CHAPITRE 5

Probabilité conditionnelle

Extrait du programme

Contenus

- Probabilité conditionnelle d'un événement B sachant un événement A de probabilité non nulle.
  Notation $P_A(B)$. Indépendance de deux événements.
- Arbres pondérés et calcul de probabilités : règle du produit, de la somme.
- Partition de l'univers (systèmes complets d'événements).
  Formule des probabilités totales.
- Succession de deux épreuves indépendantes. Représentation par un arbre ou un tableau.

Capacités attendues

- Construire un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée.
  Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Utiliser un arbre pondéré ou un tableau pour calculer une probabilité.
- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs (tirage au sort avec équiprobabilité d'un individu dans une population).
- Dans des cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Distinguer en situation $P_A(B)$ et $P_B(A)$, par exemple dans des situations de type « faux positifs ».
- Représenter une répétition de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.

Référence : Thomas

Exemple d'algorithme

- Méthode de Monte-Carlo : estimation de l'aire sous la parabole, estimation du nombre π.

Approfondissements possibles

- Exemples de succession de plusieurs épreuves indépendantes.
- Exemples de marches aléatoires.

Introduction

Blaise Pascal
19 juin 1623 - 19 août 1662

Pierre de Fermat
Première décennie du XVII^e siècle - 12 janvier 1665

Andreï Kolmogorov
25 avril 1903 - 20 octobre 1987

Parmi les ancêtres du loto et des différents jeux où le hasard intervient, les jeux de dés occupent une place très importante.
Savez-vous que les dés existaient déjà dans l'antiquité ?
Savez-vous que les dés sont à l'origine de certains mots du vocabulaire usuel ou scientifique ?
Hasard vient de l'arabe ***azzahr*** signifiant « jeu de dés ».
Aléa vient du latin ***alea*** qui signifie « coup de dés[1] ».
Chance vient du latin ***cadere*** signifiant « tomber, choir », que l'on retrouve dans la « chute des dés ».

Les probabilités sont une branche des mathématiques relativement jeune puisqu'elle a été créée par Blaise Pascal et Pierre de Fermat dans leur correspondance de 1654 (à comparer avec par exemple la géométrie développée par les grecs depuis l'antiquité). A l'époque on parle de « géométrie du hasard » et on s'intéresse principalement aux jeux de hasard.
Ensuite de nombreux mathématiciens si intéressèrent, mais c'est au début du XX^e siècle que les travaux du russe d'Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov posent les bases d'une réelle théorie des probabilités.
Cette théorie est maintenant une des plus riches des mathématiques et nombreux sont les mathématiciens qui ont obtenu une médaille Fields[2] pour des travaux en relation étroite avec les probabilités. En France, on peut citer Wendelin Werner en 2006, Cédric Villani en 2010, ...
- Source photo Wikipédia

Vous retrouverez ce cours à l'adresse suivante :
`https://github.com/NaturelEtChaud/Math-premiere/tree/main/05%20Probabilit%C3%A9%20conditionnelle`

1. On peut se rappeler la fameuse phrase de Jules César : « *Alea jacta est* ».
2. La médaille Fields est la plus haute distinction donnée à un mathématicien. C'est l'équivalent du prix Nobel. La médaille Fields n'est proposé que tous les 4 ans à des mathématiciens de moins de 40 ans.

Rappels de seconde

a) Vocabulaire

- Une expérience aléatoire
  Expérience dont on ne peut pas prévoir l'issue.
  Par exemple, on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

- Une issue ou une éventualité
  Résultat possible d'une expérience aléatoire.
  On peut avoir pile puis face : (p, f).

- L'univers
  Ensemble de toutes les éventualités. On le note $\boxed{\Omega}$. **Remarque :** Ω se lit « oméga ».
  $\Omega = \{(p,p); (p,f); (f,p); (f,f)\}$.

- L'ensemble vide
  Ensemble ne contenant rien. On le note $\boxed{\emptyset}$.

- Un événement
  Partie de l'univers.
  A : *« On obtient pile et face ».* $A = \{(p,f); (f,p)\}$.
  B : *« On obtient pile au premier lancer ».* $B = \{(p,f); (p,p)\}$.

- Un événement élémentaire
  Événement ne contenant qu'une seule éventualité.
  C : *« On obtient face au premier lancer et pile au second ».* $C = \{(f,p)\}$.

