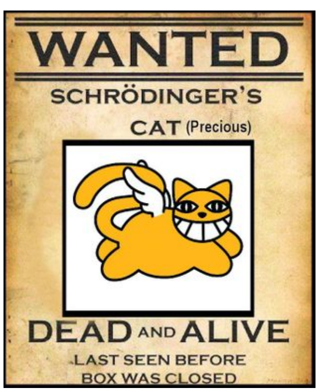
CHAPITRE 10

Variables aléatoires réelles

Extrait du programme



Référence :
Le chat de Schrödinger
https://fr.wikipedia.org/wiki/Chat_de_Schrödinger

Contenus

- Variable aléatoire réelle : modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire ; formalisation comme fonction définie sur l'univers et à valeurs réelles.
- Loi d'une variable aléatoire.
- Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire.

Capacités attendues

- Interpréter en situation et utiliser les notations $\{X = a\}$, $\{X \leq a\}$, $P(X = a)$, $P(X \leq a)$. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Calculer une espérance, une variance, un écart type.
- Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème (mise pour un jeu équitable...).

Exemples d'algorithmes

- Algorithme renvoyant l'espérance, la variance ou l'écart type d'une variable aléatoire.
- Fréquence d'apparition des lettres d'un texte donné, en français, en anglais.

Approfondissements possibles

- Formule de König-Huygens.
- Pour X variable aléatoire, étude de la fonction du second degré $x \mapsto E((X - x)^2)$.

Expérimentations Le travail expérimental de simulation d'échantillons prolonge celui entrepris en seconde. L'objectif est de faire percevoir le principe de l'estimation de l'espérance d'une variable aléatoire, ou de la moyenne d'une variable statistique dans une population, par une moyenne observée sur un échantillon.

- Simuler une variable aléatoire avec Python.
- Lire, comprendre et écrire une fonction Python renvoyant la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire.
- Étudier sur des exemples la distance entre la moyenne d'un échantillon simulé de taille n d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable aléatoire.
- Simuler, avec Python ou un tableur, N échantillons de taille n d'une variable aléatoire, d'espérance μ et d'écart type σ. Si m désigne la moyenne d'un échantillon, calculer la proportion des cas où l'écart entre m et μ est inférieur ou égal à $2n/\sqrt{\sigma}$.

Introduction

On mise 5 euros et on lance deux fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.
On reçoit 7 euros si on a deux fois face.
On reçoit 6 euros si on a une fois face.
On ne reçoit rien si on n'a pas de face.
On veut étudier les probabilités de chaque gain (une perte est un gain négatif).

On remarque dans cet exemple que ce n'est pas le résultat de l'expérience aléatoire (pile ou face) qui nous intéresse, mais bien les gains possibles, leurs probabilités d'apparition et, pourquoi pas, le gain moyen que l'on peut espérer à ce jeu.
Nous allons pouvoir répondre à toutes ces questions à l'aide d'une « variable aléatoire ».

I. Variable aléatoire et loi de probabilité

Définitions
On considère un ensemble fini Ω et une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω.
Une **variable aléatoire** X sur Ω est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $x_1, x_2, ..., x_r$ désignent les valeurs prises par X,
on note « $X = x_i$ » l'événement « X prend la valeur x_i ».

On définit une nouvelle **loi de probabilité** associée à X, par la donnée des réels x_i et des probabilités $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ pour $1 \leq i \leq r$.

x_i	x_1	x_2	...	x_r	Total
$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_r	1

Exemple
Soit X la variable aléatoire donnant le gain au jeu décrit en introduction.
Donner la loi de probabilité de X.
On commence par déterminer l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire X.

$$X = \{-5; ....; ....\}$$

Ensuite pour chacune de ces valeurs, on calcule la probabilité que cette variable puisse prendre cette valeur.

$$\mathbb{P}(X = -5) = ...$$

$$\mathbb{P}(X = ...) = ...$$

$$\mathbb{P}(X = ...) = ...$$

Enfin, on récapitule tous ces résultats dans un tableau :

x_i	-5	....	....	Total
$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$	....	....	....	....

