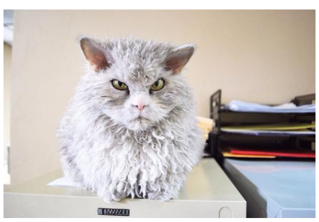
CHAPITRE 5

Suite numérique

Extrait du programme



Référence :
Albert le chat vénère

Contenus

- Exemples de modes de génération d'une suite : explicite $u_n = f(n)$, par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, par un algorithme, par des motifs géométriques.
- Notations : $u(n)$, u_n , $(u(n))$, (u_n).
- Sens de variation d'une suite.

Capacités attendues

- Dans le cadre de l'étude d'une suite, utiliser le registre de la langue naturelle, le registre algébrique, le registre graphique, et passer de l'un à l'autre.
- Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres. Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour une suite définie par un motif géométrique, par une question de dénombrement.
- Calculer des termes d'une suite définie explicitement, par récurrence ou par un algorithme.

Exemple d'algorithme

- Calcul de termes d'une suite, de sommes de termes, de seuil.
- Calcul de factorielle.
- Liste des premiers termes d'une suite : suites de Syracuse, suite de Fibonacci.

Approfondissements possibles

- Tour de Hanoï.
- Somme des n premiers carrés, des n premiers cubes.
- Remboursement d'un emprunt par annuités constantes.

Vous retrouverez ce cours à l'adresse suivante :
`https://github.com/NaturelEtChaud/Math-premiere/tree/main/04%20Suite%20num%C3%A9rique`

Introduction

Intuitivement, une suite numérique est une liste de nombres réels. Par exemple :

- la suite des nombres entiers impairs :

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...

- la suite des décimales du nombre π :

3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	...

Le plus souvent on nomme les termes de cette suite par un u avec en indice le rang du terme : $u_0, u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1}, ...$
Il y a un décalage entre le rang du terme et l'indice, ainsi u_0 est le 1^{er} terme, u_1 le 2^e terme, u_2 le 3^e terme, ... Ce qui nous donne pour notre deuxième exemple des décimales de π :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	...
3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	...

L'étude des suites numériques est d'une grande importance en mathématiques. En effet c'est souvent par l'étude de suites que l'on arrive à approximer les nombres réels irrationnels [1].
Pour s'amuser à se faire peur, je ne peux résister à l'envie de vous donner deux formules. La première est provient de *l'algorithme de Babylone* et permet d'obtenir rapidement une bonne approximation de $\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

Nous reviendrons dessus plus tard dans ce chapitre. La seconde formule, nommée *la formule de Wallis*, permet d'obtenir une bonne approximation du nombre π. Elle est totalement hors programme pour le lycée, mais fortement élégante.

$$u_n = 2\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2 - 1}$$

D'autres parts, les suites numériques sont très utilisées dans les autres matières scientifiques notamment pour modéliser un phénomène naturel ou économique afin d'extrapoler les évolutions à venir.
Enfin les mathématiciens s'intéressent à des suites qui a priori n'ont aucun intérêt mais qui permettent de mettre en œuvre de nouvelles façons de raisonner et de créer de nouvelles théories. C'est ce qu'on appelle la recherche fondamentale. Nous verrons en exemples la suite de Conway, la suite de Syracuse et la fameuse suite de la suite de Fibonacci.

1. Un nombre rationnel est un nombre réel qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction. Les nombres irrationnels ne peuvent donc pas s'écrire avec une fraction de deux entiers. Les exemples les plus célèbres sont $\pi \approx 3,14159265...$, $\sqrt{2} \approx 1,41421356...$ Mais ils en existent une infinité comme par exemple ce nombre que vous rencontrerez à la fin de l'année : $e \approx 2,71828182...$

I. Définition

Définition

Une **suite numérique** u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

On note cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geq 0}$, (u_n) ou encore plus simplement u.
u_n est appelé **le terme général de la suite u d'indice n**.
u_0 est le **premier terme** ou le **terme initial** de la suite.

Exemple

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 4n + 4$. On a donc :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0^2 - 4 \times 0 + 4 = 4 \\ u_1 &= 1^2 - 4 \times 1 + 4 = 1 \\ u_2 &= 2^2 - 4 \times 2 + 4 = 0 \\ u_3 &= 3^2 - 4 \times 3 + 4 = 1 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Remarque

Il est possible que la suite ne soit définie qu'à partir d'un certain seuil. Par exemple, la suite v définie par $v_n = \dfrac{1}{n}$ n'est pas définie pour $n = 0$. On le précise alors en choisissant la notation suivante pour nommer la suite :

$$(v_n)_{n\geq 1}.$$

Les premiers termes de la suite sont :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{1} = 1 \\ v_2 &= \frac{1}{2} \\ v_3 &= \frac{1}{3} \\ v_4 &= \frac{1}{4} \\ &\ldots \end{aligned}$$

Représentation graphique

Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut représenter une telle suite par un **nuage de points** de coordonnées

$$(n; u_n)$$

Exemple

Soit la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = n^2$.

On a :

- $w_0 = 0$. Donc $(0; 0)$ sont les coordonnées du premier point.
- $w_1 = 1$. Donc $(1; 1)$ sont les coordonnées du deuxième point.
- $w_2 = 4$. Donc $(2; 4)$ sont les coordonnées du troisième point.
- $w_3 = 9$. Donc $(3; 9)$ sont les coordonnées du quatrième point.
- ...

