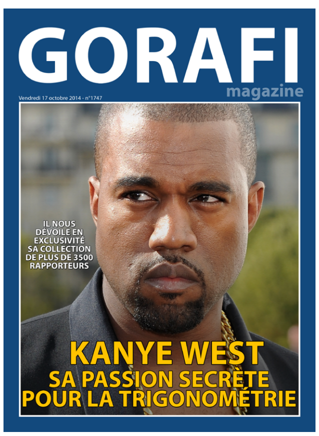
CHAPITRE 11

Trigonométrie I

Extrait du programme



Référence :
LE GORAFI

Contenus

- Cercle trigonométrique. Longueur d'arc. Radian.
- Enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique. Image d'un nombre réel.
- Cosinus et sinus d'un nombre réel. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle. Valeurs remarquables.
- Fonctions cosinus et sinus. Parité, périodicité. Courbes représentatives.

Capacités attendues

- Placer un point sur le cercle trigonométrique.
- Lier la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique.
- Traduire graphiquement la parité et la périodicité des fonctions trigonométriques.
- Par lecture du cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de x, les cosinus et sinus d'angles associés à x.

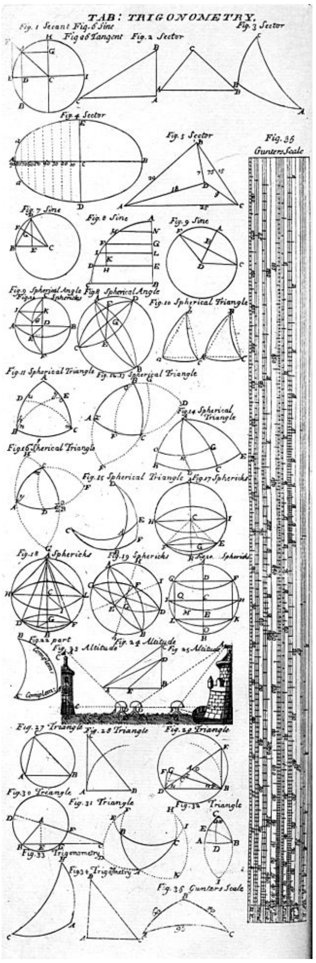
Démonstration

- Calcul de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Exemples d'algorithme

- Approximation de π par la méthode d'Archimède.

Introduction



La trigonométrie (du grec trígonos, « triangulaire », et métron, « mesure ») est une branche des mathématiques qui traite des relations entre distances et angles dans les triangles.
Historiquement, la trigonométrie était utilisée pour des calculs dans le domaine de l'astronomie. (calcul du rayon de la Terre par Ératosthène par exemple).

Dans ce chapitre nous allons commencer par définir l'unité légale de mesure des angles, le **radian**.

A la fin de ce chapitre

	Oui	Non	Qu'en pense mon professeur ?
• Je sais comment lire un angle en radian	☐	☐	☐
• Je sais placer un point sur le cercle trigonométrique	☐	☐	☐
• Je sais passer d'une mesure en degré à une mesure en radian (et inversement)	☐	☐	☐
• Je sais si deux mesures en radian d'un angle sont égales modulo 2π	☐	☐	☐

Vous retrouverez ce cours à l'adresse suivante :
`https://github.com/NaturelEtChaud/Math-premiere/tree/main/11%20Trigonom%C3%A9trie%20I`

I. Repérage sur le cercle trigonométrique

Définition On muni le plan d'un repère orthonormé (O, I, J).
Le **cercle trigonométrique** $\mathscr{C}$ de centre O est le cercle de centre O et de rayon 1, sur lequel on choisit un sens de parcours, appelé **sens direct** (c'est le sens inverse des aiguilles d'une montre).
Le repère orthonormé (O, I, J) muni de cette orientation est appelé **repère orthonormé direct**.

