CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N°2- SUJET A

EXERCICE 2 Fonction polynôme du second degré **5 points**

1. *les différentes fonctions polynômes du second degré suivantes, trouver une racine évidente puis factoriser l'expression.*

$$f(x) = x^2 + x - 2, \qquad g(x) = -x^2 + 4x - 4, \qquad h(x) = -2x^2 - x + 3$$

f a pour racine évident $x_1 = 1$ car $f(1) = 1^2 + 1 - 2 = 0$ donc $f(x) = (x-1)(x+2)$.
g a pour racine évidente $x_1 = 2$ car $g(2) = -2^2 + 4 \times 2 - 4 = -4 + 8 - 4 = 0$ donc $g(x) = (x-2)(-x+2)$.
h a pour racine évident $x_1 = 1$ car $h(x) = -2 \times 1^2 - 1 + 3 = -2 - 1 + 3 = 0$ donc $h(x) = (x-1)(-2x-3)$.

2. *Pour les différentes fonctions polynômes du second degré suivantes, donner, en détaillant les calculs, leur forme factorisée.*

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 6, \qquad g(x) = x^2 + 6x + 9, \qquad h(x) = -x^2 - 4x - 5$$

- $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$. $a = -2, b = 8, c = -6$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 48 = 16 = 4^2 > 0$.
Il y a deux racines.
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-4}{-4} = 3$
$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+4}{-4} = 1$
La forme factorisée de f s'écrit $a(x - x_1)(x - x_2)$ soit :
$f(x) = (x-1)(x-3)$.

- $g(x) = x^2 + 6x + 9$. $a = 1, b = 6, c = 9$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$.
Il y a une racine double.
$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2} = -3$
La forme factorisée de g s'écrit $a(x - x_0)^2$ soit :
$g(x) = (x+3)^2)$.

- $h(x) = -x^2 - 4x - 5$. $a = -1, b = -4, c = -5$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4$.
Il n'y a pas de racine.
h n'est pas factorisable.

Exercice 3 Produit scalaire **4 points**

1. *Dans un triangle ABC, on a : $AB = 6$, $BC = 5$ et $AC = 4$.*
   (a) *Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - BC^2\right) \\
&= \frac{1}{2}(16 - 36 - 25) \\
&= \frac{1}{2}(-45) \\
&= -\frac{45}{2}
\end{aligned}$$

   (b) *Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(BC^2 - BA^2 - AC^2\right) \\
&= -\frac{1}{2}(25 - 36 - 16) \\
&= -\frac{1}{2}(-27) \\
&= \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

2. *On se place dans un repère orthonormé et on se donne deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.*
   Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
   $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = 4 \times (-1) + 2 \times 3 = -4 + 6 = 2.$

Exercice 4 Problème **5 points**

1. (a) *Vérifier que pour $n = 1$, l'expression $n^4 + n^2 + 1$ donne bien un nombre premier.*
   Pour $n = 1$, $n^4 + n^2 + 1 = 3$ qui est bien un nombre premier.

   (b) *Vérifier que par contre, pour $n = 0$ et $n = 2$, cette expression ne donne pas un nombre premier.*
   Pour $n = 0$, $n^4 + n^2 + 1 = 1$ qui n'est pas un nombre premier.
   Pour $n = 2$, $n^4 + n^2 + 1 = 21$ qui n'est pas un nombre premier.

2. *Factorisation de l'expression $n^4 + n^2 + 1$. Vérifier que $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$.*
   Développons $(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$:

$$\begin{aligned}(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) &= n^4 - n^3 + n^2 + n^3 - n^2 + n + n^2 - n + 1 \\ &= n^4 + n^2 + 1\end{aligned}$$

   CQFD

3. *Résoudre les équations $n^2 + n + 1 = 1$ et $n^2 - n + 1 = 1$.*
   Résolvons $n^2 + n + 1 = 1$:

$$\begin{aligned} & n^2 + n + 1 = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & n^2 + n + 1 - 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & n^2 + n = 0\end{aligned}$$

