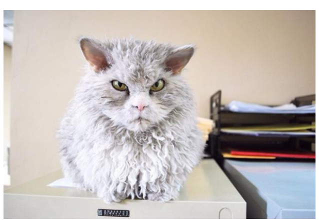
CHAPITRE 7

Dérivation

Extrait du programme



Référence :
Albert le chat vénère

Contenus

Point de vue local

- Taux de variation. Sécantes à la courbe représentative d'une fonction en un point donné.
- Nombre dérivé d'une fonction en un point, comme limite du taux de variation. Notation $f'(a)$.
- Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point, comme « limite des sécantes ». Pente. Équation : la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Point de vue global

- Fonction dérivable sur un intervalle. Fonction dérivée.
- Fonction dérivée des fonctions carré, cube, inverse, racine carrée.
- Opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, inverse, quotient, fonction dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$.
- Pour n dans $\mathbb{Z}$, fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$.
- Fonction valeur absolue : courbe représentative, étude de la dérivabilité en 0.

Capacités attendues

- Calculer un taux de variation, la pente d'une sécante.
- Interpréter le nombre dérivé en contexte : pente d'une tangente, vitesse instantanée, coût marginal...
- Déterminer graphiquement un nombre dérivé par la pente de la tangente. Construire la tangente en un point à une courbe représentative connaissant le nombre dérivé.
- Déterminer l'équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction.
- À partir de la définition, calculer le nombre dérivé en un point ou la fonction dérivée de la fonction carré, de la fonction inverse.
- Dans des cas simples, calculer une fonction dérivée en utilisant les propriétés des opérations sur les fonctions dérivables.

Démonstrations

- Équation de la tangente en un point à une courbe représentative.
- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
- Fonction dérivée de la fonction carrée, de la fonction inverse.
- Fonction dérivée d'un produit.

Exemple d'algorithme

- Écrire la liste des coefficients directeurs des sécantes pour un pas donné.

A la fin de ce chapitre

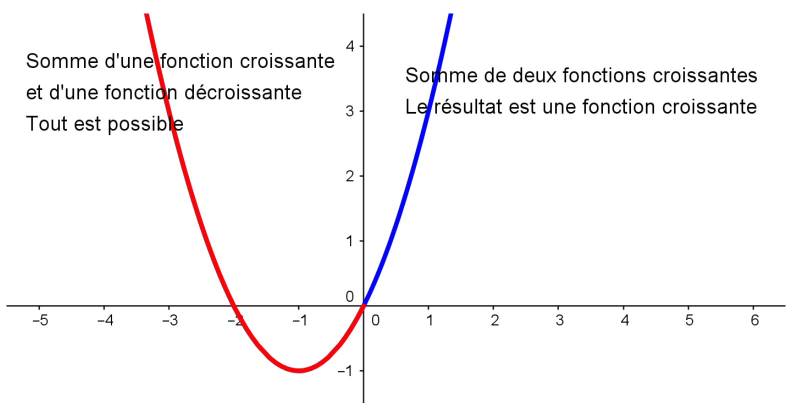
Je sais :	Oui	Non	Qu'en pense mon professeur ?
• Je connais les fonctions dérivées des fonctions de référence	☐	☐	☐
• Je connais les opérations de base sur fonctions dérivées	☐	☐	☐
• Je sais calculer l'équation de la tangente à une courbe	☐	☐	☐
• Je sais tracer une courbe représentative à l'aide de la dérivée	☐	☐	☐
• Je sais lire une dérivée à l'aide d'une tangente	☐	☐	☐

Vous retrouverez ce cours à l'adresse suivante :
`https://github.com/NaturelEtChaud/Math-premiere/tree/main/07%20D%C3%A9rivation`

Introduction - [A lire]

Pour étudier le sens de variation d'une fonction, on pourrait penser s'en sortir en utilisant des fonctions connues (dites de référence). Il est vrai par exemple que lorsque l'on additionne deux fonctions croissantes, le résultat est une fonction croissante.
Par contre lorsque l'on additionne une fonction croissante avec une fonction décroissante, on ne peut conclure et tous les résultats sont possibles. Prenons par exemple la fonction $u(x) = x^2$ et la fonction $v(x) = 2x$. Ces deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ sont parfaitement connues :

- la fonction u est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$;
- la fonction v est croissante sur $\mathbb{R}$.



Qu'en est-il de $f(x) = u(x) + v(x) = x^2 + 2x$ la somme de ces deux fonctions ?
Sur $[0; +\infty[$ les deux fonctions u et v sont croissantes donc la fonction f est croissante. Tout va bien.
Sur $]-\infty; 0]$ la fonction u est décroissante et la fonction v est croissante. On ne peut alors rien dire concernant la somme de ces deux fonctions. Et force est de constater qu'effectivement, la fonction $f(x) = x^2 + 2x$ est tout d'abord décroissante sur $]-\infty; -1]$ puis croissante sur $[-1; 0]$. Donc lorsque l'on additionne deux fonctions de sens de variations différents, tout est possible !

