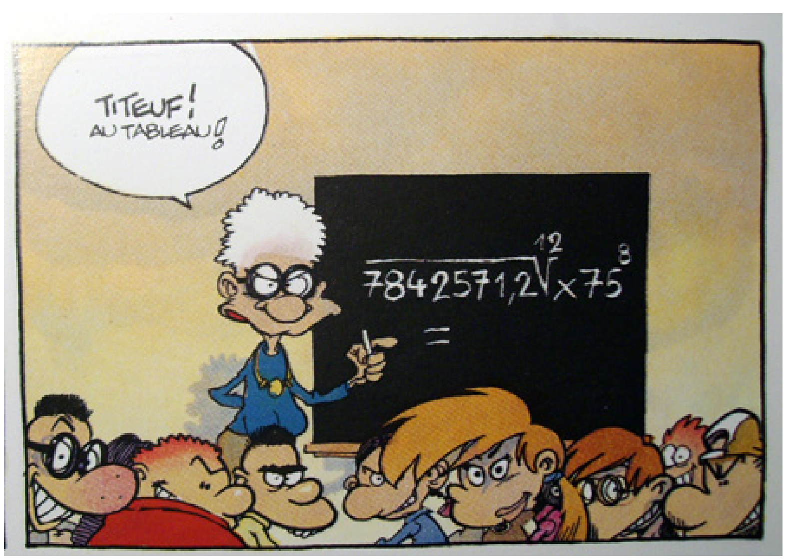
CHAPITRE 1

Calculs à la main

Dans ce chapitre nous allons travailler les points suivants :

1. Fraction
2. Puissance
3. Racine carrée
4. Développer une expression littérale
5. Factoriser une expression littérale
6. Connaître les bases du langage Python

Vous retrouverez ce cours à l'adresse suivante :
`https://github.com/NaturelEtChaud/Math-premiere/tree/main/01%20calcul%20%C3%A0%20la%20main`



I. Fraction

a) Rappels

Vocabulaire et existence	Fractions égales	Ajouter ou soustraire	Multiplier ou diviser
• La fraction $\frac{a}{b}$ existe si $b \neq 0$. a est le **numérateur**. b est le **dénominateur**. • La fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** si a et b sont premiers entre eux.	• Pour tout nombre $c \neq 0$ $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$ $\frac{a \div c}{b \div c} = \frac{a}{b}$ • Deux fractions sont égales **si, et seulement si**, leurs produits en croix sont égaux. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \times d = b \times c$	• On peut ajouter ou soustraire des fractions qui ont le même dénominateur. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$	• $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ • Diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse $\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c}$ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Exemple

1. $\frac{42}{-140} = -\frac{3 \times 2 \times 7}{10 \times 7 \times 2} = -\frac{3}{10}$
2. $\frac{21}{35}$ et $\frac{41}{69}$ sont-ils égaux ?
   $21 \times 69 = 1449$ et $35 \times 41 = 1435$. Comme $1449 \neq 1435$ alors $\frac{21}{35} \neq \frac{41}{69}$
3. $-1 + \frac{13}{30} - \frac{-11}{12} = -\frac{60}{60} + \frac{13 \times 2}{30 \times 2} + \frac{11 \times 5}{12 \times 5} = \frac{-60+26+55}{60} = \frac{21}{60} = \frac{7 \times 3}{20 \times 3} = \frac{7}{20}$
4. $-\frac{35}{33} \times \frac{-39}{-80} = -\frac{7 \times 5}{11 \times 3} \times \frac{13 \times 3}{2 \times 5 \times 8} = -\frac{7 \times 13}{11 \times 2 \times 8} = -\frac{91}{176}$
5. $\frac{-8}{7} \div \frac{5}{-3} = \frac{8}{7} \div \frac{3}{5} = \frac{24}{35}$
6. $\frac{-\frac{32}{21}}{\frac{-48}{-35}} = -\frac{32}{21} \times \frac{35}{48} = -\frac{8 \times 2 \times 2}{7 \times 3} \times \frac{7 \times 5}{3 \times 2 \times 8} = -\frac{10}{9}$

b) Exercices sur les fractions

Niveau 1 : Réduire des fractions

$$\frac{12}{9} \qquad \frac{45}{20} \qquad \frac{21}{6} \qquad \frac{40}{60}$$
$$\frac{20}{12} \qquad \frac{48}{28} \qquad \frac{25}{50} \qquad \frac{140}{340}$$

Niveau 2 : Additionner ou multiplier des fractions. Donner le résultat sous forme réduite

$$A = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \qquad B = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \qquad C = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \qquad D = -\frac{5}{2} - \frac{3}{5}$$
$$E = \frac{5}{4} \times \frac{8}{15} \qquad F = \frac{-2}{5} \times \frac{-3}{-7} \qquad G = \frac{7}{-6} \times \frac{3}{-4} \qquad H = \frac{15}{7} \times \frac{14}{3}$$

Niveau 3 : Diviser deux fractions. Donner le résultat sous forme réduite

$$A = \frac{5}{4} \div \frac{35}{7} \qquad B = \frac{7}{4} \div \frac{35}{18} \qquad C = \frac{-9}{2} \div \frac{3}{-5} \qquad D = \frac{-4}{-5} \div \frac{7}{-13}$$
$$E = \frac{\frac{6}{35}}{9} \qquad F = \frac{6}{\frac{35}{9}} \qquad G = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{2}{3}} \qquad H = \frac{\frac{2}{-5}}{\frac{-24}{35}}$$

Niveau 4 : Calculer en respectant la priorité des opérations. Donner le résultat sous forme réduite

$$A = 2 + 3 \times \frac{4}{5} \qquad B = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} - \frac{6}{5} \times \frac{7}{4} \qquad C = \frac{7}{3} - \frac{4}{3} \div \frac{2}{5} \qquad D = \frac{12}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{7}{9}$$
$$E = \left(\frac{2}{3} - 3\right) \div \frac{1}{9} \qquad F = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} \times \left(\frac{5}{2} + 2\right) \qquad G = \frac{4}{3} + \frac{5}{2} \times \frac{7}{15} \qquad H = 5 + \left(1 + \frac{1}{8}\right) \div \frac{3}{4}$$
$$I = \frac{8}{3} + 5 \div \left(1 - \frac{2}{5}\right) \qquad J = \frac{6}{5} \div \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{5}\right) \qquad K = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{21}{15} \qquad L = \frac{7}{9} \div \left(\frac{1}{3} - 2\right)$$

Niveau 5 : Calculer en respectant la priorité des opérations. Donner le résultat sous forme réduite

$$A = \frac{2 + \frac{1}{3}}{2 - \frac{1}{3}} \qquad B = \frac{6 - \frac{2}{5}}{6 + \frac{2}{5}} \qquad C = \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) \times 6}{\frac{2}{5} - \frac{4}{3}} \qquad D = \frac{1 + \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{3}}$$
$$E = \frac{-3}{5} \times \frac{5}{\frac{-6}{13}} \qquad F = \frac{4}{\frac{2}{3} - \frac{5}{6}} \qquad G = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} \qquad H = \frac{\frac{7}{-6} \times \frac{3}{-10}}{\frac{-14}{5} \times \frac{1}{-5}}$$

II. Puissance

a) Rappels

Définitions et notations	Formules	Puissances de 10
Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a : • $a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ facteurs}}$ • $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ facteurs}}}$ si $a \neq 0$ • $a^1 = a, \quad a^{-1} = \dfrac{1}{a}, \quad a^0 = 1$	Pour tout nombre relatif a non nul et pour tous nombres entiers relatifs m et p : • $a^n \times a^m = a^{m+p}$ • $\dfrac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$ • $(a^m)^p = a^{m \times p}$ • $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ • $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	Pour tout nombre entier n positif non nul : • $10^n = 1\underbrace{00...0}_{n \text{ zéros}}$ • $10^{-n} = \underbrace{0,0...0}_{n \text{ zéros}}1$

Exemple

1. $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
2. $3^{-5} = \dfrac{1}{3^5} = \dfrac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \dfrac{1}{243}$
3. $\pi^2 \times \pi^{-3} \times \pi = \pi^{2+(-3)+1} = \pi^0 = 1$
4. $\dfrac{(-2)^{-5}}{(-2)^{-6}} = (-2)^{-5-(-6)} = (-2)^{-5+6} = (-2)^1 = -2$
5. $\left(0,2^{-3}\right)^4 = 0,2^{-3\times 4} = 0,2^{-12}$
6. $(-6)^{-5} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-5} = \left(-6 \times \dfrac{1}{3}\right)^{-5} = (-2)^{-5}$
7. $\dfrac{1,5^7}{0,5^7} = \left(\dfrac{1,5}{0,5}\right)^7 = 3^7$
8. $10^4 = 10\ 000$
9. $10^{-3} = 0,001$
10. La Chine compte actuellement environ 1 376 000 000 habitants soit : $1\ \underbrace{376\ 000\ 000}_{9 \text{ chiffres}} = 1,376 \times 10^9$
11. La taille moyenne d'un globule rouge est de 0,000 007 2 mètre soit : $0,\underbrace{000\ 007}_{6 \text{ chiffres}}\ 2 = 7,2 \times 10^{-6}$

b) Exercices sur les puissances

Niveau 1 : Écrire sous la forme d'une puissance de 2 ou de 3

$$A = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \qquad B = 27 \qquad C = \frac{1}{32}$$

$$D = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} \qquad E = \frac{2}{128} \qquad F = (3 \times 3)^4$$

