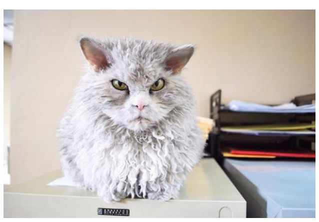
CHAPITRE 2

Fonctions polynômes du second degré

Extrait du programme



Référence :
Albert le chat vénère

Capacités attendues

- Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.
- Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.
- Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et leur produit, identité remarquable, application des formules générales.
- Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations).

Démonstration à étudier

- Résolution de l'équation du second degré

Approfondissements possibles

- Factorisation d'un polynôme du troisième degré admettant une racine et résolution de l'équation associée.
- Factorisation de $x^n - 1$ par $x - 1$, de $x^n - a^n$ par $x - a$.
- Déterminer deux nombres réels connaissant leur somme s et leur produit p comme racines de la fonction polynôme $x \mapsto x^2 - sx + p$.

Menu est interactif :

Vous retrouverez ce cours à l'adresse suivante :
`https://github.com/NaturelEtChaud/Math-premiere/tree/main/02%20Fonctions%20polyn%C3%B4mes%20du%20second%20degr%C3%A9`

I. Fonction polynôme du second degré

a) Racine d'une fonction polynôme du second degré

DÉFINITION
Une **fonction polynôme du second degré** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c, \ (a, b, c \text{ réels}, \ a \neq 0)$$

Cette forme est la **forme développée** de f, et les réels a, b et c sont les **coefficients** de f.

DÉFINITION
On appelle **racine** de la fonction f, tout nombre réel x_1 ayant pour image 0, c'est-a-dire tel que $f(x_1) = 0$. Autrement dit, x_1 est solution de l'équation $f(x) = 0$.

Exemple
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)(x+2)$ est une fonction polynôme du second degré. En développant, on obtient : $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$.

- Les coefficients de f sont : $a = 2, b = 3$ et $c = -2$.
- $\dfrac{1}{2}$ et -2 sont les racines de f :

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \iff & (2x-1)(x+2) = 0 \\ \iff & x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -2 \end{aligned}$$

b) Factorisation d'une fonction polynôme du second degré

PROPRIÉTÉ (admis)
Soit f une fonction polynôme. Si le réel x_1 est une racine de f, alors f peut se factoriser par $x - x_1$.

Conséquence

- Si f admet deux racines x_1 et x_2, f peut se factoriser par $(x - x_1)(x - x_2)$.
- Une fonction polynôme du second degré admet au plus 2 racines.

PROPRIÉTÉ (admis)
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
Si f admet les réels x_1 et x_2 pour racines, alors f s'écrit sous forme factorisée :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exemple
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$.
1 et 2 sont des racines évidentes car :

- $f(1) = 2 \times 1^2 - 6 \times 1 + 4 = 0$
- $f(2) = 2 \times 2^2 - 6 \times 2 + 4 = 0$

Donc f se factorise sous la forme :

$$f(x) = 2(x-1)(x-2)$$

Questions à Choix Multiple n° 1

1. f est une fonction polynôme du second degré :
   a) $f(x) = (2x+1)(x-3)$ **b)** $f(x) = (x+1)^2 - (x-3)^2$ **c)** $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$
2. -1 est une racine de :
   a) $x^2 - x + 1$ **b)** $2x^2 - x - 3$ **c)** $3x^2 + 4x + 1$
3. $2x^2 - 7x + 5$ est factorisable par :
   a) $x - 1$ **b)** $x - 2$ **c)** $x + 1$
4. Une forme factorisée de $3x^2 - 7x + 4$ est :
   a) $(x+1)(3x+4)$ **b)** $(x-1)(3x+4)$ **c)** $(x-1)(3x-4)$

c) Somme et produit des racines d'une fonction polynôme du second degré

Propriété

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
Si f admet les réels x_1 et x_2 pour racines, alors :

- la **somme** des racines est : $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$;
- le **produit** des racines est : $P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Démonstration (faite en classe)

$\square$

Remarque

Si on connaît une racine d'un fonction polynôme du second degré, on peut calculer l'autre racine rapidement en utilisant la somme ou le produit des racines. On a donc intérêt à chercher s'il y a une racine « évidente » parmi les 1, -1, 2, -2.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
Les coefficients de f sont $a = 2, b = -3$ et $c = 1$.
$x_1 = 1$ est une racine évidente car $f(1) = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 0$.
En utilisant le produit des racines, on a :

- d'une part $P = x_1 \times x_2 = 1 \times x_2 = x_2$;
- d'autre part $P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$.

