cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de x, les cosinus et sinus d'angles associés à x.

Démonstration

- Calcul de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Exemples d'algorithme

- Approximation de π par la méthode d'Archimède.

Introduction - [A lire]

L'utilisation la plus ancienne du sinus apparaît dans les **Shulba Sutras** écrits en indien ancien entre le VIIIe siècle av. J.-C. et le VIe siècle av. J.-C., dans lesquels la valeur du sinus de $\frac{\pi}{4}$ (45°) est correctement calculée comme égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Par la suite les indiens ont généralisé et amélioré leurs méthodes. Ce sont plus tard les mathématiciens arabes qui nous ont transmis leur savoir faire (tout comme les chiffres dits *arabes* que nous utilisons tous les jours).
A ce propos, l'étymologie du mot sinus est très intéressante. Ce mot est dérivé du mot latin *sinus* qui signifie « compartiment » ou « pli ». On peut se demander quel est le rapport entre un calcul trigonométrique et un compartiment ou un pli. Il s'agit en réalité d'une erreur de traduction. Le mathématicien indien Aryabhata (476-550) employait le mot en sanskrit *ardha-jiva* (demi-corde) qui fût par la suite abrégé en *jiva*. Les mathématiciens arabes le retranscrirent en *jiba*. Des traducteurs européens comme Robert de Chester et Gérard de Crémone de Tolède au XIIe siècle confondirent ensuite *jiba* avec *jaib* qui désigne un « compartiment ».

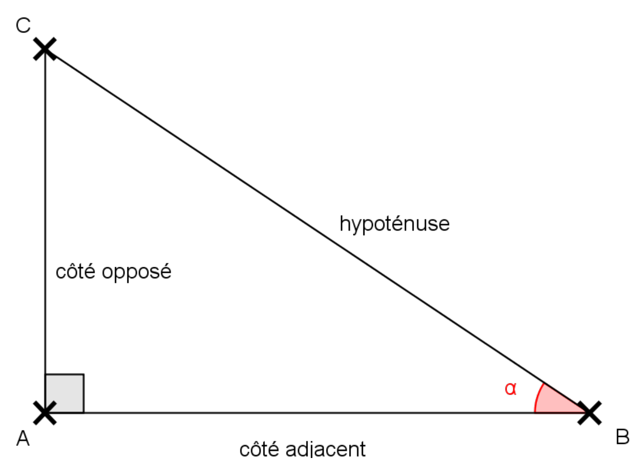
De nos jours, les trois fonctions trigonométriques les plus utilisées sont le **sinus** (noté sin), le **cosinus** (cos) et la **tangente** (tan). On peut aussi citer d'autres fonctions trigonométriques : la cosécante qui est l'inverse du sinus, la sécante qui l'est l'inverse du cosinus et la cotangente qui est l'inverse de la tangente.

Au collège vous avez appris la fameuse formule **SOHCAHTOA** qui vous permet d'effectuer vos calculs de distance ou d'angle dans un triangle rectangle :

- **SOHCAHTOA**
  $\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$
- **SOHCAHTOA**
  $\cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$
- **SOHCAHTOA**
  $\tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB}$

On obtient aussi les formules suivantes :

- la cosécante
  $\csc\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté opposé}} = \frac{BC}{AC}$
- la sécante
  $\sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté adjacent}} = \frac{BC}{AB}$
- la cotangente
  $\cot\ \alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}} = \frac{AB}{AC}$



Les fonctions cosécante, sécante et cotangente s'obtiennent facilement à partir des fonctions sinus, cosinus et tangente ce qui peut expliquer qu'on ne les emploie plus vraiment de nos jours.
De même la fonction tangente s'obtient assez aisément à partir des fonctions sinus et cosinus, c'est pourquoi nous ne l'étudierons pas cette année :

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}}{\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \times \frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté adjacent}} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \tan\alpha.$$

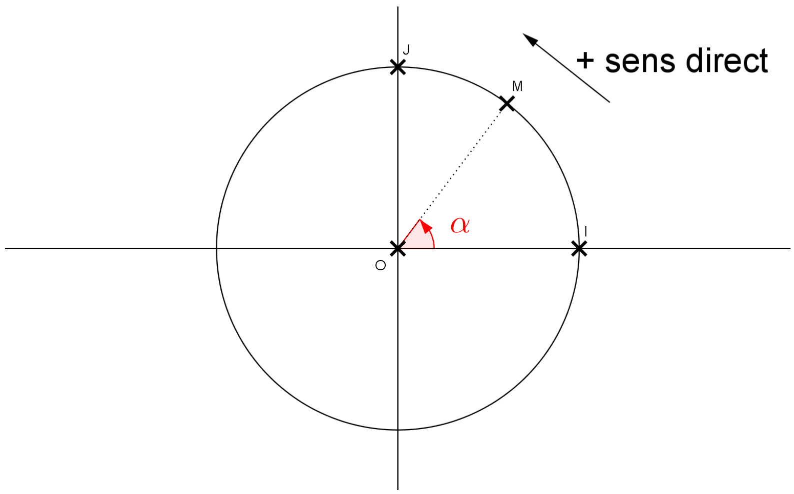
Le but de ce chapitre est de sortir du triangle rectangle pour pouvoir généraliser la définition de fonction sinus et cosinus à tous les angles, autrement dit à des angles supérieurs à $\frac{\pi}{2}$ radian (90°) ou inférieurs à 0 radian (0°).

