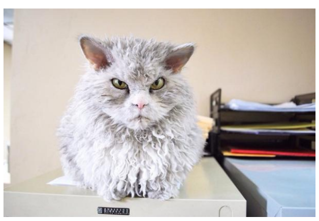
CHAPITRE 3

Vecteurs et Produit Scalaire

Extrait du programme



Référence :
Albert le chat vénère

Capacités attendues

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans le plan ou dans l'espace.
- En vue de la résolution d'un problème, calculer le produit scalaire de deux vecteurs en choisissant une méthode adaptée (en utilisant la projection orthogonale, à l'aide des coordonnées, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide de normes).
- Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème géométrique.

Approfondissements possibles

- Loi des sinus.
- Droite d'Euler d'un triangle.
- Les médianes d'un triangle concourent au centre de gravité.

Ce menu est interactif :

Vous retrouverez ce cours à l'adresse suivante :
`https://github.com/NaturelEtChaud/Math-premiere/`
`upload/main/03/%20Vecteurs/%20et/%20produit/%20scalair`

Introduction

Un **scalaire** est un nombre, par opposition avec un vecteur. Quand on parle de **produit scalaire**, il s'agit d'une sorte de multiplication de 2 vecteurs dont le résultat est un scalaire, donc un nombre.
Il existe d'autres types de produit pour les vecteurs. Par exemple le produit vectoriel, comme son nom l'indique, est une sorte de multiplication de 2 vecteurs dont le résultat est un autre vecteur que vous rencontrerez peut-être un jour ...

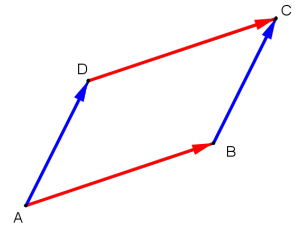
Rappels de seconde - [A lire]

a) Vecteurs égaux

Propriété
On dit que deux vecteurs sont **égaux** lorsqu'ils ont :
- la même **direction** ;
- le même **sens** ;
- la même **norme**.

Dans le parallélogramme $ABCD$ on a par exemple les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}, ...$$

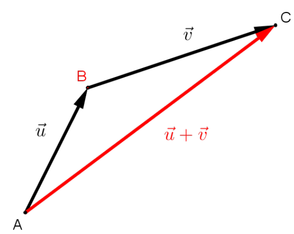


b) Relation de Chasles

Michel Chasles, né le 15 novembre 1793 et mort le 18 décembre 1880, est un mathématicien français. On lui doit d'importants travaux en géométrie projective. En dehors des sciences, Chasles manquait cruellement d'esprit critique. Il fût la victime d'un faussaire qu'il lui vendit quelques 27 000 faux documents sous la forme de correspondance de Pascal, de Galilée, d'Alexandre le Grand à Aristote, de Jules César à Vercingétorix, de César à Cléopâtre, ..., toutes rédigées dans un vieux français.

Propriété
Pour tous points A, B et C, on a :

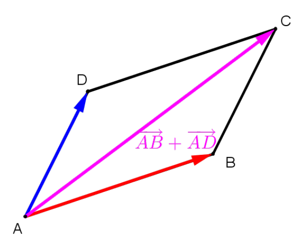
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Conséquence
- Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$, ... sont des représentants du même vecteur, le **vecteur nul** : $\vec{0}$.

Propriété - Règle du parallélogramme
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Alors on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$



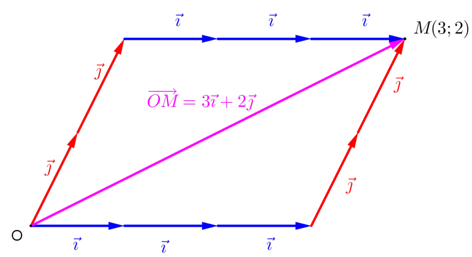
c) Vecteurs et coordonnées

Définition
Soient $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs de directions différentes.

Dans le repère vectoriel $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on dit que le vecteur $\vec{u}$ a pour **coordonnées** $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ s'il vérifie la relation

$$\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$$

Conséquence
Si un point M a pour coordonnées $M(x;y)$ alors le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.



Propriété

- Pour tous points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$
- Pour tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, sa norme, notée $\|\vec{u}\|$ est donnée par : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.
- Pour tous points A et B, la norme $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=AB$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout réel k, $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$.
- Pour tous réels a et b, pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, le vecteur $a\vec{u}+b\vec{v}$ a pour coordonnées :

$$a\vec{u}+b\vec{v}\begin{pmatrix}ax+bx'\\ay+by'\end{pmatrix}$$

d) Colinéarité de deux vecteurs

Définition
Deux vecteurs sont **colinéaires** si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel.

