

IV. Calcul littéral

a) Développer, factoriser

RÈGLE DE PRIORITÉS DES OPÉRATIONS

On effectue en priorité :

- les calculs entre parenthèses,
- les calculs de puissances,
- les multiplications et divisions,
- les additions et soustractions.

DÉFINITIONS

Développer une expression c'est l'écrire sous la forme d'une somme.

Factoriser une expression c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

Exemple

- L'expression $x^2 + 34x - 1$ est développée car en respectant la priorité des opérations, il ne s'agit que de la somme des termes x^2 , $34x$ et -1 .
- L'expression $5x(x - 3)(-2x + 7)$ est factorisée car en respectant la priorité des opérations, il ne s'agit que du produit des facteurs $5x$, $(x - 3)$ et $(-2x + 7)$.
- L'expression $(x + 1)^2 - 5$ n'est ni développée ni factorisée.
Elle n'est pas développée car on peut développer l'expression $(x + 1)^2$.
Elle n'est pas factorisée car en respectant la priorité des opérations, la dernière opération effectuée est la différence entre $(x + 1)^2$ et 5 .

b) La distributivité simple

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres réels k, a et b :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

Exemple

1. Développement de l'expression
- $A = -3,5(x - 2)$
- .

Il est conseillé de ne pas écrire la deuxième ligne et de faire le calcul dans sa tête.

$$A = -3,5(x - 2)$$

$$A = -3,5 \times x - 3,5 \times 2$$

$$A = -3,5x + 7$$

2. Factorisation de l'expression
- $B = 3x^2 - 9xy$
- .

Il est conseillé de ne pas écrire la deuxième ligne et de faire le calcul dans sa tête.

$$B = 3x \times x - 3x \times 3y$$

On repère le facteur commun $3x$

$$B = 3x \times (x - 3y)$$

On écrit le facteur commun en premier, puis on recopie le reste

$$B = 3x(x - 3y)$$

3. Factorisation de l'expression
- $C = (5x - 7)(9x - 2) - (5x - 7)^2$

$$C = (5x - 7)(9x + 2) - (5x - 7)(5x - 7)$$

On repère le facteur commun $(5x - 7)$

$$C = (5x - 7)[(9x + 2) - (5x - 7)]$$

On écrit le facteur commun en premier, puis on recopie le reste

$$C = (5x - 7)[9x + 2 - 5x + 7]$$

On simplifie en respectant la règle des signes

$$C = (5x - 7)(4x + 9)$$

c) La double distributivité**PROPRIÉTÉ**Pour tous nombres réels a, b, c et d :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemple

1. Développement et simplification de l'expression
- $C = (3x + 1)(y - 4)$
- .

Il est conseillé de ne pas écrire la deuxième ligne et de faire le calcul dans sa tête.

$$D = (3x + 1)(y - 4)$$

$$D = 3x \times y + 3x \times (-4) + 1 \times y + 1 \times (-4)$$

$$D = 3xy - 12x + y - 4$$

2. Développement et simplification de l'expression
- $D = 7x(x - 6) + (3x - 2)(4x + 5)$
- .

Il est conseillé de ne pas écrire la deuxième ligne et de faire le calcul dans sa tête.

$$E = 7x(x - 6) + (3x - 2)(4x + 5)$$

$$E = 7x \times x + 7x \times (-6) + 3x \times 4x + 3x \times 5 + (-2) \times 4x + (-2) \times 5$$

$$E = 7x^2 - 42x + 12x^2 + 15x - 8x - 10$$

$$E = 19x^2 - 35x - 10$$

d) Développer avec des identités remarquables

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres réels a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exemple

1. Développement et réduction de l'expression $E = (x + 3)^2$.

On utilise la première identité remarquable avec $a = x$ et $b = 3$.

Il est conseillé de ne pas écrire la deuxième ligne et de faire le calcul dans sa tête.

$$F = (x + 3)^2$$

$$F = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$$

$$F = x^2 + 6x + 9$$

2. Développement et réduction de l'expression $F = (3x - 5)^2$.

On utilise la deuxième identité remarquable avec $a = 3x$ et $b = 5$.