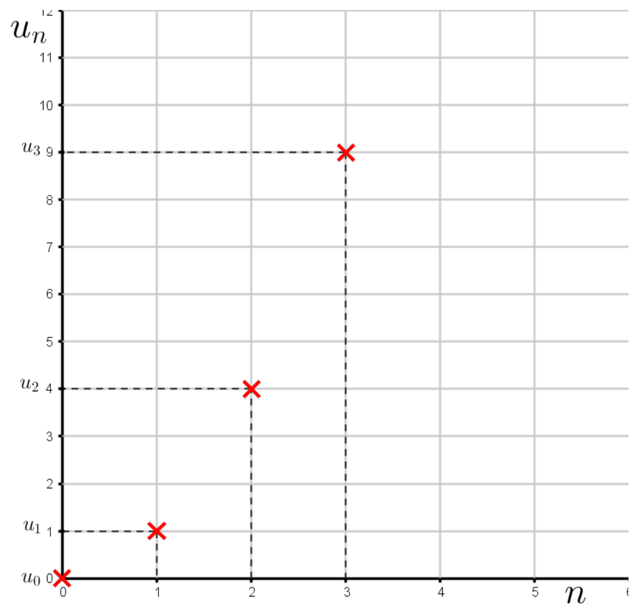


Figure 5.1 – représentation graphique d'une suite numérique

Questions à Choix Multiple n° 1

1. On donne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

   Laquelle des propositions suivantes est juste :

   a) u_0 n'existe pas b) $u_1 = 2$ c) $u_2 = \dfrac{2}{5}$ d) $u_3 = \dfrac{3}{16}$

2. On donne la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

   Laquelle des propositions suivantes est juste :

   a) $v_0 = 0$ b) $v_1 = \dfrac{1}{2}$ c) $v_2 = -\dfrac{2}{3}$ d) $v_3 = -\dfrac{1}{4}$

II. Mode de génération d'une suite

a) Suite définie par une expression explicite

On peut donner une suite par l'expression du terme général u_n en fonction de n.
Dans ce cas, on sait calculer directement n'importe quel terme de la suite.

Exemple

1. Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \sqrt{2n+6}$. On peut alors calculer $u_0, u_1, u_2, ..., u_{100}, ...$

$$\begin{aligned}
u_0 &= \sqrt{2 \times 0 + 6} = \sqrt{6} \\
u_1 &= \sqrt{2 \times 1 + 6} = \sqrt{8} \\
u_2 &= \sqrt{2 \times 2 + 6} = \sqrt{10} \\
&... \\
u_{100} &= \sqrt{2 \times 100 + 6} = \sqrt{206} \\
&...
\end{aligned}$$

2. La suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = (-3)^n$. On peut alors calculer $v_0, v_1, v_2, v_3, ..., v_{10}, ...$

$$\begin{aligned}
v_0 &= (-3)^0 = 1 \\
v_1 &= (-3)^1 = -3 \\
v_2 &= (-3)^2 = 9 \\
v_3 &= (-3)^3 = -27 \\
&... \\
v_{10} &= (-3)^{10} = 59\ 049 \\
&...
\end{aligned}$$

Questions à Choix Multiple n° 2

1. On donne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2n^2 - 4$.
   Laquelle des propositions suivantes est juste :
   a) $u_3 = 14$ b) $u_3 = 32$ c) $u_3 = 2$
2. On donne la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 2^{n-1}$.
   Laquelle des propositions suivantes est juste :
   a) $v_3 = 8$ b) $v_3 = 7$ c) $v_3 = 4$

Programmation Python :

Pour programmer le calcul du n-ième terme d'une suite en Python, il « suffit » d'utiliser d'écrire la formule dans la fonction.

- Pour la suite $u_n = \sqrt{2n+6}$, on doit importer (ligne 1) la fonction racine carrée `sqrt` (`sq`uare `r`oo`t`) de la bibliothèque `math` :

```
1 from math import sqrt
2
3 def suite(n):
4     return sqrt(2*n+6)
```

Ensuite dans la console, il suffit d'écrire :

```
>>> suite(5)
4.0
```

- Pour la suite $w_n = (-3)^n$, on doit se rappeler que la suissance s'écrit avec deux fois le symbole multiplier `**` :

```
def suite(n):
    return (-3)**n
```

Ensuite dans la console, il suffit d'écrire :

```
>>> suite(5)
-243
```

Programmation en Python n° 1

1. Compléter le code suivant pour obtenir une fonction permettant de calculer les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

```
def suite(n):
    return ......................
```

2. Compléter le code suivant pour obtenir une fonction permettant de calculer les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

```
def suite(n):
    return ......................
```

b) Suite définie par récurrence

Dans ce mode de génération, on utilise le (ou les) résultat(s) précédent(s) pour calculer le suivant. La plupart des suites « intéressantes » sont sur ce mode. Malheureusement, pour une suite u définie par récurrence on ne peut pas calculer directement un terme sans connaître les précédents. Par exemple, on ne peut calculer u_{100} si on n'a pas encore calculé $u_1, u_2, u_3, ..., u_{99}$ ce qui peut être long et fastidieux...

Définition
Une suite est **définie par récurrence** quand elle est définie par :
- un terme initial,
- une relation qui permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant.

Cette relation est appelée **relation de récurrence**

Exemple
La suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = 5 \\ u_{n+1} & = 3u_n - 1 \end{cases}$$

La deuxième ligne nous donne la relation de récurrence de cette suite. u_{n+1} étant le terme suivant u_n, cette relation nous indique que, d'une manière général, pour obtenir le terme suivant u_{n+1}, il faut prendre le dernier terme calculé u_n, le multiplier par 3 puis soustraire 1. Ainsi :

$$\begin{aligned} u_0 &= 5 \\ u_1 &= 3 \times u_0 - 1 &&= 3 \times 5 - 1 &&= 14 \\ u_2 &= 3 \times u_1 - 1 &&= 3 \times 14 - 1 &&= 41 \\ u_3 &= 3 \times u_2 - 1 &&= 3 \times 41 - 1 &&= 122 \\ &\ldots \end{aligned}$$

On constate bien qu'il est impossible de calculer u_{100} directement. Il faut calculer les 99 termes précédents pour y arriver.