Pour contourner ce problème nous allons utiliser une méthode issue de ce qu'on appelle le **calcul infinitésimal**. Cette branche de l'analyse connut une avancée spectaculaire dans la seconde moitié du XVII^{e} siècle malgré une vive polémique entre le mathématicien anglais Isaac Newton et le mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz. En posant rigoureusement la notion d'**infiniment petit**, le calcul infinitésimal permit de traiter le calcul différentiel (le propos de ce chapitre) d'une part et le calcul intégral (que vous découvrirez l'an prochain) d'autre part.

Isaac Newton (1642 - 1727)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

I. Tangente à une courbe - (A lire uniquement)

La notion de tangente à une courbe est une notion importante de l'analyse car une fonction est croissante (respectivement décroissante) si et seulement si, la tangente à sa courbe l'est aussi.
De plus, comme une tangente n'est qu'une droite, sa fonction associée est une fonction affine. Plutôt que d'étudier notre fonction de départ, il est plus simple d'étudier les variations d'une fonction affine en regardant le signe de son coefficient directeur.
Mais avant d'aller plus loin, essayons de définir ce qu'est une tangente.

Définition intuitive La **tangente** à une courbe en un point M est une droite qui « touche » en seul point la courbe au voisinage de ce point.

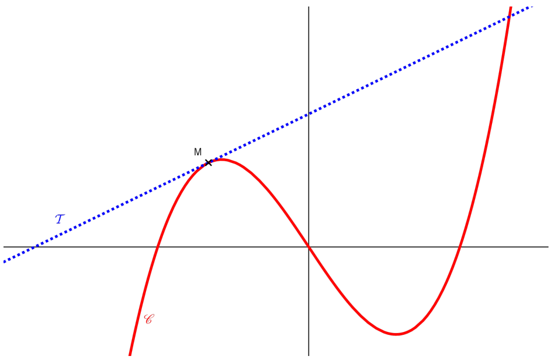


Figure 7.1 – La droite $\mathcal{T}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M

Remarque
On constate sur la figure ci-dessus que la définition *droite qui coupe la courbe en seul point* n'est pas suffisante. Notre tangente $\mathcal{T}$ coupe ici la courbe $\mathscr{C}$ en deux points.

Définition géométrique Soit une courbe $\mathscr{C}$ et soit M un point de $\mathscr{C}$.
On considère N un deuxième point de $\mathscr{C}$.
En rapprochant le « plus possible » le point N du point M, la droite (MN) va tendre vers la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M.

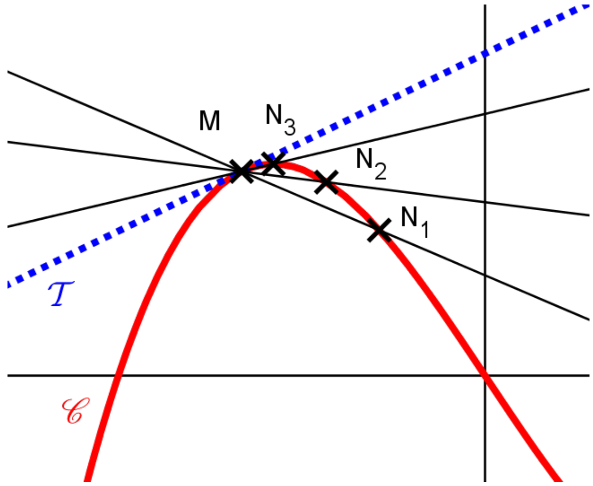


FIGURE 7.2 – Les points N_1, N_2 et N_3 de la courbe $\mathscr{C}$ se rapprochent de plus en plus du point M. La droite (MN) tend de plus en plus vers la tangente $\mathcal{T}$.

Essayons de réécrire cette définition de manière analytique.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Soit $a \in I$ un réel et soit $M(a, f(a))$ un point de la courbe $\mathscr{C}$. On s'intéresse à la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M.
Prenons un point N sur la courbe $\mathscr{C}$, « à côté » de M. Pour définir les coordonnées de N, on dira que l'abscisse de N est presque la même que celle de M. Elle sera donc de *a plus un petit quelque-chose*. Nous appellerons h, ce petit quelque-chose.
L'abscisse de N est donc égale à $a + h$, son ordonnée $f(a + h)$.
Les coordonnées de N sont donc $N(a + h, f(a + h))$.
On s'intéresse à la droite (MN). Son coefficient directeur est donné par la formule du taux d'accroissement vu en seconde :

$$\begin{aligned}\tau_{(MN)} &= \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\end{aligned}$$

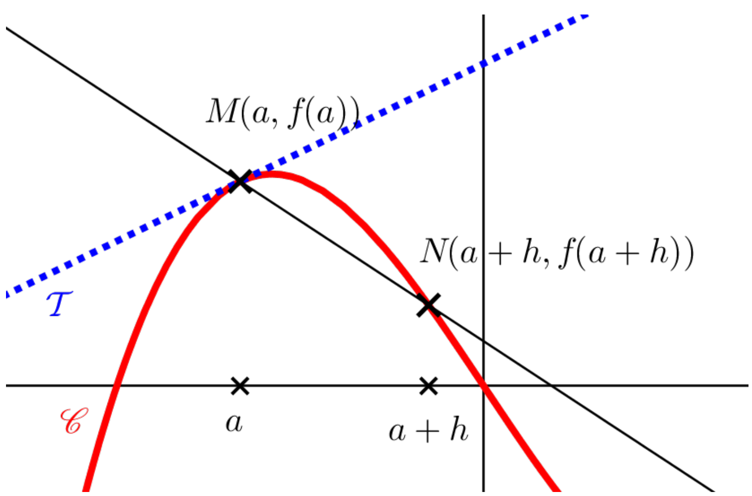


FIGURE 7.3 – Construction analytique d'une tangente.