- L'intersection
  Ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et dans B. On le note $\boxed{A \cap B}$.
  Pour décrire l'événement $A \cap B$ on remplace le symbole $\cap$ dans une phrase par le mot **ET**.
  $A \cap B$: *« On obtient pile et face* ***ET*** *pile au premier lancer ».*
  $A \cap B = \{(p,f)\}$

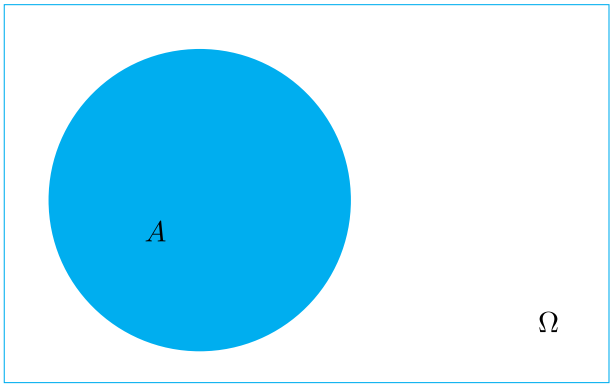
- L'union ou la réunion
  Ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B. On le note $\boxed{A \cup B}$. Plus simplement, c'est l'ensemble qui réunit les éléments de A avec ceux de B.
  Pour décrire l'événement $A \cup B$ ont remplace le symbole $\cup$ dans une phrase par le mot **OU**.
  $A \cup B$: *« On obtient pile et face* ***OU*** *pile au premier lancer ».*
  $A \cup B = \{(p,f); (f,p); (p,p)\}$

- Le contraire de A ou non A
  Ensemble de tous les éléments qui ne sont pas dans A. On le note $\boxed{\overline{A}}$.
  Pour décrire l'événement $\overline{A}$ on fait la NEGATION de la phrase correspondant à l'événement A.
  $\overline{A}$: *« On* ***n'****obtient* ***pas*** *pile et face ».*
  $\overline{A} = \{(p,p); (f,f)\}$
  $\overline{B}$: *« On* ***n'****obtient* ***pas*** *pile ou premier lancer »* = *« On obtient face ou premier lancer ».*
  $\overline{B} = \{(f,p); (f,f)\}$

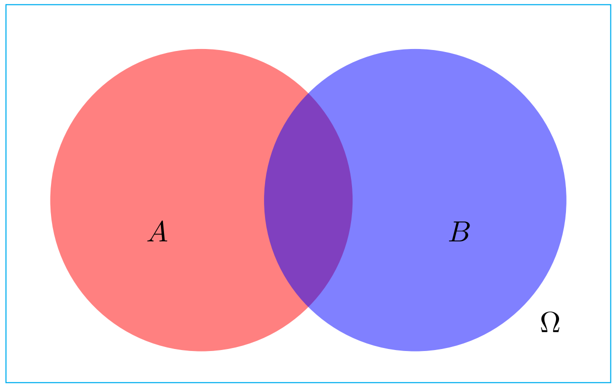
- Deux événements incompatibles
  Deux ensembles n'ayant aucun point en commun.
  B et C sont incompatibles car ils vérifient la relation $B \cap C = \emptyset$.

b) Diagramme de Venn

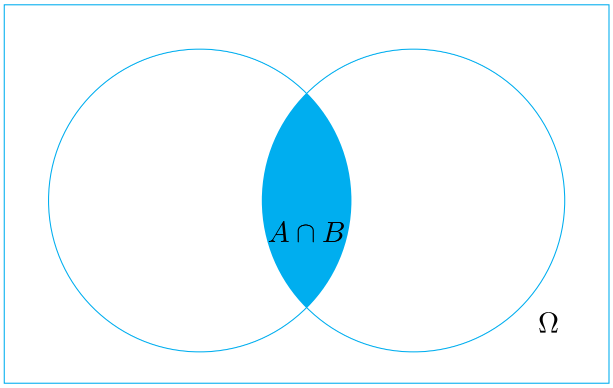
Ce type de représentation est très utile pour lire facilement les notations ensemblistes $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, ...



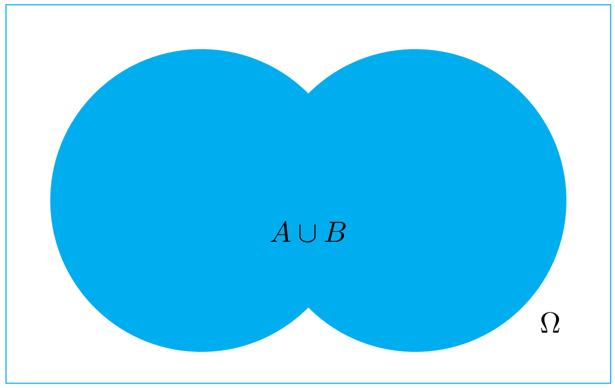
L'événement A



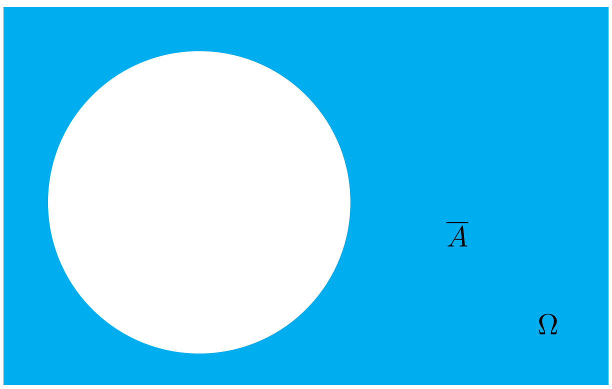
Deux événements A et B.