Il est conseillé de ne pas écrire la deuxième ligne et de faire le calcul dans sa tête.

$$G = (3x - 5)^2$$

$$G = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$$

$$G = 9x^2 - 30x + 25$$

3. Développement et réduction de l'expression $G = (7x + 2)(7x - 2)$.

On utilise la troisième identité remarquable avec $a = 7x$ et $b = 2$.

Il est conseillé de ne pas écrire la deuxième ligne et de faire le calcul dans sa tête.

$$H = (7x + 2)(7x - 2)$$

$$H = (7x)^2 - 2^2$$

$$H = 49x^2 - 4$$

e) Factoriser avec des identités remarquables

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres réels a et b :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Exemple

Il faut alors essayer de reconnaître une identité remarquable.

- S'il s'agit d'une somme de trois termes, c'est peut-être $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.
- S'il s'agit de trois termes avec une somme et une différence, c'est peut-être $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Dans ces deux cas, on identifie a et b comme étant les racines carrées des deux extrémités de l'expression. Il ne reste plus qu'à vérifier que $2ab$ correspond bien au terme au milieu de l'expression. Si OUI, on peut appliquer l'identité remarquable. Si NON, l'expression n'est peut-être pas factorisable.

- S'il s'agit d'une différence de 2 carrées, c'est $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

1. Factorisation de l'expression $I = x^2 + 8x + 16$.

$$I = x^2 + 8x + 16$$

C'est la somme de trois termes, on pense à la 1^{ère} identité remarquable

$$a^2 + 2ab + b^2$$

On compare avec l'identité

$$a^2 = x^2 \text{ et } b^2 = 16$$

Les deux extrémités nous donne a et b

$$a = x \text{ et } b = 4$$

$$\text{donc } 2ab = 2 \times x \times 4 = 8x$$

On compare $2ab$ avec le terme au milieu de l'expression

$$(a + b)^2$$

On peut appliquer l'identité

$$I = (x + 4)^2$$

2. Factorisation de l'expression $J = 4x^2 - 10x + 25$.

$$J = 4x^2 - 10x + 25$$

On pense à la 2^{ème} identité remarquable

$$a^2 - 2ab + b^2$$

On compare avec l'identité

$$a^2 = 4x^2 \text{ et } b^2 = 25$$

Les deux extrémités nous donne a et b

$$a = 2x \text{ et } b = 5$$

$$\text{donc } 2ab = 2 \times 2x \times 5 = 20x \neq 10x$$

On compare $2ab$ avec le terme au milieu de l'expression

$$(a - b)^2$$

On ne peut pas appliquer l'identité

$$J = 4x^2 - 10x + 25$$

Un élève de seconde ne peut pas dire si cette expression est factorisable

3. Factorisation de l'expression $K = 16x^2 - (x + 1)^2$.

$$K = 16x^2 - (x + 1)^2$$

C'est la différence de 2 carrés, on pense à la 3^{ème} identité remarquable

$$a^2 - b^2$$

On compare avec l'identité

$$a^2 = 16x^2 \text{ et } b^2 = (x + 1)^2$$

Les deux extrémités nous donne a et b

$$a = 4x \text{ et } b = x + 1$$

$$(a + b)(a - b)$$

On applique l'identité

$$K = [4x + (x + 1)][4x - (x + 1)]$$

$$K = [4x + x + 1][4x - x - 1]$$

On simplifie en respectant les règles de signe

$$K = (5x + 1)(3x - 1)$$

f) Exercices sur le développement**Niveau 1 : Développer, réduire et ordonner les expressions en utilisant la distributivité simple**

$$A = 7(x + 4) \quad B = 4(7 - 2x) \quad C = -3(x + 7) \quad D = -5(3x - 2) \quad E = -2x(5 + 4x) \quad F = 3x^2(1 - 2x)$$