Rapprocher le plus possible N de M revient à rapprocher le plus possible le nombre h de 0. Cette « limite » nous permet d'obtenir le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M.

II. Nombre dérivée

Définition On appelle **taux d'accroissement** T de la fonction f entre les quantités x_1 et x_2, la quantité définie par :

$$T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

Dire que f est **dérivable en a**, c'est dire que lorsque h tend vers 0, le taux de variation $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un réel l.

Le nombre l est appelé le **nombre dérivée de f en a**. On le note $f'(a)$.

On peut noter :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Remarque

- $\lim\limits_{h \to 0}$ signifie que h tend vers zéro mais ne l'atteint pas ($h \neq 0$).
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ se lit : « limite de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 ».
- Les physiciens utilisent la notation appelée différentielle : $f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Questions à Choix Multiple n° 1

Soit $f : x \mapsto x^2$ la fonction carré.

1. Le point $M(1;1)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$:
   a) Vrai b) Faux
2. Soit h un réel. Le point N de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $1+h$ a pour ordonnée :
   a) $1 + h^2$ b) $1 + 2h + h^2$
3. Le coefficient directeur de la droite (MN) est :
   a) $h^2 + 2$ b) $h + 2$

Propriété Soient f une fonction dérivable en a, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Soit A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
La **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A :

- est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$;
- a pour équation réduite

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Démonstration (faite en classe)
□

Exemple
Soit $f : x \mapsto x^2$ la fonction carré. Calculons sa dérivée en $a = 1$.

- $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{(1+h)^2-1^2}{h} = \dfrac{1+2h+h^2-1}{h} = \dfrac{2h+h^2}{h} = \dfrac{h(2+h)}{h} = 2+h.$
- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2+h) = 2+0 = 2.$
  Pour ce calcul de limite, il n'y a aucun problème car nous devons faire tendre h vers 0 autant que possible. Comme 0 n'est pas une valeur interdite, on peut remplacer h par 0 dans la formule.

Donc $f'(1) = 2$.
Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite de coefficient directeur 2.
On peut alors calculer l'équation réduite de $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
On a $f'(1) = 2 =$ et $f(1) = 1^2 = 1$. L'équation réduite est alors :

$$\begin{aligned} & y = f'(a)(x-a) + f(a) \\ \iff & y = 2(x-1)+1 \\ \iff & y = 2x-2+1 \\ \iff & y = 2x-1 \end{aligned}$$

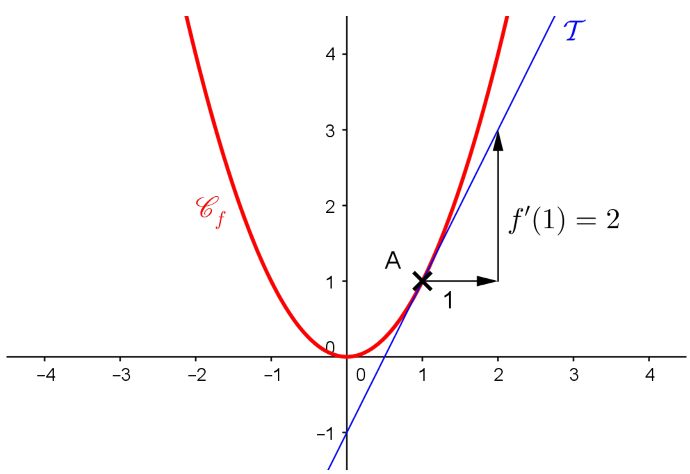


Figure 7.4 – La tangente au point d'abscisse 1

Questions à Choix Multiple n° 2
Soit $f : x \mapsto x^2$ la fonction carré.

1. $f'(1)$ égale :
   a) -2 b) 0 c) 1 d) 2
2. $f'(0)$ égale :
   a) -2 b) 0 c) 1 d) 2
3. $f'(-1)$ égale :
   a) -2 b) 0 c) 1 d) 2

III. Fonction dérivée

Définition
Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si, elle est dérivable en tout réel a de I.
Si f est dérivable sur I, on appelle **fonction dérivée** de f sur I la fonction notée f' définie sur I qui a tout point a associe sont nombre dérivée $f'(a)$.

Propriété

Fonction f	Ensemble de définition	Dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \geq 1$ entier	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Remarque
Attention, la fonction racine carrée est bien définie en 0, mais n'est pas dérivable en 0. Sa courbe représentative n'admet donc pas de tangente au point d'abscisse 0.

Démonstration (faite en classe)
- Fonction dérivée de la fonction carrée
- Fonction dérivée de la fonction inverse
- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0

□

Exemple
- Pour la fonction carré $f(x) = x^2$, on peut alors calculer directement les nombres dérivés suivants :
  $f'(x) = 2x$ donc
  $f'(-1) = 2 \times (-1) = -2$,
  $f'(0) = 2 \times 0 = 0$,
  $f'(0,5) = 2 \times 0,5 = 1$,
  $f'(1) = 2 \times 1 = 2$, ...