L'intersection des événements A et B.



La réunion des événements A et B.



L'événement contraire de A.

Questions à Choix Multiple n° 1
On lance un dé à 6 faces parfaitement équilibré. Soit A l'événement « le nombre obtenu est un nombre impair », soit B l'événement « le nombre obtenu est un nombre premier » et soit C l'événement « le nombre obtenu est un 6 ».

1. $\mathbb{P}(C) = \ldots$ a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$
2. $\mathbb{P}(B) = \ldots$ a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$
3. $\mathbb{P}(A) = \ldots$ a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$
4. $\mathbb{P}(A \cap B) = \ldots$ a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$

c) Probabilité

Définitions
Définir un **modèle de probabilité** (ou loi de probabilité) sur un univers $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, c'est associer à chaque éventualité e_i un nombre p_i positif vérifiant : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

issue élémentaire	e_1	e_2	...	e_n	Total
probabilité	p_1	p_2	...	p_n	1

La loi est **équirépartie** si toutes les issues ont la même probabilité. On dit qu'on est dans une situation d'**équiprobabilité**.

La **probabilité d'un événement** est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent. Si $A = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$ alors $\mathbb{P}(A) = p_1 + p_2 + ... + p_k$.

Conséquences

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ $\quad$ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Pour tout événement A, on a :
  $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
  $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- Pour tous événements A et B, on a :
  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Définition et propriété caractéristique
Deux événements sont **indépendants** si le fait de savoir que l'un est réalisé ne change pas la probabilité de réalisation de l'autre.
A et B sont deux événements indépendants si, et seulement si, :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Questions à Choix Multiple n° 2
On lance un dé à 6 faces parfaitement équilibré. Soit A l'événement « le nombre obtenu est un nombre impair », soit B l'événement « le nombre obtenu est un nombre premier » et soit C l'événement « le nombre obtenu est un 6 ».

1. Les événements A et B sont indépendants ? :
   a) Vrai   b) Faux
2. Les événements $\overline{A}$ et C sont indépendants ? :
   a) Vrai   b) Faux
3. La probabilité d'avoir toutes les bonnes réponses à ce QCM, en répondant totalement au hasard est de :
   a) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{8}$

I. Probabilités conditionnelles

a) Définition

Définition :
Soient A et B deux événements de Ω avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
On note $\mathbb{P}_A(B)$ la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A a été réalisé. On a :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Propriété :
Si la propriété conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ est connue la probabilité de l'événement $A \cap B$ peut être calculée par :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)$$

b) Indépendance

Propriété :
Soient A et B deux événements de Ω avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
A et B sont indépendants si, et seulement si :

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$$

Démonstration (Faite en classe)
....
....
....□

Questions à Choix Multiple n° 3

On considère un jeu de 32 cartes et les événements suivants :

- C : « la carte est un Cœur ».
- D : « la carte est une Dame ».
- R : « la carte est un Roi ».

1. $\mathbb{P}(C) = \dots$
   a) $\dfrac{1}{32}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{8}$ d) 0
2. $\mathbb{P}(D) = \dots$
   a) $\dfrac{1}{32}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{8}$ d) 0
3. $\mathbb{P}(R) = \dots$
   a) $\dfrac{1}{32}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{8}$ d) 0
4. On me dit que l'on a tiré une Dame et on me demande si la carte est un Cœur. Je dois donc calculer la probabilité :
   a) $\mathbb{P}(C)$ b) $\mathbb{P}(D)$ c) $\mathbb{P}_D(C)$ d) $\mathbb{P}_C(D)$
5. On me dit que l'on et on a tiré une Dame. La probabilité que cette carte soit un Cœur est de :
   a) $\dfrac{1}{32}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{8}$ d) 0
6. On me dit que l'on et on a tiré une Roi. La probabilité que cette carte soit une Dame est de :
   a) $\dfrac{1}{32}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{8}$ d) 0
7. C et D sont des événements :
   a) disjoints b) indépendants c) incompatibles d) aucune réponse ne convient
8. R et D sont des événements :
   a) disjoints b) indépendants c) incompatibles d) aucune réponse ne convient

II. Arbre pondéré

Pour représenter un enchaînement d'expériences aléatoires, le mieux est d'utiliser un arbre de probabilité. Dans le cas des probabilités conditionnelle, on va pondérer chaque branche, autrement dit, on va associer à chaque événement sa probabilité.

a) Règles de construction et lecture

On peut représenter une expérience aléatoire par un arbre pondéré construit en respectant les règles suivantes :

Règle 1 : Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des événements correspondants.