Niveau 2 : Développer, réduire et ordonner les expressions en utilisant la distributivité double

$$\begin{array}{llll} A = (x + 2)(x + 3) & B = (x - 7)(3x - 2) & C = (1 + 2x)(3 - x) & D = (-7x + 6)(5 - x^2) \\ E = (3x^2 - 4)(2x^2 + 5x) & F = (2x - 5)(2x + 5) & G = (x^2 - 3x)(x^2 + 3) & H = (2x^2 + 4)(3x^2 - 5) \end{array}$$

Niveau 3 : Développer, réduire et ordonner les expressions en utilisant les identités remarquables

$$\begin{array}{llll} A = (x + 3)^2 & B = (5 - x)^2 & C = (2x + 5)(2x - 5) & D = (3 + x)^2 \\ E = (x - 2)^2 & F = (x + 2)(x - 2) & G = (x + 5)^2 & H = (1 - 3x)^2 \\ I = (x + 3)(x - 3) & J = (2x + 1)^2 & K = (3 - x)^2 & L = (3x - 1)(3x + 1) \\ M = (3x + 2)^2 & N = (3 - 5x)^2 & O = (5 + 3x)(5 - 3x) & P = (x^2 + 1)^2 \\ Q = (4 - 3x^2)^2 & R = (4x^2 + 3)(4x^2 - 3) & S = (4x^2 + 3x)(4x^2 - 3x) & T = (4x^2 - 3x)^2 \end{array}$$

Niveau 4 : Développer, réduire puis ordonner les expressions

$$\begin{array}{lll} A = (x + 1)^2 + (x - 3)^2 & B = (2x + 1)^2 - (x + 3)^2 & C = (3 - x)^2 + (x + 5)^2 \\ D = (2x + 3)^2 - (x - 7)(x + 7) & E = (x + 2)^2 + (x + 4)(x - 4) & F = (x + 2)(x - 2) - (x - 3)^2 \\ G = (x + 1)(x - 1) + (x + 4)^2 & H = (x - 5)^2 - (2x - 7)(x - 5) & \end{array}$$

Niveau 5 : Développer, réduire puis ordonner les expressions

$$\begin{array}{lll} A = (x + 1)^2 + 5(x - 3)^2 & B = (2x + 1)^2 - 2(x + 3)^2 & C = (3 - x)^2 + 8(x + 5)^2 \\ D = (2x + 3)^2 - 10(x - 7)(x + 7) & E = (x + 2)^2 + x(x + 4)(x - 4) & F = (x + 2)(x - 2) - 2x(x - 3)^2 \\ G = (x + 1)(x - 1) + 4x(x + 4)^2 & H = (x - 5)^2 - x^2(2x - 7)(x - 5) & \end{array}$$

Niveau 6 : Développer, réduire puis ordonner les expressions

$$\begin{array}{lll} A = (a + b + c)^2 & B = (2x + 3y + 1)(2x - 3y + 1) & C = (4x - 3y + 2)(4x + 5y - 1) \\ D = (a + b - c)^2 & E = (3x - 2y + 1)^2 & F = (a + b - c)(a + b + c) \end{array}$$

Niveau 7 : Développer, réduire puis ordonner les expressions

$$A = (a + b)^3$$

$$B = (2x + 1)(2x - 1)(3x + 4)$$

$$C = (4x - 3)(2x + 2)(4x - 1)$$

$$D = (a - b)^3$$

$$E = (3x - 2)(3x + 2)(2x - 1)$$

$$F = (2x - 1)(-3x + 1)(2x + 4)$$

Niveau 8 : Développer, réduire puis ordonner les expressions

$$A = -2(x - 4)^2 + 8$$

$$B = 2(x - 2)^2 + 2$$

$$C = 3(x + 1)^2 - 4$$

$$D = -3(x - 2)^2 + 12$$

$$E = -2(x - 1)^2 - 3$$

$$F = -3(x + 4)^2 - 4$$

g) Correction des exercices sur le développement

Niveau 1 : Développer les expressions en utilisant la distributivité simple

$$A = 7x + 28 \quad B = -8x + 28 \quad C = -3x - 21 \quad D = -15x + 10 \quad E = -8x^2 - 10x \quad F = -6x^3 + 3x^2$$