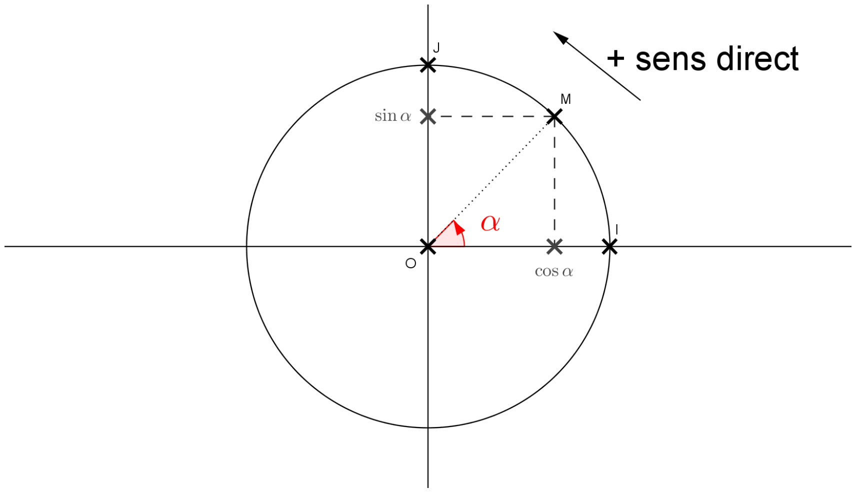


Figure 11.1 – Le cercle trigonométrique

Remarque
I et J sont deux points du cercle trigonométrique.

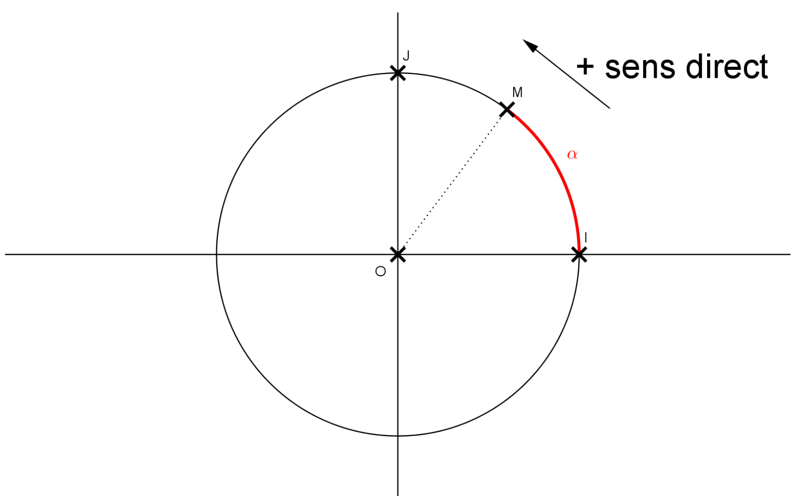


Figure 11.2 – Un point M sur le cercle trigonométrique

Prenons un point M du cercle trigonométrique. On peut le repérer par la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ ou par la longueur α de l'arc de cercle $\widehat{IM}$ en tenant compte de l'orientation choisie.

Ainsi on peut remplir le tableau suivant :

Mesure en degrés de $\widehat{IOM}$	-60	-45	-30	0	30	45	60	90	120	135	180	270	360	405	450
Longueur α de l'arc $\widehat{IM}$				0											

A lire

- Si on tient compte de l'orientation choisie, un point M du cercle trigonométrique peut donc être défini de manière unique par son angle $\widehat{IOM}$ mais aussi par la longueur de l'arc de cercle $\alpha = \widehat{IM}$.
  Autrement dit, on peut placer un point M sur le cercle trigonométrique aussi bien par la mesure d'angle que par la mesure d'un arc de cercle. Aussi on choisira cette deuxième option dans la section suivante.
- Si le point M est associé au réel α, alors il est aussi associé à tous les réels de la forme $\alpha + k \times 2\pi$, où k est un entier relatif ($k \in \mathbb{Z}$).
  (On peut effectuer plusieurs tours dans le sens positif ou dans le sens négatif).

Questions à Choix Multiple n° 1

1. Une horloge classique tourne dans le sens :
   a) direct b) indirect
2. En France, sur un rond-point, on tourne dans le sens :
   a) direct b) indirect
3. Le symbole *recyclage* tourne dans le sens :
   a) direct b) indirect

4. Le poing d'Asterix tourne dans le sens :
   a) direct b) indirect

II. Le radian

Définition Le **radian** est l'unité de mesure des angles telle que la mesure en radian d'un angle est égale à la longueur de l'arc de cercle que cet angle intercepte sur un cercle de rayon 1.