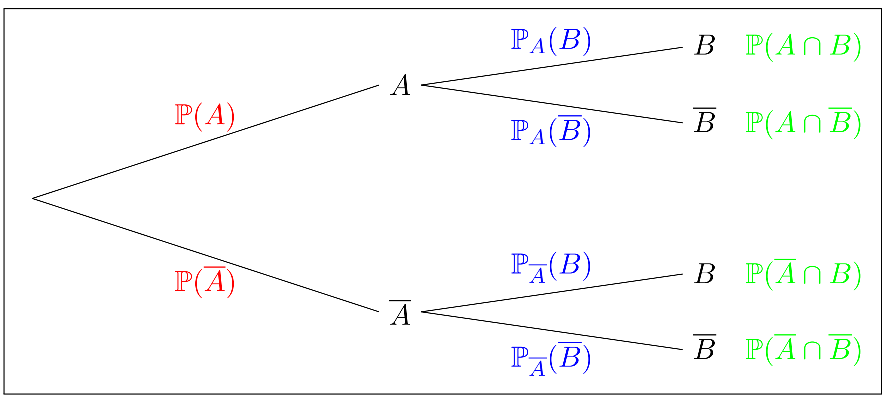
Règle 2 : Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit les probabilités conditionnelles.

Règle 3 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1.

Règle 4 : Le produit des probabilités événements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Règle 5 : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements correspondants aux chemins qui y aboutissent

En considérant deux événements A et B, **la règle 1** nous donne les probabilités inscrite en rouge sur l'arbre ci-dessous. **La règle 2** nous donne les probabilités inscrites en bleu.



D'après la règle 3, nous avons :

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$$
$$\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1$$
$$\mathbb{P}_{\overline{A}}(B) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1$$

D'après **la règle 4**, nous avons :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$$
$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(\overline{B})$$
$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$
$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B})$$

Enfin la règle 5 nous donne :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

et

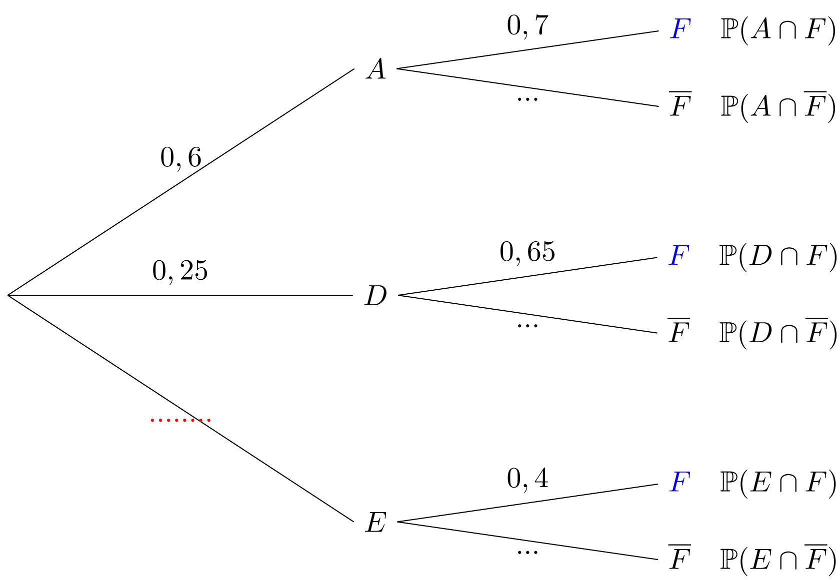
$$\mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$$

b) Exemple

Étudions ensemble un exemple d'application.

Dans un lycée, 60% des élèves ont choisi l'anglais en première langue, dont 70% des filles ; 25% ont choisi l'allemand en première langue, dont 65% de filles ; parmi les élèves qui ont choisi l'espagnol, 40% sont des filles.
On interroge au hasard un élève de ce lycée. On considère les événements suivants :
A :« l'élève a choisi l'anglais » ;
D :« l'élève a choisi l'allemand » ;
E :« l'élève a choisi l'espagnol » ;
F :« l'élève est une fille ». Calculer $\mathbb{P}(F)$.