I. Définition du Cosinus et du Sinus

Nous avons déjà vu dans le **chapitre 11, Trigonométrie I**, que nous pouvions déterminer l'emplacement d'un point M sur le cercle trigonométrique de deux manières différentes :

- la première, par la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$, c'est-à-dire, l'angle entre l'axe des abscisses et le rayon $[OM]$;
- la deuxième, par la mesure de l'arc de cercle $\widehat{IM}$.

C'est d'ailleurs à l'aide de cette deuxième méthode que nous avons défini une nouvelle mesure des angle, le **radian** (qui est l'unité de mesure officiel des angles).

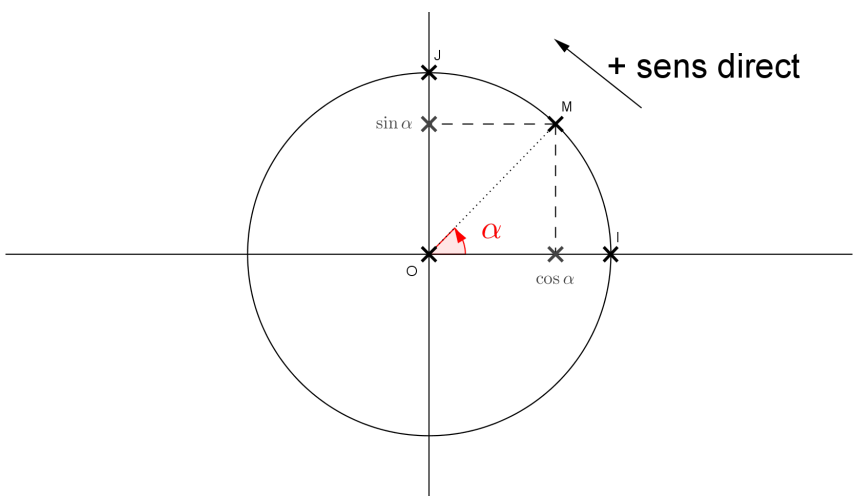


Nous allons voir maintenant une nouvelle façon de déterminer l'emplacement d'un point M sur le cercle trigonométrique. Comme le plan est muni d'un repère, nous allons tout simplement prendre les coordonnées de ce point.

Définitions Soit α un réel et soit M le point du cercle trigonométrique tel que l'angle

$$\widehat{IOM} \equiv \alpha \ [2\pi].$$

Le **cosinus** de α, noté $\cos\alpha$ est l'abscisse du point M.
Le **sinus** de α, noté $\sin\alpha$ est l'ordonnée du point M.



Remarque
Cette définition prolonge bien les définitions de cosinus et sinus vues au collège.

II. Premières propriétés

a) Propriétés générales

Propriétés

Pour tout réel α, on a :

- $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$;
- $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ et $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$;
- pour tout entier relatif k, $\cos(\alpha + k \times 2\pi) = \cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha + k \times 2\pi) = \sin(\alpha)$.

Remarque

Ces propriétés viennent directement de la définition du cosinus et sinus comme abscisse et ordonnée du point associé à l'angle α dans le cercle trigonométrique.

b) Valeurs particulières

Propriété (Valeurs particulières)

On a le tableau suivant :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Remarque

Pour démontrer ces formules pour $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{3}$ on doit se placer dans un triangle rectangle et utiliser les traditionnelles formules SOHCAHTOA.

Exemple

Prenons un angle $\alpha \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Nous pouvons vérifier les premières propriétés pour cet angle :

- $\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$;
- $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, on a donc bien $-1 \leq \cos\frac{\pi}{3} \leq 1$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a donc bien $-1 \leq \sin\frac{\pi}{3} \leq 1$;
- $\frac{7\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, donc $\cos\frac{7\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{7\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

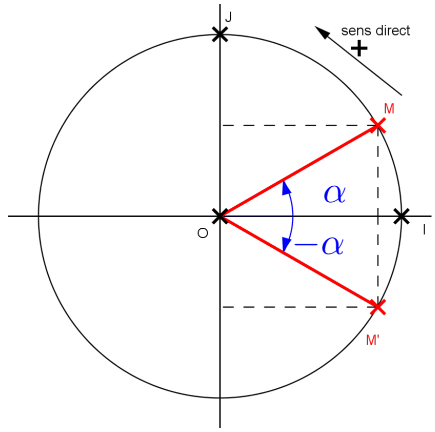
c) Angles associés

Par de simples transformations (symétries ou rotation) nous allons pouvoir sortir du cas où l'abscisse (le cosinus) et l'ordonnée (le sinus) du point M sont positives et ainsi généraliser les quelques valeurs particulières données dans la section précédente. Il n'est pas forcément utile d'apprendre ces formules, par contre vous devez être capable de comprendre et de refaire les schémas.