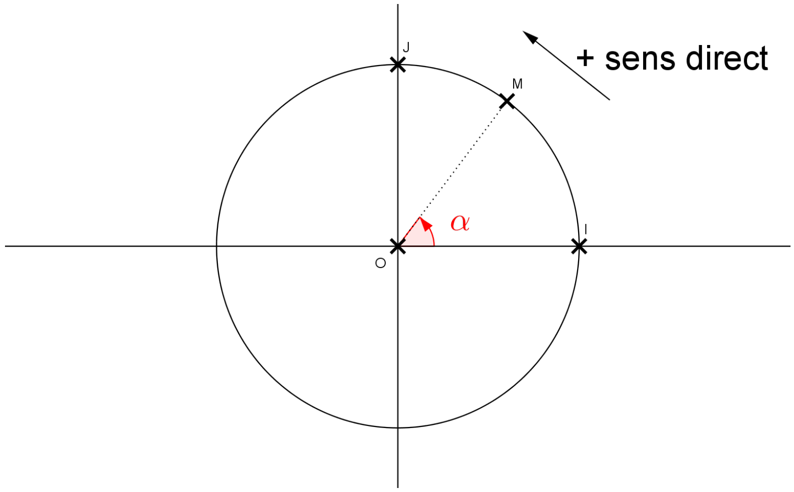


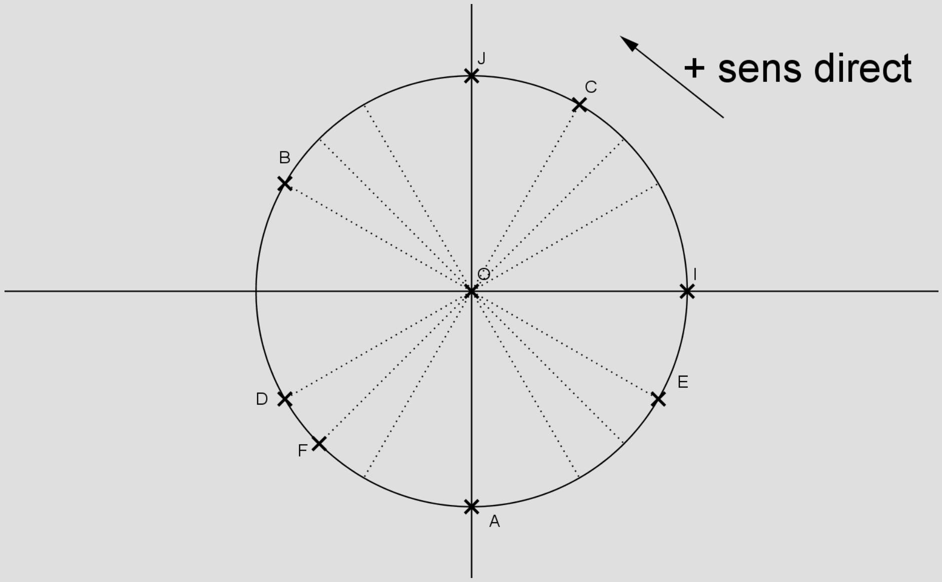
Figure 11.3 – La mesure en radian correspond à la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ sur le cercle trigonométrique

A lire
Cette unité de mesure des angles semble bien plus compliquée que le degré car le radian est tout nouveau pour vous. En réalité cette unité est bien plus pratique. En effet si vous voulez calculer la longueur d'un arc de cercle de rayon 5 cm et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ radians, il suffit de faire : Rayon $\times$ Angle $= \dfrac{5\pi}{3}$ cm.
Comment feriez vous pour un arc de cercle de rayon 5 cm et d'angle 30° ?
Le radian est donc l'unité de mesures des angles utilisée par tous les scientifiques.

Propriété Les mesures en degrés et en radians d'un angle sont proportionnelles.

Questions à Choix Multiple n° 2

Les points A, B, C, D, E et F ont été placé dans le cercle trigonométrique ci-dessous :



1. Le point A est associé à l'angle :
   a) $\frac{\pi}{2}$ b) $-\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $-\frac{\pi}{4}$
2. Le point B est associé à l'angle :
   a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $-\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) $-\frac{5\pi}{6}$
3. Le point C est associé à l'angle :
   a) $\frac{\pi}{3}$ b) $-\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $-\frac{\pi}{6}$
4. Le point associé à l'angle $-\frac{3\pi}{4}$ est :
   a) D b) E c) F

Propriété Deux nombres réels x et x' correspondent au même point sur le cercle trigonométrique si et seulement si

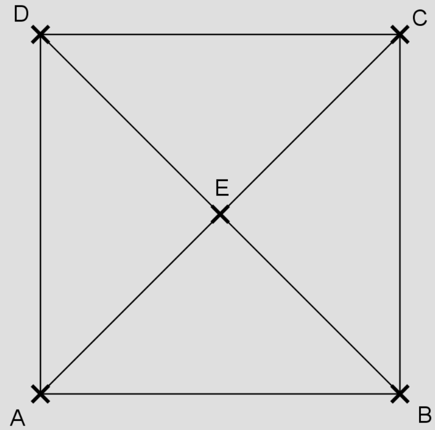
$$x = x' + k \times 2\pi, \quad \text{avec} k \in \mathbb{Z}.$$

On dit que **x et x' sont égaux à 2π près**.