On représente la situation à l'aide d'un arbre :



Par la règle 3, on peut compléter les pointillés du tableau, notamment :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(D) \\ &= 1 - 0,6 - 0,25 \\ &= 0,15 \end{aligned}$$

Il y a trois événements correspondant à des chemins aboutissant à F : $A \cap F, D \cap F, E \cap F$. D'après la règle 5, on a :

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(A \cap F) + \mathbb{P}(D \cap F) + \mathbb{P}(E \cap F).$$

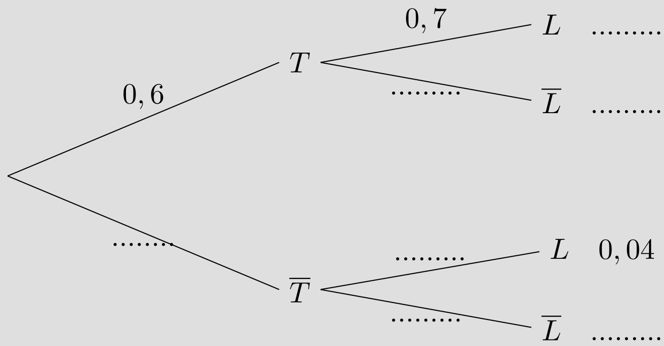
On peut alors effectuer le calcul en utilisant la règle 4 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(A \cap F) && + \mathbb{P}(D \cap F) && + \mathbb{P}(E \cap F) \\ &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(F) && + \mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}_D(F) && + \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(F) \\ &= 0,6 \times 0,7 && + 0,25 \times 0,65 && + 0,15 \times 0,4 \\ &= 0,6425. \end{aligned}$$

Questions à Choix Multiple n° 4

... oui ... bon ... d'accord ... je sais ... ce n'est pas un QCM ...

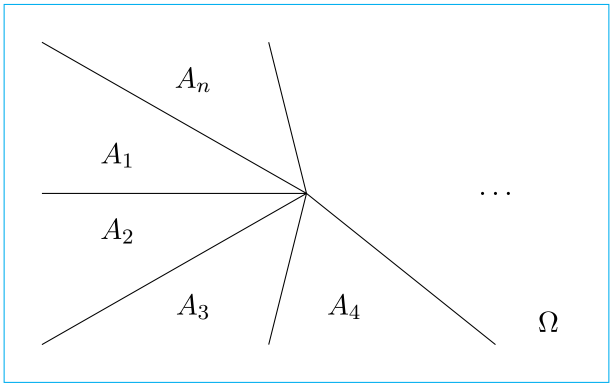
Compléter l'arbre suivant :



III. Formule des probabilités totales

a) Partition de l'univers

Définition
Les événements $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ d'un univers Ω de probabilités non nulles, forment une **partition de l'univers** lorsqu'ils sont deux à deux incompatibles et que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ...A_n = \Omega$.



Remarque

- Pour mémoire, deux événements A et B sont incompatibles ou disjoints, lorsque l'on a : $A \cap B = \emptyset$.
- Pour tout événements A, A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, car :
  A et $\overline{A}$ sont incompatibles : $A \cap \overline{A} = \emptyset$
  $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Exemple
Proposer trois partitions différentes de l'univers $\Omega = \{$Toutes les cartes d'un jeu de 32 cartes$\}$.

1. ....
....
....

2. ....
....
....

3. ....
....
....

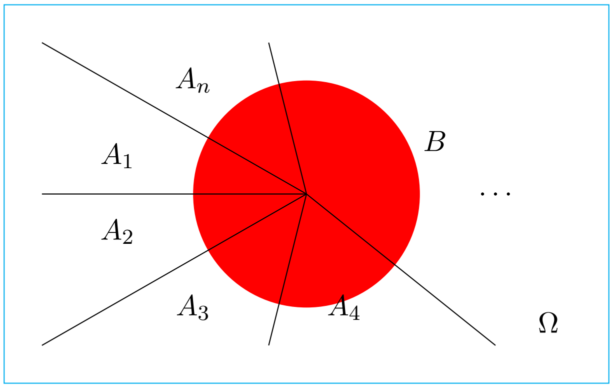
b) Formule des probabilités totales

Propriété

Soient $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ des événements d'un univers Ω, de probabilités non nulles, qui forment une partition de l'univers Ω.

Pour tout événement B de l'univers Ω, on a la formule suivante, appelée **formule des probabilités totales** :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cup A_1) + \mathbb{P}(B \cup A_2) + \mathbb{P}(B \cup A_3) + ... + \mathbb{P}(B \cup A_n).$$



Exemple

Soit l'événement B : « la carte est représente un nombre pair », dans notre univers $\Omega = \{$Toutes les cartes d'un jeu de 32 cartes$\}$.