Questions à Choix Multiple n° 3

1. On donne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = u_n^2 - 2 \end{cases}$.

   Parmi les propositions suivante, laquelle est juste :
   a) $u_2 = 7$ b) $u_2 = 47$ c) $u_2 = 46$ d) $u_2 = -1$

2. On donne la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} v_0 & = -1 \\ v_{n+1} & = v_n^2 - 2 \end{cases}$.

   Parmi les propositions suivante, laquelle est juste :
   a) $v_2 = 7$ b) $v_2 = 47$ c) $v_2 = 46$ d) $v_2 = -1$

PROGRAMMATION PYTHON : Calcul du n-ième terme
Pour programmer le calcul du n-ième terme d'une suite en Python, il faut utiliser une boucle **POUR**, autrement dit `for`. On a aussi besoin d'un compteur `i` et enfin d'une fonction pour compter `range`.
Attention, la fonction `range` compte toujours en démarrant à 0 et s'arrête un pas avant. Ainsi `range(5)` compte en partant de 0 et s'arrête à 4, ce qui fait bien 5 répétitions (0 puis 1 puis 2 puis 3 puis 4).
Enfin, pour la récurrence, la variable `calcul` doit utiliser le calcul précédent. On écrira donc `calcul = 3*calcul-1` pour la suite (u_n) définit par

$$\begin{cases} u_0 & = 5 \\ u_{n+1} & = 3u_n - 1 \end{cases}$$

Nous pouvons alors écrire deux versions différentes pour calculer le n-ième terme de la suite.

- Première version :

```
1 def suite_v1(n):
2     # initialisation
3     calcul = 5
4     # récurrence
5     for i in range(n):
6         calcul = 3*calcul-1
7     return calcul
```

- Deuxième version :

```
1 def suite_v2(n):
2     # initialisation
3     calcul = 5
4     # récurrence
5     for i in range(n):
6         calcul = 3*calcul-1
7         print(calcul)
8     return calcul
```

Quelle est la différence entre les deux versions ? ? ?
Ligne 7, on affiche les résultats intermédiaires.

Ensuite dans la console, il suffit d'écrire :

```
>>> suite_v1(5)
1094
```

Programmation en Python n° 2

1. Compléter le code suivant pour obtenir une fonction permettant de calculer les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = u_n - 2 \end{cases}$.

```python
def suite(n):
    # initialisation
    calcul = .......................
    # récurrence
    for i in range(n):
        calcul = .......................
    return .......................
```

2. Compléter le code suivant pour obtenir une fonction permettant de calculer les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $\begin{cases} v_0 & = 3 \\ v_{n+1} & = 1,5v_n \end{cases}$.

```python
def suite(n):
    # initialisation
    calcul = .......................
    # récurrence
    for i in range(n):
        calcul = .......................
    return .......................
```

PROGRAMMATION PYTHON : Calcul d'un seuil

Enfin, parfois on recherche un seuil S, c'est-à-dire le rang n à partir duquel la suite dépasse cette valeur S. On a alors besoin d'une boucle **TANT QUE**, autrement dit `while`.

Tant que le terme de la suite n'a pas dépassé le seuil, on continue de calculer le terme suivant **ET** on n'oublie pas d'augmenter le rang n de 1.

On peut alors retourner le rang n à partir duquel la suite dépasse le seuil, ou mieux le couple (n, u_n) ; en informatique on appelle cela un tuple.

```python
def suite_seuil(S):
    # initialisation
    calcul = 5
    n = 0
    # récurrence
    while calcul<S :
        calcul = 3*calcul-1
        n = n+1
    return (n,calcul)
```

Si on veut dépasser le seuil de 2021, on écrit alors dans la console :

```
>>> suite_seuil(2021)
(6, 3281)
```

Autrement dit, $u_6 = 3281$ est le premier terme qui dépasse le nombre 2021.

Programmation en Python n° 3

1. Compléter le code suivant pour obtenir le rang à partir duquel la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= 1,2u_n + 5 \end{cases}$ dépasse la valeur S.

```
def suite_seuil(S):
    # initialisation
    calcul = ......................
    n = 0
    # récurrence
    while ......................
        calcul = ......................
        n = n + 1
    return ......................
```

2. Compléter le code suivant pour obtenir le rang à partir duquel la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $\begin{cases} v_0 &= -1 \\ u_{n+1} &= u_n^2 - 2 \end{cases}$ dépasse la valeur S.

```
def suite_seuil(S):
    # initialisation
    calcul = ......................
    n = 0
    # récurrence
    while ......................
        calcul = ......................
        n = n + 1
    return ......................
```

III. Sens de variation d'une suite

Définition

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit un entier p.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante à partir du rang p** si pour tout $n \geq p$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante à partir du rang p** si pour tout $n \geq p$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone à partir du rang p** si elle est soit croissante pour tout $n \geq p$, soit décroissante pour tout $n \geq p$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **stationnaire à partir du rang p** si pour tout $n \geq p$, on a $u_{n+1} = u_n$.

Point Méthode

En pratique, on dispose de plusieurs méthodes pur étudier le sens de variation d'une suite.

- Si $u_n = f(n)$ où f est une fonction bien connue, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ va hériter des propriétés de la fonction.
  Si f est croissante sur $[p;+\infty[$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera croissante pour tout $n \geq p$.
  Si f est décroissante sur $[p;+\infty[$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera décroissante pour tout $n \geq p$.
- Sinon, il faut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
  Si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera croissante pour tout $n \geq p$.
  Si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera décroissante pour tout $n \geq p$.

Exemple

1. Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 4n + 4$.
   Cette suite est directement obtenue à partir de la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 4$. « On sait » que cette fonction est croissante sur $[2;+\infty[$.
   La suite u est donc croissante à partir du rang 2.
2. Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= v_n + \dfrac{1}{n+1} \end{cases}$
   A partir de la deuxième ligne, on obtient
   $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1}$$
   Or comme n est un entier naturel, $\dfrac{1}{n+1}$ est positif, donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$.
   La suite v est donc croissante à partir du rang 0. On écrira plus simplement que la suite v est croissante.
3. Soit la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{5}{n+1}$.
   Exprimons tout d'abord le terme w_{n+1}
   $$w_{n+1} = \frac{5}{n+1+1} = \frac{5}{n+2}$$
   Étudions maintenant le signe de $w_{n+1} - w_n$.
   $$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{5}{n+2} - \frac{5}{n+1} \\ &= \frac{5}{n+2} \times \frac{n+1}{n+1} - \frac{5}{n+1} \times \frac{n+2}{n+2} \text{ pour mettre au même dénominateur} \\ &= \frac{5n+5}{(n+1)(n+2)} - \frac{5n+10}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{5n+5-5n-10}{(n+1)(n+2)} \text{ attention aux changements de signe} \\ &= \frac{-5}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$
   Comme n est un entier naturel, $n+1$ et $n+2$ sont positifs, donc $w_{n+1} - w_n \leq 0$. La suite w est décroissante.

