Nom :	**Prénom : ....**	**Classe : ....**
Nom :	**Prénom : ....**	**Classe : ....**
Nom :	**Prénom : ....**	**Classe : ....**

Exercice 1

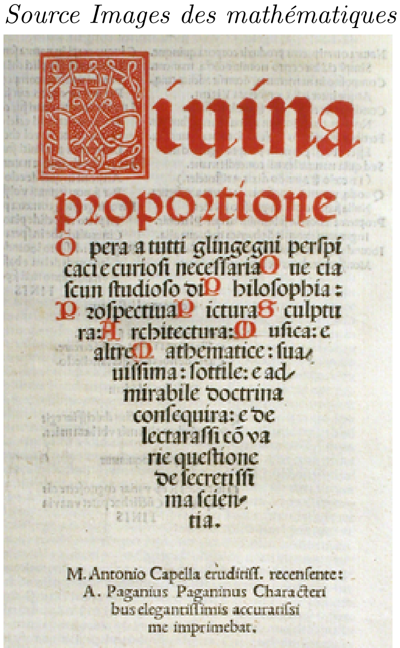
1. Factoriser le polynôme $P(x) = -2x^3 - 8x^2 + 50x + 56$.
2. En déduire la résolution de l'inéquation $P(x) \leq 0$.

Exercice 2 (Une première rencontre avec le nombre d'or)

L'histoire d'une divine proportion

Figure 1 – le Parthénon
Source Images des mathématiques - CNRS

Il est difficile de dire quand commence exactement l'histoire du nombre d'or. Certains pensent que l'on retrouve ce nombre dans des monuments très anciens comme par exemple la pyramide de Khéops ou le Parthénon, d'autres pensent plutôt que l'on avait utilisé le rapport $\dfrac{9}{16}$ qui permet de diviser en deux parties presque égale mais avec un léger décalage.
Les mathématiciens grecs auraient travaillé sur le nombre d'or pour la construction du pentagone régulier, pour la mesure de polyèdres réguliers, ...



Diuina proportione
Opera a tutti glingegni perspicaci e curiosi necessaria Oue ciascun studioso di Philosophia: Prospectiua Pictura Sculptura: Architectura: Musica: e altre Mathematice: suauissima: sottile: e admirabile doctrina consequira: e delectarassi cō varie questione de secretissima scientia.