D'où l'équation $x_2 = \dfrac{1}{2}$.
Une forme factorisée de f est donc :

$$f(x) = 2\,(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Questions à Choix Multiple n° 2

1. La somme des racines de $f(x) = -4x^2 + 2x + 1$ est :
   a) $-\dfrac{1}{4}$ **b)** $\dfrac{1}{2}$ **c)** $-\dfrac{1}{2}$
2. 4 est une racine de $f(x) = 5x^2 - 22x + 8$. L'autre racine est :
   a) $\dfrac{2}{5}$ **b)** $\dfrac{8}{5}$ **c)** $-\dfrac{22}{5}$

II. Équation du second degré

a) Forme canonique d'un polynôme du second degré

Avant de commencer, nous avons besoin d'un petit lemme [1]

Lemme

Pour tout nombre réel b, on a :

$$x^2 - 2bx = (x-b)^2 - b^2$$

Démonstration (À faire en exercice)

□

Propriété de Définition

Toute fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ s'écrit sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

où α et β sont des nombres réels. L'écriture $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est appelée **forme canonique** du trinôme.

Démonstration importante (Faite en classe)

□

Exemple

La forme canonique de $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ est $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$.
Pour le vérifier, il suffit de développer la forme canonique :

$$\begin{aligned} 2(x-1)^2 + 3 &= 2(x^2 - 2x + 1) + 3 \\ &= 2x^2 - 4x + 2 + 3 \\ &= 2x^2 - 4x + 5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Remarque

Pour obtenir la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré, on reprend la démonstration mais cette fois-ci avec des nombres à la place des lettres a, b et c.

Exemple

Prenons à nouveau $g(x) = 3x^2 - 12x + 4$.
$a = 3$, $b = -12$ et $c = 4$.
Factorisons les deux premiers termes par $a = 3$:

$$g(x) = 3(x^2 - 4x) + 4$$

1. Un lemme est un résultat intermédiaire sur lequel on s'appuie pour conduire la démonstration d'un théorème plus important. *Source : Wikipédia*

On utilise le lemme pour $x^2 - 4x = x^2 - 2 \times 2 \times x = (x-2)^2 - 2^2$ En remplaçant dans g on obtient

$$\begin{aligned} g(x) &= 3(x^2 - 4x) + 4 \\ &= 3\left[(x-2)^2 - 4\right] + 4 \\ &= 3(x-2)^2 - 3 \times 4 + 4 \text{ en distribuant le 3} \\ &= 3(x-2)^2 - 12 + 4 \\ &= 3(x-2)^2 - 8 \end{aligned}$$

La forme canonique de g est donc $g(x) = 3(x-2)^2 - 8$ avec $\alpha = 2$ et $\beta = -8$.

Questions à Choix Multiple n° 3

1. La forme canonique de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 6x - 1$ est :
   a) $-3(x+1)^2 - 1$ **b)** $-3(x-1)^2 - 1$ **c)** $-3(x-1)^2 + 2$
2. La forme canonique de g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^2 - 4x + 6$ est :
   a) $-2(x+3)(x-1)$ **b)** $-2(x+1)^2 + 8$ **c)** $-2(x-1)^2 + 8$

III. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Propriété et définition

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Le nombre

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

est appelé **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
  L'expression $ax^2 + bx + c$ n'est alors pas factorisable.

- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution :

  $$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

  L'expression $ax^2 + bx + c$ est factorisable :

  $$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

  $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  L'expression $ax^2 + bx + c$ est factorisable :

  $$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Démonstration importante (Faite en classe)

□

Exemple

- $2x^2 + x - 10 = 0$
  On a $a = 2$, $b = 1$ et $c = -10$
  $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 81$
  $\Delta > 0$ donc l'équation $2x^2 + x - 10 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-1-9}{4} \qquad x_2 = \frac{-1+9}{4}$$
$$x_1 = \frac{-10}{4} \qquad x_2 = \frac{8}{4}$$
$$x_1 = -2,5 \qquad x_2 = 2$$

  Donc $\mathcal{S} = \{-2,5; 2\}$.
  De plus l'expression $2x^2 + x - 10$ est factorisable.

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 10 &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 2(x + 2,5)(x - 2) \end{aligned}$$

- $-2x^2 + 8x - 8 = 0$
  On a $a = -2$, $b = 8$ et $c = -8$
  $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-2) \times (-8) = 64 - 64 = 0$
  $\Delta = 0$ dont l'équation $-2x^2 + 8x - 8 = 0$ admet une unique solution :

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{b}{2a} \\ x_0 &= -\frac{8}{-4} \\ x_0 &= 2 \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{S} = \{2\}$.
  De plus l'expression $-2x^2 + 8x - 8$ est factorisable.

$$\begin{aligned} -2x^2 + 8x - 8 &= a(x - x_0)^2 \\ &= -2(x - 2)^2 \end{aligned}$$

- $x^2 + 11 = 0$
  On a $a = 1$, $b = 0$ et $c = 11$
  $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 1 \times 11 = -44$
  $\Delta < 0$ donc l'équation $x^2 + 11 = 0$ n'admet aucune solution.
  Donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
  De plus l'expression $x^2 + 11$ n'est pas factorisable.

Questions à Choix Multiple n° 4

1. L'équation $x^2 + 3x + 5 = 0$:
   a) n'a pas de solution **b)** a une solution **c)** a deux solutions
2. Le discriminant de l'équation $2x - x^2 + 3 = 0$ est :
   a) $\Delta = -23$ **b)** $\Delta = -25$ **c)** $\Delta = 16$
3. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$ est :
   a) $\mathcal{S} = \{-1; 1\}$ **b)** $\mathcal{S} = \{1\}$ **c)** $\mathcal{S} = \emptyset$

IV. Fonctions polynômes du second degré - Les QCM

Questions à Choix Multiple n° 1

1. f est une fonction polynôme du second degré :
   a) $f(x) = (2x+1)(x-3)$ **b)** $f(x) = (x+1)^2 - (x-3)^2$ **c)** $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$
2. -1 est une racine de :
   a) $x^2 - x + 1$ **b)** $2x^2 - x - 3$ **c)** $3x^2 + 4x + 1$
3. $2x^2 - 7x + 5$ est factorisable par :
   a) $x - 1$ **b)** $x - 2$ **c)** $x + 1$
4. Une forme factorisée de $3x^2 - 7x + 4$ est :
   a) $(x+1)(3x+4)$ **b)** $(x-1)(3x+4)$ **c)** $(x-1)(3x-4)$

Questions à Choix Multiple n° 2

1. La somme des racines de $f(x) = -4x^2 + 2x + 1$ est :
   a) $-\dfrac{1}{4}$ **b)** $\dfrac{1}{2}$ **c)** $-\dfrac{1}{2}$
2. 4 est une racine de $f(x) = 5x^2 - 22x + 8$. L'autre racine est :
   a) $\dfrac{2}{5}$ **b)** $\dfrac{8}{5}$ **c)** $-\dfrac{22}{5}$

Questions à Choix Multiple n° 3

1. La forme canonique de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 6x - 1$ est :
   a) $-3(x+1)^2 - 1$ **b)** $-3(x-1)^2 - 1$ **c)** $-3(x-1)^2 + 2$
2. La forme canonique de g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^2 - 4x + 6$ est :
   a) $-2(x+3)(x-1)$ **b)** $-2(x+1)^2 + 8$ **c)** $-2(x-1)^2 + 8$