Questions à Choix Multiple n° 4

1. Si pour tout entier n, $u_n = \dfrac{n^2}{2^{2n}}$ alors :

   a) $u_{n+1} = \dfrac{n^3}{2^{2n+1}}$ b) $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}$ c) $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{2n+2}}$

2. La suite de terme général $v_n = n^3 - 12n$ est :

   a) décroissante à parti d'un certain rang b) croissante à partir d'un certain rang c) ni croissante, ni décroissante

IV. Les QCM et Programmes en Python

Questions à Choix Multiple n° 1

1. On donne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.
   Laquelle des propositions suivantes est juste :
   a) u_0 n'existe pas b) $u_1 = 2$ c) $u_2 = \dfrac{2}{5}$ d) $u_3 = \dfrac{3}{16}$
2. On donne la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
   Laquelle des propositions suivantes est juste :
   a) $v_0 = 0$ b) $v_1 = \dfrac{1}{2}$ c) $v_2 = -\dfrac{2}{3}$ d) $v_3 = -\dfrac{1}{4}$

Questions à Choix Multiple n° 2

1. On donne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2n^2 - 4$.
   Laquelle des propositions suivantes est juste :
   a) $u_3 = 14$ b) $u_3 = 32$ c) $u_3 = 2$
2. On donne la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 2^{n-1}$.
   Laquelle des propositions suivantes est juste :
   a) $v_3 = 8$ b) $v_3 = 7$ c) $v_3 = 4$

Questions à Choix Multiple n° 3

1. On donne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = u_n^2 - 2 \end{cases}$.
   Parmi les propositions suivante, laquelle est juste :
   a) $u_2 = 7$ b) $u_2 = 47$ c) $u_2 = 46$ d) $u_2 = -1$
2. On donne la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} v_0 & = -1 \\ v_{n+1} & = v_n^2 - 2 \end{cases}$.
   Parmi les propositions suivante, laquelle est juste :
   a) $v_2 = 7$ b) $v_2 = 47$ c) $v_2 = 46$ d) $v_2 = -1$

Questions à Choix Multiple n° 4

1. Si pour tout entier n, $u_n = \dfrac{n^2}{2^{2n}}$ alors :

   a) $u_{n+1} = \dfrac{n^3}{2^{2n+1}}$ b) $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}$ c) $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{2n+2}}$

2. La suite de terme général $v_n = n^3 - 12n$ est :

   a) décroissante à parti d'un certain rang b) croissante à partir d'un certain rang c) ni croissante, ni décroissante

Programmation en Python n° 1

1. Compléter le code suivant pour obtenir une fonction permettant de calculer les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

```
def suite(n):
    return ......................
```

2. Compléter le code suivant pour obtenir une fonction permettant de calculer les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

```
def suite(n):
    return ......................
```

Programmation en Python n° 2

1. Compléter le code suivant pour obtenir une fonction permettant de calculer les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = u_n - 2 \end{cases}$.

```
def suite(n):
    # initialisation
    calcul = ......................
    # récurrence
    for i in range(n):
        calcul = ......................
    return ......................
```

2. Compléter le code suivant pour obtenir une fonction permettant de calculer les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $\begin{cases} v_0 & = 3 \\ v_{n+1} & = 1,5v_n \end{cases}$.

```
def suite(n):
    # initialisation
    calcul = ......................
    # récurrence
    for i in range(n):
        calcul = ......................
    return ......................
```

Programmation en Python n° 3

1. Compléter le code suivant pour obtenir le rang à partir duquel la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 1,2u_n + 5 \end{cases}$ dépasse la valeur S.

```python
def suite_seuil(S):
    # initialisation
    calcul = ......................
    n = 0
    # récurrence
    while ......................
        calcul = ......................
        n = n + 1
    return ......................
```

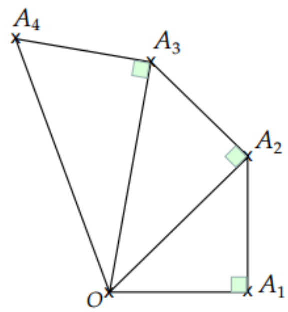
2. Compléter le code suivant pour obtenir le rang à partir duquel la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $\begin{cases} v_0 & = -1 \\ u_{n+1} & = u_n^2 - 2 \end{cases}$ dépasse la valeur S.

```python
def suite_seuil(S):
    # initialisation
    calcul = ......................
    n = 0
    # récurrence
    while ......................
        calcul = ......................
        n = n + 1
    return ......................
```

V. Exercices

Les exercices proviennent du site ***Sésamath*** *:* `http://www.sesamath.net`.
Les fiches d'exercices proviennent, elles, du site ***Maths en ligne*** *:* `http://www.mathsenligne.net`.

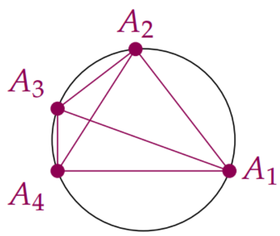
Exercice 1 (La spirale de Pythagore)



On considère OA_1A_2 un triangle rectangle en A_1 tel que $OA_1 = A_1A_2 = 1$.
On construit ensuite une suite de points A_n, $n \in \mathbb{N}^*$ tels que OA_nA_{n+1} soit un triangle rectangle en A_n et que $A_nA_{n+1} = 1$.
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = OA_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Définir la suite (u_n) par récurrence.
3. Conjecturer la forme explicite de la suite (u_n).