Écrire la formule des probabilités totales pour chacune des partitions proposées dans l'exemple précédent.

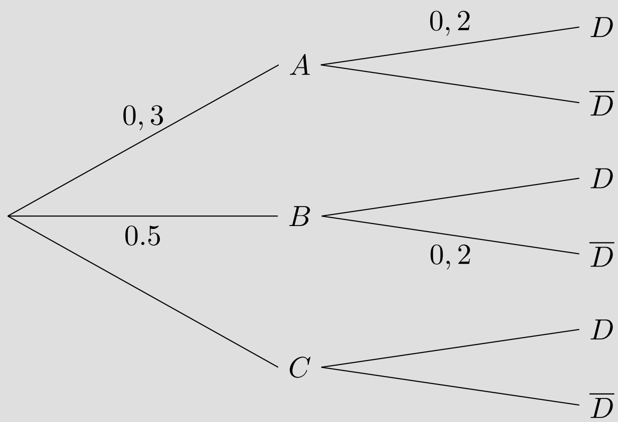
1. ....
....
....

2. ....
....
....

3. ....
....
....

Questions à Choix Multiple n° 5

On considère l'arbre pondéré ci-dessous où A, B, C et D sont quatre événements avec $\mathbb{P}(C \cap D) = 0,18$.



1. $\mathbb{P}(C) = 0,2$: a) Vrai b) Faux
2. $\mathbb{P}(A \cap D) = 0,5$: a) Vrai b) Faux
3. $\mathbb{P}_B(D) = 1 - \mathbb{P}_B(\overline{D})$: a) Vrai b) Faux
4. $\mathbb{P}_C(D) = 0,9$: a) Vrai b) Faux
5. $\mathbb{P}(A \cap D) + \mathbb{P}(B \cap D) + \mathbb{P}(C \cap D) = 1$: a) Vrai b) Faux
6. $\mathbb{P}(D) = 0,64$: a) Vrai b) Faux

CHAPITRE 5

Probabilités - Les exercices

a) Introduction aux probabilités conditionnelles

Exercice 1
Partie A
Une enquête est réalisée auprès des 1 500 élèves du lycée Bourbaki qui possèdent un téléphone portable afin de connaître le type d'appareil et le type de forfait dont ils disposent.
Il en ressort que :

- 210 élèves possèdent un smartphone et parmi eux 20 % ont un forfait bloqué.
- 375 élèves ont un forfait non bloqué.

Compléter le tableau suivant :

	Nombre d'élèves ayant un smartphone	Nombre d'élèves ayant un autre téléphone	Total
Nombre d'élèves ayant un forfait bloqué			
Nombre d'élèves ayant un forfait non bloqué			375
Total	210		

Partie B On interroge au hasard un élève du lycée Bourbaki et on considère les événements :

- S : « l'élève interrogé a un smartphone »
- B : « l'élève interrogé a un forfait bloqué »

1. Calculer la probabilité de l'événement B et celle de l'événement S.
2. Décrire par une phrase l'événement $\overline{S}$.
   Calculer la probabilité de l'événement $\overline{S}$.
3. Décrire par une phrase l'événement $S \cup B$.
   Calculer la probabilité de l'événement $S \cup B$.
4. Décrire par une phrase l'événement $S \cap B$.
   Calculer la probabilité de l'événement $S \cap B$.
5. L'élève interrogé a un smartphone. Quelle est la probabilité qu'il ait un forfait non bloqué ?

b) Utilisation d'un tableau à double entrée

Exercice 2

100 élèves de Terminale se répartissent de la façon suivante :

	Filles	Garçon	Total
Pratiquent un sport	30	50	80
Ne pratiquent pas un sport	12	8	20
Total	42	58	100

On rencontre au hasard un des 100 élèves. Tous les élèves ont la même probabilité d'être rencontrés. On considère les événements suivants :
F : « l'élève rencontré est une fille ».
S : « l'élève rencontré pratique un sport ».

1. Traduire par une phrase chacun des deux événements $F \cap S$ et $\overline{F} \cap \overline{S}$.
2. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(S), \mathbb{P}(F \cap S), \mathbb{P}(\overline{S})$ et $\mathbb{P}(\overline{F} \cap \overline{S})$.
3. Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_S(F)$ et $\mathbb{P}_{\overline{S}}(\overline{F})$.
4. Calculer la probabilité que, sachant que l'élève est un garçon, il pratique un sport. Arrondir le résultat à 10^{-2}.