   Pour résoudre cette équation, on peut chercher des racines évidentes (on calculer le discriminant ce qui serait juste mais beaucoup plus long). On trouve deux racines évidentes, 0 et -1. Donc :

$$\mathcal{S} = \{-1; 0\}$$

   Résolvons $n^2 - n + 1 = 1$:

$$\begin{aligned} & n^2 - n + 1 = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & n^2 - n + 1 - 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & n^2 - n = 0\end{aligned}$$

   Pour résoudre cette équation, on peut chercher des racines évidentes (on calculer le discriminant ce qui serait juste mais beaucoup plus long). On trouve deux racines évidentes, 0 et 1. Donc :

$$\mathcal{S} = \{0; 1\}$$

4. *Pour quelle(s) valeur(s) de n, l'entier $n^4 + n^2 + 1$ est-il un nombre premier ?*
   D'après ce que l'on vient de voir, l'entier $n^4 + n^2 + 1$ est un nombre premier uniquement s'il est le produit de l'entier 1 et d'un autre entier distinct.
   Comme $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$, l'entier $n^4 + n^2 + 1$ est un nombre premier uniquement si $n^2 + n + 1 = 1$ ou $n^2 - n + 1 = 1$ mais pas les deux en même temps.
   Nous trouvons 4 possibilités pour la valeur de n : -1 et 0 puis 0 et 1.
   La valeur -1 est a rejeté car dans l'énoncé, on nous indique que n est un entier naturel autrement dit, il ne peut être négatif.
   La valeur 0 est elle aussi a rejeté car alors $n^2 + n + 1$ et $n^2 - n + 1)$ sont tous les deux égaux à 1. $n^4 + n^2 + 1$ est le produit de deux fois le nombre 1. Ce n'est pas un nombre premier. Enfin, la valeur 1 convient parfaitement.
   Conclusion : $n^4 + n^2 + 1$ est-il un nombre premier uniquement pour $n = 1$.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N°2- SUJET B

EXERCICE 2 Fonction polynôme du second degré **5 points**

1. *les différentes fonctions polynômes du second degré suivantes, trouver une racine évidente puis factoriser l'expression.*

$$f(x) = x^2 + x - 2, \qquad g(x) = -2x^2 - x + 3, \qquad h(x) = -x^2 + 4x - 4$$

f a pour racine évident $x_1 = 1$ car $f(1) = 1^2 + 1 - 2 = 0$ donc $f(x) = (x-1)(x+2)$.
g a pour racine évident $x_1 = 1$ car $g(x) = -2 \times 1^2 - 1 + 3 = -2 - 1 + 3 = 0$ donc $g(x) = (x-1)(-2x-3)$.
h a pour racine évidente $x_1 = 2$ car $h(2) = -2^2 + 4 \times 2 - 4 = -4 + 8 - 4 = 0$ donc $h(x) = (x-2)(-x+2)$.

2. *Pour les différentes fonctions polynômes du second degré suivantes, donner, en détaillant les calculs, leur forme factorisée.*

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 6, \qquad g(x) = -x^2 - 4x - 5, \qquad h(x) = x^2 + 6x + 9$$

- $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$. $a = -2, b = 8, c = -6$.
  $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 48 = 16 = 4^2 > 0$.
  Il y a deux racines.
  $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-4}{-4} = 3$
  $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+4}{-4} = 1$
  La forme factorisée de f s'écrit $a(x - x_1)(x - x_2)$ soit :
  $f(x) = (x-1)(x-3)$.

- $g(x) = -x^2 - 4x - 5$. $a = -1, b = -4, c = -5$.
  $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4$.
  Il n'y a pas de racine.
  g n'est pas factorisable.

- $h(x) = x^2 + 6x + 9$. $a = 1, b = 6, c = 9$.
  $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$.
  Il y a une racine double.
  $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2} = -3$
  La forme factorisée de h s'écrit $a(x - x_0)^2$ soit :
  $h(x) = (x+3)^2)$.