M. Antonio Capella eruditiss. recensente: A. Paganius Paganinus Characteribus elegantissimis accuratissime imprimebat.

Figure 2 – La divine proportion - édition de 1509
Source Wikipédia

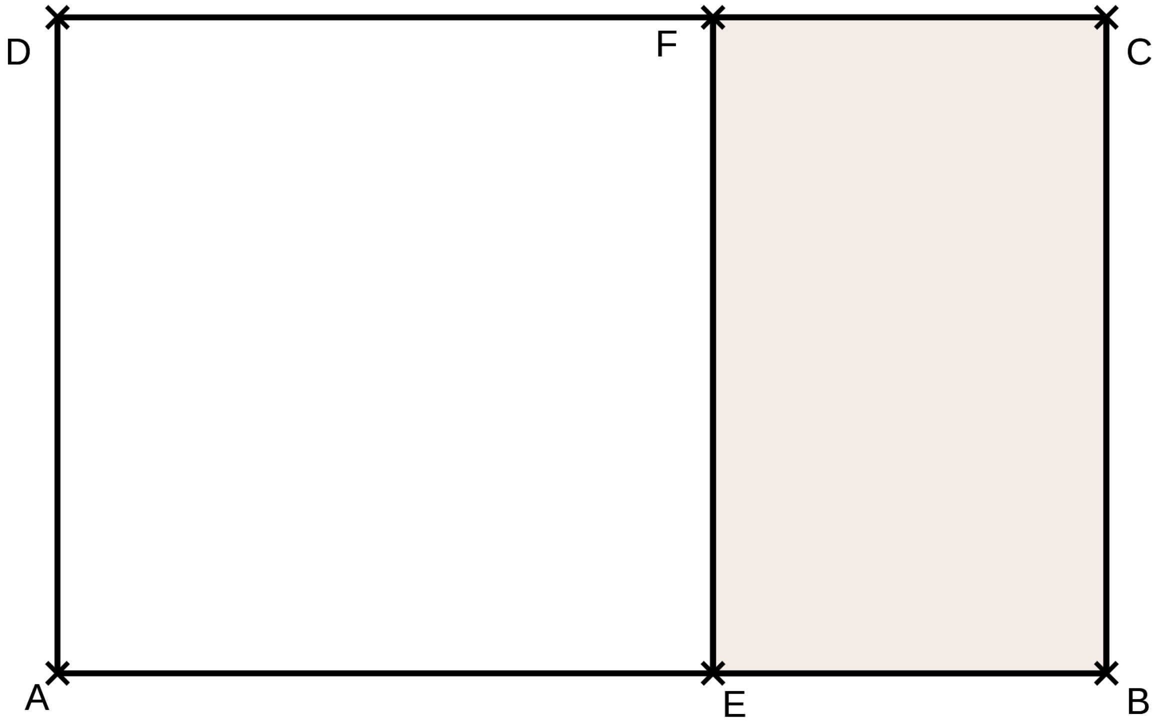
Plus tard les mathématiciens arabes s'intéressent plutôt à ce nombre comme la solution d'une équations du second degré.
A la fin du XV^{e} siècle, Luca Pacioli rédige un livre intitulé *La divine proportion* illustré par Léonard de Vinci. L'intérêt du nombre ne réside pas tant dans ses propriétés mathématiques que mystiques.
Dans le même temps, les spécialistes des équations polynomiales que sont Gerolamo Cardano et Raphaël Bombelli indiquent comment calculer le nombre d'or à l'aide d'équations de second degré. Un résultat plus surprenant est anonyme. Une note manuscrite montre la connaissance de la relation entre la suite de Fibonacci et le nombre d'or. Si l'on divise un terme de la suite par son précédent, on trouve une approximation du nombre d'or. Plus le terme est élevé, plus l'approximation est bonne et elle peut devenir aussi précise que souhaitée.
Au XIX^{e} siècle l'intérêt mathématiques diminue, même si Jacques Binet démontre en 1843 la formule qui porte désormais son nom : le n-ième terme de la suite de Fibonacci est

$$\mathcal{F}_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\varphi^n - (1-\varphi)^n\right),$$

où $\mathcal{F}_n$ est le n-ième terme de la suite de Fibonacci et φ est le nombre d'or.
C'est durant ce siècle que les termes de « section dorée », puis « nombre d'or » apparaissent.
C'est au XX^{e} siècle que le nombre d'or est représenté par la lettre φ en référence au sculpteur Phidias, concepteur du Parthénon.

Un rectangle d'or est un rectangle dont le rapport Longueur/largeur est égale au nombre d'or.

$$\frac{\text{Longueur}}{\text{largeur}} = \varphi.$$



Le rectangle $ABCD$ est un **rectangle d'or** car si on construit le point E sur le segment $[AB]$ et le point F sur le segment $[CD]$ tels que $AEFD$ soit un carré, alors le rectangle $EBCF$ est lui-même un rectangle d'or.
Posons $AE = x$ et $EB = 1$.

1. En sachant que $ABCD$ et $EBCF$ sont des rectangles d'or, trouver une équation du second degré d'inconnu x.
2. Résoudre cette équation et en déduire la valeur exacte puis approchée du nombre d'or φ.