Questions à Choix Multiple n° 4

1. L'équation $x^2 + 3x + 5 = 0$:
   a) n'a pas de solution **b)** a une solution **c)** a deux solutions
2. Le discriminant de l'équation $2x - x^2 + 3 = 0$ est :
   a) $\Delta = -23$ **b)** $\Delta = -25$ **c)** $\Delta = 16$
3. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$ est :
   a) $\mathcal{S} = \{-1; 1\}$ **b)** $\mathcal{S} = \{1\}$ **c)** $\mathcal{S} = \emptyset$

V. Fonctions polynômes du second degré - Les exercices

a) Racines et formes factorisées

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer sous forme factorisée les fonctions polynômes du second degré admettant les racines suivantes :

a) 0 et -4 **b)** -9 et 8 **c)** 0 et -5 **d)** $-\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{2}{3}$ **e)** $2-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{2}$

Exercice 2

Déterminer sous forme factorisée puis développée la fonction polynôme du second degré f vérifiant les conditions suivantes :

1. ses racines sont -2 et 5 ; $f(-1)=-36$.
2. ses racines sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$; $f(0)=2$.
3. ses racines sont $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$: $f(0)=1$.

Exercice 3

Vérifier dans chaque cas que le réel x_1 est racine de la fonction polynôme du second degré f, puis factoriser f.

a) $f(x)=-5x^2+2x+3$ et $x_1=1$ **b)** $f(x)=4x^2-3x-7$ et $x_1=-1$ **c)** $f(x)=2x^2-5x-3$ et $x_1=3$

Exercice 4

Trouver une racine évidente des équations suivantes et en déduire l'autre solution sans calculer le discriminant.

1. $x^2-7x+6=0$
2. $-3x^2+2x+5=0$
3. $x^2+3x-10=0$
4. $x^2-x\sqrt{2}-4=0$
5. $x^2+x-6=0$
6. $x^2+5x+4=0$

Exercice 5

1. Déterminer toutes les fonctions polynômes du second degré admettant -2 pour racine et dont la somme des racines vaut 3.
2. Déterminer toutes les fonctions polynômes du second degré admettant 5 pour racine et dont le produit des racines vaut -3.
3. Parmi les fonctions précédentes, déterminer la fonction f qui vérifie $f(0)=6$.

b) Équations du second degré

Feuille d'exercices du site Maths en ligne : Identités remarquables et forme canonique

EXERCICE 1A.1

Développer les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable :

a. $(x+3)^2 =$	**b.** $(x-4)^2 =$
c. $(2x+1)^2 =$	**d.** $(2x-3)^2 =$
e. $(3x-5)^2 =$	**f.** $(6x+1)^2 =$
g. $(7x+2)^2 =$	**h.** $(4x-7)^2 =$

EXERCICE 1A.2

Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable :

a. $x^2+10x+25 =$	**b.** $x^2-2x+1 =$
c. $4x^2-20x+25 =$	**d.** $4x^2+12x+9 =$
e. $x^2+6x+9 =$	**f.** $36x^2-12x+1 =$
g. $x^2+24x+144 =$	**h.** $9x^2-18x+9 =$

EXERCICE 1A.3

Compléter l'expression pour ensuite la factoriser à l'aide d'une identité remarquable :

a. $x^2+4x+\ldots\ldots =$	**b.** $x^2-\ldots\ldots+16 =$
c. $\ldots\ldots-10x+25 =$	**d.** $4x^2+4x+\ldots\ldots =$
e. $9x^2+\ldots\ldots+25 =$	**f.** $\ldots\ldots-8x+4 =$
g. $x^2+14x+\ldots\ldots =$	**h.** $x^2+18x+\ldots\ldots =$

EXERCICE 1A.4

Ecrire sous forme canonique les expressions suivantes comme dans l'exemple :

$\begin{aligned} A(x) &= x^2+6x+5 \\ &= x^2+\underline{2\times 3\times x}+5 \\ &= (x^2+2\times 3\times x\underline{+3^2)-3^2}+5 \\ &= (x+3)^2-\underline{9}+5 \\ &= \boxed{(x+3)^2-4} \end{aligned}$		$B(x) = x^2+8x+3$
$C(x) = x^2-10x+9$	$D(x) = x^2+2x+7$	$E(x) = x^2-5x-1$
$F(x) = x^2+7x+3$	$G(x) = 2x^2-12x+8$	$H(x) = 3x^2+15x-7$

Feuille d'exercices du site Maths en ligne : Discriminant

Pour chaque polynôme : **a.** Calculer le discriminant
b. Calculer les racines (il y en a systématiquement deux).
c. En déduire la forme factorisée du polynôme.