Exercice 3

Une maladie atteint 3% d'une population de 30 000 habitants. On soumet cette population à un test.
Parmi les bien portants, 2% ont un test positif.
Parmi les personnes malades, 49 un test négatif.

1. Compléter le tableau suivant :

	Malades	Bien portants	Total
Test positif			
Test négatif			
Total			30 000

   Dans les questions suivantes, les résultats numériques demandés sont à arrondir à 10^{-2}.

2. On choisit au hasard une personne de cette population.
   On considère les événements T et M suivants :
   T :« le test est positif pour la personne choisie » ;
   M :« la personne choisie est malade ».
   (a) Traduire par une phrase chacun des événements suivants : $\overline{T}, T \cap M$ et $\overline{T} \cap M$.
   (b) Calculer les probabilités : $\mathbb{P}(\overline{T}), \mathbb{P}(T \cap M), \mathbb{P}(\overline{T} \cap M)$.
   (c) Calculer la probabilité que la personne choisie soit malade ou ait un test positif.
   (d) Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_T(M)$ et $\mathbb{P}_M(T)$.
   (e) Calculer la probabilité qu'une personne soit malade sachant qu'elle a eu un test négatif.

Exercice 4

Dans le service des urgences d'un hôpital, on a analysé les causes d'accidents. Sur 200 accidentés, on a dénombré :
- 110 hommes ;
- 7 femmes pour les 11 accidents de la circulation ;
- 48 hommes ayant eu des accidents pendant leurs loisirs ;
- 39 femmes ayant eu des accidents domestiques.

On sait aussi que 15% des accidents sont des accidents du travail et que, parmi eux, 70% ont des hommes pour victimes.

1. Compléter le tableau suivant :

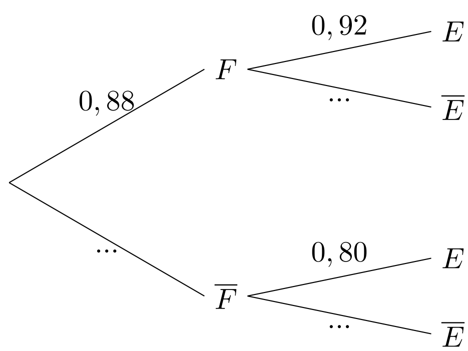
Type d'accident	Hommes	Femmes	Total
Domestique		39	
Loisirs			
Travail			
Circulation			11
Total			200

2. On choisit une personne au hasard parmi les 200 accidentés.
   On considère les événements suivants :
   H : « La personne choisie est un homme » ;
   T : « La personne choisie a eu un accident du travail ».
   (a) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(H), \mathbb{P}(T), \mathbb{P}(H \cap T)$.
   (b) Calculer la probabilité que la personne choisie soit un homme ou ait eu un accident du travail.
   (c) Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_H(T)$ et $\mathbb{P}_T(H)$. Arrondir éventuellement les résultats au centième.
   (d) Déterminer la probabilité que la personne choisie soit une femme sachant qu'elle a eu un accident domestique. Arrondir au centième.

c) Utilisation et lecture d'arbre pondéré

Exercice 5

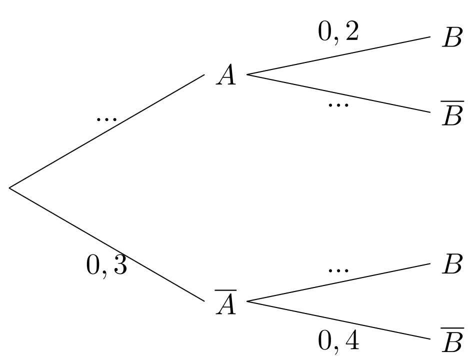
Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré suivant :



1. Compléter cet arbre.
2. En déduire les probabilités suivantes par simple lecture de l'arbre : $\mathbb{P}(\overline{F}), \mathbb{P}_F(E), \mathbb{P}_F(\overline{E}), \mathbb{P}_{\overline{F}}(E), \mathbb{P}_{\overline{F}}(\overline{E})$.
3. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(F \cap E), \mathbb{P}(F \cap \overline{E}), \mathbb{P}(\overline{F} \cap E), \mathbb{P}(\overline{F} \cap \overline{E})$.
4. Démontrer que $\mathbb{P}(E) = 0,9056$.