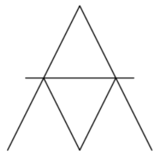
Exercice 2



Sur un cercle quelconque, on place n points distincts $A_1, A_2, ..., A_n$ et on s'intéresse au nombre de segments que l'on peut tracer entre ces n points.
On nommera u_n ce nombre de segments possibles.

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2. Établir une relation de récurrence permettant de définir la suite u.

Exercice 3



On prend cinq jeux de 54 cartes pour faire un très haut château de cartes.
Combien peut-on faire d'étages au château ?

Exercice 4 (D'après BAC)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ n \times u_n = (n+1) \times u_{n-1} + 1 \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Quelle conjecture peut-on émettre sur la forme explicite de cette suite ?
3. Pour confirmer cette conjecture, calculer à l'aide de la calculatrice les premiers termes de cette suite.

Remarque : le résultat conjecturé pourra se démontrer en Terminale.

Feuille d'exercices du site Maths en ligne : Suites numériques

Exercice 1A.1

On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = 3n - 7$

Déterminer les termes suivants :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7

Exercice 1A.2

On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = 2^n$

Déterminer les termes suivants :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7

Exercice 1A.3

On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = n^2$

Déterminer les termes suivants :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7

Exercice 1A.4

On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

Déterminer les termes suivants (en écriture fractionnaire) :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7

Exercice 1A.5

On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = n^n$

Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7

Exercice 1A.6

On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = (-1)^n$

Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_{53}	u_{72}	u_{147}

Exercice 1A.7

On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8

Exercice 1A.8

On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = -3u_n + 2 \end{cases}$

Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6

Exercice 1A.9

On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 128 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$

Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8

Exercice 1A.10

On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 - 4 \end{cases}$

Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5

Exercice 1A.11

On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -u_n \end{cases}$

Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_{50}	u_{101}	u_{764}

Exercice 1A.12

On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_{50}	u_{101}	u_{764}

Exercice 1A.13

On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\,u_n \end{cases}$

Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_{10}	u_{15}

Feuille d'exercices du site Maths en ligne : Représentation graphique

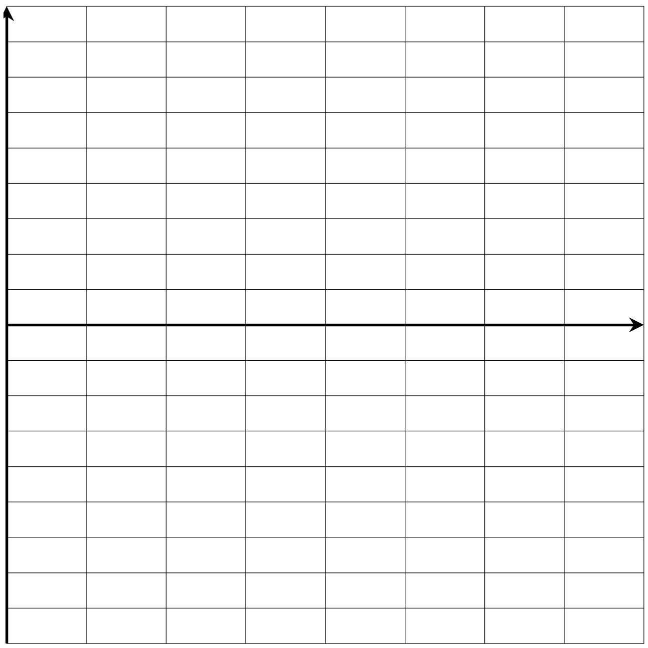
Exercice 1B.1

Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ u_{n+1} = -u_n + 1 \end{cases}$

a. Calculer :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8

b. Représenter graphiquement cette suite :



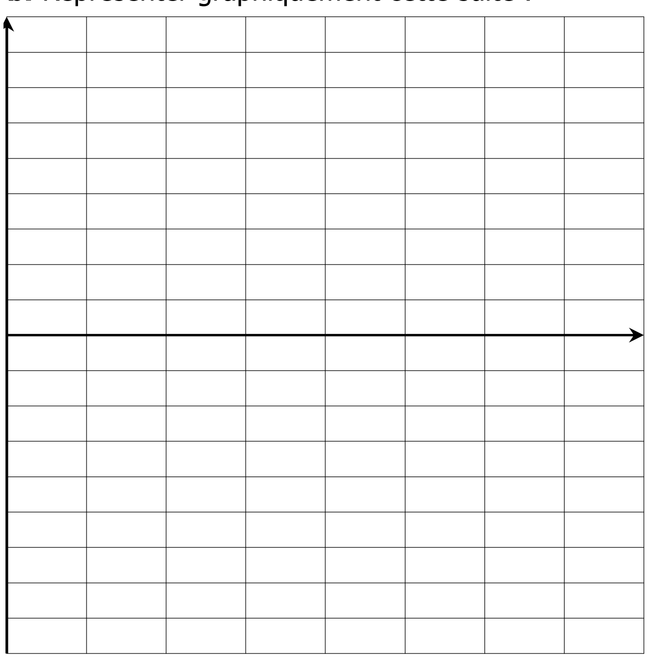
Exercice 1B.2

Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -u_n + 1 \end{cases}$

a. Calculer :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8

b. Représenter graphiquement cette suite :



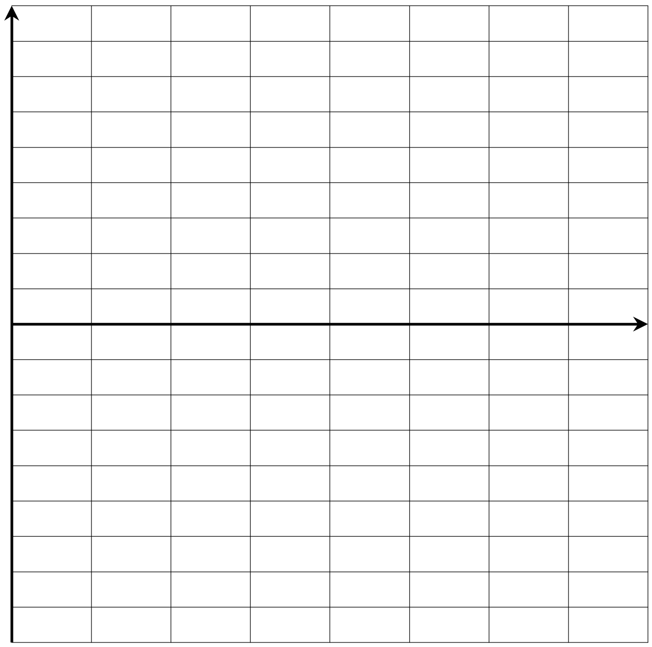
Exercice 1B.3

Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -8 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2} \end{cases}$

a. Calculer (arrondir si nécessaire au dixième) :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8

b. Représenter graphiquement cette suite :



