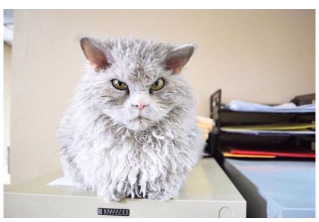
CHAPITRE 8

Suites arithmétiques - Suites géométriques

Extrait du programme

Contenus

- Suites arithmétiques : exemples, définition, calcul du terme général. Lien avec l'étude d'évolutions successives à accroissements constants. Lien avec les fonctions affines. Calcul de $1 + 2 + ... + n$.
- Suites géométriques : exemples, définition, calcul du terme général. Lien avec l'étude d'évolutions successives à taux constant. Lien avec la fonction exponentielle. Calcul de $1 + q + ... + q^n$.
- Sens de variation d'une suite.



Référence :
Albert le chat vénère

Capacités attendues

- Pour une suite arithmétique ou géométrique, calculer le terme général, la somme de termes consécutifs, déterminer le sens de variation.
- Modéliser un phénomène discret à croissance linéaire par une suite arithmétique, un phénomène discret à croissance exponentielle par une suite géométrique.

Démonstrations

- Calcul du terme général d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique.
- Calcul de $1 + 2 + ... + n$.
- Calcul de $1 + q + ... + q_n$.

Exemple d'algorithme

- Calcul de termes d'une suite, de sommes de termes, de seuil.
- Calcul de factorielle.
- Liste des premiers termes d'une suite : suites de Syracuse, suite de Fibonacci.

Approfondissements possibles

- Tour de Hanoï.
- Somme des n premiers carrés, des n premiers cubes.
- Remboursement d'un emprunt par annuités constantes.

A la fin de ce chapitre

Je connais :	Oui	Non	Qu'en pense mon professeur ?
• les formules par récurrence des suites arithmétiques et géométriques	☐	☐	☐
• les formules explicites des suites arithmétiques et géométriques	☐	☐	☐
• les formules pour les sommes des termes des suites	☐	☐	☐
• les sens de variation des suites arithmétiques et géométriques	☐	☐	☐
• les programmes en Python correspondant	☐	☐	☐

Vous retrouverez ce cours à l'adresse suivante :
`https://github.com/NaturelEtChaud/Math-premiere/tree/main/08%20Suites%20arithm%C3%A9tiques%20et%20g%C3%A9o`
`C3%A9triques`

I. Suites arithmétiques

Définition
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite arithmétique** si, et seulement si, il existe un réel r tel que pour tout n

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre r est appelé la **raison** de cette suite.

A lire
Autrement dit, chaque terme (sauf le premier) est obtenu en ajoutant au terme précédent le même réel r.
Pour définir correctement une suite arithmétique nous n'avons donc besoin que de connaître uniquement son terme initial u_0 et sa raison r.

Exemple
La suite u des nombres impairs peut être définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n + 2 \end{cases}$, une suite arithmétique de raison 2 et de terme initial 1.

$$\begin{aligned}
&u_0 = 1 \\
&u_1 = u_0 + 2 = 1 + 2 = 3 \\
&u_2 = u_1 + 2 = 3 + 2 = 5 \\
&u_3 = u_2 + 2 = 5 + 2 = 7 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

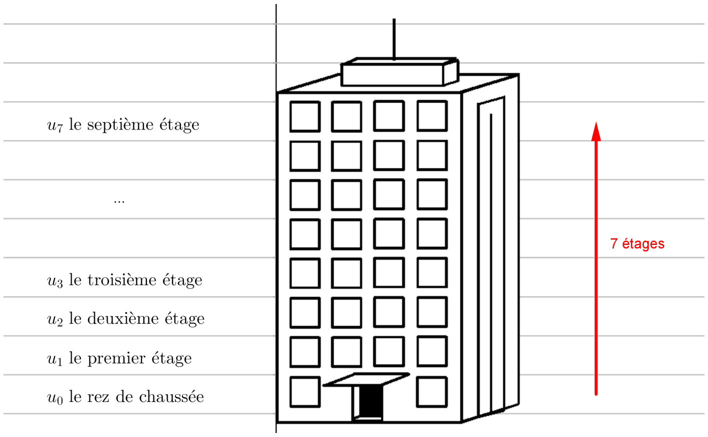
A lire
Une suite arithmétique est donc définie par récurrence. Heureusement, on peut obtenir une expression de son terme général très facilement.