Exemple
1. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-9\end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{v}=-3\vec{u}$.
2. Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $\vec{0}=0\times\vec{u}$.

Propriété et définition
Dans un repère du plan, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires :

- si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles ;
- si et seulement si leurs coordonnées vérifient

$$xy'-x'y=0$$

La quantité $xy'-x'y$ est appelée le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note : $det(\vec{u},\vec{v})$.

Exemple
Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\\sqrt{5}+1\end{pmatrix}$ sont colinéaires leur déterminant s'annule bien :

$$\begin{aligned}det(\vec{u},\vec{v}) &= xy' - x'y\\ &= (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) - (-1)(-4)\\ &= \sqrt{5}^2 - 1^2 - 4\\ &= 5-5\\ &= 0\end{aligned}$$

Propriété
Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété
Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple
Les points $A(5;-2)$, $B(8;2)$ et $C(-1;-10)$ sont alignés car les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}$ sont colinéaires. En effet le déterminant des deux vecteurs s'annule bien :

$$\begin{aligned}det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) &= xy' - x'y\\ &= 3\times(-8) - 4\times(-6)\\ &= -24+24\\ &= 0\end{aligned}$$

Questions à Choix Multiple n° 1

1. A, B et C sont trois points du plan non alignés.
   (a) Si $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
   a) Vrai   b) Faux
   (b) Si $\vec{v} = 3\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{AC}$ alors $\vec{v} = 3\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC}$.
   a) Vrai   b) Faux
   (c) Si $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ alors $\vec{w} = 3\overrightarrow{BC} - 5\overrightarrow{BA}$.
   a) Vrai   b) Faux

2. (a) ABC est un triangle, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, alors :
   a) $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont non colinéaires   b) $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$
   (b) Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ a+3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si :
   a) $a = -4$ b) $a = -1$ c) $a \in \{-4; 1\}$

3. Dans un repère, on considère les points : $A(2;3), B(-1;1), C(-3;-1), D(1;-3)$ et $E(5;1)$.
   (a) Les points A, B et C sont alignés.
   a) Vrai   b) Faux
   (b) Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
   a) Vrai   b) Faux
   (c) Le quadrilatère $BCDE$ est un parallélogramme.
   a) Vrai   b) Faux
   (d) Le quadrilatère $AECD$ est un trapèze.
   a) Vrai   b) Faux

4. (a) Les points $A(3;2)$ et $B(31;21)$ sont alignés avec l'origine du repère.
   a) Vrai   b) Faux
   (b) La droite passant par le point $A(1;2)$ et qui a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ passe par le point M de coordonnées :
   a) $(-1;6)$ b) $(3;6)$ c) $(3;-2)$

I. Produit scalaire et orthogonalité

Avant de commencer à définir le produit scalaire posons quelques définitions et propriétés importantes.

a) Orthogonalité

Définition
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **orthogonaux** si et seulement si
- soit l'un des deux vecteurs est le vecteur nul,
- soit les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

b) Produit scalaire

On cherche un critère qui permet entre autre de vérifier si 2 vecteurs sont orthogonaux.

Définition
Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et qui se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ », est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Exemple
Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $BC = 4$ et $AC = 5$. Calculons le produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
En utilisant la formule avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= \vec{u} \cdot \vec{v} \\
&= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right) && \text{par la relation de Chasles} \\
&= \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - BC^2\right) && \text{par définition de la norme} \\
&= \frac{1}{2}(25 - 9 - 16) \\
&= 0
\end{aligned}$$

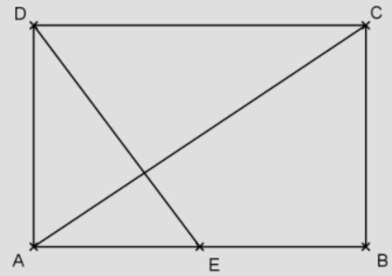
Propriété
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si leur produit scalaire est nul.
Autrement dit :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Démonstration
Comme on peut s'en douter dans l'exemple précédent, la démonstration utilise le théorème de Pythagore lorsque les deux vecteurs sont non nuls.
Sinon la démonstration est immédiate si un des deux vecteurs est nul. □

Questions à Choix Multiple n° 2

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 3$. Soit E le milieu de $[AB]$.



1. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AE} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8
2. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -16
3. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -16

II. D'autres formules du produit scalaire

Le grand nombre de formules différentes pour calculer le produit scalaire impressionne toujours l'apprenti mathématicien. C'est pourtant grâce à toutes ses formules que le produit scalaire peut bénéficier du pouvoir de la force. En fonction du problème, on pourra utiliser l'une ou l'autre de ces formules (voir parfois les 2).

a) Dans un repère orthonormé

Propriété

Dans un repère orthonormé du plan, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ vaut :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration

Faites en classe. □

Exemple

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= 2\times 5 - 3\times(-2)\\ &= 10+6\\ &= 16\end{aligned}$$

Questions à Choix Multiple n° 3

1. Dans un repère orthonormé, soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$. ALors :

   a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 13$ **b)** $\vec{u}\cdot\vec{u} = 2$ **c)** $(\vec{v}-\vec{u})\cdot(\vec{v}-\vec{u}) = 9$

2. Dans un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}m+4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\m^2\end{pmatrix}$ ont un produit scalaire nul lorsque :

   a) $m=-4$ **b)** $m=-2$ **c)** $m=4$

Avec cette nouvelle formule, on peut démontrer facilement les propriétés suivantes du produit scalaire :

Propriété

- **Symétrie du produit scalaire :** pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

- **Distributivité :** pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan et pour tout réel α, on a :

$$(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) = \alpha \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

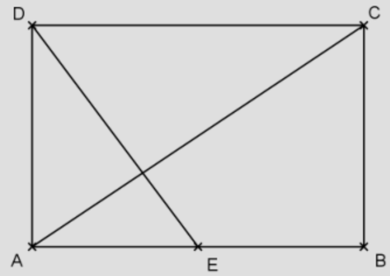
Démonstration
Faites en classe. □

Exemple
Sachant que $AB = 7$, $BC = 3$ et $AC = 5$, on veut calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{BA} \cdot (-\overrightarrow{AC}) \\
&= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(BC^2 - BA^2 - AC^2\right) \\
&= -\frac{1}{2}(9 - 49 - 25) \\
&= \frac{65}{2}
\end{aligned}$$

Questions à Choix Multiple n° 4

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 3$. Soit E le milieu de $[AB]$.



1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8
2. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8
3. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8
4. $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AB} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8

b) Avec le projeté orthogonal

Propriété : Vecteurs colinéaires

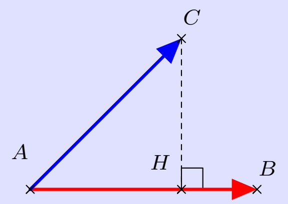
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls de même sens, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls de sens opposés, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Démonstration
Faites en classe. □

Propriété
Soient A, B et C trois points du plan avec $A \neq B$ et $A \neq C$.
Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors :

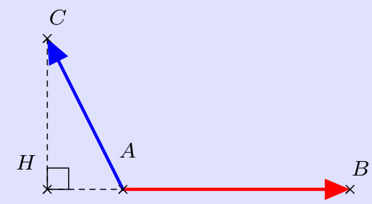
Soit H appartient à la demi-droite $[AB)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$$



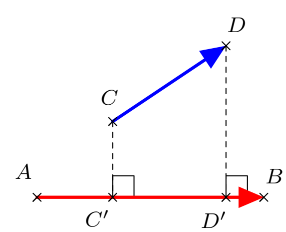
Soit H n'appartient pas à la demi-droite $[AB)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$$



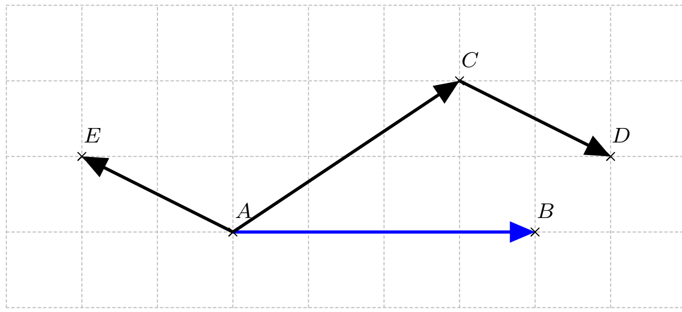
Démonstration
Faites en classe. □

Remarque
On peut en déduire que si $A \neq B$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$ où C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB).



Exemple
Sur la figure ci-dessous, $AB = 4$.

1. Déterminer graphiquement $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
2. Déterminer l'ensemble d des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 12$.