$\mathrm{A}(x) = x^2 - 3x - 10 = 0$

a.
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = \ldots\ldots^2 - 4 \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots$
$\Delta =$
$\Delta = (\ldots\ldots)^2$

b.
$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \dfrac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $x_2 = \dfrac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$
$x_1 =$ $x_2 =$

c. $\mathrm{A}(x) =$

$\mathrm{B}(x) = x^2 - 2x - 15 = 0$

a.
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = \ldots\ldots^2 - 4 \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots$
$\Delta =$
$\Delta = (\ldots\ldots)^2$

b.
$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \dfrac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $x_2 = \dfrac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$
$x_1 =$ $x_2 =$

c. $\mathrm{B}(x) =$

$\mathrm{C}(x) = 6x^2 - x - 1 = 0$

a.
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = \ldots\ldots^2 - 4 \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots$
$\Delta =$
$\Delta = (\ldots\ldots)^2$

b.
$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \dfrac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $x_2 = \dfrac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$
$x_1 =$ $x_2 =$

c. $\mathrm{C}(x) =$

$\mathrm{D}(x) = 6x^2 + 11x - 10 = 0$

a.
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = \ldots\ldots^2 - 4 \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots$
$\Delta =$
$\Delta = (\ldots\ldots)^2$

b.
$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \dfrac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $x_2 = \dfrac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$
$x_1 =$ $x_2 =$

c. $\mathrm{D}(x) =$

$\mathrm{E}(x) = 15x^2 - 4x - 4 = 0$

a.
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = \ldots\ldots^2 - 4 \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots$
$\Delta =$
$\Delta = (\ldots\ldots)^2$

b.
$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \dfrac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $x_2 = \dfrac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$
$x_1 =$ $x_2 =$

c. $\mathrm{E}(x) =$

$\mathrm{F}(x) = 9x^2 - 6x - 1 = 0$

a.
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = \ldots\ldots^2 - 4 \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots$
$\Delta =$
$\Delta = (\ldots\ldots)^2$

b.
$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \dfrac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ $x_2 = \dfrac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$
$x_1 =$ $x_2 =$

c. $\mathrm{F}(x) =$

Feuille d'exercices du site Maths en ligne : Résolution d'équation

EXERCICE 3A.1

Pour chacune de ces équations, dire combien elle admet de solutions :

a. $x^2 - 3x - 10 = 0$ $\Delta =$ ☐ deux solutions distinctes ☐ une seule solution ☐ aucune solution	**b.** $x^2 + 3x - 10 = 0$ $\Delta =$ ☐ deux solutions distinctes ☐ une seule solution ☐ aucune solution	**c.** $x^2 + 3x + 10 = 0$ $\Delta =$ ☐ deux solutions distinctes ☐ une seule solution ☐ aucune solution
d. $-x^2 + 3x - 10 = 0$ $\Delta =$ ☐ deux solutions distinctes ☐ une seule solution ☐ aucune solution	**e.** $9x^2 - 12x + 4 = 0$ $\Delta =$ ☐ deux solutions distinctes ☐ une seule solution ☐ aucune solution	**f.** $16x^2 - 8x + 1 = 0$ $\Delta =$ ☐ deux solutions distinctes ☐ une seule solution ☐ aucune solution
g. $-3x^2 + 5x - 2 = 0$ $\Delta =$ ☐ deux solutions distinctes ☐ une seule solution ☐ aucune solution	**h.** $-2x^2 + 4x - 3 = 0$ $\Delta =$ ☐ deux solutions distinctes ☐ une seule solution ☐ aucune solution	**i.** $-3x^2 + 7x - 4 = 0$ $\Delta =$ ☐ deux solutions distinctes ☐ une seule solution ☐ aucune solution