Propriété (Expression du terme général)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r.

- Pour tout $n \geq 0$ on a $u_n = u_0 + nr$
- Pour tout $n \geq 0$ et $p \geq 0$ on a $u_n = u_p + (n - p)r$

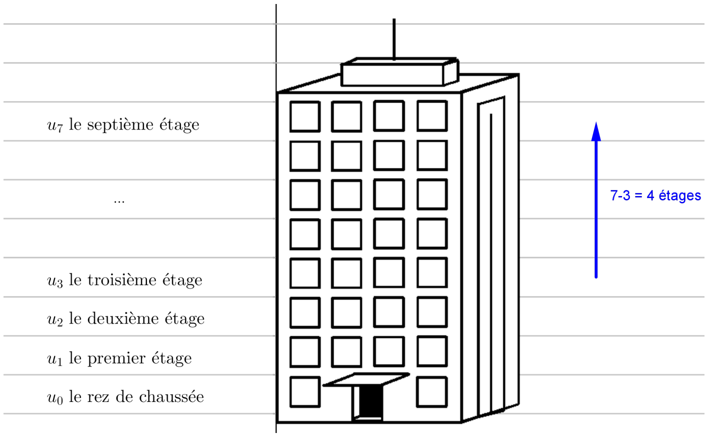
Démonstration (faite en classe)
□

A lire
La première formule $u_n = u_0 + nr$ est assez facile à comprendre. Puisque à chaque étape on ajoute le même nombre r, si on part du terme initial u_0 pour arriver au terme u_n alors on a effectué n étapes.
Pour mieux comprendre et utiliser la deuxième formule, je vous propose d'imaginer un immeuble.



u_0 est le rez de chaussée
u_1 est le premier étage
u_2 est le deuxième étage
...
Ainsi, pour passer de u_0 à u_7, imaginons notre immeuble. Pour passer du rez de chaussée au 7ième étage, on doit monter de 7 étages.
Ainsi, pour passer de u_0 à u_7, on rajoutera 7 fois la raison r.

$$u_7 = u_0 + 7 \times r$$



Pour comprendre la deuxième formule, nous allons utiliser à nouveau l'image de l'immeuble.
On souhaite une relation pour passer de u_3 à u_7, imaginons notre immeuble. Pour passer du 3ième étage au 7ième étage, on doit monter de 7-3=4 étages.
Ainsi, pour passer de u_3 à u_7, on rajoutera 4 fois la raison r.

$$u_7 = u_3 + 4 \times r$$

Questions à Choix Multiple n° 1
(u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

1. $u_0 = -2$ et $r = 3$ alors u_4 est égale à :
   a) 7   b) 12   c) 10
2. $u_1 = -5$ et $u_2 = 2$ alors r est égal à :
   a) 7   b) -3   c) -7
3. $u_4 = 2$ et $u_5 = 5$ alors u_6 est égal à :
   a) 7   b) 8   c) 9

PROPRIÉTÉ (SENS DE VARIATION)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si $r > 0$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si $r < 0$

Démonstration (faite en classe)
□

Exemple
- La suite u définie par $\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = u_n + 2 \end{cases}$, est une suite arithmétique (de terme initial $u_0 = 1$ et) de raison $r = 2 > 0$.
  La suite u est donc croissante.
- La suite v définie par $v_n = 14 - 3n$, est une suite arithmétique (de terme initial $v_0 = 14$ et) de raison $r = -3 > 0$.
  La suite v est donc décroissante.

A lire

Une légende raconte qu'en primaire, l'instituteur de Carl Friedrich Gauss[1] proposa à ses élèves d'effectuer le calcul suivant :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + 100$$

Alors que tous les enfants se lancèrent dans des additions fastidieuses, Gauss donna tout de suite la réponse.

5 050

Il venait de (re-)démontrer la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ (SOMME D'ENTIERS CONSÉCUTIFS)
Pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration (faite en classe)
□

Exemple
Vérifions le calcul de Gauss. Nous avons $n = 100$ et ainsi

$$1 + 2 + 3 + ... + 100 = \frac{100 \times (100 + 1)}{2} = 50 \times 101 = 5\ 050$$

1. Johann Carl Friedrich Gauss, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Il a apporté de très importantes contributions à ces trois domaines. Surnommé « le prince des mathématiciens » de son vivant, il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.
Source Wikipédia

Questions à Choix Multiple n° 2

1. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1\ 000$ et de raison $r = -15$. La suite (u_n) est :
   a) croissante b) décroissante c) constante
2. $1 + 2 + 3 + ... + 36$ est égal à
   a) 648,5 b) 666 c) 648

II. Suites géométriques

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** si, et seulement si, il existe un réel q tel que pour tout n

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le nombre q est appelé la **raison** de cette suite.