Remarque

- x et x' ont bien des valeurs différentes, mais sur le cercle on constate que cela revient au même point car on a fait plusieurs fois le tour du cercle.
- On peut aussi dire que x est égale à x' modulo 2π.
  Une façon de le noter est :
  $$x \equiv x' \ [2\pi]$$

Questions à Choix Multiple n° 3
Le plan est muni d'une orientation direct.
Soit $ABCD$ un carré de centre E.



1. Une mesure de l'angle $\widehat{DCA}$ est :
   a) $\dfrac{\pi}{4}$ b) $-\dfrac{\pi}{4}$ c) $\dfrac{3\pi}{4}$ d) $-\dfrac{3\pi}{4}$
2. Une mesure de l'angle $\widehat{CBE}$ est :
   a) $\dfrac{\pi}{4}$ b) $-\dfrac{\pi}{4}$ c) $\dfrac{3\pi}{4}$ d) $-\dfrac{3\pi}{4}$
3. Une mesure de l'angle $\widehat{DEA}$ est :
   a) $\dfrac{\pi}{2}$ b) $-\dfrac{\pi}{2}$ c) $\dfrac{3\pi}{2}$ d) $-\dfrac{3\pi}{2}$

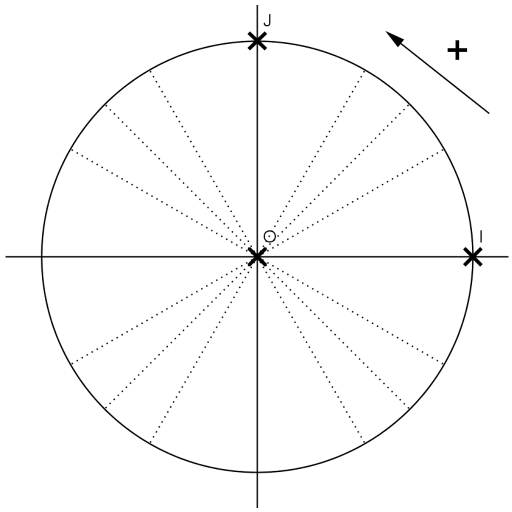
Questions à Choix Multiple n° 4

1. $\dfrac{7\pi}{4}$ et $-\dfrac{9\pi}{4}$ sont deux mesures d'un même angle orienté :
   a) Vrai b) Faux
2. Dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'angle égaux à 2π près de l'angle $\dfrac{5\pi}{3}$ est :
   a) $\dfrac{5\pi}{3}$ b) $\dfrac{2\pi}{3}$ c) $\dfrac{\pi}{3}$ d) $-\dfrac{\pi}{3}$
3. Dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'angle égaux à 2π près de l'angle $-\dfrac{11\pi}{6}$ est :
   a) $-\dfrac{11\pi}{6}$ b) $\dfrac{11\pi}{6}$ c) $\dfrac{\pi}{6}$ d) $-\dfrac{\pi}{6}$
4. Dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'angle égaux à 2π près de l'angle $-\dfrac{4\pi}{5}$ est :
   a) $-\dfrac{4\pi}{5}$ b) $\dfrac{6\pi}{5}$ c) $-\dfrac{6\pi}{5}$ d) $\dfrac{4\pi}{5}$

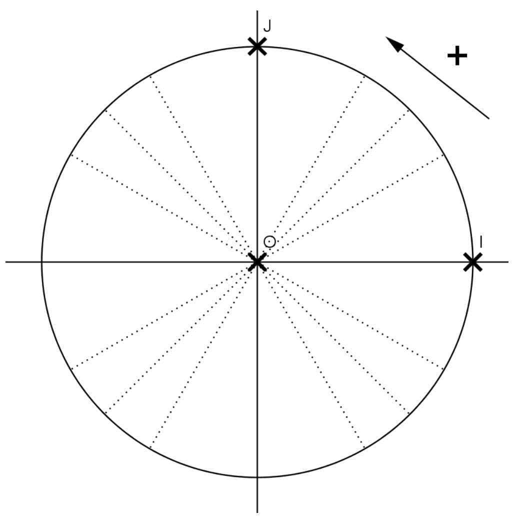
III. Exercices

La fiche d'exercices provient du site ***Maths en ligne*** *:* `http://www.mathsenligne.net`.

Exercice 1
Placer sur le cercle trigonométrique ci-dessous tous les points correspondants aux angles multiples de $\dfrac{\pi}{2}$ entre $[-2\pi; et 2\pi]$.