Questions à Choix Multiple n° 1
On lance deux dé à 4 faces parfaitement équilibré. Soit X la variable aléatoire correspondant au à la somme des résultats des deux dés.

1. $\mathbb{P}(X=2)=$ a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{5}{16}$
2. $\mathbb{P}(X=5)=$ a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{5}{16}$
3. $\mathbb{P}(X\geq 10)=$ a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{5}{16}$

II. Espérance, variance, écart-type

En statistique vous avez déjà vu des indicateurs de position (la moyenne ou la médiane) et des indicateurs de dispersion (1$^{\text{er}}$ quartile et 3$^{\text{ième}}$ quartile).

Définitions
Soit X une variable aléatoire de la loi de probabilité $(x_i;p_i)$, $1\leq i\leq r$. On appelle :

- L'**espérance** d'une variable aléatoire X, noté $\mathbb{E}(X)$ est donnée par :

$$\boxed{\mathbb{E}(X)=p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}$$

  $\mathbb{E}(X)$ est une estimation de la moyenne des valeurs de X, lorsque l'expérience est répétée un très grand nombre de fois.

- La **variance** d'une variable aléatoire X, notée $V(X)$ est donnée par :

$$V(X)=p_1\left(x_1-\mathbb{E}(X)\right)^2+p_2\left(x_2-\mathbb{E}(X)\right)^2+...+p_n\left(x_n-\mathbb{E}(X)\right)^2$$
$$V(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i\left(x_i-\mathbb{E}(X)\right)^2$$

  $V(X)$ est aussi donnée par une formule plus simple à utiliser obtenu par le théorème de König-Huygens :

$$V(X)=p_1x_1^2+p_2x_2^2+...+p_nx_n^2-\left[\mathbb{E}(X)\right]^2=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^2-\left[\mathbb{E}(X)\right]^2$$

$$\boxed{V(X)=\mathbb{E}(X^2)-\left[\mathbb{E}(X)\right]^2}$$

- L'**écart-type** d'une variable aléatoire X, noté $\sigma(X)$ est donné par :

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$$

  L'écart-type évalue la dispersion des valeurs de X autour de l'espérance.

Remarque
Les notions de variance et d'écart-type existent aussi en statistique.

Exemple
Soit X la variable aléatoire donnant le gain au jeu décrit en introduction. Nous avions le tableau suivant :

x_i	-5	1	2	Total
$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire de X.
2. Ce jeu est-il **favorable**, **défavorable** ou **équitable** ?
3. Calculer la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

Questions à Choix Multiple n° 2
Un ingénieur et un physicien font une promenade en ballon. Il faisait beau au départ, mais le temps se couvre, et ils finissent par se perdre complètement dans les nuages. Par chance, il y a une éclaircie, et ils voient quelqu'un au sol. Il lui crient :
- Où sommes nouuuuuuuuuuuuuus ?
Et la personne répond :
- Dans un ballooooooooooooon.
Ah, dit l'ingénieur au physicien, c'est sûrement un mathématicien qui a répondu. Mais comment le sais-tu ? demande le physicien. C'est qu'il satisfait deux propriétés caractéristiques :
(1) la réponse est parfaitement exacte ;
(2) elle est également parfaitement inutile.

III. Propriété

Propriété
Soit X une variable aléatoire et soient a et b deux nombres réels.
Alors on a :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

et

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Démonstration
(faite en classe)

Exemple

1. On souhaite rendre le jeu décrit en introduction équitable.
   Donner la nouvelle variable aléatoire Y donnant les nouveaux gains possibles.
2. On souhaite minimiser le **degré de risque** de ce jeu, autrement dit réduire la dispersion des valeurs.
   Donner une nouvelle variable aléatoire Z donnant de nouveaux gains possibles.

Questions à Choix Multiple n° 3
- Tu veux une blague ?
- Oui
- $9x^2 + 8x + 3$ MDDDDRRRR
- J'ai pas compris..
- Normal, c'est du second degré.