Exercice 3 Produit scalaire **4 points**

1. *Dans un triangle ABC, on a : $AB = 5$, $BC = 6$ et $AC = 4$.*
   (a) *Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - BC^2\right)\\
&= \frac{1}{2}(16-25-36)\\
&= \frac{1}{2}(-45)\\
&= -\frac{45}{2}
\end{aligned}$$

   (b) *Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}\\
&= -\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(BC^2 - BA^2 - AC^2\right)\\
&= -\frac{1}{2}(36-25-16)\\
&= -\frac{1}{2}(-5)\\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

2. *On se place dans un repère orthonormé et on se donne deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.*
   Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
   $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = -1 \times 4 + 3 \times 2 = -4 + 6 = 2.$

EXERCICE 4 Problème **5 points**

1. (a) *Vérifier que pour $n = 1$, l'expression $n^4 + n^2 + 1$ donne bien un nombre premier.*
   Pour $n = 1$, $n^4 + n^2 + 1 = 3$ qui est bien un nombre premier.

   (b) *Vérifier que par contre, pour $n = 0$ et $n = 2$, cette expression ne donne pas un nombre premier.*
   Pour $n = 0$, $n^4 + n^2 + 1 = 1$ qui n'est pas un nombre premier.
   Pour $n = 2$, $n^4 + n^2 + 1 = 21$ qui n'est pas un nombre premier.

2. *Factorisation de l'expression $n^4 + n^2 + 1$. Vérifier que $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$.*
   Développons $(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$:

$$\begin{aligned}(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) &= n^4 - n^3 + n^2 + n^3 - n^2 + n + n^2 - n + 1 \\ &= n^4 + n^2 + 1\end{aligned}$$

   CQFD

3. *Résoudre les équations $n^2 + n + 1 = 1$ et $n^2 - n + 1 = 1$.*
   Résolvons $n^2 + n + 1 = 1$:

$$\begin{aligned}& n^2 + n + 1 = 1 \\ \iff & n^2 + n + 1 - 1 = 0 \\ \iff & n^2 + n = 0\end{aligned}$$

   Pour résoudre cette équation, on peut chercher des racines évidentes (on calculer le discriminant ce qui serait juste mais beaucoup plus long). On trouve deux racines évidentes, 0 et -1. Donc :

$$\mathcal{S} = \{-1; 0\}$$

   Résolvons $n^2 - n + 1 = 1$:

$$\begin{aligned}& n^2 - n + 1 = 1 \\ \iff & n^2 - n + 1 - 1 = 0 \\ \iff & n^2 - n = 0\end{aligned}$$

   Pour résoudre cette équation, on peut chercher des racines évidentes (on calculer le discriminant ce qui serait juste mais beaucoup plus long). On trouve deux racines évidentes, 0 et 1. Donc :

$$\mathcal{S} = \{0; 1\}$$

4. *Pour quelle(s) valeur(s) de n, l'entier $n^4 + n^2 + 1$ est-il un nombre premier ?*
   D'après ce que l'on vient de voir, l'entier $n^4 + n^2 + 1$ est un nombre premier uniquement s'il est le produit de l'entier 1 et d'un autre entier distinct.
   Comme $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$, l'entier $n^4 + n^2 + 1$ est un nombre premier uniquement si $n^2 + n + 1 = 1$ ou $n^2 - n + 1 = 1$ mais pas les deux en même temps.
   Nous trouvons 4 possibilités pour la valeur de n : -1 et 0 puis 0 et 1.
   La valeur -1 est a rejeté car dans l'énoncé, on nous indique que n est un entier naturel autrement dit, il ne peut être négatif.
   La valeur 0 est elle aussi a rejeté car alors $n^2 + n + 1$ et $n^2 - n + 1)$ sont tous les deux égaux à 1. $n^4 + n^2 + 1$ est le produit de deux fois le nombre 1. Ce n'est pas un nombre premier. Enfin, la valeur 1 convient parfaitement.
   <u>Conclusion</u> : $n^4 + n^2 + 1$ est-il un nombre premier uniquement pour $n = 1$.