- Pour la fonction cube $g(x) = x^3$, on peut utiliser la $4^{\text{ième}}$ formule du tableau avec $n = 3$: $g(x) = x^n$ donc $g'(x) = nx^{n-1}$.
  $g'(x) = 3x^2$ donc
  $g'(-1) = 3 \times (-1)^2 = 3$,
  $g'(0) = 3 \times 0^2 = 0$,
  $g'(1) = 3 \times 1^2 = 3$, ...

Questions à Choix Multiple n° 3

1. $f(x) = 5$ a pour dérivée :
   a) $f'(x) = 5$ b) $f'(x) = 0$ c) $f'(x) = -5$
2. $g(x) = x^5$ a pour dérivée :
   a) $g'(x) = 5x$ b) $g'(x) = 5x^4$ c) $g'(x) = 5x^5 - 1$
3. Soit $h(x) = \frac{1}{x}$. $h'(-2)$ égale :
   a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $-\frac{1}{4}$

IV. Opérations sur les dérivées

Dans tout ce paragraphe, u et v désignent deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. λ désigne un nombre quelconque.

Propriété

Opération	Dérivée	Condition de dérivabilité
Somme : $f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$	
Produit par un réel λ : $f(x) = \lambda \times u(x)$	$f'(x) = \lambda \times u'(x)$	
Produit de deux fonctions : $f(x) = u(x) \times v(x)$	$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	
Inverse d'une fonction : $f(x) = \frac{1}{u(x)}$	$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$	u ne s'annule par sur l'intervalle I.
Quotient de deux fonctions : $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$	v ne s'annule par sur l'intervalle I.
Puissance d'une fonction : $f(x) = u(x)^n$	$f'(x) = n \times u'(x) \times u(x)^{n-1}$	

Démonstration (faite en classe)

- Fonction dérivée d'un produit

□

Exemple

- $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.
  La dérivée de x^4 est $4x^3$.
  La dérivée de x^2 est $2x$.

La dérivée de 1 est 0.
$f'(x) = 3 \times 4x^3 - 4 \times 2x + 0 = 12x^3 - 8x$.

- $g(x) = x\sqrt{x}$ est définie sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de deux fonctions.
  On pose $g(x) = u(x) \times v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = \sqrt{x} & v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}. \end{cases}$
  Donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \sqrt{x}^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \sqrt{x} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

- $h(x) = \dfrac{2-3x}{x^2-1}$ est définie sur $]1; +\infty[$ et dérivable sur $]1; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions.
  On pose $h(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 2 - 3x & u'(x) = -3 \\ v(x) = x^2 - 1 & v'(x) = 2x. \end{cases}$
  Donc

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{-3 \times (x^2-1) - (2-3x) \times 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{3x^2 - 4x + 3}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

Questions à Choix Multiple n° 4

1. $f(x) = \dfrac{2x-1}{3-x}$ est définie et dérivable sur $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{5}{(3-x)^2}$:
   a) Vrai b) Faux
2. $g(x) = (x+2)\sqrt{x}$ et définie sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{3x+2}{2\sqrt{x}}$:
   a) Vrai b) Faux
3. La courbe représentative de la fonction $h(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ admet deux tangentes horizontales :
   a) Vrai b) Faux

V. Composition de fonctions et dérivation

Propriété Soit I un intervalle et a et b deux nombres réels. Soit J l'intervalle formée des valeurs prises par $ax+b$ lorsque x décrit l'intervalle I.
Si g est une fonction dérivable sur J, alors la fonction f définie sur I par $f : x \mapsto g(ax+b)$ est dérivable sur I avec pour tout réel x de I : $f'(x) = a \times g'(ax+b)$

Exemple
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x+2)^3$.
Cette fonction est la composée de la fonction affine $u(x) = 5x+2$ et de la fonction cube $g(u) = u^3$.
On a : $f'(x) = a \times g'(ax+b)$ avec $a = 5$, $b = 2$ et $g'(u) = 3u^2$.
Soit : $f'(x) = 5 \times \left(3 \times (5x+2)^2\right) = 15(5x+2)^2$.

VI. La fonction valeur absolue

Définition La fonction **valeur absolue** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto \sqrt{x^2}$$

On la note $x \mapsto |x|$.

Propriété
- La valeur absolue d'un nombre réel positif est le nombre lui-même.
- La valeur absolue d'un nombre réel négatif est l'opposé de ce nombre.

Autrement dit, la valeur absolue du nombre x, est :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Démonstration (faite en classe)
□

Exemple
$|4| = 4; \quad |-2| = 2; \quad |0| = 0; \quad |2-\pi| = \pi - 2$ car $2 - \pi$ est négatif.