Niveau 2 : Écrire sous la forme d'un entier ou d'une fraction

$$A = 2^3 \qquad B = 5^2 \qquad C = 10^{-3} \qquad D = 2^{-2}$$

$$E = 2^3 \times 3^2 \qquad F = \frac{2^5}{2^9} \qquad G = \frac{2^{-3}}{5^{-2}} \qquad H = \left(2^{-4} \times 5^2\right)^2$$

$$I = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \qquad J = \left(\frac{-5}{6}\right)^2 \qquad K = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^3 \qquad L = \frac{1}{-8}\left(\frac{-5}{-3}\right)^3$$

Niveau 3 : Écrire sous la forme d'une puissance de 10

$$A = 10^4 \times 10^7 \qquad B = \frac{10^4}{10^7} \qquad C = \left(10^4\right)^7 \qquad D = 10^{-4} \times 10^7$$

$$E = \left(10^{-2}\right)^3 \times 10^4 \qquad F = \frac{10^2 \times 10^{-3}}{10^{-4}} \qquad G = \frac{\left(10^{-1}\right)^2 \times 10^4}{10^{-4}} \qquad H = 10^4 \times \frac{10^5 \times 10^{-2}}{10^7}$$

Niveau 4 : Donner l'écriture scientifique de chaque nombre

$$12\ 300\ 000 \qquad 0,000\ 000\ 075 \qquad 9\ 700\ 000\ 000 \qquad 0,000\ 000\ 001\ 75$$

$$32,5 \times 10^7 \qquad 0,08 \times 10^5 \qquad 76,1 \times 10^{-9} \qquad 0,007\ 5 \times 10^{-5}$$

$$850 \times 10^{12} \qquad 750\ 000 \times 10^9 \qquad 0,000\ 042 \times 10^{15} \qquad 0,4 \times 10^4$$

Niveau 5 : a, b et c étant trois nombres réels non nuls, écrire sous la forme $a^n b^p c^q$

$$A = \frac{a^2 \times b^5 \times c^7}{a^3 \times b^2 \times c^2} \qquad B = \frac{1}{b^3} \times \frac{ac}{b^2} \times \frac{a^3 b^2}{c^4} \qquad C = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \times \frac{a^{-2}}{c^{-3}} \times \left(\frac{b^{-2}}{c^3}\right)^{-2}$$

$$D = (ac)^3 \times \frac{1}{b^4} \times \left(\frac{b}{ac}\right)^{-1} \qquad E = \left(\frac{b}{ac}\right)^{-1} \times (ab)^3 \times \frac{1}{c^4} \qquad F = \left(\frac{b}{ac}\right)^{-1} \times \left(\frac{c^2}{a^3 b}\right)^{12}$$

III. Racine carrée

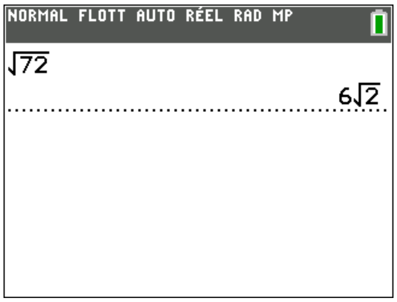
a) Rappels

Définition	Multiplication	Division
• La **racine carrée** d'un nombre positif a est le nombre positif notée $\sqrt{a}$, dont le carré est a. $$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$	• Pour tous nombres réels positifs a et b, $$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$	• Pour tous nombres réels positifs a et b, $(b \neq 0)$, $$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemple

1. $\sqrt{4} \times \sqrt{9} = \sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$
2. $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
3. $\sqrt{\dfrac{36}{25}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \dfrac{6}{5}$

Point Méthode (Comment simplifier une racine carrée)
Quand j'écris $\sqrt{72}$ sur ma calculatrice, elle me répond $6\sqrt{2}$. Comment fait-elle ?



Il faut d'abord décomposer le nombre 72 en faisant apparaître un carré parfait le plus grand possible :

- $72 = 3 \times 24$ ne convient pas car ni 3, ni 24 ne sont des carrés parfaits ;
- $72 = 9 \times 8$ semble convenir car 9 est bien un carré parfait, mais dans 8 il existe encore un carré parfait caché car $8 = 4 \times 2$;
- $72 = 36 \times 2$ convient tout à fait car 36 est un carré parfait et il n'y aucun carré parfait caché dans 2.

On peut alors effectuer la simplification :

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Remarque
Si nous n'avions pas remarqué la décomposition 36×2, on aurait pu partir de 9×8 tout en décomposant ensuite le nombre 8.

$$\sqrt{72} = \sqrt{9 \times 8} = \sqrt{9 \times 4 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 3 \times 2 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

b) Exercices sur les racines carrées

Niveau 1 : Calculer mentalement

$$\sqrt{4} \qquad \sqrt{100} \qquad \sqrt{900} \qquad \sqrt{0,01} \qquad \sqrt{(3,14)^2}$$
$$\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \qquad \sqrt{\frac{9}{25}} \qquad \sqrt{\frac{49}{36}} \qquad \sqrt{\frac{1}{81}} \qquad \sqrt{\frac{121}{100}}$$
$$\sqrt{3\ 600} \qquad \sqrt{0,04} \qquad \sqrt{10^6} \qquad \sqrt{4\times 10^8} \qquad \sqrt{(-1)^2}$$

Niveau 2 : Réduire les expressions

$$A = 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \qquad B = -\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} \qquad C = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$
$$D = 5\sqrt{5} - 6\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + \sqrt{5} \qquad E = -4\sqrt{11} + 11\sqrt{13} + 13\sqrt{11} \qquad F = 3\sqrt{7} - 3\sqrt{5} - 5\sqrt{7} + 7\sqrt{5}$$
$$G = -8\sqrt{2} - 2\sqrt{11} + 3\sqrt{11} - 7\sqrt{2} \qquad H = -4\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 8\sqrt{5}$$

Niveau 3 : Calculer les produits

$$A = \sqrt{2}\times 3\sqrt{2} \qquad B = 2\sqrt{7}\times\sqrt{7} \qquad C = 3\sqrt{5}\times 4\sqrt{5} \qquad D = -\sqrt{2}\times\sqrt{2}$$
$$E = -3\sqrt{2}\times\left(-5\sqrt{2}\right) \qquad F = 7\sqrt{3}\times\left(-2\sqrt{3}\right) \qquad G = 5\sqrt{5}\times\left(-2\sqrt{5}\right) \qquad H = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$$

Niveau 4 : Écrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où a, b et c sont des entiers

$$A = 2\left(2+\sqrt{5}\right) \qquad B = 3\left(6-\sqrt{2}\right) \qquad C = 5\left(3\sqrt{2}+4\right) \qquad D = -3\left(5\sqrt{3}-7\right)$$
$$E = \sqrt{3}\left(4+\sqrt{3}\right) \qquad F = -2\sqrt{5}\left(3\sqrt{5}+2\right) \qquad G = 5\sqrt{7}\left(-4+3\sqrt{7}\right) \qquad H = -9\sqrt{11}\left(-2\sqrt{11}-6\right)$$

Niveau 5 : Simplifier les racines carrées

$$\sqrt{18} \qquad \sqrt{12} \qquad \sqrt{20} \qquad \sqrt{96} \qquad \sqrt{50}$$
$$\sqrt{27} \qquad \sqrt{45} \qquad \sqrt{15} \qquad \sqrt{98} \qquad \sqrt{300}$$
$$\sqrt{40} \qquad \sqrt{99} \qquad \sqrt{54} \qquad \sqrt{32} \qquad \sqrt{75}$$
$$\sqrt{72} \qquad \sqrt{63} \qquad \sqrt{288} \qquad \sqrt{150} \qquad \sqrt{28}$$

IV. Calcul littéral

a) Développer, factoriser

Règle de priorités des opérations
On effectue en priorité :
- les calculs entre parenthèses,
- les calculs de puissances,
- les multiplications et divisions,
- les additions et soustractions.