Correction de l'exercice 1

1. Factoriser le polynôme $P(x) = -2x^3 - 8x^2 + 50x + 56$.
   On trouve que -1 est une racine évidente, en effet $P(-1) = -2\times(-1)^3 - 8\times(-1)^2 + 50\times(-1) + 56 = 2 - 8 - 50 + 56 = 0$.
   Le polynôme P est donc factorisable par $(x+1)$. On sait [1] alors que comme P est de degré 3, le deuxième facteur est lui de degré 2. Avec la « règle des extrêmes », on en déduit :
   $P(x) = (x+1)(-2x^2 + bx + 56)$ avec b un réel à déterminer.
   En développant cette dernière expression, on devrait normalement retrouver l'expression donnée dans l'énoncé. On a donc :

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x+1)(-2x^2 + bx + 56) \\
P(x) &= -2x^3 + bx^2 + 56x - 2x^2 + bx + 56 \\
P(x) &= -2x^3 + (b-2)x^2 + (56+b)x + 56
\end{aligned}$$

   En comparant alors avec (par exemple) le terme en x de $P(x) = -2x^3 - 8x^2 + 50x + 56$, on en déduit que $56 + b = 50$ autrement dit, $b = -6$. L'expression de P devient :

$$P(x) = (x+1)(-2x^2 - 6x + 56)$$

   Le deuxième facteur est un trinôme du second degré avec $a = -2$, $b = -6$ et $c = 56$, on peut calculer le discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
\Delta &= 36 + 448 \\
\Delta &= 484 \\
\Delta &= 22^2
\end{aligned}$$

   Le discriminant est strictement positif, il y a deux racines distinctes :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
x_1 &= \frac{6 - 22}{-4} & x_2 &= \frac{6 + 22}{-4} \\
x_1 &= \frac{-16}{-4} & x_2 &= \frac{28}{-4} \\
x_1 &= 4 & x_2 &= -7
\end{aligned}$$

   On peut donc factoriser $-2x^2 - 6x + 56 = -2(x-4)(x+7)$.
   Conclusion : La forme factorisée de P est donc :

$$\boxed{P(x) = -2(x+1)(x-4)(x+7)}$$

1. D'après ce que nous a raconté notre professeur, parce qu'en réalité ce n'est étudié qu'en première année de post-bac.

2. En déduire la résolution de l'inéquation $P(x) \leq 0$.
   On construit un tableau de signe :

x	$-\infty$		-7		-1		4		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$		$-$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : L'ensemble des solutions de $P(x) \leq 0$ est :

$$\boxed{\mathcal{S} = [-7; -1] \cup [4; +\infty[}$$

Correction de l'exercice 2 (Une première rencontre avec le nombre d'or)

1. En sachant que $ABCD$ et $EBCF$ sont des rectangles d'or, trouver une équation du second degré d'inconnu x.
   Les rectangles $ABCD$ et $EBCF$ sont des rectangles d'or, donc ils vérifient tous les deux $\dfrac{\text{Longueur}}{\text{largeur}} = \varphi$.
   Dans le rectangle $ABCD$ la longueur est $AB = 1 + x$ et la largeur est : $AD = x$. Ainsi, on a :
   $$\frac{\text{Longueur}}{\text{largeur}} = \frac{1+x}{x} = \varphi$$
   De même dans le rectangle $EBCF$ la longueur est $BC = x$ et la largeur est : $EB = 1$. D'où :
   $$\frac{\text{Longueur}}{\text{largeur}} = \frac{x}{1} = x = \varphi$$
   Comme ces deux rapports sont égaux, on obtient l'équation :
   $$\frac{1+x}{x} = x$$
   En effectuant le produit en croix, on a :
   $$1 + x = x^2$$
   Soit l'équation du second degré :
   $$-x^2 + x + 1 = 0$$

2. Résoudre cette équation et en déduire la valeur exacte puis approchée du nombre d'or φ.
   $-x^2 + x + 1$ est un trinôme du second degré avec $a = -1$, $b = 1$ et $c = 1$, on peut calculer le discriminant :
   $$\Delta = b^2 - 4ac$$
   $$\Delta = 1 + 4$$
   $$\Delta = 5$$

Le discriminant est strictement positif, il y a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2} \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{-2}$$
$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Or le nombre d'or, φ est défini comme étant le rapport de deux distance $\frac{\text{Longueur}}{\text{largeur}} = \varphi$, donc φ est positif. On doit donc exclure x_2.
Conculsion :

$$\boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$