EXERCICE 3A.2

Résoudre ces équations du second degré :

a. $x^2 - 3x - 10 = 0$	**b.** $x^2 - 10 = 0$	**c.** $9x^2 - 12x + 4 = 0$	**d.** $3x^2 - 5x = 0$
e. $2x^2 + x - 1 = 0$	**f.** $3x^2 - 7x + 4 = 0$	**g.** $-x^2 + 7x - 1 = 0$	**h.** $-2x^2 + 3x - 7 = 0$

FEUILLE D'EXERCICES DU SITE MATHS EN LIGNE : Factorisation

EXERCICE 3B.1

Calculer le discriminant de chaque polynôme, puis dire si on peut le factoriser.

$A(x) = x^2 + 6x + 5$ $\Delta =$ A ☐ peut / ☐ ne peut pas être factorisé	$B(x) = x^2 + 2x + 3$ $\Delta =$ B ☐ peut / ☐ ne peut pas être factorisé	$C(x) = x^2 - 10x + 9$ $\Delta =$ C ☐ peut / ☐ ne peut pas être factorisé
$D(x) = -x^2 + 2x + 7$ $\Delta =$ D ☐ peut / ☐ ne peut pas être factorisé	$E(x) = x^2 + 6x + 9$ $\Delta =$ E ☐ peut / ☐ ne peut pas être factorisé	$F(x) = 2x^2 + 7x + 6$ $\Delta =$ F ☐ peut / ☐ ne peut pas être factorisé
$G(x) = 2x^2 - 20x + 50$ $\Delta =$ G ☐ peut / ☐ ne peut pas être factorisé	$H(x) = 3x^2 + x - 7$ $\Delta =$ H ☐ peut / ☐ ne peut pas être factorisé	$I(x) = -5x^2 - 2x - 7$ $\Delta =$ I ☐ peut / ☐ ne peut pas être factorisé

EXERCICE 3B.2

En connaissant la (ou les) racine(s) de chaque polynôme, l'écrire sous forme factorisée :

$A(x) = x^2 + 7x + 10$ avec $x_1 = -2$ et $x_2 = -5$ donc $A(x) =$	$B(x) = 2x^2 + 7x + 6$ avec $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{-3}{2}$ donc $B(x) =$	$C(x) = 3x^2 - 42x + 147$ avec $x_0 = 7$ donc $C(x) =$
$D(x) = x^2 + 2x - 1$ avec $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ donc $D(x) =$	$E(x) = 3x^2 - 18x + 21$ avec $x_1 = 3 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 3 + \sqrt{2}$ donc $E(x) =$	$F(x) = x^2 - x - 1$ avec $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ donc $F(x) =$
$G(x) = 2x^2 - 5x - 3$ avec $x_1 = \frac{-1}{2}$ et $x_2 = 3$ donc $G(x) =$	$H(x) = 5x^2 - 6x + \frac{9}{5}$ avec $x_0 = \frac{3}{5}$ donc $H(x) =$	$I(x) = 5x^2 - 10x + \frac{5}{4}$ avec $x_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ donc $I(x) =$

EXERCICE 3B.3

Factoriser les polynômes suivants (ils sont tous factorisables), en n'utilisant le discriminant uniquement lorsque c'est nécessaire ; on rappelle la formule : $P(x) = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$A(x) = x^2 + 6x$	$B(x) = x^2 - 4$	$C(x) = 9x^2 - 1$
$D(x) = x^2 + x - 5$	$E(x) = 4x^2 - 3$	$F(x) = 5x^2 - 10x + 2$
$G(x) = -3x^2 + x + 5$	$H(x) = -8x + 3x^2$	$I(x) = 2x + 5x^2 - 7$