Niveau 2 : Développer les expressions en utilisant la distributivité double

$$\begin{array}{llll} A = x^2 + 5x + 6 & B = 3x^2 - 23x + 14 & C = -2x^2 + 5x + 3 & D = 7x^3 - 6x^2 - 35x + 30 \\ E = 6x^4 + 15x^3 - 8x^2 - 20x & F = 4x^2 - 25 & G = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 9x & H = 6x^4 + 2x^2 - 20 \end{array}$$

Niveau 3 : Développer les expressions en utilisant les identités remarquables

$$\begin{array}{llll} A = x^2 + 6x + 9 & B = x^2 - 10x + 25 & C = 4x^2 - 25 & D = x^2 + 6x + 9 \\ E = x^2 - 4x + 4 & F = x^2 - 4 & G = x^2 + 10x + 25 & H = 9x^2 - 6x + 1 \\ I = x^2 - 9 & J = 4x^2 + 4x + 1 & K = x^2 - 6x + 9 & L = 9x^2 - 1 \\ M = 9x^2 + 12x + 4 & N = 25x^2 - 30x + 9 & O = -9x^2 + 25 & P = x^4 + 2x^2 + 1 \\ Q = 9x^4 - 24x^2 + 16 & R = 16x^4 - 9 & S = 16x^4 - 9x^2 & T = 16x^4 - 24x^3 + 9x^2 \end{array}$$

Niveau 4 : Développer, réduire puis ordonner les expressions

$$\begin{array}{lll} A = 2x^2 - 4x + 10 & B = 3x^2 - 2x - 8 & C = 2x^2 + 4x + 34 \\ D = 3x^2 + 12x + 58 & E = 2x^2 + 4x - 12 & F = 6x - 13 \\ G = 2x^2 + 8x + 15 & H = -x^2 + 7x - 10 & \end{array}$$

Niveau 5 : Développer, réduire puis ordonner les expressions

$$\begin{array}{lll} A = 6x^2 - 28x + 46 & B = 2x^2 - 8x - 17 & C = 9x^2 + 74x + 209 \\ D = -6x^2 + 12x + 499 & E = x^3 + x^2 - 12x + 4 & F = -2x^3 + 13x^2 - 18x - 4 \\ G = 4x^3 + 33x^2 + 64x - 1 & H = -2x^4 + 17x^3 - 34x^2 - 10x + 25 & \end{array}$$

Niveau 6 : Développer, réduire puis ordonner les expressions

$$\begin{array}{lll} A = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc & B = 4x^2 - 9y^2 + 4x + 1 & C = 16x^2 - 15y^2 + 8xy + 12x + 7y + 2 \\ D = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc & E = 9x^2 - 4y^2 - 12xy + 6x - 4y + 1 & F = a^2 + b^2 - c^2 + 2ab \end{array}$$

Niveau 7 : Développer, réduire puis ordonner les expressions

$$A = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$B = 12x^3 + 16x^2 - 3x - 4$$

$$C = 32x^3 - 26x + 6$$

$$D = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$E = 18x^3 - 9x^2 - 8x + 4$$

$$F = -12x^3 - 14x^2 + 18x - 4$$

Niveau 8 : Développer, réduire puis ordonner les expressions

$$A = -2x^2 + 16x - 24$$

$$B = 2x^2 - 8x + 10$$

$$C = 3x^2 + 6x - 1$$

$$D = -3x^2 + 12x$$

$$E = -2x^2 + 4x - 5$$

$$F = -3x^2 - 24x - 52$$

h) Exercices sur la factorisation**Niveau 1 : Factoriser les expressions suivantes en repérant le facteur commun**

$$\begin{array}{lllll}
A = 2x^2 + 3x & B = x^2 - 4x & C = x^3 - 2x & D = x^3 + 8x & E = xy + 4x \\
F = 3x^2 - 6x & G = 4xy - 5y & H = xy + xz & I = 3x^2 + 9x & J = 4a + 12 \\
K = 2x + 6y & L = -7xy + 14y & M = 5x^2 - 30x & N = 3x^2 + x & O = 5x^2 - x
\end{array}$$