A lire

Autrement dit, chaque terme (sauf le premier) est obtenu en multipliant au terme précédent le même réel q.
Pour définir correctement une suite géométrique nous n'avons donc besoin que de connaître uniquement son terme initial u_0 et sa raison q.

Exemple

La suite u définie par $\begin{cases} u_0 &= 5 \\ u_{n+1} &= -3 \times u_n \end{cases}$, une suite géométrique de raison -3 et de terme initial 5.

$$\begin{aligned}
&u_0 = 5 \\
&u_1 = -3 \times u_0 = -3 \times 5 = -15 \\
&u_2 = -3 \times u_1 = -3 \times (-15) = 45 \\
&u_3 = -3 \times u_2 = -3 \times 45 = -135 \\
&...
\end{aligned}$$

A lire

Une suite géométrique est donc définie par récurrence. Heureusement, on peut obtenir une expression de son terme général très facilement.

Propriété (Expression du terme général)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de terme initial u_0 et de raison q.

- Pour tout $n \geq 0$ on a $u_n = u_0 \times q^n$
- Pour tout $n \geq 0$ et $p \geq 0$ on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Démonstration (faite en classe)

□

A lire
A nouveau en imaginant un immeuble, on peut retrouver ses deux formules facilement.
Pour passer de u_0 à u_7, imaginons notre immeuble. Pour passer du rez de chaussée au 7ième étage, on doit monter de 7 étages.
Ainsi, pour passer de u_0 à u_7, on multipliera 7 fois par la raison q.

$$u_7 = u_0 \times q^7$$

On souhaite une relation pour passer de u_3 à u_7, imaginons notre immeuble. Pour passer du 3ième étage au 7ième étage, on doit monter de 7-3=4 étages.
Ainsi, pour passer de u_3 à u_7, on multipliera 4 fois par la raison q.

$$u_7 = u_3 \times q^4$$

Questions à Choix Multiple n° 3
(u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

1. $u_0 = 3$ et $q = 4$ alors u_3 est égale à :
   a) 12 b) 48 c) 192
2. $u_1 = 5$ et $u_2 = 2$ alors q est égal à :
   a) 10 b) 0,4 c) 2,5

Propriété (Sens de variation)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de terme initial u_0 positif et de raison q.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si $q > 1$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si $0 < q < 1$

Si le terme initial u_0 est négatif, on obtient l'inverse.

Remarque
Si la raison $q < 0$ alors la suite géométrique n'est ni croissante, ni décroissante comme nous avons pu le constater avec la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -3 \times u_n \end{cases}$.

Démonstration (faite en classe)
□

Exemple

- La suite u définie par $\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = 1,2 \times u_n \end{cases}$, est une suite géométrique (de terme initial $u_0 = 1$ et) de raison $q = 1,2 > 1$.
  La suite u est donc croissante.
- La suite v définie par $v_n = -3 \times (0,8)^n$, est une suite géométrique (de terme initial $v_0 = -3$ et) de raison $q = 0,8 < 1$.
  La suite $(0,8^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, or multiplier par un nombre négatif (le terme initial $v_0 = -3$) change le sens de variation donc la suite v est croissante.

Propriété (Somme de termes consécutifs)
Pour tout réel $q \neq 1$ et pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration (faite en classe)
□

Exemple

$$1+2+2^2+2^3+...+2^{10}=\frac{1-2^{11}}{1-2}=\frac{1-2048}{-1}=2047$$

Questions à Choix Multiple n° 4

1. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2\ 000$ et de raison $q = 0,95$. La suite (u_n) est :
   a) croissante b) décroissante c) constante
2. $1+3+3^2+....+3^7$ est égal à
   a) 1 093 b) -6 563 c) 3 280