Symétrie par l'axe des abscisses

Pour tout réel α, on a :

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$



Si on a $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \equiv -(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'})\ [2\pi]$, les points M et M' ont même abscisse et ont leurs ordonnées opposées.

Exemple

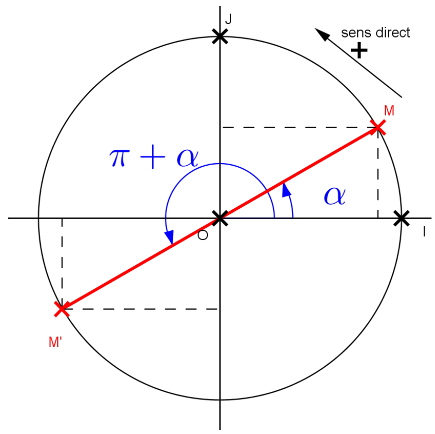
Pour $\alpha \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, on a :

- $\cos\alpha = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$;
- $\sin\alpha = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Symétrie de centre l'origine

Pour tout réel α, on a :

$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$



Si on a $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) + \pi\ [2\pi]$, les points M et M' ont leurs abscisses et ont leurs ordonnées opposées.

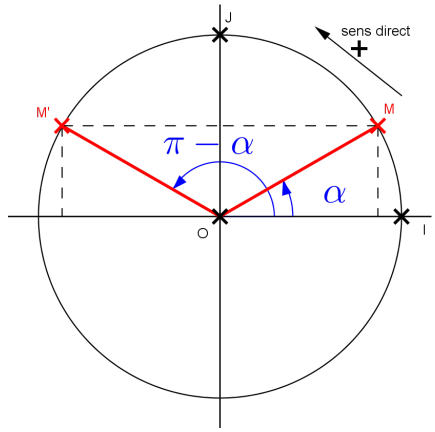
Exemple

Pour $\alpha \equiv \dfrac{4\pi}{3}\ [2\pi]$, on a :

- $\cos\alpha = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$;
- $\sin\alpha = \sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Symétrie par l'axe des ordonnées
Pour tout réel α, on a :

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$



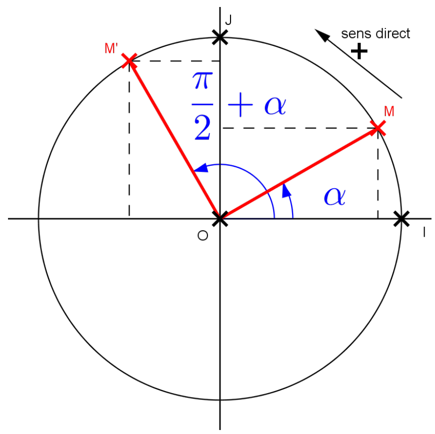
Si on a $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \pi - (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ $[2\pi]$, les points M et M' ont leurs abscisses opposées et ont la même ordonnée.

Exemple
Pour $\alpha \equiv \dfrac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$, on a :

- $\cos\alpha = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$;
- $\sin\alpha = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Rotation d'un quart de tour
Pour tout réel α, on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$$



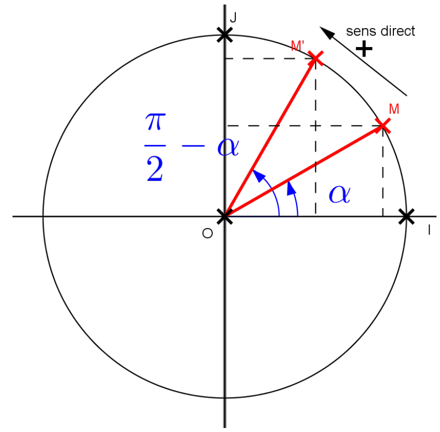
Si on a $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \dfrac{\pi}{2} + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ $[2\pi]$, alors l'abscisse de M' est l'opposé de l'ordonnée de M et l'ordonnée de M' est l'abscisse de M.

Exemple
Pour $\alpha \equiv \dfrac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$, on a :

- $\cos\alpha = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$;
- $\sin\alpha = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Symétrie par rapport à la première diagonale
Pour tout réel α, on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$



Si on a $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$ $[2\pi]$, alors l'abscisse de M' est l'ordonnée de M et l'ordonnée de M' est l'abscisse de M.