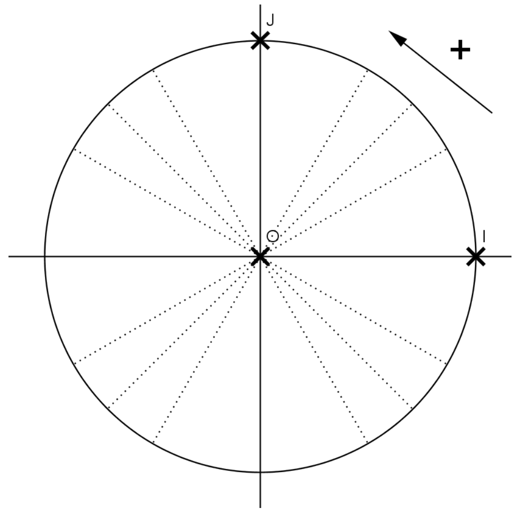


Exercice 2
Placer sur le cercle trigonométrique ci-dessous tous les points correspondants aux angles multiples de $\dfrac{\pi}{4}$ entre $[-2\pi; et 2\pi]$.



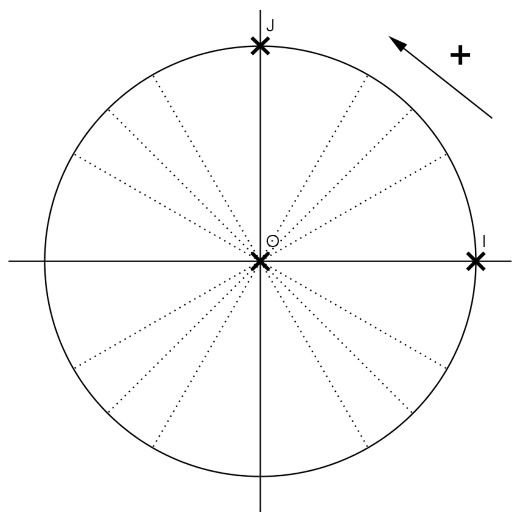
Exercice 3

Placer sur le cercle trigonométrique ci-dessous tous les points correspondants aux angles multiples de $\frac{\pi}{3}$ entre $[-2\pi; et 2\pi]$.



Exercice 4

Placer sur le cercle trigonométrique ci-dessous tous les points correspondants aux angles multiples de $\frac{\pi}{6}$ entre $[-2\pi; et 2\pi]$.



Feuille d'exercices : Le radian

Exercice 1A.1

a. A l'aide du tableau, convertir en radians les mesures données en degrés. (On donnera la valeur exacte et réduite de ces mesures)

Degrés	**180**	15	30	90	135	150
Radians	π					

b. A l'aide du tableau, convertir en degrés les mesures données en radians.

Radians	π	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
Degrés	**180**					

Exercice 1A.2

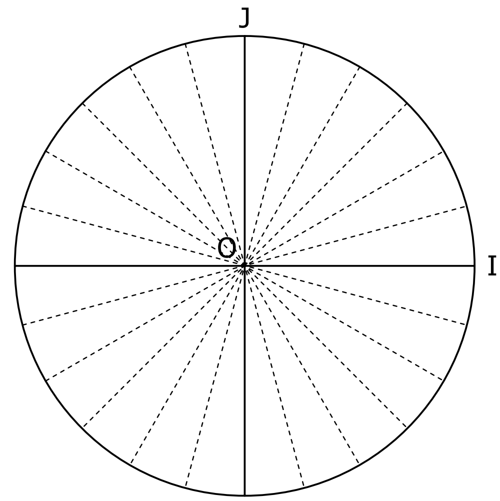
Placer les points suivants sur le cercle en fonction du réel qui leur est associé :

A (π) B $\left(\frac{\pi}{12}\right)$

C $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ D $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

E $\left(\frac{-\pi}{6}\right)$ F $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

G $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ H $\left(\frac{-3\pi}{2}\right)$



Exercice 1A.3

Associer entre eux les angles égaux :

π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	6π	$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{9\pi}{4}$	$-\frac{14\pi}{3}$
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
14π	$-\frac{8\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	3π	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$

Exercice 1A.4

Placer les points suivants sur le cercle en fonction du réel qui leur est associé :

A (5π) B $\left(\frac{-5\pi}{2}\right)$

C $\left(\frac{11\pi}{3}\right)$ D $\left(\frac{-11\pi}{4}\right)$

E $\left(\frac{13\pi}{6}\right)$ F $\left(\frac{-5\pi}{3}\right)$

G (-534π) H $\left(\frac{-99\pi}{2}\right)$