La représentation graphique se déduit de cette propriété :

Remarque
On remarque qu'il va être difficile de tracer la tangente en 0 à la courbe représentative de la fonction valeur absolue. Et en effet, on a la propriété suivante :

Propriété La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Démonstration (faite en classe)
□

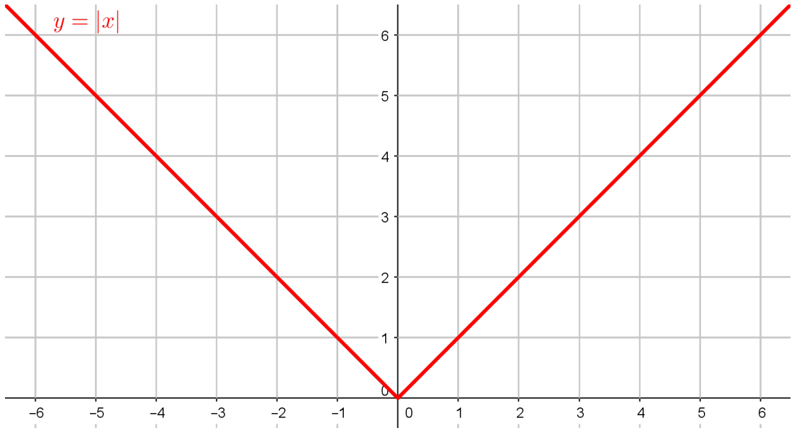


FIGURE 7.5 – La représentation graphique de la fonction valeur absolue

VII. Exercices

a) Exercices donnés à l'ancien BAC de STMG

Exercice 1 (Antilles-Guyane, septembre 2013)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est correcte.

Une réponse juste rapporte un point. L'absence de réponse ou une réponse fausse ne rapporte ni n'enlève de point.

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ dont la courbe représentative (C) est donnée en annexe. Le point $A(4\,;\,0)$ appartient à la courbe (C) et la droite (d) est la tangente à la courbe (C) au point A.

1. Le minimum de la fonction f est :

   a. 0 **b.** 2,5 **c.** $-4,5$

2. $f'(4) =$

   a. 0 **b.** 6 **c.** $\frac{1}{6}$

3. Pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,2]$,

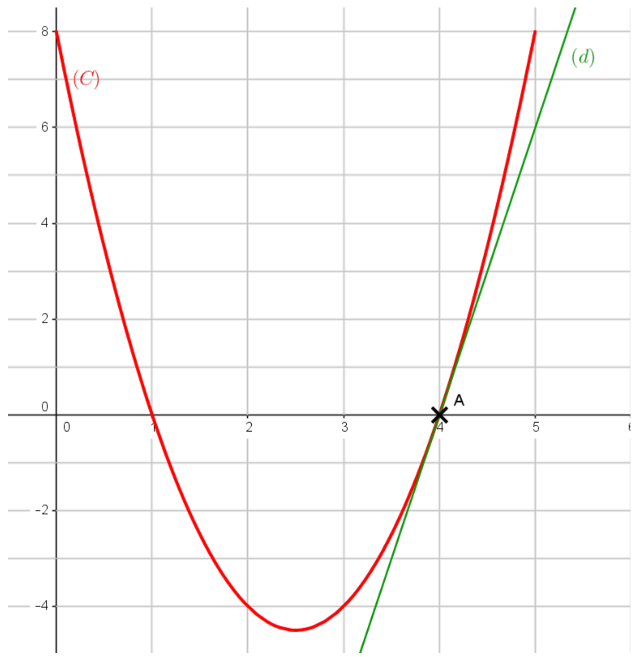
   a. $f'(x) \leqslant 0$ **b.** $f'(x) = 0$ **c.** $f'(x) \geqslant 0$

4. L'équation $f(x) = 6$

   a. n'a pas de solution **b.** a trois solutions **c.** a deux solutions

5. La fonction f a pour expression :

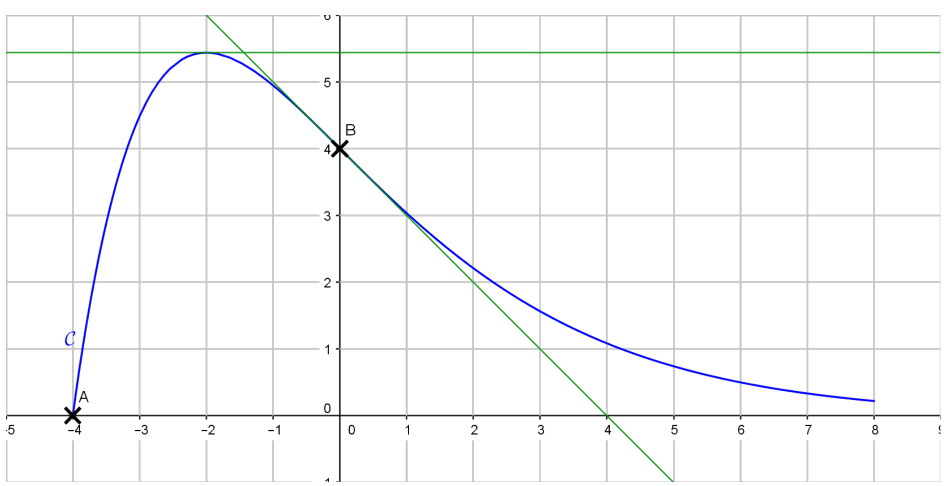
   a. $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$ **b.** $f(x) = 2x^2 - 10x$ **c.** $f(x) = 2x + 8$



Exercice 2 (Métropole, septembre 2013)

La courbe C ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 8]$. On note f' la fonction dérivée de f.
C vérifie les propriétés suivantes :

- les deux points A et B ont des coordonnées entières et appartiennent à C ;
- la tangente au point d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses ;
- la tangente au point B passe par le point de coordonnées $(4\ ;\ 0)$.