III. Les Exercices

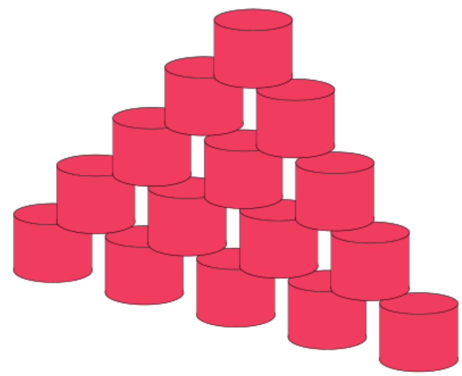
Les exercices 3 à 6 proviennent du site ***Sésamath*** *:* `http://www.sesamath.net`.
Les fiches d'exercices proviennent, elle, du site ***Maths en ligne*** *:* `http://www.mathsenligne.net`.

Exercice 1
Exprimer de deux façons la suite des nombres impairs.

Exercice 2
Exprimer de deux façons la suite des multiples de 3.

Exercice 3 (Chamboule tout)

Le joueur doit lancer une balle sur des boîtes empilées comme ci-contre. Il doit en faire tomber le maximum.
Théo dit :« J'ai fait tomber toutes les boîtes en une seule fois et il y en avait 378. »
Léa répond : « Ce n'est pas possible. Moi aussi, je les ai toutes fait tomber et j'en ai compté 380. »



Exercice 4
Parmi les suites définies ci-dessous, dire si elles sont arithmétiques ou géométriques en précisant leurs caractéristiques (premier terme et raison).
Si elles le sont, représenter graphiquement les 5 premiers termes dans un repère adapté.

$u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$v_n = \dfrac{5}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;

$w_n = (-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$x_n = 5 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$y_n = \dfrac{1}{2}n^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$z_n = 4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5
Calculer les sommes suivantes :

$S_1 = 2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{64}$;

$S_2 = 1 + 0,9 + 0,81 + 0,729 + 0,651$;

$S_3 = 1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + ... + 0,1$;

$S_4 = 100 + 10 + 1 + ... + 10^{-6}$;

$S_5 = \displaystyle\sum_{i=2}^{8} 2^i$;

$S_6 = \displaystyle\sum_{k=2}^{7} (3 \times 0,2^k)$.

Exercice 6
Un sportif de haut niveau à parier qu'il pourrait courir 5 000 km à pieds !
Le premier jour, frais et dispo, il court 50 km. Malheureusement, la fatigue s'accumulant, sa performance diminue de 1% chaque jour.
En combien de jour, s'il garde courage, il aura parcouru les 5 000 km ?

Exercice 7 (Un exercice légendaire)
La légende se situe 3 000 avant J.-C. Le roi Belkib (Inde) promit une récompense fabuleuse à qui lui proposerait une distraction qui le satisferait. Le sage Sissa lui proposa le jeu d'échec. Le souverain demanda à Sissa ce qu'il voulait comme récompense. Sissa demanda de mettre 1 grain de blé sur la première case, puis le double sur la deuxième case, sur la troisième le double de celui sur la deuxième ... et ainsi de suite jusqu'à la dernière case de l'échiquier.

1. Combien de grain de blé faudra-t-il pour récompenser Sissa ?
2. Sachant qu'un grain de blé pèse en moyenne 0,020 gramme, quelle est la masse de la récompense de Sissa ?
3. Comparer avec la production mondiale de blé qui était de 729 millions de tonnes d'après le site Wikipédia.

Exercice 8 (Le triangle de Sierpiński)
Le triangle de Sierpiński [2] est une fractale obtenue à partir d'un triangle équilatéral plein. À chaque itération, et sur chaque triangle équilatéral plein, on enlève le triangle équilatéral central passant par les milieux des côtés du triangle plein.

FIGURE 8.1 – 4 itérations du triangle de Sierpiński

1. Le nombre de triangles blancs.
   (a) Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnant le nombre de nouveaux triangles blancs qui apparaissent à la n-ième étape.
   Exprimer la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Calculer t_0, t_1, t_2, t_4 et vérifier vos résultats à partir de la figure ci-dessus.
   (b) Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnant le nombre total de triangles blancs à la n-ième étape.
   Exprimer la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Calculer T_0, T_1, T_2, T_4 et vérifier vos résultats à partir de la figure ci-dessus.
2. La surface du triangle de Sierpiński noir.
   On considère au départ un triangle équilatéral noir d'1 km^2 d'aire.
   (a) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnant l'aire des nouveaux triangles blancs qui apparaissent à la n-ième étape.
   Exprimer la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Calculer s_0, s_1, s_2, s_4.
   (b) Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnant l'aire du triangle de Sierpiński noir obtenu après à la n-ième étape.
   Exprimer la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Calculer S_0, S_1, S_2, S_4.
   (c) Après combien d'itérations, le triangle de Sierpiński noir aurait une surface inférieure ou égale à 1 mm^2 ?.

