

III. Racine carrée

a) Rappels

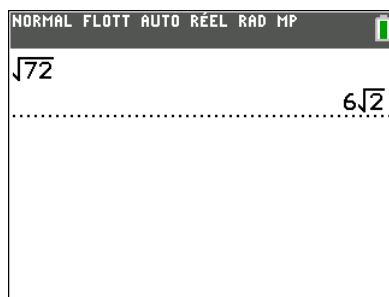
Définition	Multiplication	Division
<ul style="list-style-type: none"> La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif notée \sqrt{a}, dont le carré est a. $(\sqrt{a})^2 = a$	<ul style="list-style-type: none"> Pour tous nombres réels positifs a et b, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$	<ul style="list-style-type: none"> Pour tous nombres réels positifs a et b, ($b \neq 0$), $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemple

- $\sqrt{4} \times \sqrt{9} = \sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$
- $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
- $\sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$

Point Méthode (Comment simplifier une racine carrée)

Quand j'écris $\sqrt{72}$ sur ma calculatrice, elle me répond $6\sqrt{2}$. Comment fait-elle ?



Il faut d'abord décomposer le nombre 72 en faisant apparaître un carré parfait le plus grand possible :

- $72 = 3 \times 24$ ne convient pas car ni 3, ni 24 ne sont des carrés parfaits ;
- $72 = 9 \times 8$ semble convenir car 9 est bien un carré parfait, mais dans 8 il existe encore un carré parfait caché car $8 = 4 \times 2$;
- $72 = 36 \times 2$ convient tout à fait car 36 est un carré parfait et il n'y a aucun carré parfait caché dans 2.

On peut alors effectuer la simplification :

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Remarque

Si nous n'avions pas remarqué la décomposition 36×2 , on aurait pu partir de 9×8 tout en décomposant ensuite le nombre 8.

$$\sqrt{72} = \sqrt{9 \times 8} = \sqrt{9 \times 4 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 3 \times 2 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

b) Exercices sur les racines carrées

Niveau 1 : Calculer mentalement

$\sqrt{4}$	$\sqrt{100}$	$\sqrt{900}$	$\sqrt{0,01}$	$\sqrt{(3,14)^2}$
$\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{9}{25}}$	$\sqrt{\frac{49}{36}}$	$\sqrt{\frac{1}{81}}$	$\sqrt{\frac{121}{100}}$
$\sqrt{3\,600}$	$\sqrt{0,04}$	$\sqrt{10^6}$	$\sqrt{4 \times 10^8}$	$\sqrt{(-1)^2}$

Niveau 2 : Réduire les expressions

$A = 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$	$B = -\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$	$C = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$
$D = 5\sqrt{5} - 6\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + \sqrt{5}$	$E = -4\sqrt{11} + 11\sqrt{13} + 13\sqrt{11}$	$F = 3\sqrt{7} - 3\sqrt{5} - 5\sqrt{7} + 7\sqrt{5}$
$G = -8\sqrt{2} - 2\sqrt{11} + 3\sqrt{11} - 7\sqrt{2}$	$H = -4\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 8\sqrt{5}$	

Niveau 3 : Calculer les produits

$A = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$	$B = 2\sqrt{7} \times \sqrt{7}$	$C = 3\sqrt{5} \times 4\sqrt{5}$	$D = -\sqrt{2} \times \sqrt{2}$
$E = -3\sqrt{2} \times (-5\sqrt{2})$	$F = 7\sqrt{3} \times (-2\sqrt{3})$	$G = 5\sqrt{5} \times (-2\sqrt{5})$	$H = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$

Niveau 4 : Écrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où a , b et c sont des entiers

$A = 2(2 + \sqrt{5})$	$B = 3(6 - \sqrt{2})$	$C = 5(3\sqrt{2} + 4)$	$D = -3(5\sqrt{3} - 7)$
$E = \sqrt{3}(4 + \sqrt{3})$	$F = -2\sqrt{5}(3\sqrt{5} + 2)$	$G = 5\sqrt{7}(-4 + 3\sqrt{7})$	$H = -9\sqrt{11}(-2\sqrt{11} - 6)$

Niveau 5 : Simplifier les racines carrées

$\sqrt{18}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{96}$	$\sqrt{50}$
$\sqrt{27}$	$\sqrt{45}$	$\sqrt{15}$	$\sqrt{98}$	$\sqrt{300}$
$\sqrt{40}$	$\sqrt{99}$	$\sqrt{54}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{75}$
$\sqrt{72}$	$\sqrt{63}$	$\sqrt{288}$	$\sqrt{150}$	$\sqrt{28}$

Niveau 6 : Écrire sans radical au dénominateur (si besoin simplifier la racine carrée)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad B = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad C = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \quad D = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} \quad E = \frac{-3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} \quad F = \frac{4\sqrt{7}}{3\sqrt{21}}$$

AIDE : Vous devez multiplier la fraction au numérateur et au dénominateur par le radical dont vous voulez vous débarrasser, ainsi pour A vous multipliez par $\sqrt{2}$, pour E par $\sqrt{3}$...