CHAPITRE 10

Variables aléatoires réelles - Exercices

Les exercices proviennent de la page première S du site ***Lycée d'adultes de la ville de Paris*** *:*
`http://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/pages/math1S.html`.
Les fiches d'exercices proviennent, elles, du site ***Maths en ligne*** *:* `http://www.mathsenligne.net`.
La dernière fiche est un problème proposé aux Olympiades de mathématiques 2018.

Exercice 1 (Loi de probabilité)
Un dé est déséquilibré de sorte que la probabilité de sortie de chacune des faces est proportionnelle à son numéro. Donner la loi de probabilité définie sur l'ensemble des 6 faces.

Exercice 2 (Diagramme de Venn)
Trois revues scientifiques A, B et C sont mises à la disposition des élèves d'un lycée. On sait que :
- 52% ont lu A, 43% ont lu B et 37% ont lu C ;
- 22% ont lu A et B, 15% ont lu A et C et 13% ont lu B et C ;
- 8% ont lu les trois revues.

On interroge un élève au hasard.

1. Construire un diagramme de Venn représentant la situation.
2. Quelle est la probabilité :
   (a) que l'élève ait lu seulement une revue ?
   (b) que l'élève n'ait lu aucune revue ?

Exercice 3 (Tableau à double entrée)
Sur les 485 candidats au baccalauréat général d'un lycée, on sait que :
- 370 ont été reçus dont 212 filles ;
- 40 garçons n'ont pas été reçus.

On appelle F l'événement « le candidat est une fille » et R « le candidat est reçu ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un tableau à double entrée.
2. On rencontre par hasard un candidat, quelle est la probabilité que ce candidat soit :
   (a) un garçon reçu ?
   (b) une fille non reçu ?
   (c) non reçu ?
3. On rencontre par hasard un garçon candidat. Quelle est la probabilité qu'il soit reçu ?
4. On rencontre par hasard un élève non reçu. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

Feuille d'exercices du site Maths en ligne : Variables aléatoires

Rappel : Si X est une variable aléatoire discrète

Loi de probabilité

Valeurs de X	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Fonction de répartition

Valeurs de X	x_1	x_2	…	x_n
$P(X \leq x_i)$	p_1	$p_1 + p_2$	…	$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

EXERCICE 4A.1

On lance 4 fois successivement une pièce de monnaie. On appelle X le nombre de fois où l'on obtient « FACE ».

1. Quelle sont les différentes valeurs que peut prendre X ?

2. a. Représenter la loi de probabilité de X dans un tableau.

b. Représenter graphiquement la loi de probabilité de X.

3. a. Représenter la fonction de répartition de X dans un tableau.

b. Tracer la courbe cumulative (= représentation graphique de la fonction de répartition).

EXERCICE 4A.2

Une urne contient cinq boules numérotées de 0 à 4. On tire au hasard trois boules simultanément. Soit X, la somme des numéros marqués sur ces boules.

1. Quelle sont les différentes valeurs que peut prendre X ?

2. a. Représenter la loi de probabilité de X dans un tableau.

b. Représenter graphiquement la loi de probabilité de X.

3. a. Représenter la fonction de répartition de X dans un tableau.

b. Tracer la courbe cumulative (= représentation graphique de la fonction de répartition).

EXERCICE 4A.3

On lance deux dés à six faces et on appelle X la somme des résultats obtenus.

a. Quelle sont les différentes valeurs que peut prendre X ?

b. Donner la loi de probabilité de X.

EXERCICE 4A.4

On tire au hasard une carte dans un jeu qui en contient 32. On définit la variable aléatoire X qui attribue à chaque carte la valeur suivante :

- Un as vaut 11 points
- Un roi vaut 4 points
- Une dame vaut 3 points
- Un valet vaut 2 points.
- Les autres cartes valent 0 points

Donner la loi de probabilité de X.

EXERCICE 4A.5

On lance une pièce, et on note X le numéro du 1er lancer qui nous permettra d'obtenir « PILE »

Donner la loi de probabilité de X.

EXERCICE 4A.6

Une urne contient quatre boules noires et quatre boules blanches. On tire simultanément quatre boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules noires tirées.

Déterminer la loi de probabilité de X.