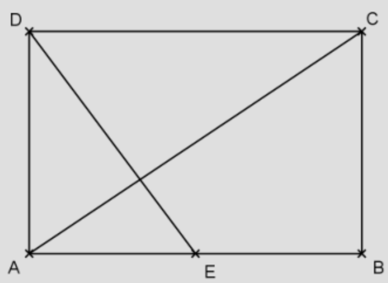


Exemple

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.
Exprimer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ de deux façons différentes.
En déduire que $CB \times CH = CA^2$.

Questions à Choix Multiple n° 5

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 3$. Soit E le milieu de $[AB]$.



1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8
2. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8
3. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8
4. $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AB} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8

c) Avec le cosinus de l'angle

Définition
L'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même origine se note $(\vec{u}, \vec{v})$.

Propriété
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
Si A, B, et C sont trois points distincts, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Démonstration
Faites en classe. □

Exemple
$AB = 3,\ AC = 5$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exemple
Soient $A(-1; 2), B(-3; 1)$ et $C(1; -3)$ dans un repère orthonormé. Calculer $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en degré à 0,1° près.

Questions à Choix Multiple n° 6

1. ABC est un triangle, tel que $AB = 3$, $AC = 2$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60°$. Alors :
   a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$ **b)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$ **c)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3$
2. DEF est un triangle tel que $DE = 4$ et $DF = \sqrt{2}$ et $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = -4$. Alors :
   a) $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DE}) = 45°$ **b)** $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DE}) = 120°$ **c)** $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DE}) = 135°$

III. Vecteurs et produit scalaire - Les QCM

Questions à Choix Multiple n° 1

1. A, B et C sont trois points du plan non alignés.
   (a) Si $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
   a) Vrai b) Faux
   (b) Si $\vec{v} = 3\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{AC}$ alors $\vec{v} = 3\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC}$.
   a) Vrai b) Faux
   (c) Si $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ alors $\vec{w} = 3\overrightarrow{BC} - 5\overrightarrow{BA}$.
   a) Vrai b) Faux

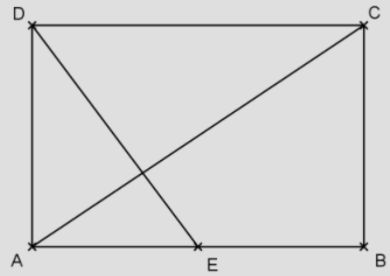
2. (a) ABC est un triangle, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, alors :
   a) $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont non colinéaires b) $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$
   (b) Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ a+3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si :
   a) $a = -4$ b) $a = -1$ c) $a \in \{-4; 1\}$

3. Dans un repère, on considère les points : $A(2;3), B(-1;1), C(-3;-1), D(1;-3)$ et $E(5;1)$.
   (a) Les points A, B et C sont alignés.
   a) Vrai b) Faux
   (b) Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
   a) Vrai b) Faux
   (c) Le quadrilatère $BCDE$ est un parallélogramme.
   a) Vrai b) Faux
   (d) Le quadrilatère $AECD$ est un trapèze.
   a) Vrai b) Faux

4. (a) Les points $A(3;2)$ et $B(31;21)$ sont alignés avec l'origine du repère.
   a) Vrai b) Faux
   (b) La droite passant par le point $A(1;2)$ et qui a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ passe par le point M de coordonnées :
   a) $(-1;6)$ b) $(3;6)$ c) $(3;-2)$

Questions à Choix Multiple n° 2

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 3$. Soit E le milieu de $[AB]$.



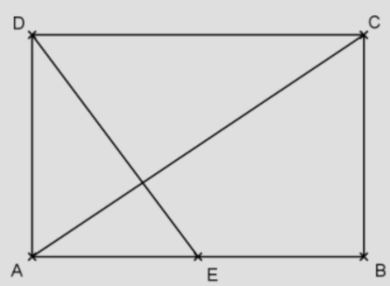
1. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AE} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8
2. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -16
3. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -16

Questions à Choix Multiple n° 3

1. Dans un repère orthonormé, soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$. ALors :
   a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 13$ **b)** $\vec{u} \cdot \vec{u} = 2$ **c)** $(\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = 9$
2. Dans un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}m+4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\m^2\end{pmatrix}$ ont un produit scalaire nul lorsque :
   a) $m = -4$ **b)** $m = -2$ **c)** $m = 4$

Questions à Choix Multiple n° 4

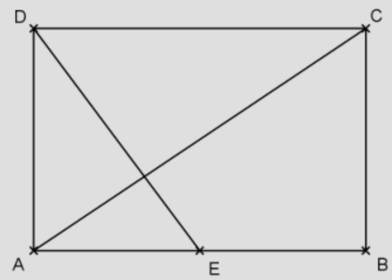
Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 3$. Soit E le milieu de $[AB]$.