Définitions
Développer une expression c'est l'écrire sous la forme d'une somme.
Factoriser une expression c'est l'écrire sous la forme d'une produit.

Exemple
- L'expression $x^2 + 34x - 1$ est développée car en respectant la priorité des opérations, il ne s'agit que de la somme des termes x^2, $34x$ et -1.
- L'expression $5x(x-3)(-2x+7)$ est factorisée car en respectant la priorité des opérations, il ne s'agit que du produit des facteurs $5x$, $(x-3)$ et $(-2x+7)$.
- L'expression $(x+1)^2 - 5$ n'est ni développée ni factorisée.
  Elle n'est pas développée car on peut développer l'expression $(x-1)^2$.
  Elle n'est pas factorisée car en respectant la priorité des opérations, la dernière opération effectuée est la différence entre $(x-1)^2$ et 5.

b) La distributivité simple

Propriété
Pour tous nombres réels k, a et b :

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a-b) = k \times a - k \times b$$

Exemple
1. Développement de l'expression $A = -3,5(x-2)$.
   Il est conseillé de ne pas écrire la deuxième ligne et de faire le calcul dans sa tête.

$$A = -3,5(x-2)$$
$$A = -3,5 \times x - -3,5 \times 2$$
$$A = -3,5x + 7$$

2. Factorisation de l'expression $B = 3x^2 - 9xy$.
   Il est conseillé de ne pas écrire la deuxième ligne et de faire le calcul dans sa tête.

$B = 3x \times x - 3x \times 3y$ On repère le facteur commun $3x$

$B = 3x \times (x - 3y)$ On écrit le facteur commun en premier, puis on recopie le reste

$B = 3x(x-3y)$

3. Factorisation de l'expression $C = (5x-7)(9x-2)-(5x-7)^2$

$$\begin{aligned}
C &= (5x-7)(9x+2)-(5x-7)(5x-7) && \text{On repère le facteur commun } (5x-7)\\
C &= (5x-7)[(9x+2)-(5x-7)] && \text{On écrit le facteur commun en premier, puis on recopie le reste}\\
C &= (5x-7)[9x+2-5x+7] && \text{On simplifie en respectant la règle des signes}\\
C &= (5x-7)(4x+9)
\end{aligned}$$

c) La double distributivité

PROPRIÉTÉ
Pour tous nombres réels a, b, c et d :

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

Exemple

1. Développement et simplification de l'expression $C = (3x+1)(y-4)$.
   Il est conseillé de ne pas écrire la deuxième ligne et de faire le calcul dans sa tête.

$$\begin{aligned}
D &= (3x+1)(y-4)\\
D &= 3x\times y+3x\times(-4)+1\times y+1\times(-4)\\
D &= 3xy-12x+y-4
\end{aligned}$$

2. Développement et simplification de l'expression $D = 7x(x-6)+(3x-2)(4x+5)$.
   Il est conseillé de ne pas écrire la deuxième ligne et de faire le calcul dans sa tête.

$$\begin{aligned}
E &= 7x(x-6)+(3x-2)(4x+5)\\
E &= 7x\times x+7x\times(-6)+3x\times 4x+3x\times 5+(-2)\times 4x+(-2)\times 5\\
E &= 7x^2-42x+12x^2+15x-8x-10\\
E &= 19x^2-35x-10
\end{aligned}$$

d) Développer avec des identités remarquables

Propriété
Pour tous nombres réels a et b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exemple

1. Développement et réduction de l'expression $E = (x+3)^2$.
   On utilise la première identité remarquable avec $a = x$ et $b = 3$.
   Il est conseillé de ne pas écrire la deuxième ligne et de faire le calcul dans sa tête.
   $$F = (x+3)^2$$
   $$F = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$$
   $$F = x^2 + 6x + 9$$
2. Développement et réduction de l'expression $F = (3x-5)^2$.
   On utilise la deuxième identité remarquable avec $a = 3x$ et $b = 5$.
   Il est conseillé de ne pas écrire la deuxième ligne et de faire le calcul dans sa tête.
   $$G = (3x-5)^2$$
   $$G = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$$
   $$G = 9x^2 - 30x + 25$$
3. Développement et réduction de l'expression $G = (7x+2)(7x-2)$.
   On utilise la troisième identité remarquable avec $a = 7x$ et $b = 2$.
   Il est conseillé de ne pas écrire la deuxième ligne et de faire le calcul dans sa tête.
   $$H = (7x+2)(7x-2)$$
   $$H = (7x)^2 - 2^2$$
   $$H = 49x^2 - 4$$

e) Factoriser avec des identités remarquables

Propriété
Pour tous nombres réels a et b :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Exemple
Il faut alors essayer de reconnaître une identité remarquable.

- S'il s'agit d'une somme de trois termes, c'est peut-être $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.
- S'il s'agit de trois termes avec une somme et une différence, c'est peut-être $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

Dans ces deux cas, on identifie a et b comme étant les racines carrées des deux extrémités de l'expression. Il ne reste plus qu'à vérifier que $2ab$ correspond bien au terme au milieu de l'expression. Si OUI, on peut appliquer l'identité remarquable. Si NON, l'expression n'est peut-être pas factorisable.

- S'il s'agit d'une différence de 2 carrées, c'est $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

1. Factorisation de l'expression $I = x^2 + 8x + 16$.

$I = x^2 + 8x + 16$	C'est la somme de trois termes, on pense à la 1ère identité remarquable
$a^2 + 2ab + b^2$	On compare avec l'identité
$a^2 = x^2$ et $b^2 = 16$	Les deux extrémités nous donne a et b
$a = x$ et $b = 4$	
donc $2ab = 2 \times x \times 4 = 8x$	On compare $2ab$ avec le terme au milieu de l'expression
$(a + b)^2$	On peut appliquer l'identité
$I = (x + 4)^2$	

2. Factorisation de l'expression $J = 4x^2 - 10x + 25$.

$J = 4x^2 - 10x + 25$	On pense à la 2ème identité remarquable
$a^2 - 2ab + b^2$	On compare avec l'identité
$a^2 = 4x^2$ et $b^2 = 25$	Les deux extrémités nous donne a et b
$a = 2x$ et $b = 5$	
donc $2ab = 2 \times 2x \times 5 = 20x \neq 10x$	On compare $2ab$ avec le terme au milieu de l'expression
$(a - b)^2$	On ne peut pas appliquer l'identité
$J = 4x^2 - 10x + 25$	Un élève de seconde ne peut pas dire si cette expression est factorisable

3. Factorisation de l'expression $K = 16x^2 - (x + 1)^2$.

$K = 16x^2 - (x + 1)^2$	C'est la différence de 2 carrés, on pense à la 3ème identité remarquable
$a^2 - b^2$	On compare avec l'identité
$a^2 = 16x^2$ et $b^2 = (x + 1)^2$	Les deux extrémités nous donne a et b
$a = 4x$ et $b = x + 1$	
$(a + b)(a - b)$	On applique l'identité
$K = [4x + (x + 1)]\,[4x - (x + 1)]$	
$K = [4x + x + 1]\,[4x - x - 1]$	On simplifie en respectant les règles de signe
$K = (5x + 1)(3x - 1)$	

f) Exercices sur le développement

Niveau 1 : Développer les expressions en utilisant la distributivité simple

$$A = 7(x+4) \qquad B = 4(7-2x) \qquad C = -3(x+7) \qquad D = -5(3x-2) \qquad E = -2x(5+4x) \qquad F = 3x^2(1-2x)$$

Niveau 2 : Développer les expressions en utilisant la distributivité double

$$\begin{array}{rrrr} A = (x+2)(x+3) & B = (x-7)(3x-2) & C = (1+2x)(3-x) & D = (-7x+6)(5-x^2) \\ E = (3x^2-4)(2x^2+5x) & F = (2x-5)(2x+5) & G = (x^2-3x)(x^2+3) & H = (2x^2+4)(3x^2-5) \end{array}$$

Niveau 3 : Développer les expressions en utilisant les identités remarquables

$$\begin{array}{rrrr} A = (x+3)^2 & B = (5-x)^2 & C = (2x+5)(2x-5) & D = (3+x)^2 \\ E = (x-2)^2 & F = (x+2)(x-2) & G = (x+5)^2 & H = (1-3x)^2 \\ I = (x+3)(x-3) & J = (2x+1)^2 & K = (3-x)^2 & L = (3x-1)(3x+1) \\ M = (3x+2)^2 & N = (3-5x)^2 & O = (5+3x)(5-3x) & P = (x^2+1)^2 \\ Q = (4-3x^2)^2 & R = (4x^2+3)(4x^2-3) & S = (4x^2+3x)(4x^2-3x) & T = (4x^2-3x)^2 \end{array}$$