1. Déterminer graphiquement les images par la fonction f de -4 et de 0.
2. Déterminer graphiquement $f'(-2)$.
3. (a) Donner une équation de la tangente à la courbe C au point B.

   (b) En déduire la valeur de $f'(0)$.

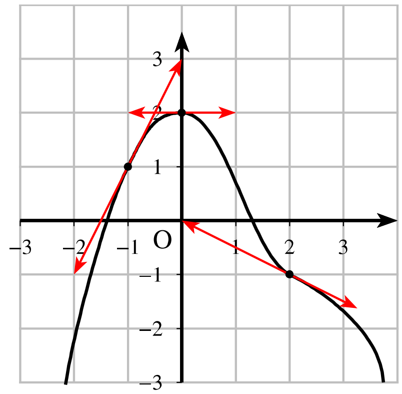
b) Feuilles d'exercices du site Lycée d'Adultes

Nombre dérivé - Interprétation graphique

Exercice 1

À l'aide de la représentation graphique ci-contre de la fonction f, donner les valeurs de :

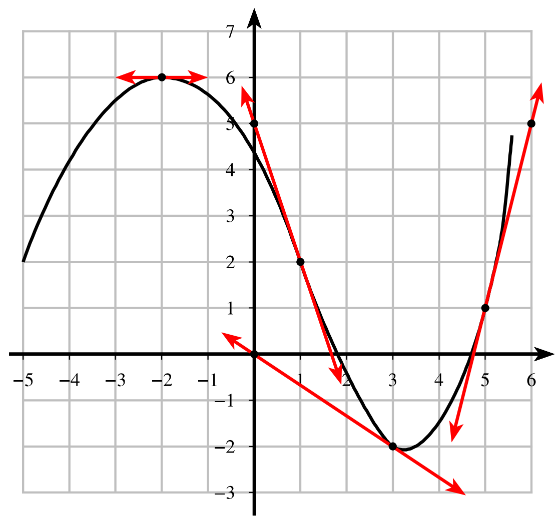
- $f(0)$, $f(-1)$ et $f(2)$.
- $f'(0)$, $f'(-1)$ et $f'(2)$.



Exercice 2

À l'aide de la représentation graphique ci-contre de la fonction f, donner les valeurs de :

- $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ et $f(5)$.
- $f'(-2)$, $f'(1)$, $f'(3)$ et $f'(5)$.



Calculs de dérivée

Exercice 3

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée en précisant les valeur pour lesquelles le calcul est valable.

1) $f(x) = -5x^3 + 4x^2 - 9x - 5$

2) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \sqrt{3}x + 1$

3) $f(x) = -\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2}$

4) $f(x) = \dfrac{x^3 + 12x - 1}{4}$

5) $f(x) = (7x - 2)^2$

6) $f(x) = x + \sin x$

Exercice 4

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée en précisant les valeur pour lesquelles le calcul est valable.

1) $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$
2) $f(x) = x \sin x$
3) $f(x) = \sqrt{x}\cos x$

Exercice 5

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée en précisant les valeur pour lesquelles le calcul est valable.

1) $f(x) = -\dfrac{4}{x^3}$
2) $f(x) = \dfrac{2}{5x} - \dfrac{3x}{4}$
3) $f(x) = \dfrac{2}{3x-5}$
4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
5) $f(x) = \dfrac{1-2x}{x-2}$
6) $f(x) = \dfrac{4x+7}{x^2}$
7) $f(x) = \dfrac{2-x^2}{2+x^2}$
8) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+8}{2x-5}$
9) $f(x) = 4x - 1 + \dfrac{1}{4-x}$
10) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin x$
11) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

Exercice 6

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée en précisant les valeur pour lesquelles le calcul est valable.

1) $f(x) = \sqrt{x-4}$
2) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$
3) $f(x) = (-2x+3)^4$
4) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

Exercice 7

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x-2}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{-5}{x+1}$$

a) Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f et g. Que remarque t-on ?
b) Calculer $f(x) - g(x)$. Justifier alors la remarque de la question a)

Tangente

Exercice 8

Pour les fonctions suivantes déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

a) $f(x) = -x^2 + 2x - 8\,;\quad a = -2$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{1-2x}\,;\quad a = -1$

c) $f(x) = x^2 + 1 - \dfrac{1}{x^2+1}\,;\quad a = 1$

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$

1) La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f admet une tangente en chacun de ses points. Pourquoi ?
2) a) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$
   b) Interpréter géométriquement le résultat.
3) Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}_f$ a un coefficient directeur égal à 3.
4) Existe-t-il des points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = cx + d$ (où c et d sont deux réels) ? Discuter en fonction de c.

Exercice 10

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x}{1+x}$

$\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative.

a) Déterminer les points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = 4x$.
b) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par l'origine O ?