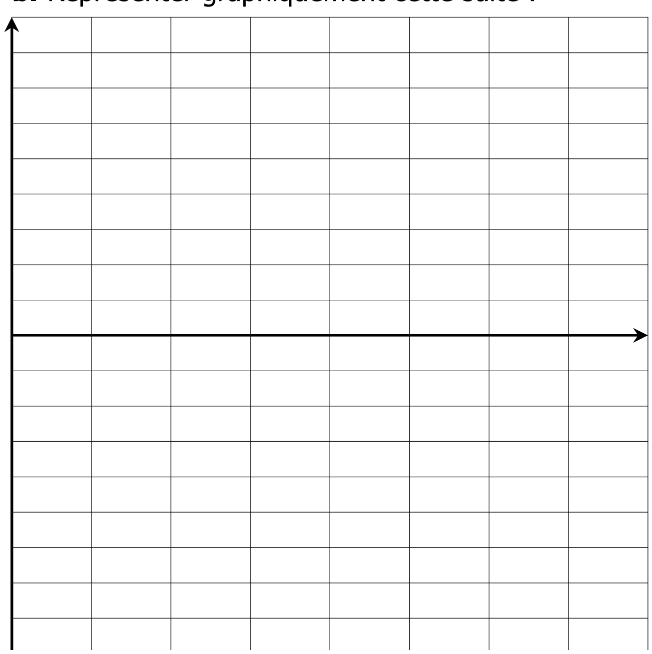
Exercice 1B.4

Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 1{,}1u_n + 1 \end{cases}$

a. Calculer (arrondir si nécessaire au dixième) :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8

b. Représenter graphiquement cette suite :



VI. Quelques exemples célèbres

a) La conjecture de Syracuse

Dès 1928, Lothar Collatz[2] s'intéressait aux itérations dans les nombres entiers, qu'il représentait au moyen de graphes et d'hypergraphes. Il inventa alors le problème $3x+1$, et le présentait souvent ensuite dans ses séminaires. En 1952, lors d'une visite à Hambourg, Collatz expliqua son problème à Helmut Hasse[3]. Ce dernier le diffusa en Amérique à l'université de Syracuse : la suite de Collatz prit alors le nom de « suite de Syracuse ».

Cette conjecture mobilisa tant les mathématiciens durant les années 1960, en pleine guerre froide, qu'une plaisanterie courut selon laquelle ce problème faisait partie d'un complot soviétique visant à ralentir la recherche américaine.

John Conway[4] a établi l'indécidabilité algorithmique pour une famille de problème qui généralise le problème $3x+1$, mais n'a pas réussi à résoudre le problème de décidabilité[5] du problème de Syracuse.
Source Wikipédia.

L'algorithme de Syracuse

```
choisir un nombre entier naturel non nul
si ce nombre est pair
alors le diviser par 2
sinon le multiplier par 3 et rajouter 1
retourner à la ligne 2 avec votre nouveau nombre
```

Exercice 5
Tester l'algorithme avec plusieurs valeurs de départ différentes.
Que remarquez-vous ? Quelle conjecture pouvez-vous faire ?
Chercher le nombre de départ entre 1 et 100 qui donne le temps de vol le plus grand ou l'altitude maximale.

b) La suite de Conway

Dans la suite de Conway[6], aussi connue sous le nom de *suite audioactive* ou encore de *Look and Say*, un terme se détermine en écrivant ce que l'on voit sur le terme précédent.

$$u_0 = 1$$

On voit un « 1 », donc on écrit :

$$u_1 = 11$$

On voit deux « 1 », donc on écrit :

$$u_2 = 21$$

2. Lothar Collatz (1910-1990) est un mathématicien allemand. En 1937, il énonça la « conjecture de Collatz », connue également sous le nom de conjecture de Syracuse.
3. Helmut Hasse (1898-1979) est un mathématicien allemand. Il fut un des plus grands algébristes allemands de son époque, connu notamment pour ses travaux sur la théorie des nombres.
4. Encore lui !
5. La décidabilité est un problème d'une branche des mathématiques que l'on appelle la logique. La décidabilité consiste à décider si un problème à une solution.
Si le problème est **décidable**, il a une solution ou alors il n'en a pas.
Dans certains cas, le problème est **indécidable**, c'est-à-dire que l'on ne peut pas dire s'il a une solution, s'il n'en a pas ou les deux en même temps !!!
6. John Hortan Conway, né le 26 décembre 1937, mort le 11 avril 2020 de la Covid-19. Mathématicien anglais. Extrêmement prolifique, il s'est penché sur les théories des groupes finis, des nœuds, des nombres, des jeux et du codage.
Source Wikipédia.

On voit un « 2 » et un « 1 », donc on écrit :

$$u_3 = 1211$$

En poursuivant ainsi, on obtient :

$$u_4 = 111221$$
$$u_5 = 312211$$
$$u_6 = 13112221$$
$$...$$

Cette suite possède de nombreuses propriétés plus ou moins complexes. La première est qu'elle ne comporte pas de chiffre supérieur à 3.

c) L'algorithme de Babylone

La tablette YBC 7289

La tablette d'argile YBC 7289 (abréviation de Yale Babylonian Collection, no 7289) est une pièce archéologique de la période paléo-babylonienne écrite en cunéiforme et traitant de mathématiques. Son intérêt réside dans le fait qu'elle est la plus ancienne représentation connue d'une valeur approchée de la racine carrée de deux, notée aujourd'hui $\sqrt{2}$.
On ne connaît pas son origine exacte ; elle est datée du premier tiers du II^e millénaire av. J.-C. (-1700 à peu près). Elle provient sans doute du sud de l'Irak actuel. Elle a été achetée vers 1912 et publiée pour la première fois en 1945. Elle est actuellement conservée à l'université Yale.