Exemple
Pour $\alpha \equiv \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$, on a :

- $\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;
- $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Questions à Choix Multiple n° 1

1. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=$ a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$
2. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=$ a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$
3. $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=$ a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$
4. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=$ a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$
5. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=$ a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$
6. $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=$ a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$
7. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=$ a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$
8. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=$ a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$
9. $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=$ a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$
10. $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=$ a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$
11. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=$ a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$
12. $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=$ a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$

III. Fonctions cosinus et sinus

a) Définition

DÉFINITION :
La fonction **cosinus** est la fonction qui, à tout réel x, associe le nombre $\cos(x)$.
La fonction **sinus** est la fonction qui, à tout réel x, associe le nombre $\sin(x)$.

b) Propriétés

PROPRIÉTÉ (PARITÉ) :
La fonction **cosinus** est **paire**, autrement dit, pour tout réel x : $\cos(-x) = \cos(x)$.
La fonction **sinus** est **impaire**, autrement dit, pour tout réel x : $\sin(-x) = -\sin(x)$.

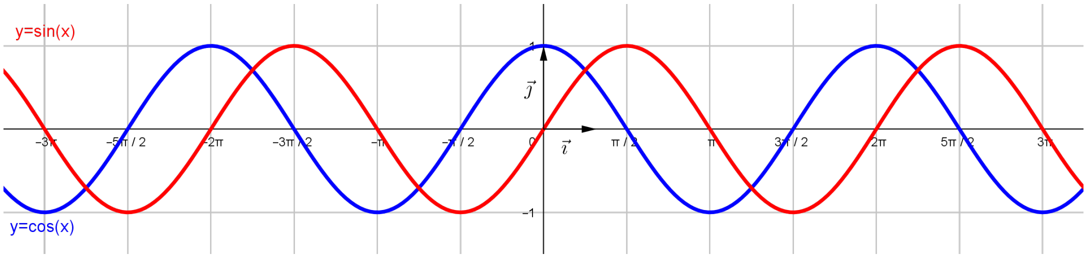
Remarque
Cette propriété est la conséquence de la propriété des angles associés pour la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

PROPRIÉTÉ (PÉRIODICITÉ) :
Les fonctions **cosinus** et **sinus** sont **périodiques de période 2π**, autrement dit :
pour tout réel x, $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$ et
pour tout réel x, $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$.

Remarque
Cette propriété est la conséquence de la propriété des angles associés pour la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

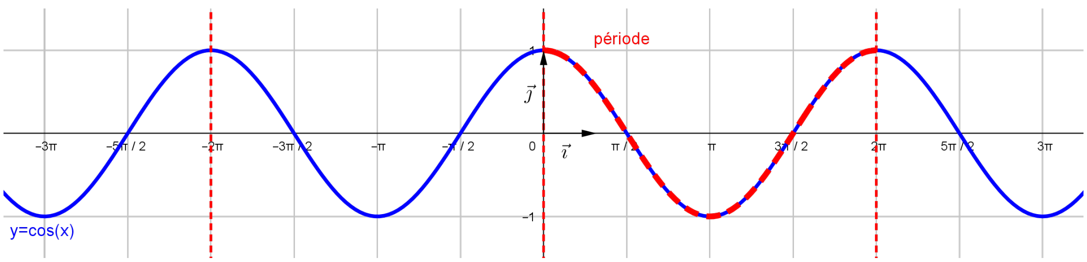
c) Courbes représentatives

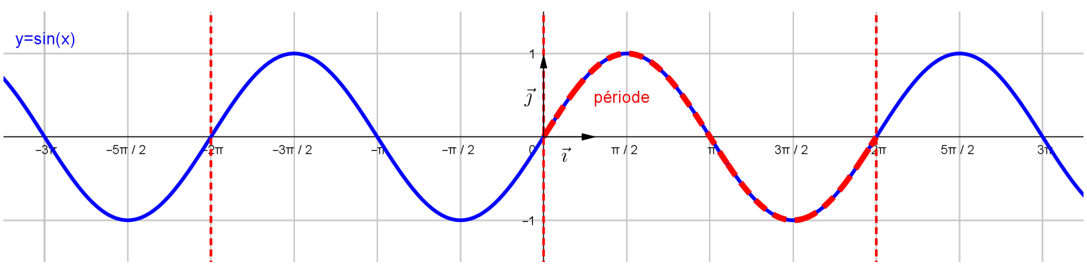
DÉFINITION :
Les courbes représentatives des fonctions **cosinus** et **sinus** sont des **sinusoïdes**.