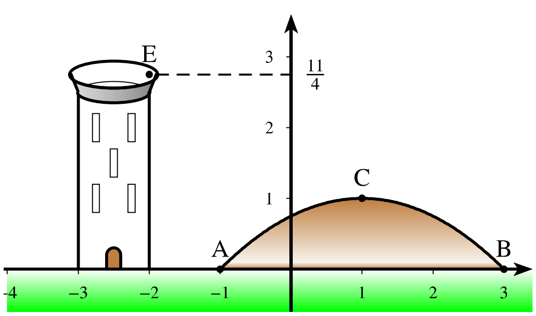
Exercice 11

Angle mort

Sur la figure ci-contre, "*l'arc*" de parabole ABC représente une colline, le sol est symbolisé par l'axe des abscisses.

Un observateur est placé en $E\left(-2\,;\,\dfrac{11}{4}\right)$.

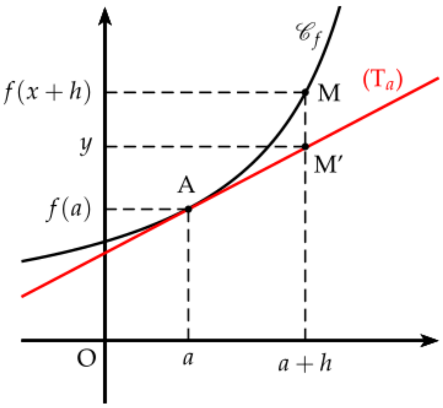
Le but de cet exercice est de déterminer les point de la colline et ceux du sol (au-delà de la colline) qui ne sont pas visibles du point d'observation E.



1) On note f la fonction définie sur $[-1\,;\,3]$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
   Déterminer a, b, c pour que "*l'arc*" ABC soit la représentation de f.
2) a) Reproduire la figure et indiquer sur la figure les points de la colline et ceux du sol qui ne sont pas visible de E.
   b) Faire les calculs nécessaires pour trouver les abscisses de ces points.

VIII. Applications

Exercice 3 (Approximation affine)



Soit f une fonction dérivable de courbe représentative $\mathscr{C}_f$. Soit un A un point de $\mathscr{C}_f$ et soit T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A. On peut en première approximation confondre la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la tangente T lorsque l'on est « assez proche » de A.

Autrement dit, en posant a l'abscisse du point A, on peut approcher $f(a+h)$ par le nombre obtenu avec l'équation de la tangente $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ pour $x = a+h$ avec h « suffisamment petit ».

Soit : $\boxed{f(a+h) \approx f'(a)h + f(a).}$

Application : déterminons une approximation affine de $\sqrt{4,03}$.

On pose $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$ et $h = 0,03$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. Calculer $f'(a)h + f(a)$.
3. Comparer avec le résultat $\sqrt{4,3}$ donné par la calculatrice.

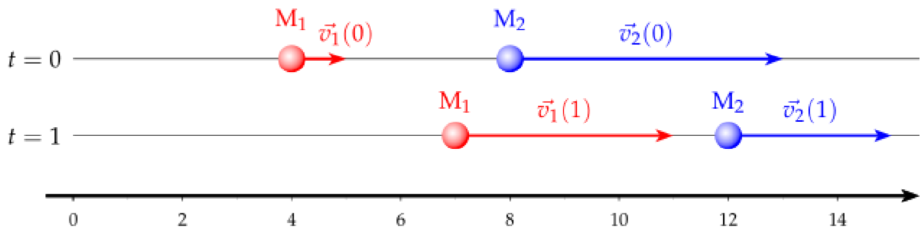
Exercice 4 (Cinématique)

La cinématique est l'étude du mouvement : position, vitesse, accélération d'un solide en physique. C'est justement l'étude de la vitesse instantanée qui a permis à Newton de concevoir le concept de dérivée. La vitesse est alors la dérivée de l'équation horaire et l'accélération la dérivée de la vitesse par rapport au temps.

Deux mobiles M_1 et M_2 sont sur l'axe des abscisses animé d'un mouvement dont les lois horaires en fonction du temps t sont respectivement :

$$x_1(t) = 2t^2 + t + 4 \qquad \text{et} \qquad x_2 = -t^2 + 5t + 8$$

1. Calculer l'instant auquel les deux mobiles se rencontrent.
2. Calculer les vitesses respectives de ces deux mobiles à cet instant.
3. En déduire si lors de la rencontre, les deux mobiles se croisent ou si l'un dépasse l'autre.



IX. Les démonstrations

a) Nombre dérivée

Démonstration

- Le premier point a été vu dans le paragraphe **I.**
- L'équation réduite de la tangente est de la forme $y = mx + p$ avec $m = f('a)$ le coefficient directeur.
  De plus la tangente passe par le point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a. Autrement dit $A(a; f(a))$.
  Les coordonnées de A sont solutions de l'équation réduite de la tangente :

$$\begin{aligned} & y_A = f'(a)x_a + p \\ \iff & f(a) = f'(a)a + p \\ \iff & p = f(a) - f'(a)a \end{aligned}$$