Niveau 2 : Factoriser les expressions suivantes en repérant le facteur commun

$$\begin{array}{llll}
A = 4(x+1) - x(x+1) & B = 2x(x-1) + 3x(x-1) & C = (x+1)(x+2) + 5(x+2) & D = (x+1)^2 + 3(x+1) \\
E = (2x+1)^2 - (2x+1)(x+3) & F = x^2(x+4) - 2x(x+4) & G = (x-3)^2 - 2(x-3)(2x-1) & H = (x+1)^2 + x + 1
\end{array}$$

Niveau 3 : Factoriser les expressions en utilisant les identités remarquables

$$\begin{array}{llll}
A = x^2 + 10x + 25 & B = x^2 - 2x + 1 & C = x^2 - 4 & D = x^2 + 6x + 9 \\
E = 4x^2 - 20x + 25 & F = 9 - x^2 & G = 36 + 12x + x^2 & H = 9 - 6x + x^2 \\
I = 4x^2 - 9 & J = 4x^2 + 12x + 9 & K = 36x^2 - 12x + 1 & L = 16 - 9x^2 \\
M = 16x^2 + 40x + 25 & N = 100 - 40x + 4x^2 & O = 49x^2 - 36 &
\end{array}$$

Niveau 4 : Factoriser les expressions en utilisant l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$\begin{array}{llll}
A = (x+1)^2 - 4 & B = (x+2)^2 - 9 & C = (2x+1)^2 - 25 & D = 16 - (3x+2)^2 \\
E = 36 - (4-3x)^2 & F = (x+1)^2 - (2x+3)^2 & G = (2x-1)^2 - (5+x)^2 & H = (4x-1)^2 - (3x+4)^2 \\
I = (3x-4)^2 - (6x+1)^2 & J = (x+6)^2 - (3x-1)^2 & &
\end{array}$$

Niveau 5 : Factoriser les expressions

$$\begin{array}{lll}
A = (x+2)(3x-1) + x^2 - 4 & B = (x+4)(2x-1) + x^2 - 16 & C = (x-3)(x+1) - (x^2 - 9) \\
D = (2x+1)(x-2) + x^2 - 4 & E = 25 - x^2 - (x-5)(2x+3) & F = (2x+1)(-7x+5) + 36x^2 - 9
\end{array}$$

Niveau 6 : Factoriser les expressions

$$A = (x + 2)(3x - 1) - x^2 + 4$$

$$B = (x + 4)(2x - 1) - x^2 + 16$$

$$C = (x - 3)(x + 1) - x^2 + 9$$

$$D = (2x + 1)(x - 2) + x^2 - 4$$

$$E = 25 - x^2 - 2(x - 5)(2x + 3)$$

$$F = (2x + 1)(-7x + 5) - 36x^2 + 9$$

Niveau 7 : Factoriser les expressions

$$A = (x + 2)(3x - 1) - 2x^2 + 8$$

$$B = (x + 4)(2x - 1) - 4x^2 + 64$$

$$C = (x - 3)(x + 1) - 3x^2 + 27$$

$$D = (2x + 1)(x - 2) + 2x^2 - 8$$

$$E = 100 - 4x^2 - 2(x - 5)(2x + 3)$$

$$F = (2x + 1)(-7x + 5) - 12x^2 + 3$$

Niveau 8 : Mettre sous la forme canonique

Pour mémoire la forme canonique s'écrit $f(x) = a(x - \beta)^2 + \gamma$ avec $\beta = -\frac{b}{2a}$ et $\gamma = f(\beta)$.