2. Wacław Franciszek Sierpiński (1882-1969) est un mathématicien polonais, connu pour ses contributions à la théorie des ensembles, la théorie des nombres, la théorie des fonctions et la topologie. Source WIKIPÉDIA.

Feuille d'exercices : Suites arithmétiques

Exercice 2A.1
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n$
a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .
b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
c. Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

Exercice 2A.2
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{n}{2}$
a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .
b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
c. Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

Exercice 2A.3
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n + 5$
a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .
b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
c. Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

Exercice 2A.4
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$
a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .
b. (u_n) est-elle une suite arithmétique ?

Exercice 2A.5
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 - 4n$
(u_n) est-elle une suite arithmétique ?

Exercice 2A.6
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 - 5n^2$
(u_n) est-elle une suite arithmétique ?

Dans tous les exercices qui suivent, (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
On rappelle la formule : $\boxed{u_n = u_0 + nr}$

Exercice 2A.7
a. On donne $u_0 = 5$ et $r = -2$.
→ Calculer u_7 .
b. On donne $u_0 = -7$ et $r = \frac{3}{2}$.
→ Calculer u_5.
c. On donne $u_0 = 7$ et $r = \frac{-5}{7}$.
→ Calculer u_7 .

Exercice 2A.8
a. On donne $u_3 = 8$ et $r = 4$.
→ Calculer u_{11} .
b. On donne $u_2 = -7$ et $r = 2$.
→ Calculer u_8.
c. On donne $u_{12} = 31$ et $r = -\frac{1}{2}$.
→ Calculer u_{17} .

Exercice 2A.9
a. On donne $u_2 = 15$ et $u_{12} = 10$.
→ Calculer r puis u_{16} .
b. On donne $u_5 = 12$ et $u_{17} = 72$.
→ Calculer r puis u_{21} .
c. On donne $u_7 = 4$ et $u_4 = 7$.
→ Calculer r puis u_{35} .

Exercice 2A.10
a. Soit (u_n) est la suite arithmétique :
- de premier terme $u_0 = 5$
- de raison $r = 2$.
→ Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

b. Soit (u_n) est la suite arithmétique :
- de premier terme $u_1 = 1$
- de raison $r = \frac{1}{3}$.
→ Calculer $u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}$.

c. Soit (u_n) est la suite arithmétique :
- de premier terme $u_5 = 8$
- de raison $r = -\frac{1}{2}$.
→ Calculer $u_5 + \ldots + u_{10}$.

Exercice 2A.11
A l'aide d'une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison, calculer la somme :
$$S = 2 + 4 + 6 + \ldots + 100$$
(c'est-à-dire la somme des 50 premiers nombres pairs).

Exercice 2A.12
En janvier, un jeune diplômé décide d'ouvrir une concession automobile. Ce premier mois, il vend 3 voitures. Ensuite, chaque mois il vendra 2 voitures de plus que le mois précédent.
a. Définir une suite arithmétique de premier terme u_1 qui permette de déterminer le nombre de voitures vendues chaque mois.
b. Combien de voitures vendra-t-il en février ? mai ? décembre ?
c. Combien de voitures aura-t-il vendu au cours de la $1^{\text{ère}}$ année ?
d. Combien de voiture aura-t-il vendu en 5 ans ?
e. Combien de voitures aura-t-il vendu au cours de la $3^{\text{ème}}$ année.

Feuille d'exercices : Suites géométriques

Exercice 3A.1

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times 2^n$

a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .

c. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

Exercice 3A.2

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .

c. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

Exercice 3A.3

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -5 \times (-1)^n$

a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .

c. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

Exercice 3A.4

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$

(u_n) est-elle une suite géométrique ?

Exercice 3A.5

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 7^n$

(u_n) est-elle une suite géométrique ?

Exercice 3A.6

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times \left(\frac{-5}{2}\right)^n$

(u_n) est-elle une suite géométrique ?