Niveau 4 : Développer, réduire puis ordonner les expressions

$$\begin{array}{rrr} A = (x+1)^2 + (x-3)^2 & B = (2x+1)^2 - (x+3)^2 & C = (3-x)^2 + (x+5)^2 \\ D = (2x+3)^2 - (x-7)(x+7) & E = (x+2)^2 + (x+4)(x-4) & F = (x+2)(x-2) - (x-3)^2 \\ G = (x+1)(x-1) + (x+4)^2 & H = (x-5)^2 - (2x-7)(x-5) & \end{array}$$

Niveau 5 : Développer, réduire puis ordonner les expressions

$$\begin{array}{rrr} A = (x+1)^2 + 5(x-3)^2 & B = (2x+1)^2 - 2(x+3)^2 & C = (3-x)^2 + 8(x+5)^2 \\ D = (2x+3)^2 - 10(x-7)(x+7) & E = (x+2)^2 + x(x+4)(x-4) & F = (x+2)(x-2) - 2x(x-3)^2 \\ G = (x+1)(x-1) + 4x(x+4)^2 & H = (x-5)^2 - x^2(2x-7)(x-5) & \end{array}$$

g) Exercices sur la factorisation

Niveau 1 : Factoriser les expressions suivantes en repérant le facteur commun

$A = 2x^2 + 3x$ $\quad B = x^2 - 4x$ $\quad C = x^3 - 2x$ $\quad D = x^3 + 8x$ $\quad E = xy + 4x$

$F = 3x^2 - 6x$ $\quad G = 4xy - 5y$ $\quad H = xy + xz$ $\quad I = 3x^2 + 9x$ $\quad J = 4a + 12$

$K = 2x + 6y$ $\quad L = -7xy + 14y$ $\quad M = 5x^2 - 30x$ $\quad N = 3x^2 + x$ $\quad O = 5x^2 - x$

Niveau 2 : Factoriser les expressions suivantes en repérant le facteur commun

$A = 4(x+1) - x(x+1)$ $\quad B = 2x(x-1) + 3x(x-1)$ $\quad C = (x+1)(x+2) + 5(x+2)$ $\quad D = (x+1)^2 + 3(x+1)$

$E = (2x+1)^2 - (2x+1)(x+3)$ $\quad F = x^2(x+4) - 2x(x+4)$ $\quad G = (x-3)^2 - 2(x-3)(2x-1)$ $\quad H = (x+1)^2 + x + 1$

Niveau 3 : Factoriser les expressions en utilisant les identités remarquables

$A = x^2 + 10x + 25$ $\quad B = x^2 - 2x + 1$ $\quad C = x^2 - 4$ $\quad D = x^2 + 6x + 9$

$E = 4x^2 - 20x + 25$ $\quad F = 9 - x^2$ $\quad G = 36 + 12x + x^2$ $\quad H = 9 - 6x + x^2$

$I = 4x^2 - 9$ $\quad J = 4x^2 + 12x + 9$ $\quad K = 36x^2 - 12x + 1$ $\quad L = 16 - 9x^2$

$M = 16x^2 + 40x + 25$ $\quad N = 100 - 40x + 4x^2$ $\quad O = 49x^2 - 36$

Niveau 4 : Factoriser les expressions en utilisant l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$A = (x+1)^2 - 4$ $\quad B = (x+2)^2 - 9$ $\quad C = (2x+1)^2 - 25$ $\quad D = 16 - (3x+2)^2$

$E = 36 - (4-3x)^2$ $\quad F = (x+1)^2 - (2x+3)^2$ $\quad G = (2x-1)^2 - (5+x)^2$ $\quad H = (4x-1)^2 - (3x+4)^2$

$I = (3x-4)^2 - (6x+1)^2$ $\quad J = (x+6)^2 - (3x-1)^2$

Niveau 5 : Factoriser les expressions

$A = (x+2)(3x-1) + x^2 - 4$ $\quad B = (x+4)(2x-1) + x^2 - 16$ $\quad C = (x-3)(x+1) - (x^2 - 9)$

$D = (2x+1)(x-2) + x^2 - 4$ $\quad E = 25 - x^2 - (x-5)(2x+3)$ $\quad F = (2x+1)(-7x+5) + 36x^2 - 9$

V. Le langage de programmation Python

a) Les différentes symboles opératoires

Opération	Écriture en Python	Résultat
Addition $7+3$	`7 + 3`	`10`
Soustraction $7-3$	`7 - 3`	`4`
Multiplication 7×3	`7 * 3`	`21`
Division $7\div 3$	`7 / 3`	`2.3333333333333335`
Division entière de 7 par 3	`7 // 3`	`2`
Puissance 7^3	`7 ** 3`	`343`
Valeur absolue $\|-7\|$	`abs(-7)`	`7`
Arrondir 2 chiffres après la virgule	`round(7/3, 2)`	`2.33`

Pour obtenir des fonctions ou des constantes particulières, on doit au préalable importer le module `math` une seule fois au tout début du programme :

Opération	Écriture en Python	Résultat
Le nombre π	`from math import pi`	
	`2 * pi`	`6.283185307179586`
La fonction racine carrée $\sqrt{\ }$	`from math import sqrt`	
	`sqrt(25)`	`5.0`

Remarque
Si on a besoin de plusieurs constantes ou fonctions spécifiques dans un programme on peut les importer sur une seule ligne en les séparant par une virgule :

```
from math import pi, sqrt
```

b) Affectation de variable

Effet	Écriture en Python	Résultat
Affecter à la variable `a` la valeur 6	`a = 6`	`a` contient 6
Affecter à la variable `b` la valeur contenu de `a` plus 3	`b = a + 3`	`a` contient 6, `b` contient 9
Augmenter la variable `a` de 1	`a = a + 1`	`a` contient 7, `b` contient 9

Remarque
En python, le symbole `=` n'a pas la même signification qu'en mathématiques, notamment, il n'est pas symétrique. Ainsi, si on a `a = 6`, on n'a pas `a = 6`.
Il faut donc traduire `=` par « prend pour valeur ».
On pourrait mentalement remplacer ce symbole par une flèche : `a` $\leftarrow$ `6`. Ainsi `6` $\leftarrow$ `a` n'a aucun sens.

c) Fonctions

Une fonction en Python prend un ou plusieurs arguments en entrée, exécute un travail sur ces arguments et renvoie un ou plusieurs résultats en sortie.

Syntaxe	Commentaires
`def nom_fonction(argument1, argument2, ...) :`	La première ligne se termine par :
`  instructions éventuelles`	
`  instructions éventuelles`	
`  ...`	L'instruction `return` est nécessairement la dernière
`  return résultat1, résultat2, ...`	de la fonction.

Exemple (1)
La fonction suivante permet d'automatiser le calcul d'images de la fonction affine f d'expression $f(x) = 3x + 2$:

```
def f(x) :
    return 3*x + 2
```

Ainsi `f(5)` renvoie 17, `f(10)` renvoie 32, ...

```
>>> f(10)
32
```

Exemple (2)
La fonction suivante permet d'automatiser le calcul de l'IMC (arrondi au centième) d'une personne connaissant sa taille en mètre et son poids en kg :

```
def imc(taille, poids) :
    calcul = poids / (taille**2)
    calcul = round(calcul, 2)
    return calcul
```

Ainsi pour une personne de 1,80 m pour 70 kg, son IMC est donné par `imc(1.8, 70)` :

```
>>> imc(1.8, 70)
21.6
```

d) Structure conditionnelle `Si ... Alors ... Sinon ...`

Les différentes structures conditionnelles :

Syntaxe	Commentaires
`if condition :` `  instruction`	Si la `condition` est vraie : alors on exécute l'`instruction`

`if condition :`
`  instruction1`
`else :`
`  instruction2`
	Si la `condition` est vraie :
	alors on exécute l'`instruction1`
	sinon
	on exécute l'`instruction2`

`if condition1 :`
`  instruction1`
`elif condition2 :`
`  instruction2`
`else :`
`  instruction3`
	Si la `condition1` est vraie :
	alors on exécute l'`instruction1`
	sinon si la `condition2` est vraie :
	alors on exécute l'`instruction2`
	sinon
	on exécute l'`instruction3`

Pour exprimer une condition on utilise les opérateurs suivants :

Syntaxe	Commentaires
`<`	est plus petit :
`<=`	est plus petit ou égal :
`>`	est plus grand :
`>=`	est plus grand ou égal :
`==`	est égal :
`!=`	n'est pas égal :

Exemple (1)
La fonction suivante permet de déterminer lequel des deux nombres donnés en argument est le plus grand :

```python
def plusgrand(a, b) :
    if a > b :
        return a
    else :
        return b
```

