CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N°3- SUJET A

Exercice 2 : Équation du second degré **3 points**

On se place dans un repère orthonormé et on se donne deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-2x\end{pmatrix}$ dépendant d'une inconnue x.
Déterminer le ou les valeurs de x tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Autrement dit :

$$\begin{aligned}
&\vec{u}\cdot\vec{v}=0\\
\iff &xx'+yy'=0\\
\iff &3\times 4+(x+1)\times(-2x)=0\\
\iff &12-2x^2-2x=0\\
\iff &-2x^2-2x+12=0
\end{aligned}$$

On a un une équation du second degré avec $a=-2$, $b=-2$ et $c=12$. On calcule le discrimiant :
$\Delta=b^2-4ac=4+96=100=10^2>0$
On a deux racines :

$$\begin{aligned}
x_1&=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & x_2&=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\
x_1&=\frac{2-10}{-4} & x_2&=\frac{2+10}{-4}\\
x_1&=\frac{-8}{-4} & x_2&=\frac{12}{-4}\\
x_1&=2 & x_2&=-3
\end{aligned}$$

<u>Conclusion</u> : Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-2x\end{pmatrix}$ sont orthogonaux uniquement pour $x=-3$ ou $x=2$.

EXERCICE 3 : Suites **4,5 points**

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2n^2 - 1$.

   (a) Calculer les 4 premiers termes de la suite.

   $u_0 = -1 \quad u_1 = 2 - 1 = 1 \quad u_2 = 2\times 2^2 - 1 = 8 - 1 = 7 \quad u_3 = 2\times 3^2 - 1 = 18 - 1 = 17.$

   (b) Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite ?

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble être croissante.

   (c) Démontrer votre conjecture.

   - $u_{n+1} = 2\times(n+1)^2 - 1 = 2\times(n^2+2n+1) - 1 = 2n^2+4n+2-1 = 2n^2+4n+1.$
   - $u_{n+1} - u_n = (2n^2+4n+1) - (2n^2-1) = 2n^2+4n+1-2n^2+1 = 4n+2$
   - Comme n est positif, $4n$ l'est également. En rajoutant 2 , $4n+2$ reste positif.
     Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ autrement dit $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n.
     La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{n}{n+1}$.

   (a) Calculer les 4 premiers termes de la suite.

   $v_0 = \dfrac{0}{1} = 0 \quad v_1 = \dfrac{1}{2} \quad v_2 = \dfrac{2}{3} \quad v_3 = \dfrac{3}{4}.$

   (b) Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite ?

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble croissante.

   (c) Démontrer votre conjecture.

   - $v_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+1+1} = \dfrac{n+1}{n+2}.$
   -

   $$\begin{aligned}
   u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\\
   &= \frac{n+1}{n+2}\times\frac{n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+2}\\
   &= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)}\\
   &= \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)}\\
   &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}
   \end{aligned}$$

   - Comme n est positif, $(n+1)$ et $(n+2)$ le sont également. Un produit de deux facteurs positifs est positif.
     Donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$ autrement dit $v_{n+1} \geq v_n$ pour tout n.
     La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (d) On souhaite programmer cette suite en Python. Compléter le programme ci-dessous :

```python
def suite(n):
    return n/(n+1)
```

3. Soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} w_0 = -1 \\ w_{n+1} = 2w_n + 3 \end{cases}$.

(a) Calculer les 4 premiers termes de la suite.

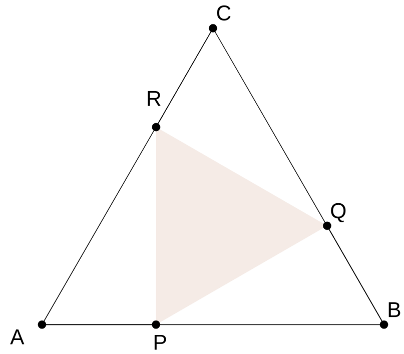
$w_0 = -1$
$w_1 = 2w_0 + 3 = -2 + 3 = 1$
$w_2 = 2w_1 + 3 = 2 + 3 = 5$
$w_3 = 2w_2 + 3 = 10 + 3 = 13$

(b) On souhaite programmer cette suite en Python. Compléter le programme ci-dessous :

```python
def suite(n):
    # initialisation
    calcul = -1
    # récurrence
    for i in range(n):
        calcul = 2*calcul + 3
    return calcul
```

EXERCICE 4 : Produit scalaire **3,5 points**

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 9. Les points P, Q et R appartiennent à $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ et $AP = BQ = CR = 3$.