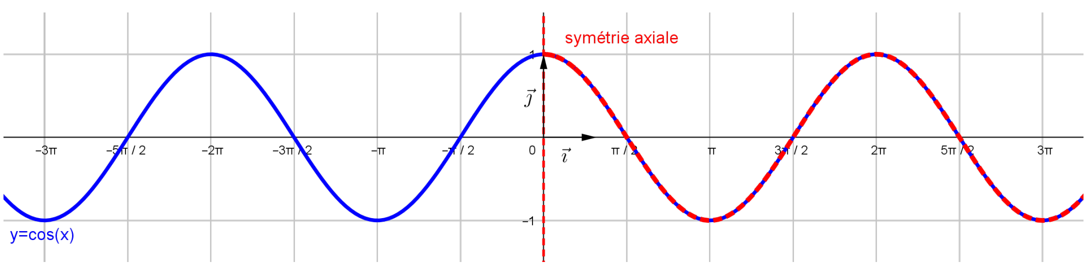


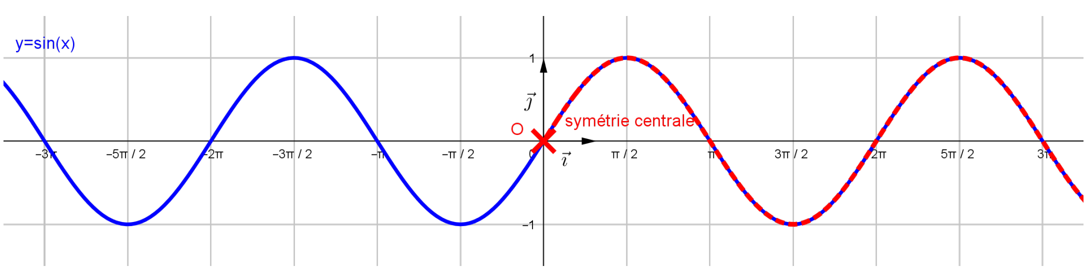
PROPRIÉTÉS :

1. Les deux fonctions étant 2π**-périodiques**, les courbes représentatives sont invariantes par la translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.
2. La fonction **cosinus** étant **paire**, sa courbe représentative admet comme axe de symétrie l'axe des ordonnées.
3. La fonction **sinus** étant **impaire**, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère O.









Questions à Choix Multiple n° 2

1. Pour montrer qu'une fonction est paire sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que :
   a) $f(-x) = f(x)$ pour un certain $x \in \mathbb{R}$ b) $f(-x) = -f(x)$ pour un certain $x \in \mathbb{R}$ c) $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ d) $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
2. Pour montrer qu'une fonction est impaire sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que :
   a) $f(-x) = f(x)$ pour un certain $x \in \mathbb{R}$ b) $f(-x) = -f(x)$ pour un certain $x \in \mathbb{R}$ c) $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ d) $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
3. Pour montrer qu'une fonction est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que :
   a) $f(x+2\pi) = f(x)$ pour un certain $x \in \mathbb{R}$ b) $f(x+2\pi) = -f(x)$ pour un certain $x \in \mathbb{R}$ c) $f(x+2\pi) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ d) $f(x+2\pi) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
4. La fonction $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ est :
   a) paire b) impaire c) 2π-périodique d) aucune réponse ne convient
5. La fonction $f(x) = \sin(x) + x$ est :
   a) paire b) impaire c) 2π-périodique d) aucune réponse ne convient
6. La fonction $g(x) = \cos(x + 3\pi)$ est égale à :
   a) $\cos(x)$ b) $\cos(x+\pi)$ c) $\cos(3\pi)$ d) $\cos(-x)$

IV. Formule d'Al-Kashi

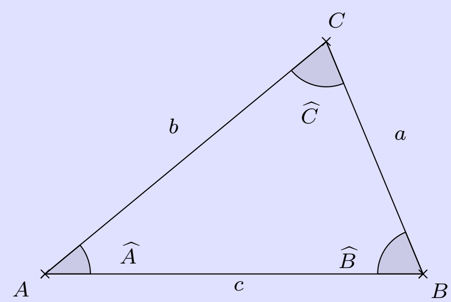
Formule d'Al-Kashi (1380-1429)

Dans un triangle ABC, on adopte des notations allégées suivantes :

$$a = BC,\ b = CA,\ c = AB,\ \widehat{A} = \widehat{BAC},\ \widehat{B} = \widehat{CBA},\ \widehat{C} = \widehat{ACB}$$

Pour tout triangle ABC, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$



Remarque : 1

La démonstration du théorème d'Al-Kashi peut se faire avec l'outil produit scalaire. Il est à noter qu'à l'époque de notre ami Al-Kashi la notion de vecteur n'avait pas encore été inventée. Il a très certainement dû faire autrement.

Remarque : 2

Que se passe-t-il lorsque le triangle ABC est rectangle en A ?

....
....
....
....

Questions à Choix Multiple n° 3
Soit ABC un triangle. Peut-on calculer les longueurs de ses côtés et ses angles dans les cas suivants ?
Si oui, calculer les longueurs des côtés à $0,1$ près et les angles à 1 près ;
si non, expliquer pourquoi.

a) $a = 5, b = 7$ et $c = 10$

b) $c = 4, b = 7$ et $\widehat{A} = 35$

c) $\widehat{A} = 40$ et $\widehat{B} = 55$

V. Exercices

Les premières fiches d'exercices proviennent du site ***Maths en ligne*** *:* `http://www.mathsenligne.net`.