Feuille d'exercices du site Maths en ligne : Inéquation

EXERCICE 4B.1

Résoudre chaque inéquation à l'aide d'un tableau de signe :

a. Résoudre : $(2x + 7)(3x - 2) > 0$

x			

S =

b. Résoudre : $(-5x + 4)(7 - 3x) \leq 0$

x			

S =

c. Résoudre : $\dfrac{7 - 3x}{x + 9} \geq 0$

x			

S =

d. Résoudre : $(2x + 3)(-3x + 4)(5 - 4x) < 0$

x				

S =

e. Résoudre : $\dfrac{(-x + 5)(3x - 1)}{(3 + 2x)(-7x - 3)} \leq 0$

x					

S =

EXERCICE 4B.2

On considère le polynôme $P(x) = 6x^3 + 11x^2 - 4x - 4$.

a. Vérifier que (-2) est une racine de $P(x)$.

b. En déduire que $P(x) = (x + 2).Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme du second degré que l'on déterminera.

c. Dresser le tableau de signe de $Q(x)$ puis en déduire celui de $P(x)$.

d. En déduire les solutions de l'inéquation $P(x) \geq 0$.

EXERCICE 4B.3

On considère le polynôme $P(x) = 4x^3 + 8x^2 - 15x - 9$.

a. Vérifier que (-3) est une racine de $P(x)$.

b. En déduire que $P(x) = (x + 3).Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme du second degré que l'on déterminera.

c. Dresser le tableau de signe de $Q(x)$ puis en déduire celui de $P(x)$.

d. En déduire les solutions de l'inéquation $P(x) > 0$.

EXERCICE 4B.4

On considère le polynôme $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 20x^2 + 27x + 18$.

a. Vérifier que $P(x) = A(x) \times B(x)$ où $A(x) = x^2 + x - 6$ et $B(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

b. Dresser les tableaux de signe de $A(x)$ et $B(x)$ puis en déduire le celui de $P(x)$.

c. En déduire les solutions de l'inéquation $P(x) < 0$.

EXERCICE 4B.5

On considère le polynôme $P(x) = 2x^4 + x^3 - 47x^2 - 79x + 51$.

a. Vérifier que $\dfrac{1}{2}$ et (-3) sont des solutions de $P(x)$.

b. En déduire que $P(x) = (x - \dfrac{1}{2})(x + 3).Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme du second degré que l'on déterminera.

c. En déduire les solutions de l'inéquation $P(x) < 0$.

c) Approfondissement

Avec un paramètre

Exercice 6
Pour quelle valeur de m l'équation $x^2-4x+m-1=0$ admet-elle une racine double ? Calculer cette racine. Est-ce surprenant ?

Exercice 7
m est un réel donné et on considère l'équation $E_m : (m-1)x^2-2x+1-m=0$.
A quelle(s) condition(s), l'équation E_m admet deux solutions x_1 et x_2 distinctes, et de signes contraires ?

Exercice 8
Soit $m \in \mathbb{R}$ et f la fonction trinôme définie par : $f(x)=mx^2+4x+2(m-1)$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x)=0$ a-t-elle une seule solution ? Calculer alors cette racine.
2. Quel est l'ensemble des réels m pour lesquels l'équation $f(x)=0$ a deux racines distinctes ?
3. Quel est l'ensemble des réels m pour lesquels $f(x)<0$ pour tout réel x ?

Des équations et des inéquations

Exercice 9
Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}=2x-1$
2. $\dfrac{3x}{x+2}-\dfrac{x+1}{x-2}=-\dfrac{11}{5}$
3. $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{2x-5}=\dfrac{9}{4}$
4. $\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2}>0$
5. $(2x-1)^2>(x+1)^2$
6. $(x+3)(x-1)<2x+6$

Somme et produit

Exercice 10
Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+y & =18 \\ xy & =65 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+y & =-1 \\ xy & =-42 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+y & =4 \\ xy & =5 \end{cases}$

d) Problèmes

Exercice 11
Le célèbre tableau du peintre italien Léonard de Vinci, *La Joconde*, possède les caractéristiques suivantes :

- une aire de 4 081 cm^2 ;
- un périmètre de 260 cm.