1. Calculer les produits scalaires suivant :
   Comme les vecteurs sont colinéaires (cas particulier de la formule avec le projeté orthogonal)
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = AB \times AP = 9 \times 3 = 27$
   Comme le triangle ABC est équilatéral, on sait que les 3 angles font 60°
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AR} = AB \times AR \times \cos\left(\widehat{BAR}\right) = 9 \times 6 \times \cos(60) = 9 \times 6 \times \dfrac{1}{2} = 27$

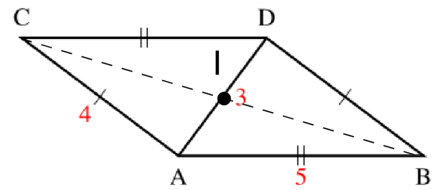
2. En déduire le produit scalaire :
   $\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AR}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AR} = 27 - 27 = 0$

3. En déduire la nature du triangle APR.
   D'après la question précédente, on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AR}\right) = 0$
   or $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{RP}$ (relation de Chasles)
   On a donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{RP} = 0$ ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{RP}$ sont orthogonaux.
   Donc le triangle APR est rectangle en P.

4. Déterminer de même la nature des triangles BQP et CRQ puis PQR.
   En procédant de même, on obtient aussi que les triangles BPQ et CRQ sont rectangles et respectivement Q et R.
   Enfin, comme le triangle APR est rectangle en P, on peut utiliser le théorème de Pythagore afin de calculer la longueur PR (...je passe les détails...) On trouve $RP = \sqrt{27}$.
   De même avec les triangles BQP et CRQ, on trouve respectivement $PQ = \sqrt{27}$ et $QR = \sqrt{27}$.
   Comme on a $RP = PQ = QR$, on en déduit que le triangle PQR est équilatéral.

Exercice 5 : **3 points**

Calculer la longueur BC.



Première méthode : Utilisation des outils géométriques classiques

- Dans le triangle ABD, on a :
  d'une part : $AB^2 = 5^2 = 25$
  d'autre part : $AD^2 + DB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
  On a donc $AB^2 = AD^2 + DB^2$.
  D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en D.

- $ABDC$ est un parallélogramme donc ses diagonales se coupent en leur milieu. Appelons I ce point. Nous avons donc $ID = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{3}{2}$.

- Le triangle IDB est rectangle en D, on peut appliquer le théorème de Pythagore :
  $IB^2 = ID^2 + DB^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 4^2 = \dfrac{9}{4} + 16 = \dfrac{73}{4}$
  $IB = \dfrac{\sqrt{73}}{2}$
- Comme I est le milieu de $[BC]$, on a : $BC = 2 \times IB = \sqrt{73}$.

Conclusion : $BC = \sqrt{73}$.

Deuxième méthode : Utilisation du produit scalaire

- D'une part :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(BC^2 - BA^2 - AC^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(BC^2 - 5^2 - 4^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(BC^2 - 41\right)
\end{aligned}$$

(on ne peut pas aller plus loin dans le calcul car on ne connaît pas la valeur de BC)

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD} && \text{car } \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}\\
&= -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}\\
&= -\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(AD^2-AB^2-BD^2\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(3^2-5^2-4^2\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(9-41\right)\\
&= 16
\end{aligned}$$

- Ainsi, on a d'une part $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(BC^2-41\right)$ et d'autre part $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=16$
  Donc $BC^2-41=2\times 16=32$
  Soit $BC^2=32+41=73$
  On obtient finalement $BC=\sqrt{73}$ car BC est une distance donc est un nombre positif.

Conclusion : $BC=\sqrt{73}$.

BONUS **1 point**

Andy Griffiths et Terry Denton inventent une cabane extraordinaire perchée dans un arbre gigantesque situé au bord de la mer dans leur livre « la cabane à 13 étages ».
Suite au succès du livre, ils écrivent un tome 2, « la cabane à 26 étages », puis un tome 3, « la cabane à 39 étages »et ainsi de suite jusqu'au tome 7.
Supposons qu'ils écrivent un tome 8. Quel sera son nom ?

On remarque que pour chaque tome, le nombre d'étage est un multiple de 13, mieux, c'est le numéro du tome multiplié par 13.
Ainsi le tome 1 a $1 \times 13 = 13$ étages.
Le tome 2 a $2 \times 13 = 26$ étages.
Le tome 3 a $3 \times 13 = 39$ étages.
...
Le tome 8 aura $8 \times 13 = 104$ étages !

(Pour ceux qui le souhaite, on pouvait aussi faire cet exercice en utilisant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 13n$ ou n représente le numéro du tome et u_n donne le nombre d'étage.
$u_1 = 13 \times 1 = 13$
...
$u_8 = 13 \times 8 = 104$.)