Dans tous les exercices qui suivent, (u_n) est une suite géomtrique de raison q.

On rappelle la formule : $\boxed{u_n = u_0.q^n}$

Exercice 3A.7

a. On donne $u_0 = -1$ et $q = 2$.
→ Calculer u_7 .

b. On donne $u_0 = 7$ et $q = \frac{1}{2}$.
→ Calculer u_5.

c. On donne $u_0 = 243$ et $q = \frac{-1}{3}$.
→ Calculer u_5 .

Exercice 3A.8

a. On donne $u_3 = 2$ et $q = 3$.
→ Calculer u_6 .

b. On donne $u_5 = 2$ et $q = -5$.
→ Calculer u_9 .

c. On donne $u_3 = 0{,}01$ et $q = -10$.
→ Calculer u_7.

d. On donne $u_8 = 512$ et $q = 2$.
→ Calculer u_3.

e. On donne $u_2 = \frac{3}{4}$ et $q = \frac{2}{3}$.
→ Calculer u_5 .

Exercice 3A.9

a. On donne $u_2 = 17$ et $u_3 = 51$
→ Calculer q puis u_5 .

b. On donne $u_1 = 7$ et $u_3 = 112$
→ Calculer q puis u_6 .

c. On donne $u_7 = 11$ et $u_{10} = 3\,773$
→ Calculer q puis u_{12} .

d. On donne $u_5 = 41$ et $u_9 = 25\,625$
→ Calculer q puis u_{10} .

e. On donne $u_4 = 256$ et $u_{15} = 0{,}125$
→ Calculer q puis u_{18} .

Exercice 3A.10

a. Soit (u_n) est la suite géométrique :
- de premier terme $u_0 = -3$
- de raison $q = 2$.

→ Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

b. Soit (u_n) est la suite géométrique :
- de premier terme $u_1 = 64$
- de raison $q = 0{,}5$.

→ Calculer $u_1 + \ldots + u_{12}$.

c. Soit (u_n) est la suite géométrique :
- de premier terme $u_5 = 5$
- de raison $q = 0{,}9$.

→ Calculer $u_5 + u_6 + \ldots + u_{20}$.

Exercice 3A.11

Un nageur s'apprête à traverser la manche, soit une distance de 21 km.

Pendant de la première heure, il parcourt 2,1 km. Mais à cause de la fatigue, à chaque heure il ne nage que 90% de la distance nagée pendant l'heure précédente.

1. a. Déterminer un suite géométrique u_n de premier terme $u_1 = 2{,}1$ dont chaque terme correspond à la distance nagée pendant la $n^{\text{ème}}$ heure.

b. Déterminer u_2, u_5 et u_{10}.

2. Quelle est la distance parcourue…

a. … en 10 heures ?

b. … en 20 heures ?

c. … en 100 heures ?

Feuille d'exercices : Taux

Prendre t %	Augmenter de t %	Diminuer de t %
Multiplier par $\frac{t}{100}$	Multiplier par $\left(1+\frac{t}{100}\right)$	Multiplier par $\left(1-\frac{t}{100}\right)$

Exercice 3B.1

Retrouver le coefficient multiplicateur q :

a. Prendre 5 % → $q =$

b. Augmenter de 5 % → $q =$

c. Diminuer de 5 % → $q =$

d. Prendre 20 % → $q =$

e. Augmenter de 20 % → $q =$

f. Diminuer de 20 % → $q =$

g. Augmenter de 45 % → $q =$

h. Diminuer de 15 % → $q =$

i. Augmenter de 37 % → $q =$

j. Diminuer de 52 % → $q =$

Exercice 3B.2

Retrouver la phrase (Augmenter/Diminuer) et le pourcentage.

a. $q = 0{,}97$ → .... de .... %

b. $q = 1{,}08$ → .... de .... %

c. $q = 0{,}5$ → .... de .... %

d. $q = 1{,}4$ → .... de .... %

e. $q = 2{,}5$ → .... de .... %

f. $q = 0{,}12$ → .... de .... %

g. $q = 0{,}99$ → .... de .... %

h. $q = 1{,}125$ → .... de .... %

i. $q = 0{,}71$ → .... de .... %

j. $q = 0{,}873$ → .... de .... %

Exercice 3B.3

Calculer (résultats arrondis à l'unité) :

a. 267 augmenté de 25 % :

b. 267 diminué de 41 % :

c. 395 augmenté de 102 % :

d. 2 400 augmenté de 12,5 % :

e. 4 500 diminué de 7,5 % :

Exercice 3B.4

On donne $u_0 = 500$ et $q = 1{,}05$.

a. Calculer u_4 (arrondir à l'unité).

b. Compléter la phrase « Un capital de .... € placé à .... % par an s'élèvera à .... € au bout de .... ans.