Ainsi `plusgrand(5,4)` renvoie 5 :

```
>>> plusgrand(5,4)
5
```

et `plusgrand(-5,4)` renvoie 4 :

```
>>> plusgrand(-5,4)
4
```

Exemple (2)
Une attraction coûte un certain prix, mais les enfants de moins de 2 ans bénéficient d'une réduction de 90%, les enfants entre 2 et 12 d'une réduction de 60%, enfin les personnes de plus de 60 bénéficient eux d'une réduction de 20%. Les autres payent le plein tarif. La fonction suivante permet de déterminer le tarif en fonction du prix à payer de base et de l'âge du client :

```python
def tarif(age, prix) :
    if age <= 2 :
        apayer = prix * 0.1
    elif age <= 12 :
        apayer = prix * 0.4
    elif age >= 60 :
        apayer = prix * 0.8
    else :
        apayer = prix
    return apayer
```

Ainsi `tarif(1,32)` renvoie 3.2 :

```
>>> tarif(1,32)
3.2
```

et `tarif(62,45)` renvoie 36.0 :

```
>>> tarif(62,45)
36.0
```

e) Boucle bornée : boucle `Pour`

Pour répéter des instructions un nombre connu de fois :

Syntaxe	Commentaires
`for i in range(n) :` `  instruction`	Pour `i` allant de 0 à `n-1` : on fait l'`instruction` (on l'a donc répétée `n` fois...)
`for i in range(n,m) :` `  instruction`	Pour `i` allant de n à `m-1` : on fait l'`instruction` (on l'a donc répétée `m-n` fois...)

Exemple
La fonction suivante permet de calculer la somme des `n` premiers entiers :

```
def somme(n) :
    S = 0
    for i in range(n+1):
        S = S + i
    return S
```

Ainsi `somme(5)` renvoie le résultat de $1+2+3+4+5$

```
>>> somme(5)
15
```

et `somme(100)` renvoie le résultat de $1+2+3+4+5+...+100$

```
>>> somme(100)
5050
```

f) Boucle non bornée : boucle `Tant que`

Pour répéter des instructions un nombre connu de fois :

Syntaxe	Commentaires
`while condition :`	Pour Tant que la `condition` reste vraie :
`instruction`	on fait l'`instruction`
	(on ne sait pas combien de fois on l'a répétée...)

Exemple
La fonction suivante permet de calculer la somme des `n` premiers entiers jusqu'à ce qu'on dépasse un certain `seuil` :

```
def somme(seuil) :
    S = 0
    n = 1
    while S <= seuil:
        S = S + n
        n = n + 1
    return n, S
```

Ainsi `seuil(100)` renvoie le résultat de `(15, 105)`, autrement dit $1+2+3+4+5+...+15 \geq 100$
car $1+2+3+4+5+...+15 = 105$
(mais $1+2+3+4+5+...+14 < 100$).

```
>>> somme(100)
(15, 105)
```

g) Exercices sur le langage de programmation Python

Niveau 1 : Indiquer le résultat de chaque calcul en Python

```
3 + 2 * 5
```

```
5 ** 2
```

```
5 * 3 ** 2
```

```
5 / 2
```

```
5 / 2 * 3
```

```
3 + 4 * 7
```

```
2 ** 3
```

```
2 * 3 ** 2
```

Niveau 2 : Écrire l'expression algébrique correspondant à l'expression écrite en Python

```
2 + 3 * (x - 4)
```

```
5 * x ** 2 - 3 * x + 4
```

```
(3 * x - 1) * (2 * x + 1)
```

```
(2 * x + 1) / 3
```

```
1 / x + 2
```

```
x + 1 / (x + 1)
```

```
from math import pi
pi * r **  2 * h
```

```
from math import sqrt
sqrt(x**2 + 1)
```

```
from math import sqrt, pi
sqrt(V / (pi * h))
```

Niveau 3 : Donner la valeur demandée après exécution du programme

```
a = 1
b = 2*a + 3
c = b + 1
```

Valeur de `c`

```
a = 1
b = 2 + 3*a
c = b - a
```

Valeur de `c`

```
x = 4
x = x + 1
x = x * x
```

Valeur de `x`

```
cote = 3
P = 4 * cote
A = cote * cote
```

Valeurs de `A` et de `P`

```
a = 1
a = 2 + 3*a
a = a + 1
```

Valeur de `a`

```
a = 4
b = 5
a = a + b
b = a - b
```

Valeur de `b`

Niveau 4 : Donner la valeur demandée après exécution du programme

```
def f(x):
    return 3*x + 4
```

Que renvoie `f(-5)` ?

```
def g(t):
    return t**2 + 3*t - 4
```

Que renvoie `g(4)` ?

```
def aire(larg, longu):
    return larg * longu
```

Que renvoie `aire(3,8)` ?

```
def f(a, b):
    return a*b - a - b
```

Que renvoie `f(4, 3)` ?

```
def peri(l, L):
    return 2 * (l + L)
```

Que renvoie `peri(12, 3)` ?

```
def aire_tri(b, h):
    return b * h / 2
```

Que renvoie `aire_tri(10,8)` ?

Niveau 5 : Donner la valeur demandée après exécution du programme

```
def f(a):
    if a < 0:
        b = 2*a
    else :
        b = 3*a
    return b
```

Que renvoie `f(1)` ?
Que renvoie `f(-1)` ?

```
def f(a):
    if a >= 1:
        b = a - 1
    else :
        b = 2*a
    return b
```

Que renvoie `f(1)` ?
Que renvoie `f(-1)` ?

```
def f(a, b):
    if a > b:
        y = a - b
    else :
        y = b - a
    return y
```

Que renvoie `f(4, 7)` ?
Que renvoie `f(7, 4)` ?

```
def f(t):
    if t < 2:
        calcul = 2*t
    else :
        calcul = 2*(t - 2) + 1
    return calcul
```

Que renvoie `f(2)` ?
Que renvoie `f(-2)` ?

```
def f(x):
    if x != 0:
        return 1 / x
```

Que renvoie `f(0)` ?
Que renvoie `f(5)` ?

CHAPITRE 1

Calculs à la main - les corrections

I. Fraction

Niveau 1 : Réduire des fractions

(non corrigé)

Niveau 2 : Additionner ou multiplier des fractions. Donner le résultat sous forme réduite

$$A = -\frac{1}{2} \qquad B = \frac{5}{4} \qquad C = \frac{11}{6} \qquad D = -\frac{31}{10}$$
$$E = \frac{2}{3} \qquad F = -\frac{6}{35} \qquad G = \frac{7}{8} \qquad H = 10$$

Niveau 3 : Diviser deux fractions. Donner le résultat sous forme réduite

$$A = \frac{1}{4} \qquad B = \frac{9}{10} \qquad C = \frac{15}{2} \qquad D = -\frac{52}{35}$$
$$E = \frac{2}{105} \qquad F = \frac{54}{35} \qquad G = -2 \qquad H = \frac{7}{12}$$

Niveau 4 : Calculer en respectant la priorité des opérations. Donner le résultat sous forme réduite

$$A = \frac{22}{5} \qquad B = -\frac{9}{5} \qquad C = \frac{9}{5} \qquad D = \frac{29}{15}$$
$$E = -21 \qquad F = -\frac{3}{10} \qquad G = \frac{5}{2} \qquad H = \frac{13}{2}$$
$$I = 11 \qquad J = -9 \qquad K = -\frac{5}{3} \qquad L = -\frac{7}{15}$$

Niveau 5 : Calculer en respectant la priorité des opérations. Donner le résultat sous forme réduite

$$A = \frac{7}{5} \qquad B = \frac{7}{8} \qquad C = \frac{6}{7} \qquad D = \frac{6}{7}$$
$$E = \frac{13}{2} \qquad F = -24 \qquad G = \frac{42}{5} \qquad H = \frac{5}{8}$$

II. Puissance

Niveau 1 : Écrire sous la forme d'une puissance de 2 ou de 3

$$A = 2^4 \qquad B = 3^3 \qquad C = 2^{-5}$$
$$D = 3^2 \qquad E = 2^{-6} \qquad F = 3^8$$

Niveau 2 : Écrire sous la forme d'un entier ou d'une fraction

$$A = 8 \qquad B = 25 \qquad C = \frac{1}{1000} \qquad D = \frac{1}{4}$$
$$E = 72 \qquad F = \frac{1}{16} \qquad G = \frac{25}{8} \qquad H = \frac{625}{256}$$
$$I = \frac{9}{4} \qquad J = \frac{25}{36} \qquad K = \frac{27}{32} \qquad L = -\frac{125}{216}$$

Niveau 3 : Écrire sous la forme d'une puissance de 10

$$A = 10^{11} \qquad B = 10^{-3} \qquad C = 10^{28} \qquad D = 10^3$$
$$E = 10^{-2} \qquad F = 10^3 \qquad G = 10^6 \qquad H = 10^0 = 1$$