Conclusion : Le tome 8 s'appellera « La cabane à 104 étages ».

Exercice 2 : Équation du second degré **3 points**

On se place dans un repère orthonormé et on se donne deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\x+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-2x\end{pmatrix}$ dépendant d'une inconnue x.
Déterminer le ou les valeurs de x tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Autrement dit :

$$\begin{aligned}
&\vec{u}\cdot\vec{v}=0\\
\iff& xx'+yy'=0\\
\iff& 6\times 2+(x+1)\times(-2x)=0\\
\iff& 12-2x^2-2x=0\\
\iff& -2x^2-2x+12=0
\end{aligned}$$

On a un une équation du second degré avec $a=-2$, $b=-2$ et $c=12$. On calcule le discrimiant :
$\Delta=b^2-4ac=4+96=100=10^2>0$
On a deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{2-10}{-4} \qquad x_2=\frac{2+10}{-4}$$

$$x_1=\frac{-8}{-4} \qquad x_2=\frac{12}{-4}$$

$$x_1=2 \qquad x_2=-3$$

Conclusion : Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-2x\end{pmatrix}$ sont orthogonaux uniquement pour $x=-3$ ou $x=2$.

Exercice 3 : Suites **4,5 points**

1. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{n}{n+1}$.

   (a) Calculer les 4 premiers termes de la suite.

   $v_0 = \dfrac{0}{1} = 0 \quad v_1 = \dfrac{1}{2} \quad v_2 = \dfrac{2}{3} \quad v_3 = \dfrac{3}{4}$.

   (b) Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite ?

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble croissante.

   (c) Démontrer votre conjecture.

   - $v_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+1+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$.
   -

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1} \times \frac{n+2}{n+2} \\
&= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

   - Comme n est positif, $(n+1)$ et $(n+2)$ le sont également. Un produit de deux facteurs positifs est positif.
     Donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$ autrement dit $v_{n+1} \geq v_n$ pour tout n.
     La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (d) On souhaite programmer cette suite en Python. Compléter le programme ci-dessous :

```python
def suite(n):
    return n/(n+1)
```

2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2n^2 - 1$.

   (a) Calculer les 4 premiers termes de la suite.

   $u_0 = 1 \quad u_1 = 2 - 1 = 1 \quad u_2 = 2 \times 2^2 - 1 = 8 - 1 = 7 \quad u_3 = 2 \times 3^2 - 1 = 18 - 1 = 17$.

   (b) Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite ?

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble être croissante.

   (c) Démontrer votre conjecture.

   - $u_{n+1} = 2 \times (n+1)^2 - 1 = 2 \times (n^2+2n+1) - 1 = 2n^2 + 4n + 2 - 1 = 2n^2 + 4n + 1$.
   - $u_{n+1} - u_n = (2n^2+4n+1) - (2n^2-1) = 2n^2 + 4n + 1 - 2n^2 - 1 = 4n$
   - Comme n est positif, $4n$ l'est également.
     Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ autrement dit $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n.
     La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} w_0 = -1 \\ w_{n+1} = 2w_n + 3 \end{cases}$.

(a) Calculer les 4 premiers termes de la suite.

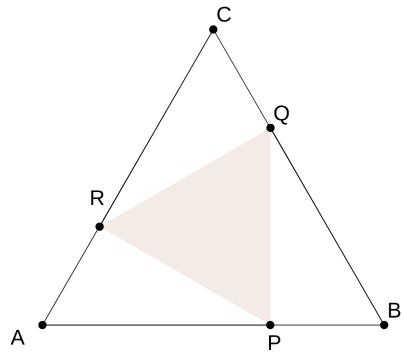
$w_0 = -1$
$w_1 = 2w_0 + 3 = -2 + 3 = 1$
$w_2 = 2w_1 + 3 = 2 + 3 = 5$
$w_3 = 2w_2 + 3 = 10 + 3 = 13$

(b) On souhaite programmer cette suite en Python. Compléter le programme ci-dessous :

```python
def suite(n):
    # initialisation
    calcul = -1
    # récurrence
    for i in range(n):
        calcul = 2*calcul + 3
    return calcul
```

Exercice 4 : Produit scalaire **3,5 points**

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 9. Les points P, Q et R appartiennent à $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ et $AP = BQ = CR = 6$.