Exercice 3B.5

On donne $u_6 = 1\,559$ et $q = 1{,}0375$.

a. Calculer u_0 (arrondir à l'unité).

b. Compléter la phrase « Un capital de .... € placé à .... % par an s'élèvera à .... € au bout de .... ans.

Exercice 3B.6

On donne $u_0 = 5\,000$ et $u_3 = 5\,854$.

a. Calculer q (arrondir au millième).

b. Compléter la phrase « Un capital de .... € placé à .... % par an s'élèvera à .... € au bout de .... ans.

Exercice 3B.7

Un vendeur reçoit une prime exceptionnelle de 2 000 € qu'il décide immédiatement de placer à un taux annuel de 4%.

a. Définir une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2\,000$ qui permette de déterminer le capital à la fin de chaque année.

b. A combien s'élèvera le capital au bout de 1 an ? 2 ans ? 5 ans ? 10 ans ? 20 ans ?

Exercice 3B.8

Un salarié vient de recevoir une prime de 1 500 € qu'il veut placer pendant 8 ans. Il hésite entre :

- le placement A : 0,7 % par mois ;
- le placement B : 8,5 % par an ;
- le placement C : 38% tous les 4 ans

A l'aide d'une suite géométrique que l'on précisera :

a. Calculer le capital au bout de 8 ans avec chacun des placements.

b. Calculer le taux annuel des placements A et C.

Exercice 3B.9

Un vendeur reçoit chaque année une prime de 2 000 € qu'il place systématiquement, toujours à un taux annuel de 4%.

a. A combien s'élèvera le capital au bout de 1 an ? 2 ans ? 3 ans ?

b. A combien s'élèvera le capital au bout de 20 ans ?

IV. Exercices du BAC

BAC ES - Liban mai 2019

La Pyrale du buis est une espèce de lépidoptères de la famille des Crambidæ, originaire d'Extrême-Orient. Introduite accidentellement en Europe dans les années 2000, elle y est devenue invasive. Une étude décomptant le nombre de chenilles de Pyrale dans un camping d'Ardèche donne les estimations suivantes :

Date	01/06/18	02/06/18	03/06/18
n	0	1	2
Nombre de chenilles en centaines	97	181	258

L'exercice étudie et compare deux modélisations de l'évolution du nombre de chenilles.

Partie 1 : Modèle 1

Dans cette partie, on modélise le nombre de chenilles le n-ième jour après le 1er juin 2018 (nombre exprimé en centaines) par une suite géométrique (u_n) de raison $q = 1,63$. Ainsi $u_0 = 97$.

1. Calculer u_2. Arrondir à l'unité.
2. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
3. Justifier que la suite (u_n) est croissante.
4. Selon ce modèle, quel sera le nombre de chenilles le 13 juin 2018 ? Arrondir à la centaine.

Partie 2 : Modèle 2

Dans cette partie, on modélise le nombre de chenilles le n-ième jour après le 1er juin 2018 (nombre exprimé en centaines) par une suite (v_n) telle que :

$$v_0 = 97 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 0,91v_n + 93.$$

1. On admet que, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{3}\left(-2\ 809 \times 0,91^n + 3\ 100\right)$.
   Vérifier que cette expression vérifie bien la relation $v_{n+1} = 0,91v_n + 93$.
2. Selon ce modèle, quel sera le nombre de chenilles le 13 juin 2018 ? Arrondir à la centaine.
3. En étudiant le signe de $v_{n+1} - v_n$, montrer que la suite (v_n) est croissante.

Partie 3 : Comparaison des différents modèles

La valeur relevée dans le camping le 13 juin 2018 est de 745 centaines de chenilles.

1. À partir de ce relevé, quel modèle paraît le plus adapté ?
2. On reprend l'étude du deuxième modèle.
   (a) Résoudre l'inéquation : $v_n \geqslant 1\ 000$.
   (b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.