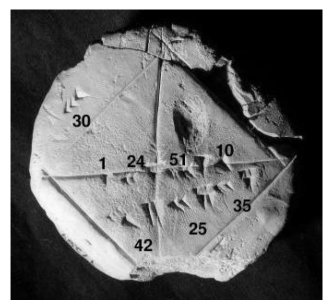
Source Wikipédia
et Bill Casselman

Les babyloniens utilisaient un système de numération sexagésimal[7], c'est-à-dire en base 60.
On peut lire en écriture cunéiforme sur la diagonale du carré :

$$1\ 24\ 51\ 10$$

soit
$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30\ 547}{21\ 600} = 1,41421296...$$
A comparer avec le résultat exact :

$$\sqrt{2} = 1,414213562...$$



Source Wikipédia
et Bill Casselman

La méthode de Héron

La tablette ne donne aucune indication à propos de la méthode utilisée pour obtenir cette approximation. Une hypothèse est que celle-ci a été obtenue par une méthode itérative mathématiquement équivalente à celle connue plus tard sous le nom de méthode de Héron[8].

7. Notre décompte des heures en 60 minutes et des minutes en 60 secondes est un héritage de ce système assez unique dans l'histoire des mathématiques.
8. Héron d'Alexandrie est un ingénieur, un mécanicien et un mathématicien grec du Ier siècle ap. J.-C.

L'idée géométrique est de partir d'un rectangle d'aire 2 cm^2 puis de le modifier petit à petit pour se rapprocher le plus possible d'un carré de même aire. On a ainsi ;

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{carré}} = c^2 &\approx 2 \\ c &\approx \sqrt{2} \end{aligned}$$

Partons donc d'un rectangle de côté 1 et 2 cm. Son aire vaut :

$$L \times l = 2 \times 1 = 2\text{cm}^2$$

On construit un nouveau rectangle. Sa nouvelle longueur est la moyenne des deux précédentes :

$$L = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Puis, on choisit la largeur pour que le rectangle ait toujours une aire de 2 cm^2 :

$$l = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On réitérant ce procédé, on peut montrer qu'à chaque nouvelle étape les largeurs augmentent, les longueurs diminuent et le nombre $\sqrt{2}$ reste compris entre la largeur et la longueur :

$$l < \sqrt{2} < L$$

Effectuons les 5 premières étapes de ce calcul :

Étapes	Longueur	largeur	Encadrement de $\sqrt{2}$ par des fractions	Encadrement de $\sqrt{2}$ par des décimaux
0	$L_0 = 2$	$l_0 = 1$	$1 < \sqrt{2} < 2$	$1 < \sqrt{2} < 2$
1				
2				
3				
4				

Une suite définie par récurrence

La suite des longueurs est la suite définie par récurrence suivante :

$$\begin{cases} L_0 &= 2 \\ L_{n+1} &= \dfrac{1}{2}\left(L_n + \dfrac{2}{L_n}\right) \end{cases}$$

Généralisation de la méthode

- En réalité, le terme initial peut prendre n'importe quelle valeur.
- On peut obtenir $\sqrt{a}$, la racine carrée de n'importe quel nombre positif a, avec la suite :

$$\begin{cases} u_0 & \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

A tester avec la suite :

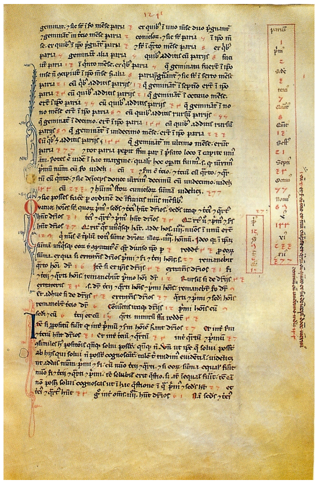
$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{16}{u_n}\right) \end{cases}$$

qui devrait nous donner une bonne approximation de ....

d) La suite de Fibonacci

Liber Abaci

Le *Liber abaci* (aussi écrit *Liber abbaci*) est un ouvrage de Leonardo Fibonacci [9] écrit en 1202 que l'on peut traduire par *Livre de l'abaque*.
Dans cet ouvrage, Fibonacci présente les chiffres arabes [10] et le système d'écriture décimale positionnelle qu'il avait appris en étudiant auprès de savants de Béjaia (en **Algérie**), où son père, Guglielmo Bonaccio était le représentant des marchands de la république de Pise. Le *Liber abaci* est l'un des premiers ouvrages d'Europe occidentale chrétienne à vulgariser les chiffres arabes. Il s'adresse aux marchands et aux savants mathématiciens de son temps.



source Wikipédia

Un élevage de lapins

Dans le *Liber Abaci*, Fibonacci présente un problème récréatif avec sa solution pour montrer comment utiliser les chiffres arabes et sa supériorité sur les chiffres romains. Le problème décrit la croissance d'une population de lapins :
« Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un 1 an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »

Exercice 6
Faire un schéma pour comprendre un peu mieux ce problème et comptons chaque mois le nombre de couples de lapins présents.

La suite de Fibonacci

Le problème de Fibonacci est à l'origine de la suite dont le n-ième terme correspond au nombre de paires de lapins au n-ième mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :

- au (début du) premier mois, il y a juste une paire de lapereaux ;
- les lapereaux ne procréent qu'à partir du (début du) troisième mois ;
- chaque (début de) mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux ;
- les lapins ne meurent jamais (donc la suite de Fibonacci est croissante).