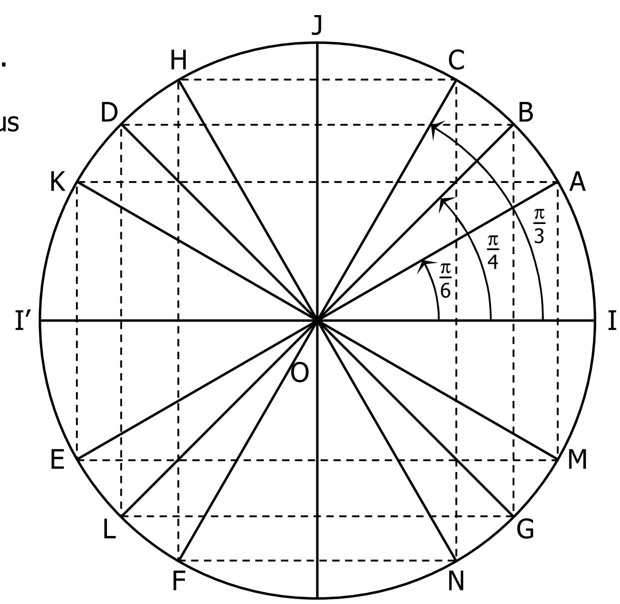
Feuille d'exercices : Cosinus - Sinus

On a donné les valeurs exactes du sinus et cosinus de quelques angles remarquables entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Point								**I**	**A**	**B**	**C**	**J**				
x	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\mathbf{0}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos x								**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**				
sin x								**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**				

a. Retrouver le point qui correspond à chaque angle.

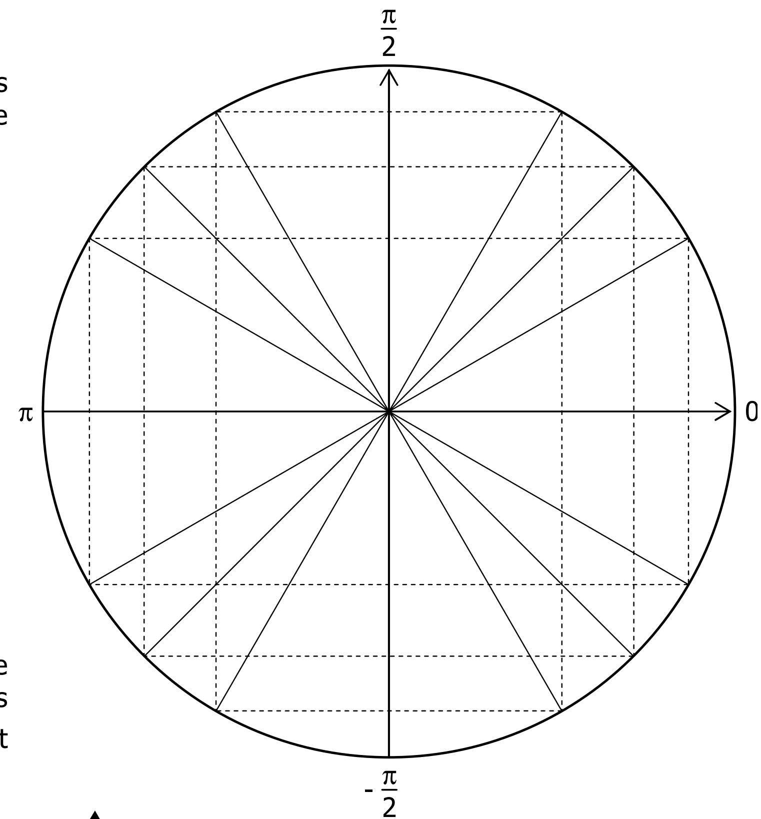
b. En déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus de tous les angles du tableau.