Niveau 4 : Donner l'écriture scientifique de chaque nombre

$$1,2 \times 10^7 \qquad 7,5 \times 10^{-8} \qquad 9,7 \times 10^9 \qquad 1,75 \times 10^{-9}$$
$$3,25 \times 10^8 \qquad 8 \times 10^3 \qquad 7,61 \times 10^{-8} \qquad 7,5 \times 10^{-8}$$
$$8,5 \times 10^{14} \qquad 7,5 \times 10^{14} \qquad 4,2 \times 10^{10} \qquad 4 \times 10^3$$

Niveau 5 : a, b et c étant trois nombres réels non nuls, écrire sous la forme d'une puissance de $a^n b^p c^q$

$$A = a^{-1}b^3c^5 \qquad B = a^4b^{-3}c^{-3} \qquad C = abc^9$$
$$D = a^4b^{-5}c^4 \qquad E = a^4b^2c^{-3} \qquad F = a^{-35}b^{-13}c^{25}$$

III. Racine carrée

Niveau 1 : Calculer mentalement

2	10	30	$0,1$	$3,14$
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{11}{10}$
60	$0,2$	10^3	2×10^4	1

Niveau 2 : Réduire les expressions

$$A=\sqrt{2} \qquad B=5\sqrt{5} \qquad C=0\sqrt{2}=0$$
$$D=-14\sqrt{3}+6\sqrt{5} \qquad E=9\sqrt{11}+11\sqrt{13} \qquad F=4\sqrt{5}-2\sqrt{7}$$
$$G=-15\sqrt{2}+\sqrt{11} \qquad H=-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+8\sqrt{5}$$

Niveau 3 : Calculer les produits

$$A=6 \qquad B=14 \qquad C=60 \qquad D=-2$$
$$E=30 \qquad F=-42 \qquad G=-50 \qquad H=2\sqrt{2}$$

Niveau 4 : Écrire sous la forme $a+b\sqrt{c}$ où a, b et c sont des entiers

$$A=4+2\sqrt{5} \qquad B=18-3\sqrt{2} \qquad C=20+15\sqrt{2} \qquad D=21-15\sqrt{3}$$
$$E=3+4\sqrt{3} \qquad F=-30-4\sqrt{5} \qquad G=105-20\sqrt{7} \qquad H=198+54\sqrt{11}$$

Niveau 5 : Simplifier les racines carrées

$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{6}$	$5\sqrt{2}$
$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{5}$	$\sqrt{15}$	$7\sqrt{2}$	$10\sqrt{3}$
$2\sqrt{10}$	$3\sqrt{11}$	$3\sqrt{6}$	$4\sqrt{2}$	$5\sqrt{3}$
$6\sqrt{2}$	$3\sqrt{7}$	$12\sqrt{2}$	$5\sqrt{6}$	$2\sqrt{7}$

IV. Calcul littéral

Exercices sur le développement

Niveau 1 : Développer les expressions en utilisant la distributivité simple

$A = 7x + 28$ $B = -8x + 12$ $C = -3x - 21$ $D = -15x + 10$ $E = -8x^2 - 10x$ $F = -6x^3 + 3x^2$

Niveau 2 : Développer les expressions en utilisant la distributivité double

$A = x^2 + 5x + 6$ $B = 3x^2 - 23x + 14$ $C = -2x^2 + 5x + 3$ $D = 7x^3 - 6x^2 - 35x + 30$
$E = 6x^4 + 15x^3 - 8x^2 - 20x$ $F = 4x^2 - 25$ $G = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 9x$ $H = 6x^4 + 2x^2 - 20$

Niveau 3 : Développer les expressions en utilisant les identités remarquables

$A = x^2 + 6x + 9$ $B = x^2 - 10x + 25$ $C = 4x^2 - 25$ $D = x^2 + 6x + 9$
$E = x^2 - 4x + 4$ $F = x^2 - 4$ $G = x^2 + 10x + 25$ $H = 9x^2 - 6x + 1$
$I = x^2 - 9$ $J = 4x^2 + 4x + 1$ $K = x^2 - 6x + 9$ $L = 9x^2 - 1$
$M = 9x^2 + 12x + 4$ $N = 25x^2 - 30x + 9$ $O = -9x^2 + 25$ $P = x^4 + 2x^2 + 1$
$Q = 9x^4 - 24x^2 + 16$ $R = 16x^4 - 9$ $S = 16x^4 - 9x^2$ $T = 16x^4 - 24x^3 + 9x^2$

Niveau 4 : Développer, réduire puis ordonner les expressions

$A = 2x^2 - 4x + 10$ $B = 3x^2 - 2x - 8$ $C = 2x^2 + 4x + 34$
$D = 3x^2 + 12x + 58$ $E = 2x^2 + 4x - 12$ $F = 6x - 13$
$G = 2x^2 + 8x + 15$ $H = -x^2 + 7x - 10$

Niveau 5 : Développer, réduire puis ordonner les expressions

$A = 6x^2 - 28x + 46$ $B = 2x^2 - 8x - 17$ $C = 9x^2 + 74x + 209$
$D = -6x^2 + 12x + 499$ $E = x^3 + x^2 - 12x + 4$ $F = -2x^3 + 13x^2 - 18x - 4$
$G = 4x^3 + 33x^2 + 64x - 1$ $H = -2x^4 + 17x^3 - 34x^2 - 10x + 25$

Exercices sur la factorisation

Niveau 1 : Factoriser les expressions suivantes en repérant le facteur commun

$$A = x(2x+3) \quad B = x(x-4) \quad C = x(x^2-2) \quad D = x(x^2+8) \quad E = x(y+4)$$
$$F = 3x(x-2) \quad G = y(4x-5) \quad H = x(y+z) \quad I = 3x(x+3) \quad J = 4(a+3)$$
$$K = 2(x+3y) \quad L = -7y(x-2) \quad M = 5x(x-6) \quad N = x(3x+1) \quad O = x(5x-1)$$

Niveau 2 : Factoriser les expressions suivantes en repérant le facteur commun

$$A = (4-x)(x+1) \quad B = 5x(x-1) \quad C = (x+6)(x+2)$$
$$D = (x+4)(x+1) \quad E = (2x+1)(x-2) \quad F = (x^2-2x)(x+4) = x(x-2)(x+4)$$
$$G = (x-3)(-3x-1) = -(x-3)(3x+1) \quad H = (x+1)(x+2)$$

Niveau 3 : Factoriser les expressions en utilisant les identités remarquables

$$A = (x+5)^2 \quad B = (x-1)^2 \quad C = (x+2)(x-2) \quad D = (x+3)^2$$
$$E = (2x-5)^2 \quad F = (3+x)(3-x) \quad G = (x+6)^2 \quad H = (x-3)^2$$
$$I = (2x-3)(2x+3) \quad J = (2x+3)^2 \quad K = (6x-1)^2 \quad L = (-3x+4)(3x+4)$$
$$M = (4x+5)^2 \quad N = (2x-10)^2 \quad O = (7x+6)(7x-6)$$

Niveau 4 : Factoriser les expressions en utilisant l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$A = (x-1)(x+3) \quad B = (x-1)(x+5) \quad C = (2x+6)(2x-4) = 4(x+3)(x-2)$$
$$D = (-3x-6)(3x-2) = -3(x+2)(3x-2) \quad E = (3x+2)(-3x+10) \quad F = (3x+4)(-x-2) = -(3x+4)(x+2)$$
$$G = (x-6)(3x+4) \quad H = (7x+3)(x-5) \quad I = (-9x+3)(3x+5)$$
$$J = (-2x+7)(4x+5)$$

Niveau 5 : Factoriser les expressions

$$A = (x+2)(4x-3) \quad B = (x+4)(3x-5) \quad C = -2(x-3)$$
$$D = (x-2)(3x+3) = 3(x-2)(x+1) \quad E = (-x+5)(3x+8) \quad F = (2x+1)(11x-4)$$

V. Exercices sur le langage de programmation Python

Niveau 1 : Indiquer le résultat de chaque calcul en Python

```
13
```

```
25
```

```
45
```

```
2.5
```

```
7.5
```

```
31
```

```
8
```

```
18
```

Niveau 2 : Écrire l'expression algébrique correspondant à l'expression écrite en Python

$2+3(x-4)$ $5x^2-3x+4$ $(3x-1)(2x+1)$

$\dfrac{2x+1}{3}$ $\dfrac{1}{x}+2$ $x+\dfrac{1}{x+1}$

$\pi r^2 h$ $\sqrt{x^2+1}$ $\sqrt{\dfrac{V}{\pi h}}$

Niveau 3 : Donner la valeur demandée après exécution du programme

`a` vaut 1 et `b` vaut 5 donc `c` vaut 6 `a` vaut 1 et `b` vaut 5 donc `c` vaut 4 `x` vaut 25