On note cette suite $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On remarque que c'est une suite définie par une récurrence un peu particulière car elle doit faire appel aux deux termes précédents. On dit qu'il s'agit d'une récurrence d'ordre 2. Nous avons alors besoin des deux premiers termes pour initier la suite.
On pose $\mathcal{F}_0 = 0$ et naturellement $\mathcal{F}_1 = 1$ car le premier mois, nous commençons avec 1 couple de lapins. La suite est ainsi définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_0 & = 0 \\ \mathcal{F}_1 & = 1 \\ \mathcal{F}_{n+2} & = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n \end{cases}$$

9. Leonardo Fibonacci (v. 1175 à Pise - v. 1250) est un mathématicien italien. Il avait, à l'époque, pour nom d'usage « Leonardo Pisano » , Léonard de Pise en français. Le nom de Fibonacci, correspondant à « filius Bonacci », fils de Bonacci, en latin ; il lui a été attribué de manière posthume.
source Wikipédia.

10. Nous savons tous maintenant que les « chiffres arabes » s'inspirent d'une numération décimale indienne datant du IIIe siècle av. J.-C. On parle plutôt de chiffres indo-arabes.

Exercice 7
Calculer les termes de la suite jusqu'à $\mathcal{F}_{13}$ pour vérifier les résultats obtenus précédemment avec le schéma.

Pourquoi cette suite est-elle aussi célèbre ?

Cette suite est fortement liée au nombre d'or [11] $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. En effet, on peut démontrer que l'expression générale de la suite de Fibonacci s'écrit :

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

ce qui s'écrit aussi avec le nombre d'or φ :

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right)$$

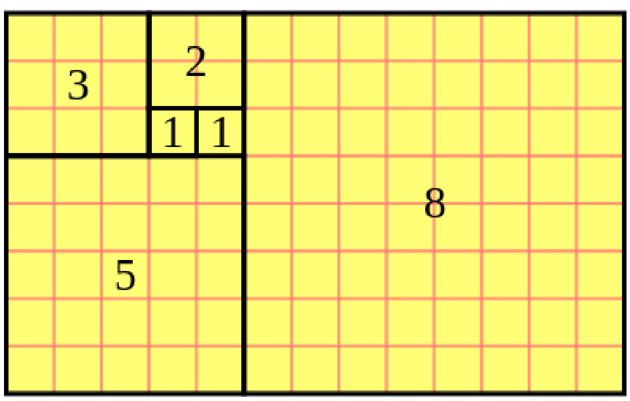
Exercice 8
Montrer que l'on a bien $-\dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 9
Vérifier avec l'expression générale $\mathcal{F}_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ les valeurs de $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$.

A l'aide de cette formule on a pu démontrer de nombreuses propriétés de cette suite, mais il reste encore des questions qui sont ouvertes. Par exemple, on découvre au fil des ans des nombres de Fibonacci premiers de plus en plus grands, mais on ignore toujours s'il en existe une infinité.

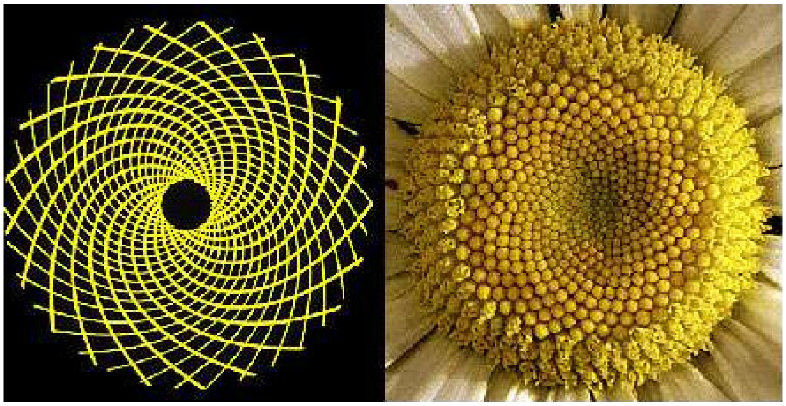
La suite de Fibonacci dans la nature

Ce qui a fait la célébrité de cette suite, c'est que l'on retrouve de nombreux exemples des premiers termes de la suite dans la nature.
A partir des termes de la suite, on peut construire assemblés les carrés de Fibonacci. Ces carrés nous donne un support pour construire la spirale de Fibonacci [12] :



11. Aussi appelé le nombre de la *divine proportion*. Nous le rencontrerons plus en détail au chapitre suivant.
12. Une assez bonne approximation de la spirale d'or dont on reparlera avec le nombre d'or.

C'est cette spirale que l'on retrouve dans la nature :



Les capitules d'une marguerite

Détail d'un tournesol
source Ciencias e Tecnologia

Découpe d'un coquillage
source Ciencias e Tecnologia

Vous pouvez d'autres exemples sur le lien Pinterest suivant : `https://fr.pinterest.com/pamimi/fibonacci-fascination/` ainsi qu'une vidéo `https://www.youtube.com/watch?v=2f0CVGlYEGQ`

La suite de Fibonacci et les artistes

La « magie » de la suite de Fibonacci a inspiré bon nombre d'artistes :

- en poésie, le **fib** est une sorte de haïku s'appuyant sur les termes de la suite. Le poème est composé de 6 vers, chacun des vers comptant autant de syllabes que chaque ligne correspondante de la suite de Fibonacci.

Toute	1
La	1
Beauté	2
De ce monde	3
Qui tient sur six lignes	5
Et en chante la gratuité	8

Marc Lebel

- en architecture avec la mesure harmonique **Modulor** créée par **Le Corbusier**.
- en musique. Béla Bartok aurait utilisé la suite de Fibonacci notamment en 1937 pour sa *Musique pour cordes, percussion et célesta*.
  Iannis Xenakis a plusieurs fois utilisé cette suite. Par exemple avec *Zyga* en 1952 puis *Le Sacrifice* en 1953.
  Le groupe de métal progressif Tool utilise la suite dans son album *Lateralus* (2001) et principalement sur la chanson du même nom. La vidéo suivante vous explique sa structure :
  `https://www.youtube.com/watch?time_continue=9&v=wS7CZIJVxFY`