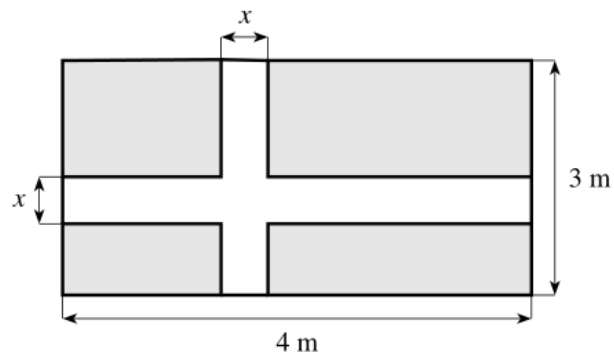
Déterminer les dimensions du tableau.

Exercice 12
Trouver deux entiers consécutifs dont le produit est égal à 4 970.

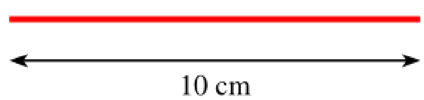
Exercice 13
Peut-on trouver trois carrés ayant pour côtés des entiers consécutifs et dont la somme des aires est 15 125 ? Si oui, préciser quelles sont les valeurs que doivent avoir les côtés.
Même question avec 15 127.

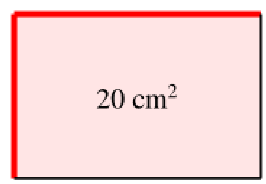
Exercice 14

Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ?



Exercice 15
On dispose d'une baguette de bois de 10 cm de long. Où briser la baguette pour que les morceaux obtenus soient les deux côtés consécutifs d'un rectangle de surface 20 cm^2 ?





Exercice 16
Pour se rendre d'une ville A à une ville B distance de 195 km, deux cyclistes partent en même temps. L'un deux, dont la vitesse moyenne sur le parcours est supérieure de 4 km/h à celle de l'autre arrive 1 heure plus tôt.
Quelles sont les vitesses moyennes des deux cyclistes ?

VI. Fonctions polynômes du second degré - Les démonstrations

Forme canonique d'un polynôme du second degré

Démonstration importante
Comme $a \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

0r

$$x^2 + \frac{b}{a} = x^2 + 2 \times 1 \times \frac{b}{2a}$$

est le début de l'identité remarquable :

$$x^2 + 2 \times 1 \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Ainsi

$$x^2 + \frac{b}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

D'où

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \text{ en remplaçant par la « presque identité remarquable »} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \text{ en distribuant le } a \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{c} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
&= a\left(x - {\color{blue}\frac{-b}{2a}}\right)^2 {\color{red}- \frac{b^2 - 4ac}{4a}}
\end{aligned}$$

Il suffit alors de poser ${\color{blue}\alpha} = -\dfrac{b}{2a}$ et ${\color{red}\beta} = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.
On vérifie aisément que si $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ alors $f({\color{blue}\alpha}) = {\color{red}\beta}$. $\square$

Résolution d'une équation du second degré

Démonstration importante
Dans la démonstration précédente nous avions obtenu le résultat suivant :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

soit en posant $\Delta = b^2 - 4ac$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

On en déduit que :

$$ax^2+bx+c=0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

- Premier cas : $\Delta<0$ alors $\dfrac{\Delta}{4a^2}<0$ et l'équation n'a pas de solution.
- Deuxième cas : $\Delta=0$ alors

$$\begin{aligned} &\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}\\ \iff &\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0\\ \iff &x=-\frac{b}{2a}\end{aligned}$$

L'unique solution est bien $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.
De plus on a

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=a(x-x_0)^2$$

- Troisième cas : $\Delta>0$ alors $\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$

$$\begin{aligned} &\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}\\ \iff &\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\\ \iff &\begin{cases} x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\\ ou\\ x+\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}\\ \iff &\begin{cases} x=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ ou\\ x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}\end{aligned}$$

Les deux solutions sont bien $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
De plus on a

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c&=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]\\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\\ &=a(x-x_1)(x-x_2).\end{aligned}$$

□