Exercice 6

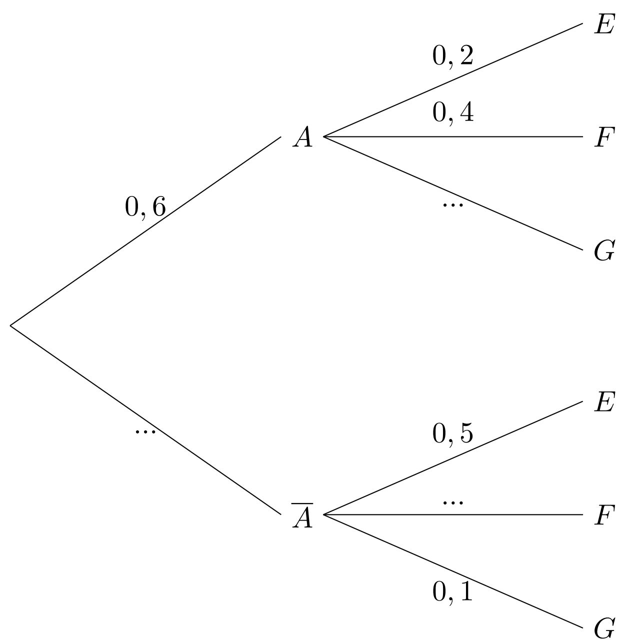
Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre ci-dessous où A et B sont deux événements :



1. Compléter cet arbre pondéré.

2. Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_A(\overline{B})$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$ et $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$.
   En déduire que $\mathbb{P}(\overline{B}) = 0,68$.
4. Calculer $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$. Arrondir à 10^{-2}.

Exercice 7
Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre ci-dessous où A, E, F, G sont quatre événements :



1. Compléter cet arbre pondéré.
2. Donner les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_A(G)$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(F)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(F)$.
4. Calculer $\mathbb{P}_F(A)$.

d) Indépendance

Exercice 8
On considère deux événements A et B tels que :
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{5}{12}, \mathbb{P}(B) = \dfrac{3}{10}$ et $\mathbb{P}(D) = 0,65$.
Les événements A et B sont-ils indépendants.

Exercice 9
On considère deux événements indépendants C et D tels que :
$\mathbb{P}(C) = 0,12$ et $\mathbb{P}(D) = 0,65$.
Déterminer $\mathbb{P}_C(D), \mathbb{P}_D(C)$ et $\mathbb{P}(C \cap D)$.

e) Bilan

Exercice 10
Une épidémie due à une bactérie s'est développée dans une grande ville.
Afin de lutter contre cette épidémie en distribuant de façon raisonnée un antibiotique adapté, un organisme de santé a mis au point un test de dépistage.
On admet que :

- $15\,\%$ de la population est contaminée par cette bactérie
- le test est positif dans $99,6\,\%$ des cas pour une personne contaminée par cette bactérie

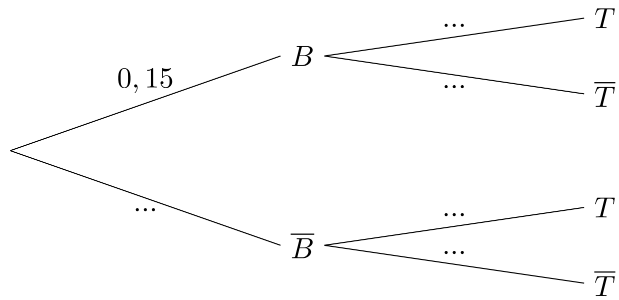
- le test est négatif dans $97,6\,\%$ des cas pour une personne non contaminée par cette bactérie.

Une personne est choisie au hasard dans cette ville. On admet que chaque personne a la même probabilité d'être choisie. On considère les évènements suivants :

- B : « La personne choisie est contaminée par la bactérie »
- T : « Pour la personne choisie, le test est positif »

Dans chaque question, les résultats numériques seront donnés sous forme décimale exacte.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. (a) Quelle est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne choisie est contaminée par la bactérie ?
   (b) Quelle est la valeur de $P_{\overline{B}}(T)$?
3. (a) Calculer la probabilité que la personne choisie soit contaminée par la bactérie, et que pour elle le test soit positif.
   (b) Calculer la probabilité $P(\overline{B} \cap T)$.
4. Montrer que la probabilité que, pour la personne choisie, le test soit positif est de 0,1698.
5. (a) Calculer $P(\overline{T})$.
   (b) Calculer $P_{\overline{T}}(B)$. *Arrondir le résultat à* 10^{-4}.
   (c) Interpréter ce dernier résultat.
6. Dans cette question, toute trace de recherche, même non aboutie, sera prise en compte.
   Calculer la probabilité que le test donne un résultat faux. *Arrondir le résultat à* 10^{-4}.
7. Cette dernière question est indépendante des précédentes.
   On fait passer le test à 4 personnes différentes de la population et on regarde si le résultat est positif. On peut modéliser cette expérience aléatoire par une loi binomiale.
   Calculer la probabilité qu'exactement 2 des 4 personnes ont un test positif.
   Arrondir le résultat à 10^{-4}.