1. Calculer les produits scalaires suivant :

Comme les vecteurs sont colinéaires (cas particulier de la formule avec le projeté orthogonal)
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AR} = AC \times AR = 9 \times 3 = 27$
Comme le triangle ABC est équilatéral, on sait que les 3 angles font 60°
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP} = AC \times AP \times \cos\left(\widehat{CAP}\right) = 9 \times 6 \times \cos(60) = 9 \times 6 \times \dfrac{1}{2} = 27$

2. En déduire le produit scalaire :

$\overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AR}\right) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AR} = 27 - 27 = 0$

3. En déduire la nature du triangle APR.

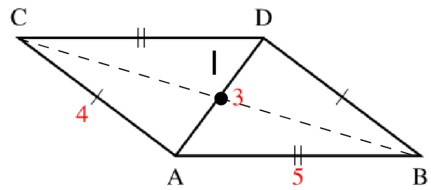
D'après la question précédente, on a : $\overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AR}\right) = 0$
or $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{RP}$ (relation de Chasles)
On a donc : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{RP} = 0$ ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{RP}$ sont orthogonaux.
Donc le triangle APR est rectangle en R.

4. Déterminer de même la nature des triangles BQP et CRQ puis PQR.

En procédant de même, on obtient aussi que les triangles BPQ et CRQ sont rectangles et respectivement P et Q.
Enfin, comme le triangle APR est rectangle en R, on peut utiliser le théorème de Pythagore afin de calculer la longueur PR (...je passe les détails...) On trouve $RP = \sqrt{27}$.
De même avec les triangles BQP et CRQ, on trouve respectivement $PQ = \sqrt{27}$ et $QR = \sqrt{27}$.
Comme on a $RP = PQ = QR$, on en déduit que le triangle PQR est équilatéral.

Exercice 5 : **3 points**

Calculer la longueur BC.



Première méthode : Utilisation des outils géométriques classiques

- Dans le triangle ABD, on a :
  d'une part : $AB^2 = 5^2 = 25$
  d'autre part : $AD^2 + DB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
  On a donc $AB^2 = AD^2 + DB^2$.
  D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en D.

- $ABDC$ est un parallélogramme donc ses diagonales se coupent en leur milieu. Appelons I ce point. Nous avons donc $ID = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{3}{2}$.

- Le triangle IDB est rectangle en D, on peut appliquer le théorème de Pythagore :
  $IB^2 = ID^2 + DB^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 4^2 = \dfrac{9}{4} + 16 = \dfrac{73}{4}$
  $IB = \dfrac{\sqrt{73}}{2}$
- Comme I est le milieu de $[BC]$, on a : $BC = 2 \times IB = \sqrt{73}$.

Conclusion : $BC = \sqrt{73}$.

Deuxième méthode : Utilisation du produit scalaire

- D'une part :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(BC^2 - BA^2 - AC^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(BC^2 - 5^2 - 4^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(BC^2 - 41\right)
\end{aligned}$$

(on ne peut pas aller plus loin dans le calcul car on ne connaît pas la valeur de BC)

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD} && \text{car } \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}\\
&= -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}\\
&= -\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(AD^2-AB^2-BD^2\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(3^2-5^2-4^2\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(9-41\right)\\
&= 16
\end{aligned}$$

- Ainsi, on a d'une part $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(BC^2-41\right)$ et d'autre part $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=16$
  Donc $BC^2-41=2\times16=32$
  Soit $BC^2=32+41=73$
  On obtient finalement $BC=\sqrt{73}$ car BC est une distance donc est un nombre positif.

Conclusion : $BC=\sqrt{73}$.

BONUS **1 point**

Andy Griffiths et Terry Denton inventent une cabane extraordinaire perchée dans un arbre gigantesque situé au bord de la mer dans leur livre « la cabane à 13 étages ».
Suite au succès du livre, ils écrivent un tome 2, « la cabane à 26 étages », puis un tome 3, « la cabane à 39 étages »et ainsi de suite jusqu'au tome 7.
Supposons qu'ils écrivent un tome 8. Quel sera son nom ?

On remarque que pour chaque tome, le nombre d'étage est un multiple de 13, mieux, c'est le numéro du tome multiplié par 13.
Ainsi le tome 1 a $1 \times 13 = 13$ étages.
Le tome 2 a $2 \times 13 = 26$ étages.
Le tome 3 a $3 \times 13 = 39$ étages.
...
Le tome 8 aura $8 \times 13 = 104$ étages !

(Pour ceux qui le souhaite, on pouvait aussi faire cet exercice en utilisant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 13n$ ou n représente le numéro du tome et u_n donne le nombre d'étage.
$u_1 = 13 \times 1 = 13$
...
$u_8 = 13 \times 8 = 104$.)

Conclusion : Le tome 8 s'appellera « La cabane à 104 étages ».