EXERCICE 4A.7

Une salle de spectacle propose pour la saison des abonnements pour 4, 5 ou 6 spectacles. Dans la population des abonnés la répartition est la suivante:

- 43,5% ont choisi l'abonnement 4 spectacles;
- 33% ont choisi l'abonnement 5 spectacles;
- le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles.

D'autre part, 65% des abonnés sont des jeunes de moins de 25 ans, et dans cette population, la répartition est différente :

- 40% ont choisi l'abonnement 4 spectacles;
- 40% ont choisi l'abonnement 5 spectacles;
- le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles.

On interroge un abonné au hasard.

On note A l'événement « l'abonné interrogé a moins de 25 ans ». Ainsi, la probabilité P(A) de cet événement est 0,65.

On note B l'événement « l'abonné interrogé a choisi 5 spectacles ».

1. a. Quelle est la probabilité que l'abonné interrogé ait 25 ans ou plus?

b. Sachant que l'abonné interrogé a moins de 25 ans, quelle la probabilité qu'il ait choisi 5 spectacles?

c. Décrire l'événement $A \cap B$ et démontrer que la probabilité de cet événement est égale à 0,26.

2. a. Démontrer que la probabilité $P(\overline{A} \cap B)$ est égale à 0,07.

b. En déduire la probabilité conditionnelle de B sachant que $\overline{A}$ est réalisé.

3. L'abonnement pour 4 spectacles coût 50 €, celui pour 5 spectacles coûte 60 €, et celui pour 6 spectacles coûte 70 €. On appelle X la variable aléatoire égale à la somme dépensée par l'abonné interrogé.

Donner la loi de probabilité de X.

Feuille d'exercices du site Maths en ligne : Variances et écart-types

Rappel : Si X est une variable aléatoire discrète

Espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Variance :

$$\text{Var}X = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Ecart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}X}$$

Exercice 4B.1

1. Dans un jeu d'argent, on appelle X le gain. Cette variable aléatoire obéit à la loi de probabilité suivante :

Valeurs de X	0	1	10	100
Valeurs de X^2				
$P(X = x_i)$	0,85	0,10	0,04	0,01

a. Déterminer l'espérance mathématique de X.
b. Compléter le tableau puis calculer l'espérance de X^2.
c. En déduire la variance puis l'écart-type de X.

2. Dans un autre jeu d'argent, on appelle Y le gain. Cette variable aléatoire obéit à la loi de probabilité suivante :

Valeurs de Y	1	2	4
Valeurs de Y^2			
$P(Y = y_i)$	0,8	0,20	0,10

a. Déterminer l'espérance mathématique de Y.
b. Compléter le tableau puis calculer l'espérance de Y^2.
c. En déduire la variance puis l'écart-type de Y.

3. Dans un autre jeu d'argent, on appelle Z le gain. Cette variable aléatoire obéit à la loi de probabilité suivante :

Valeurs de Z	0	10	10 000
Valeurs de Z^2			
$P(Z = z_i)$	0,8995	0,1	0,000 05

a. Déterminer l'espérance mathématique de Z.
b. Compléter le tableau puis calculer l'espérance de Z^2.
c. En déduire la variance puis l'écart-type de Z.

4. Parmi tous ces jeux :
a. Lequel est le plus rentable pour le joueur ?
b. Subjectivement, lequel aura le plus de succès ?

Exercice 4B.2

Dans une usine qui fabrique des ampoules électriques, grâce à des tests, on parvient à définir la variable aléatoire X qui à une ampoule prise au hasard associe sa durée de vie (en jours).

Voici la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	123	124	125	126	127
$P(X = x_i)$	0,03	0,24	0,46	0,23	0,04

Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

Exercice 4B.3

Dans une entreprise de location dispose d'une flotte de 50 voitures. Une étude statistique a permis de définir la variable aléatoire X qui correspond au nombre de voitures en panne un jour pris au hasard.