Feuille d'exercices : Courbe représentative

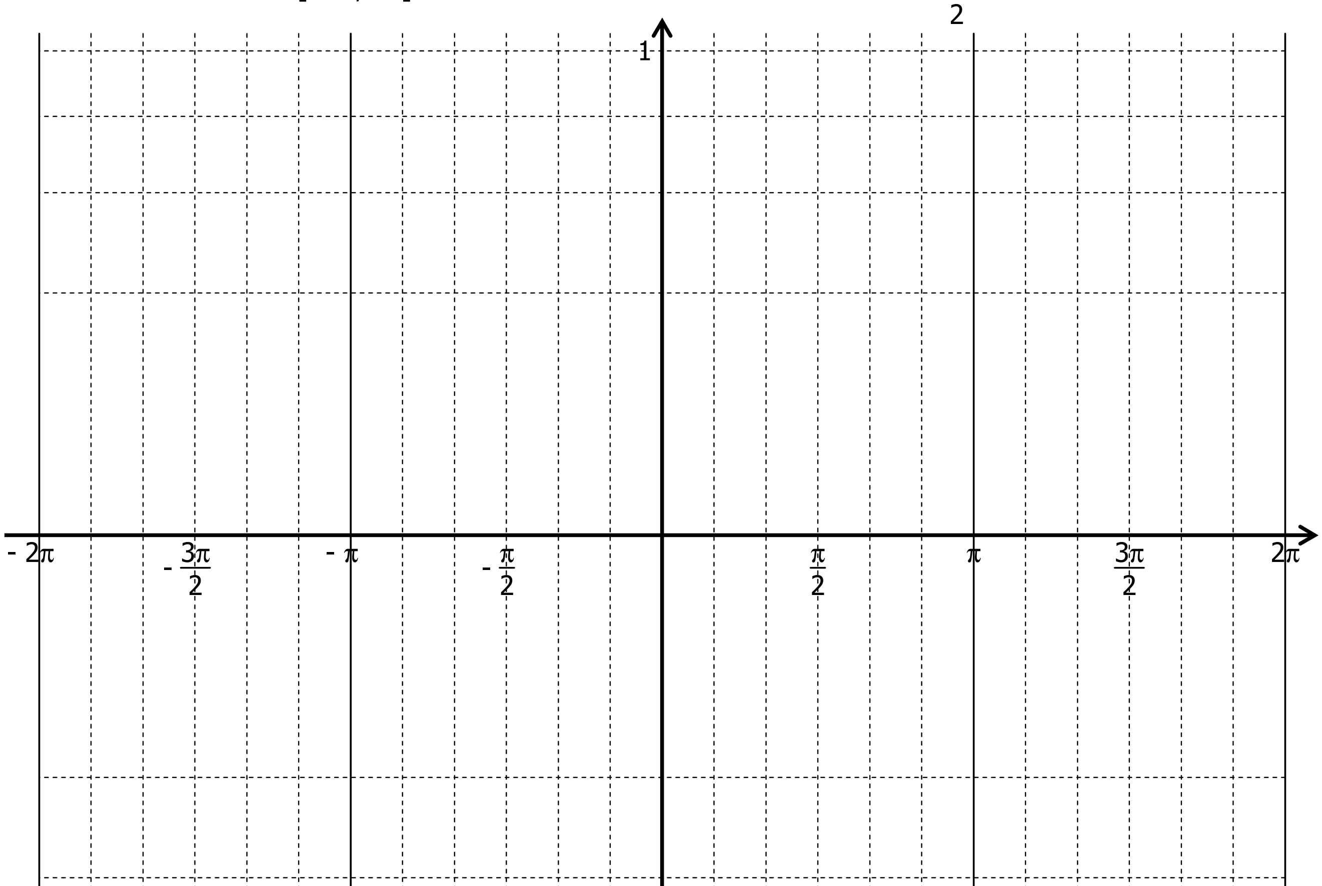
Partie 1

Indiquer sur cette figure toutes les mesures des angles sur l'intervalle]-π ; π], ainsi que leurs cosinus et sinus.

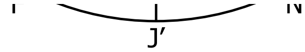


Partie 2

En utilisant les valeurs de la figure précédente, tracer dans ce repère les courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$ sur l'intervalle [-2π ; 2π].



Feuille d'exercices : Calcul



Exercice 2B.2

Calculer dans chaque cas l'expression pour la valeur de x donnée :

$f(x) = -2\sin x$ pour $x = \frac{\pi}{2}$	$f(x) = 5\cos x + 3\sin x$ pour $x = \frac{\pi}{3}$	$f(x) = 3\cos^2 x$ pour $x = \pi$
$f(x) = \cos x \sin x$ pour $x = \frac{\pi}{2}$	$f(x) = \sin^2 x$ pour $x = \frac{\pi}{3}$	$f(x) = \cos 3x$ pour $x = -\frac{\pi}{2}$
$f(x) = x\sin x$ pour $x = -\frac{\pi}{6}$	$f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{2}$ pour $x = \frac{\pi}{4}$	$f(x) = \cos^2 x \sin x$ pour $x = \frac{2\pi}{3}$

Feuille d'exercices : Tableaux de variations

Exercice 3A.2

Dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \longmapsto \cos x$ sur les intervalles suivants :

a. $[8\pi \,;\, 10\pi]$ **b.** $[-\frac{3\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2}]$ **c.** $[-\frac{7\pi}{2} \,;\, -\frac{5\pi}{2}]$