`P` vaut 12 et `A` vaut 9 `a` vaut 6 `a` vaut 9 donc `b` vaut 4

Niveau 4 : Donner la valeur demandée après exécution du programme

`f(-5)` vaut -11 `g(4)` vaut 24 `aire(3,8)` vaut 24

`f(4, 3)` vaut 5 `peri(12, 3)` vaut 30 `aire_tri(10,8)` vaut 40

Niveau 5 : Donner la valeur demandée après exécution du programme

`f(1)` renvoie 3
`f(-1)` renvoie -2

`f(1)` renvoie 0
`f(-1)` renvoie -2

`f(4, 7)` renvoie 3
`f(7, 4)` renvoie également 3

`f(2)` renvoie 1
`f(-2)` ernvoie -4

`f(0)` ne renvoie rien
(heureusement car on ne peut diviser par 0)
`f(5)` renvoie 0.2

CHAPITRE 1

Calculs à la main - les niveaux 6

I. Les calculs

a) Calcul fractionnaire - Niveau 6 :

Calculer les sommes suivantes en mettant au même dénominateur :

$$A = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{4x-3} \qquad B = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{3x-5} \qquad C = \frac{-2}{x-3} + \frac{1}{x-2} \qquad D = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+1}$$

b) Calcul de puissances - Niveau 6 :

Effectuer les calculs suivants :

$$A = (-1)^6 \qquad B = (-1)^{-5} \qquad C = -1^5 \qquad D = -1^{-6} \qquad E = (-1)^{-6} \qquad F = (-1)^5 \qquad G = -1^{-5} \qquad H = -1^6$$

c) Calcul de racines carrées - Niveau 6 :

Écrire sans radical au dénominateur (si besoin simplifier la racine carrée) :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad B = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad C = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \qquad D = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} \qquad E = \frac{-3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} \qquad F = \frac{4\sqrt{7}}{3\sqrt{21}}$$

Aide : Vous devez multiplier la fraction au numérateur et au dénominateur par le radical dont vous voulez vous débarrasser, ainsi pour A vous multiplierez par $\sqrt{2}$, pour E par $\sqrt{3}$...

d) Calcul de développements - Niveau 6 :

Développer, réduire puis ordonner les expressions :

$$A = (x+2)(-4x+3)(5x-7) \qquad B = (x^2+x+1)(3x^2-4x+4) \qquad C = (a+b+c)^2$$

$$D = (a+b)^3 \qquad E = (-x+4)(-2x+5)(x-6) \qquad F = (2x^2+4x+5)(-x^2-2x+1)$$

e) Calcul de factorisations - Niveau 6

Factoriser les expressions

$$A = (x+2)(3x-1) - x^2 + 4 \qquad B = (x+4)(2x-1) - x^2 + 16 \qquad C = (x-3)(x+1) - x^2 + 9$$

$$D = (2x+1)(x-2) + x^2 - 4 \qquad E = 25 - x^2 - 2(x-5)(2x+3) \qquad F = (2x+1)(-7x+5) - 36x^2 + 9$$

f) Le langage Python - Niveau 6

```
for i in range(4)
    calcul = 2*i
```

Donner toutes les valeurs prises par la variable `calcul`

```
for i in range(6):
    calcul = a**2
```

Donner toutes les valeurs prises par la variable `calcul`

```
calcul = 13
for i in range(4, 8):
    calcul = calcul + i
```

Donner toutes les valeurs prises par la variable `calcul`

```
def f(n):
    S = 0
    for i in range(n):
        S = S + 2*i + 1
    return S
```

Que renvoie `f(4)` ?

```
def f(n):
    S = 1
    for i in range(1, n):
        S = S * i
    return S
```

Que renvoie `f(5)` ?

```
def  f(a, n) :
    for i in range(n):
        a = a**2
    return a
```

Que renvoie `f(2,3)` ?

II. Les corrections

a) Calcul fractionnaire - Niveau 6 :

Calculer les sommes suivantes en mettant au même dénominateur

$$A=\frac{5x-1}{(x+2)\,(4x-3)} \qquad B=\frac{2x-9}{(x+4)\,(3x-5)} \qquad C=\frac{-x+1}{(x-3)\,(x-2)} \qquad D=\frac{2x+5}{(x-2)\,(x+1)}$$

b) Calcul de puissances - Niveau 6 :

Effectuer les calculs suivants :

$$A=1 \qquad B=-1 \qquad C=-1 \qquad D=-1 \qquad E=1 \qquad F=-1 \qquad G=-1 \qquad H=-1$$

c) Calcul de racines carrées - Niveau 6 :

Écrire sans radical au dénominateur (si besoin simplifier la racine carrée) :

$$A=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad B=\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad C=\frac{\sqrt{10}}{2} \qquad D=\frac{\sqrt{2}}{6} \qquad E=\frac{-3\sqrt{15}}{15} \qquad F=\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

d) Calcul de développements - Niveau 6 :

Développer, réduire puis ordonner les expressions :

$$A=-20x^3+3x^2+65x-42 \qquad B=3x^4-x^3+3x^2+4 \qquad C=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$D=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad E=2x^3-25x^2+98x-120 \qquad F=-2x^4-8x^3-11x^2-6x+5$$

e) Calcul de factorisations - Niveau 6

Factoriser les expressions

$$A=(x+2)(2x+1) \qquad B=(x+4)(x+3) \qquad C=-2(x-3)$$

$$D=(x-2)(3x+3)=3(x-2)(x+1) \qquad E=(x-5)(-5x-11)=-(x-5)(5x+11) \qquad F=(2x+1)(-25x+14)$$

f) Le langage Python - Niveau 6

Les valeurs prises par la variable `calcul` sont successivement 0, 2, 4, 6.

Les valeurs prises par la variable `calcul` sont successivement 0, 1, 4, 9, 16, 25.

Les valeurs prises par la variable `calcul` sont successivement 13, 17, 22, 28, 35

`f(4)` renvoie 16

`f(5)` renvoie 24

`f(2,3)` renvoie 256

Le reste est en Work in Progress !!! Ne pas en tenir compte
Le reste est en Work in Progress !!!
Le reste est en Work in Progress !!! Ne pas en tenir compte
Le reste est en Work in Progress !!!
Le reste est en Work in Progress !!! Ne pas en tenir compte
Le reste est en Work in Progress !!!
Le reste est en Work in Progress !!! Ne pas en tenir compte
Le reste est en Work in Progress !!!
Le reste est en Work in Progress !!! Ne pas en tenir compte
Le reste est en Work in Progress !!!
Le reste est en Work in Progress !!! Ne pas en tenir compte
Le reste est en Work in Progress !!!
Le reste est en Work in Progress !!! Ne pas en tenir compte
Le reste est en Work in Progress !!!
Le reste est en Work in Progress !!! Ne pas en tenir compte
Le reste est en Work in Progress !!!
Le reste est en Work in Progress !!! Ne pas en tenir compte
Le reste est en Work in Progress !!!
Le reste est en Work in Progress !!! Ne pas en tenir compte
Le reste est en Work in Progress !!!
Le reste est en Work in Progress !!! Ne pas en tenir compte
Le reste est en Work in Progress !!!
Le reste est en Work in Progress !!! Ne pas en tenir compte
Le reste est en Work in Progress !!!
Le reste est en Work in Progress !!! Ne pas en tenir compte
Le reste est en Work in Progress !!!
Le reste est en Work in Progress !!! Ne pas en tenir compte
Le reste est en Work in Progress !!!
Le reste est en Work in Progress !!! Ne pas en tenir compte
Le reste est en Work in Progress !!!
Le reste est en Work in Progress !!! Ne pas en tenir compte

CHAPITRE 1

Calculs à la main - les niveaux 7

I. Les calculs

a) Calcul fractionnaire - Niveau 7 :

Calculer les sommes suivantes en mettant au même dénominateur :

$$A = \frac{x}{x+2} + \frac{x}{4x-3} \qquad B = \frac{x}{x+4} - \frac{x}{3x-5} \qquad C = \frac{-2x}{x-3} + \frac{x}{x-2} \qquad D = \frac{3x}{x-2} - \frac{x}{x+1}$$

Aide : On ne développer jamais un dénominateur.

b) Calcul de puissances - Niveau 7 :