  L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a est donc :

$$\begin{aligned} & y = f'(a)x + p \\ \iff & y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a \\ \iff & y = \boxed{f'(a)}x - \boxed{f'(a)}a + f(a) \qquad f'(a) \text{ est un facteur commun au deux premiers termes} \\ \iff & y = \boxed{f'(a)}(x-a) + f(a) \\ \iff & y = f'(a)(x-a) + f(a) \end{aligned}$$

b) Fonction dérivée

Démonstration

- Pour $f(x) = k$, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{k-k}{h} = 0$ qui tend vers 0 lorsque h se rapproche de 0.
  Donc pour f est dérivable tout réel a et $f'(a) = 0$.
- Pour $f(x) = x$, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{a+h-a}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$ qui tend vers 1 lorsque h se rapproche de 0.
  Donc pour f est dérivable tout réel a et $f'(a) = 1$.
- Pour $f(x) = x^2$, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$ qui tend vers $2a$ lorsque h se rapproche de 0.
  Donc pour f est dérivable tout réel a et $f'(a) = 2a$.
- Pour $f(x) = x^n$ le résultat est admis.
- Pour $f(x) = \dfrac{1}{x}$,
  $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \dfrac{\frac{a}{a(a+h)} - \frac{a+h}{a(a+h)}}{h} = \dfrac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h} = \dfrac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = \dfrac{-h}{a(a+h)h} = \dfrac{-1}{a(a+h)}$ qui tend vers $\dfrac{-1}{a^2}$ lorsque h se rapproche de 0 avec $a \neq 0$.
  Donc pour f est dérivable tout réel $a \neq 0$ et $f'(a) = \dfrac{-1}{a^2}$.

- Pour $f(x) = \sqrt{x}$,

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \\
&= \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} && \text{en multipliant par l'expression conjuguée} \\
&= \frac{\sqrt{a+h}^2-\sqrt{a}^2}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} && \text{en utilisant la 3}^{\text{ème}}\text{ identité remarquable} \\
&= \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\
&= \frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}
\end{aligned}$$

qui tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ lorsque h se rapproche de 0 avec $a > 0$.

Donc pour f est dérivable tout réel $a > 0$ et $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

c) Opérations sur les dérivées

Démonstration

- **Somme** :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Or u et v sont dérivables en a donc $\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}$ tend vers $u'(a)$ et $\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$ tend vers $v'(a)$ lorsque h tend vers 0. Donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $u'(a)+v'(a)$ lorsque h tend vers 0.

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = u'(a)+v'(a)$.

- **Produit par un réel λ** :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\lambda u(a+h)-\lambda u(a)}{h} = \lambda\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

Or u est dérivables en a donc $\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}$ tend vers $u'(a)$ lorsque h tend vers 0. Donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $\lambda u'(a)$ lorsque h tend vers 0.

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = \lambda u'(a)$.

- **Produit de deux fonctions** :

$$\begin{aligned}
&\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)+u(a)v(a)}{h} && \text{on rajoute et on enlève la même quantité ...} \\
&= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)}{h} + \frac{u(a)v(a+h)+u(a)v(a)}{h} && \text{... afin de faire apparaître ...} \\
&= \frac{u(a+h)\boxed{v(a+h)}-u(a)\boxed{v(a+h)}}{h} + \frac{\boxed{u(a)}v(a+h)+\boxed{u(a)}v(a)}{h} && \text{... par factorisation ...} \\
&= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h)+u(a)v(a)}{h} && \text{... les taux de variations de } u \text{ et de } v
\end{aligned}$$

Or u et v sont dérivables en a donc $\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}$ tend vers $u'(a)$ et $\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$ tend vers $v'(a)$ lorsque h tend vers 0. De plus $v(a+h)$ tend vers $v(a)$ lorsque h tend vers 0. Donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$

lorsque h tend vers 0.
Donc f est dérivable en a et $f'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.

- **Inverse d'une fonction** :

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{u(a+h)} - \dfrac{1}{u(a)}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{u(a)}{u(a)u(a+h)} - \dfrac{u(a+h)}{u(a)u(a+h)}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{u(a)-u(a+h)}{u(a)u(a+h)}}{h} \\
&= \frac{u(a)-u(a+h)}{h \times u(a)u(a+h)} \\
&= -\frac{u(a+h)-u(a)}{h} \times \frac{1}{u(a)u(a+h)}
\end{aligned}$$

Or u est dérivables en a donc $\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}$ tend vers $u'(a)$ lorsque h tend vers 0. De plus $u(a+h)$ tend vers $u(a)$ lorsque h tend vers 0.
Donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $-u'(a) \times \dfrac{1}{u^2(a)}$ lorsque h tend vers 0.
Donc f est dérivable en a et $f'(a) = -\dfrac{u'(a)}{u^2(a)}$.

- **Quotient de deux fonctions** :
On peut écrire le quotient comme le produit d'une fonction u par l'inverse de la fonction v : $f(x) = \dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$. On va donc utiliser les deux formules sur le produit de deux fonctions et sur l'inverse d'une fonction.

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \left(u(a) \times \frac{1}{v(a)}\right) \\
&= u'(a) \times \frac{1}{v(a)} + u(a) \times \left(-\frac{v'(a)}{v^2(a)}\right) \\
&= \frac{u'(a) \times v(a)}{v(a) \times v(a)} - \frac{u(a) \times v'(a)}{v^2(a)} \\
&= \frac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v^2(a)}
\end{aligned}$$

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = \dfrac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v^2(a)}$.