$$A = -2x^2 + 16x - 24$$

$$B = 2x^2 - 8x + 10$$

$$C = 3x^2 + 6x - 1$$

$$D = -3x^2 + 12x$$

$$E = -2x^2 + 4x - 5$$

$$F = -3x^2 - 24x - 52$$

i) Correction des exercices sur la factorisation

Niveau 1 : Factoriser les expressions suivantes en repérant le facteur commun

$$\begin{array}{lllll}
A = x(2x + 3) & B = x(x - 4) & C = x(x^2 - 2) & D = x(x^2 + 8) & E = x(y + 4) \\
F = 3x(x - 2) & G = y(4x - 5) & H = x(y + z) & I = 3x(x + 3) & J = 4(a + 3) \\
K = 2(x + 3y) & L = -7y(x - 2) & M = 5x(x - 6) & N = x(3x + 1) & O = x(5x - 1)
\end{array}$$

Niveau 2 : Factoriser les expressions suivantes en repérant le facteur commun

$$\begin{array}{llll}
A = (4 - x)(x + 1) & B = 5x(x - 1) & C = (x + 6)(x + 2) & \\
D = (x + 4)(x + 1) & E = (2x + 1)(x - 2) & F = (x^2 - 2x)(x + 4) = x(x - 2)(x + 4) & \\
G = (x - 3)(-3x - 1) = -(x - 3)(3x + 1) & H = (x + 1)(x + 2) & &
\end{array}$$

Niveau 3 : Factoriser les expressions en utilisant les identités remarquables

$$\begin{array}{llll}
A = (x + 5)^2 & B = (x - 1)^2 & C = (x + 2)(x - 2) & D = (x + 3)^2 \\
E = (2x - 5)^2 & F = (3 + x)(3 - x) & G = (x + 6)^2 & H = (x - 3)^2 \\
I = (2x - 3)(2x + 3) & J = (2x + 3)^2 & K = (6x - 1)^2 & L = (-3x + 4)(3x + 4) \\
M = (4x + 5)^2 & N = (2x - 10)^2 & O = (7x + 6)(7x - 6) &
\end{array}$$

Niveau 4 : Factoriser les expressions en utilisant l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$\begin{array}{llll}
A = (x - 1)(x + 3) & B = (x - 1)(x + 5) & C = (2x + 6)(2x - 4) = 4(x + 3)(x - 2) & \\
D = (-3x - 6)(3x - 2) = -3(x + 2)(3x - 2) & E = (3x + 2)(-3x + 10) & F = (3x + 4)(-x - 2) = -(3x + 4)(x + 2) & \\
G = (x - 6)(3x + 4) & H = (7x + 3)(x - 5) & I = (-9x + 3)(3x + 5) & \\
J = (-2x + 7)(4x + 5) & & &
\end{array}$$

Niveau 5 : Factoriser les expressions

$$\begin{array}{lll}
A = (x + 2)(4x - 3) & B = (x + 4)(3x - 5) & C = -2(x - 3) \\
D = (x - 2)(3x + 3) = 3(x - 2)(x + 1) & E = (-x + 5)(3x + 8) & F = (2x + 1)(11x - 4)
\end{array}$$

Niveau 6 : Factoriser les expressions

$$\begin{array}{lll} A = (x+2)(2x+1) & B = (x+4)(x+3) & C = -2(x-3) \\ D = (x-2)(3x+3) = 3(x-2)(x+1) & E = (x-5)(-5x-11) = -(x-5)(5x+11) & F = (2x+1)(-25x+14) \end{array}$$

Niveau 7 : Factoriser les expressions

$$\begin{array}{lll} A = (x+2)(x+3) & B = (x+4)(-2x+15) & C = (x-3)(-2x-8) = -2(x-3)(x+4) \\ D = (x-2)(4x+5) & E = (x-5)(-8x-26) = -2(x-5)(4x+13) & F = (2x+1)(-13x+8) \end{array}$$

Niveau 8 : Mettre sous forme canonique

$$\begin{array}{lll} A = -2(x-4)^2 + 8 & B = 2(x-2)^2 + 2 & C = 3(x+1)^2 - 4 \\ D = -3(x-2)^2 + 12 & E = -2(x-1)^2 - 3 & F = -3(x+4)^2 - 4 \end{array}$$