Niveau 7 : Écrire sans radical au dénominateur (si besoin simplifier la racine carrée)

$$A = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad B = \frac{2 + 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad C = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad D = \frac{\sqrt{3} - 1}{3\sqrt{6}} \quad E = \frac{2 - 3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} \quad F = \frac{2 + 4\sqrt{7}}{3\sqrt{21}}$$

AIDE : Vous devez multiplier la fraction au numérateur et au dénominateur par le radical dont vous voulez vous débarrasser, ainsi pour A vous multipliez par $\sqrt{2}$, pour E par $\sqrt{3}$...

Niveau 8 : Écrire sans radical au dénominateur (si besoin simplifier la racine carrée)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \quad B = \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \quad C = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \quad D = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}} \quad E = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} \quad F = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3} - \sqrt{7}}$$

AIDE : Vous devez multiplier la fraction au numérateur et au dénominateur par ce qu'on appelle l'expression conjuguée du dénominateur. L'expression conjuguée est le facteur manquant dans l'identité remarquable $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

EXEMPLE :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{1 \times (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}^2 - \sqrt{3}^2} \text{ car on a reconnu l'identité remarquable au dénominateur} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 - 3} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{-1} \\ &= -\sqrt{2} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

c) Correction des exercices

Niveau 1 : Calculer mentalement

2	10	30	0,1	3,14
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{11}{10}$
60	0,2	10^3	2×10^4	1

Niveau 2 : Réduire les expressions

$A = \sqrt{2}$	$B = 5\sqrt{5}$	$C = 0\sqrt{2} = 0$
$D = -14\sqrt{3} + 6\sqrt{5}$	$E = 9\sqrt{11} + 11\sqrt{13}$	$F = 4\sqrt{5} - 2\sqrt{7}$
$G = -15\sqrt{2} + \sqrt{11}$	$H = -4\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 8\sqrt{5}$	

Niveau 3 : Calculer les produits

$A = 6$	$B = 14$	$C = 60$	$D = -2$
$E = 30$	$F = -42$	$G = -50$	$H = 2\sqrt{2}$

Niveau 4 : Écrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où a , b et c sont des entiers

$A = 4 + 2\sqrt{5}$	$B = 18 - 3\sqrt{2}$	$C = 20 + 15\sqrt{2}$	$D = 21 - 15\sqrt{3}$
$E = 3 + 4\sqrt{3}$	$F = -30 - 4\sqrt{5}$	$G = 105 - 20\sqrt{7}$	$H = 198 + 54\sqrt{11}$

Niveau 5 : Simplifier les racines carrées

$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{5}$	$4\sqrt{6}$	$5\sqrt{2}$
$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{5}$	$\sqrt{15}$	$7\sqrt{2}$	$10\sqrt{3}$
$2\sqrt{10}$	$3\sqrt{11}$	$3\sqrt{6}$	$4\sqrt{2}$	$5\sqrt{3}$
$6\sqrt{2}$	$3\sqrt{7}$	$12\sqrt{2}$	$5\sqrt{6}$	$2\sqrt{7}$

Niveau 6 : Écrire sans radical au dénominateur (si besoin simplifier la racine carrée)

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad B = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad C = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad D = \frac{\sqrt{2}}{6} \quad E = \frac{-3\sqrt{15}}{15} \quad F = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

Niveau 7 : Écrire sans radical au dénominateur (si besoin simplifier la racine carrée)

$$A = \frac{\sqrt{2}-2}{2} \quad B = \frac{2\sqrt{3}+15}{3} \quad C = \frac{\sqrt{10}-2}{2} \quad D = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{18} \quad E = \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{15}}{15} \quad F = \frac{2\sqrt{21}+28\sqrt{3}}{63}$$

Niveau 8 : Écrire sans radical au dénominateur (si besoin simplifier la racine carrée)

$$A = -\sqrt{2}-\sqrt{3} \quad B = -2\sqrt{2}+2\sqrt{3} \quad C = -\frac{5+\sqrt{10}}{3} \quad D = -1+\sqrt{2} \quad E = \frac{5-\sqrt{15}}{2} \quad F = -\frac{7+\sqrt{21}}{4}$$