Exercice 3A.4

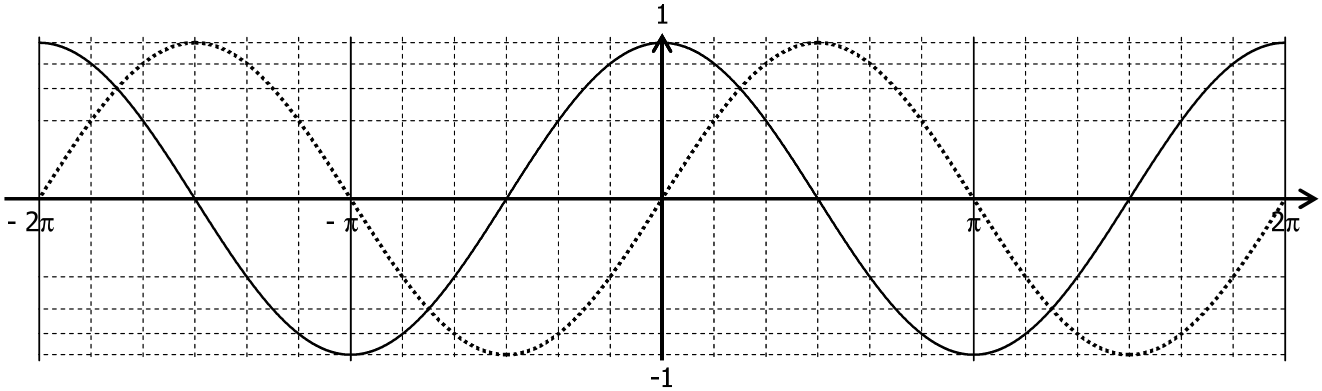
Dresser le tableau de variation de la fonction $g : x \longmapsto \sin x$ sur les intervalles suivants :

a. $[8\pi \,;\, 10\pi]$ **b.** $[-\frac{3\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2}]$ **c.** $[-\frac{7\pi}{2} \,;\, -\frac{5\pi}{2}]$

Feuille d'exercices : Équations trigonométriques

Exercice 4A.2

On a représenté sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$ les courbes : $x \longmapsto \cos x$ $x \longmapsto \sin x$



1. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$ les équations suivantes :

$\cos x = 1$ $\sin x = \frac{1}{2}$ $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$ les inéquations suivantes :

$\cos x \geq 0$ $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos x \leq -\frac{1}{2}$ $\sin x > 1$

3. Résoudre graphiquement les systèmes :

$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x \geq \frac{1}{2} \\ \sin x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \sin x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Feuille d'exercices : Équations trigonométriques II

Exercice 4B.1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **b.** $\cos x = 1$ **c.** $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **d.** $\sin x = 0$

e. $\sin x = 2$ **f.** $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **g.** $\sin x = \frac{1}{2}$ **h.** $\cos x = \frac{-3}{2}$

Exercice 4B.2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\sin(2x) = \frac{1}{2}$ **b.** $\cos x = -\frac{1}{2}$ **c.** $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ **d.** $\cos(3x) = -1$

Exercice 4B.3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\sin(2x) = \sin x$ **b.** $\cos(2x) = \cos(3x)$ **c.** $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2x)$ **d.** $\cos x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

Ces derniers exercices proviennent de la page première S du site ***Lycée d'adultes de la ville de Paris*** *:* `http://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/pages/math1S.html`.

Feuille d'exercices : Calcul dans un triangle

Exercice 22

ABC est un triangle. Dans chacun des cas suivants, calculer les longueurs des côtés et les mesures des angles manquants.

1) AB = 8, AC = 3 et $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

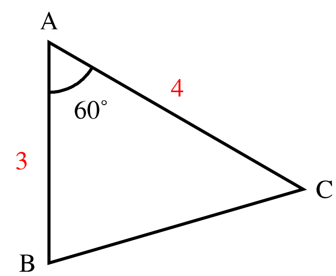
2) AB = 48, AC = 43 et BC = 35.

Exercice 23

Dans la figure ci-contre, calculer :

1) L'aire du triangle ABC.

2) Le périmètre du triangle ABC.

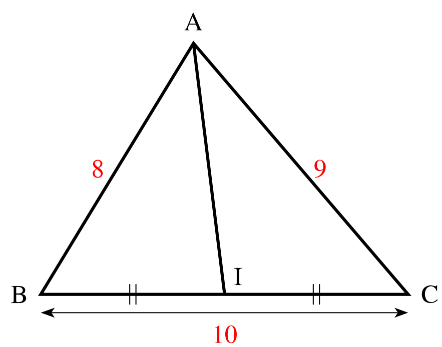


Exercice 24

Dans la figure ci-contre, calculer :

1) La longueur de la médiane AI.

2) La longueur des deux autres médianes.



Exercice 25

L'aire d'un triangle ABC est $5\sqrt{3}$, AB = 4 et $\widehat{BAC} = 60^\circ$

1) Calculer AC

2) Démontrer que $BC = \sqrt{21}$

Exercice 26

ABC triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12\sqrt{3}$. L'unité est le cm.

1) Trouver, en radians, une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

2) Trouver en cm^2, l'aire du triangle ABC.