Voici la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,04	0,134	0,259	0,349	0,215	0,003

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

Exercice 4B.4

1. On invente un jeu d'argent qui fonctionne de la façon suivante :

- Je lance un dé à 6 faces, non pipé.
- Si j'obtiens 2, 3, 4 ou 5, je ne gagne rien.
- Si j'obtiens 1, je gagne 1€.
- Si j'obtiens 6, je gagne 11€

On appelle X la loi de probabilité qui correspond au gain du joueur.
a. Ecrire la loi de probabilité de X.
b. Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

2. Evidemment, ce jeu d'argent n'est pas gratuit : pour jouer, il faut d'abord miser 2€. On appelle Y la variable aléatoire qui représente le *gain net*, c'est-à-dire « gain – mise ».
a. Ecrire la loi de probabilité de Y.
b. Calculer l'espérance et l'écart-type de Y.

Exercice 4B.5

Le LOTO® permet de gagner beaucoup d'argent en choisissant 5 numéros parmi 49 dans une grille et un numéro chance parmi 10.

Voici le tableau des gains :

Combinaison	1 chance sur…	Gain (brut)
5 n°+ n°chance	19 068 840	3 000 000 €
5 n°	2 118 760	100 000 €
4 n°	211 876	750 €
3 n°	18 424	8 €
2 n°	1 176	4 €
n° chance	10	2 €

Sachant que la mise est de 2€ par grille, déterminer la loi de probabilité du gain net, son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.

Problème n°3 des Olympiades de Mathématiques 2018 :

METROPOLE – EUROPE – ORIENT - AFRIQUE

Les candidats concourent individuellement

Exercice 3 : Boules de même couleur
Séries autres que S

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant n boules pouvant être de différentes couleurs.
Le jeu consiste à extraire au hasard une boule de l'urne, puis sans remettre celle-ci dans l'urne à extraire une seconde boule de l'urne. Le joueur a gagné lorsque les deux boules tirées sont de la même couleur.
On admet qu'à chaque tirage, toutes les boules de l'urne ont la même probabilité d'être tirées.
On dit que le jeu est équitable lorsque la probabilité $P(G)$ que le joueur gagne est égale à $\frac{1}{2}$.

1. ***a.*** Démontrer que si l'urne contient 10 boules dont 4 blanches et 6 rouges alors $P(G) = \frac{7}{15}$.
   b. Calculer $P(G)$ lorsque l'urne contient 12 boules dont 4 blanches, 6 rouges et 2 noires.
2. Dans cette question, l'urne contient 6 boules rouges et d'autres boules qui sont toutes blanches.
   a. Soit x le nombre de boules blanches contenues dans l'urne.
   Démontrer que $P(G) = \frac{x(x-1)+30}{(x+6)(x+5)}$.
   b. Combien faudrait-il de boules blanches pour que le jeu soit équitable ?
3. Dans cette question, l'urne ne contient que des boules de deux couleurs différentes.
   a. On suppose que l'urne présente la configuration (a, b) c'est-à-dire qu'elle contient, par exemple, a boules rouges et b boules blanches. Démontrer que le jeu est équitable lorsque $n = (a - b)^2$.
   b. Réciproquement démontrer que si n est le carré d'un entier p alors il existe deux entiers naturels a et b avec $a \geq b$ que l'on exprimera en fonction de p tels que la configuration (a, b) conduise à un jeu équitable.
   c. Donner six couples (a, b) conduisant à un jeu équitable.
4. Dans cette question, l'urne contient des boules de trois couleurs différentes selon la configuration (a, b, c), c'est-à-dire, par exemple, a boules blanches, b rouges et c noires.
   a. Montrer que si $n = 13$, le jeu est équitable lorsque $a^2 + b^2 + c^2 = 91$. En déduire une configuration (a, b, c) conduisant à un jeu équitable pour $n = 13$.
   b. Pour un nombre quelconque de boules, montrer que si le couple (x, y) conduit à un jeu équitable pour deux couleurs alors il existe une unique valeur de z non nulle telle que le triplet (x, y, z) conduise également à un jeu équitable pour trois couleurs.
   c. Donner un triplet (a, b, c) conduisant à un jeu équitable pour trois couleurs.
5. On suppose que l'urne contient des boules de m couleurs différentes où $m \geq 2$.
   Démontrer que la configuration $(1,3,9, \dots, 3^{m-1})$ conduit à un jeu équitable.