Les racines n-ièmes correspondent à une puissance fractionnaire.
Par exemple la racine carrée peut aussi s'exprimer comme une puissance $\frac{1}{2}$: $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{2\times\frac{1}{2}} = 3^1 = 3$.
La racine cubique peut aussi s'exprimer comme une puissance $\frac{1}{3}$: $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{2}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{3\times\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$.
Effectuer les calculs suivants :

$$A = 25^{\frac{1}{2}} \qquad B = 27^{\frac{1}{3}} \qquad C = 64^{\frac{1}{3}} \qquad D = 81^{\frac{1}{2}} \qquad E = 81^{\frac{1}{4}} \qquad F = 125^{\frac{1}{3}}$$

c) Calcul de racines carrées - Niveau 7 :

Écrire sans radical au dénominateur (si besoin simplifier la racine carrée) :

$$A = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \qquad B = \frac{2+5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \qquad C = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \qquad D = \frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{6}} \qquad E = \frac{2-3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} \qquad F = \frac{2+4\sqrt{7}}{3\sqrt{21}}$$

Aide : Vous devez multiplier la fraction au numérateur et au dénominateur par le radical dont vous voulez vous débarrasser, ainsi pour A vous multiplierez par $\sqrt{2}$, pour E par $\sqrt{3}$...

d) Calcul de développements - Niveau 7 :

Développer, réduire puis ordonner les expressions :

$$A = (x+2)(-4x^2+3)(5x-7) \qquad B = (x^3+x+1)(3x^2-4x+4) \qquad C = (a+b-c)^2$$
$$D = (a-b)^3 \qquad E = (-x+4)(-2x^2+5)(x^2-6) \qquad F = (2x^2+4x+5)(-x^3-2x^2+1)$$

e) Calcul de factorisations - Niveau 7

Factoriser les expressions

$$A = (x+2)(3x-1) - 2x^2 + 8 \qquad B = (x+4)(2x-1) - 4x^2 + 64 \qquad C = (x-3)(x+1) - 3x^2 + 27$$
$$D = (2x+1)(x-2) + 2x^2 - 8 \qquad E = 100 - 4x^2 - 2(x-5)(2x+3) \qquad F = (2x+1)(-7x+5) - 12x^2 + 3$$

II. Les corrections

a) Calcul fractionnaire - Niveau 7 :

Calculer les sommes suivantes en mettant au même dénominateur

$$A = \frac{5x^2 - x}{(x+2)(4x-3)} \qquad B = \frac{2x^2 - 9x}{(x+4)(3x-5)} \qquad C = \frac{-x^2 + x}{(x-3)(x-2)} \qquad D = \frac{2x^2 + 5x}{(x-2)(x+1)}$$

b) Calcul de puissances - Niveau 7 :

Effectuer les calculs suivants :

$$A = 5 \qquad B = 3 \qquad C = 4 \qquad D = 9 \qquad E = 3 \qquad F = 5$$

c) Calcul de racines carrées - Niveau 7 :

Écrire sans radical au dénominateur (si besoin simplifier la racine carrée) :

$$A = \frac{\sqrt{2} - 2}{2} \qquad B = \frac{2\sqrt{3} + 15}{3} \qquad C = \frac{\sqrt{10} - 2}{2} \qquad D = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{18} \qquad E = \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{15}}{15} \qquad F = \frac{2\sqrt{21} + 28\sqrt{3}}{63}$$

d) Calcul de développements - Niveau 7 :

Développer, réduire puis ordonner les expressions :

$$A = -20x^4 - 12x^3 + 71x^2 + 9x - 42 \qquad B = 3x^5 - 4x^4 + 7x^3 - x^2 + 4 \qquad C = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$
$$D = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad E = 2x^5 - 8x^4 - 17x^3 + 68x^2 + 30x - 120 \qquad F = -2x^5 - 8x^4 - 13x^3 - 8x^2 + 4x + 5$$

e) Calcul de factorisations - Niveau 7

Factoriser les expressions

$$A = (x+2)(x+3) \qquad B = (x+4)(-2x+15) \qquad C = (x-3)(-2x-8) = -2(x-3)(x+4)$$
$$D = (x-2)(4x+5) \qquad E = (x-5)(-8x-26) = -2(x-5)(4x+13) \qquad F = (2x+1)(-13x+8)$$

CHAPITRE 1

Calculs à la main - les niveaux 8

I. Les calculs

a) Calcul fractionnaire - Niveau 8 :

Calculer les sommes suivantes en mettant au même dénominateur :

$$A = \frac{x-1}{x+2} + \frac{1}{x} \qquad B = \frac{x+2}{x+4} - \frac{1}{x} \qquad C = \frac{-2x+1}{x-3} + \frac{1}{x} \qquad D = \frac{3x-1}{x-2} - \frac{1}{x}$$

Rappel : On ne développer jamais un dénominateur.

b) Calcul de puissances - Niveau 8 :

Les racines n-ièmes correspondent à une puissance fractionnaire.
Par exemple la racine carrée peut aussi s'exprimer comme une puissance $\frac{1}{2}$: $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{2\times\frac{1}{2}} = 3^1 = 3$.
La racine cubique peut aussi s'exprimer comme une puissance $\frac{1}{3}$: $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{2}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{3\times\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$.
Effectuer les calculs suivants :

$$A = 32^{\frac{1}{5}} \qquad B = 27^{\frac{1}{3}} \qquad C = 64^{\frac{1}{6}} \qquad D = 121^{\frac{1}{2}} \qquad E = 125^{\frac{1}{3}} \qquad F = 625^{\frac{1}{4}}$$

c) Calcul de racines carrées - Niveau 8 :

Écrire sans radical au dénominateur (si besoin simplifier la racine carrée) :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \qquad B = \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \qquad C = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} \qquad D = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} \qquad E = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} \qquad F = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$$

Aide : Vous devez multiplier la fraction au numérateur et au dénominateur par ce qu'on appelle l'expression conjuguée du dénominateur. L'expression conjuguée est le facteur manquant dans l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Exemple :

$$\begin{aligned}A = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\\ &= \frac{1\times(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})\times(\sqrt{2}+\sqrt{3})}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2}\text{car on a reconnu l'identité remarquable au dénominateur}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-1}\\ &= -\sqrt{2}-\sqrt{3}\end{aligned}$$

d) Calcul de développements - Niveau 8 :

Développer, réduire puis ordonner les expressions :

$$A = -3(x-4)^2+1 \qquad B = 2(x+5)^2-10 \qquad C = 3(x+4)^2-1$$
$$D = -2(x-5)^2+10 \qquad E = 3(x-4)^2-1 \qquad F = -2(x-5)^2-10$$

e) Mise sous forme canonique - Niveau 8

~~Forme factorisée~~ Mettre sous forme canonique les expressions suivantes :

$$A = -3x^2+24x-47 \qquad B = 2x^2+20x+40 \qquad C = 3x^2+24x+47$$
$$D = -2x^2+20x+60 \qquad E = 3x^2-24x+47 \qquad F = -2x^2+10x-60$$

II. Les corrections

a) Calcul fractionnaire - Niveau 8 :

Calculer les sommes suivantes en mettant au même dénominateur :

$$A = \frac{x^2+2}{x(x+2)} \qquad B = \frac{x^2+x-4}{x(x+4)} \qquad C = \frac{-2x^2+2x-3}{x(x-3)} \qquad D = \frac{3x^2-2}{x(x-2)}$$

Rappel : On ne développer jamais un dénominateur.

b) Calcul de puissances - Niveau 8 :

$$A = 2 \qquad B = 3 \qquad C = 2 \qquad D = 11 \qquad E = 5 \qquad F = 5$$

c) Calcul de racines carrées - Niveau 8 :

Écrire sans radical au dénominateur (si besoin simplifier la racine carrée) :

$$A = -\sqrt{2}-\sqrt{3} \qquad B = -2\sqrt{2}+2\sqrt{3} \qquad C = -\frac{5+\sqrt{10}}{3} \qquad D = -1+\sqrt{2} \qquad E = \frac{5-\sqrt{15}}{2} \qquad F = -\frac{7+\sqrt{21}}{4}$$

d) Calcul de développements - Niveau 8 :

Développer, réduire puis ordonner les expressions :

$$A = -3x^2 + 24x - 47 \qquad B = 2x^2 + 20x + 40 \qquad C = 3x^2 + 24x + 47$$
$$D = -2x^2 + 20x + 60 \qquad E = 3x^2 - 24x + 47 \qquad F = -2x^2 + 10x - 60$$

e) Mise sous forme canonique - Niveau 8

~~Forme factorisée~~ Mettre sous forme canonique les expressions suivantes :

$$A = -3(x-4)^2 + 1 \qquad B = 2(x+5)^2 - 10 \qquad C = 3(x+4)^2 - 1$$
$$D = -2(x-5)^2 + 10 \qquad E = 3(x-4)^2 - 1 \qquad F = -2(x-5)^2 - 10$$