1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8
2. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8
3. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8
4. $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AB} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8

Questions à Choix Multiple n° 5

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 3$. Soit E le milieu de $[AB]$.



1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8
2. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8
3. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8
4. $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{AB} =$ **a)** 0 **b)** 8 **c)** 16 **d)** -8

Questions à Choix Multiple n° 6

1. ABC est un triangle, tel que $AB = 3$, $AC = 2$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60°$. Alors :
   a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$ **b)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$ **c)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3$
2. DEF est un triangle tel que $DE = 4$ et $DF = \sqrt{2}$ et $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = -4$. Alors :
   a) $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DE}) = 45°$ **b)** $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DE}) = 120°$ **c)** $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DE}) = 135°$

IV. Vecteurs et produit scalaire - Les exercices

Feuille d'exercices du site Maths en ligne : Géométrie plane avec des vecteurs (révisions)

Exercice 4C.1

DEF est un triangle.

Soit P tel que $\overrightarrow{DP} = -3\overrightarrow{EF}$

Soit Q tel que $\overrightarrow{DQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$

→ Montrer que les points D, P et Q sont alignés.

Exercice 4C.2

ABCD est un parallélogramme.

Soit I tel que $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AD}$

Soit J tel que $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

1. a. Montrer que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BD}$

b. Montrer que $\overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{BD}$

2. En déduire que C, I et J sont alignés.

Exercice 4C.3

ABC est un triangle.

Soit M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Soit N tel que $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

→ Montrer que A, M et N sont alignés.

Exercice 4C.4

DEF est un triangle.

Soit M tel que $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF}$

Soit N tel que $\overrightarrow{DN} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{DE} + 2\overrightarrow{DF}$.

→ Montrer que D, M et N sont alignés.

Exercice 4C.5

IJKL est un parallélogramme

Soit M tel que $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IJ}$

Soit N tel que $\overrightarrow{LN} = 2\overrightarrow{JK} - 5\overrightarrow{IJ}$

1. a. Montrer que $\overrightarrow{KM} = 3\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{JK}$

b. Montrer que $\overrightarrow{KN} = -6\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{JK}$

2. Montrer que K, M et N sont alignés

Exercice 4C.6

ABC est un triangle.

Soit M tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Soit N tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$

→ Montrer que (MN) et (AC) sont parallèles.

(On pourra utiliser la relation de Chasles pour décomposer : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$)

Exercice 4C.7

ABC est un triangle.

Soit M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Soit N tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

→ Montrer que (MN) et (AC) sont parallèle.

(On pourra utiliser la relation de Chasles pour décomposer : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$)

Exercice 4C.8

ABC est un triangle.

Soit E tel que $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$

Soit F tel que $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{BC}$

→ Montrer que (AB) et (EF) sont parallèles.

(On pourra utiliser la relation de Chasles pour décomposer : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$)

Exercice 4C.9

IJK est un triangle.

Soit R tel que $\overrightarrow{JR} = 2\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{IJ}$

Soit S tel que $\overrightarrow{IS} = 2\overrightarrow{IK} - 3\overrightarrow{IJ}$

→ Montrer que (IJ) et (RS) sont parallèles.

(On pourra utiliser la relation de Chasles pour décomposer : $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IS}$)

Exercice 4C.10

ABC est un triangle.

Soit M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$

Soit N tel que $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

→ Montrer que (MN) et (AC) sont parallèle.

(On pourra utiliser la relation de Chasles pour décomposer : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$)

Exercice 4C.11

RSU est un triangle.

Soit M tel que $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{RU}$

Soit N tel que $\overrightarrow{RN} = 3\overrightarrow{RU} - \frac{1}{2}\overrightarrow{RS}$

→ Montrer que M, S et N sont alignés

(On pourra utiliser la relation de Chasles pour décomposer : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RN}$)

Feuille d'exercices du site Maths en ligne : Dans un repère (révisions)

RAPPELS

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs, dans un repère orthonormal (O, I, J)

Norme d'un vecteur $\vec{u}$

$$\boxed{\left\| \vec{u} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Critère de **colinéarité** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\boxed{xy' - x'y = 0}$$

EXERCICE 2A.1

Calculer la norme des vecteurs suivants (on donnera les valeurs exactes, éventuellement réduites).

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\vec{x}\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\vec{y}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ $\vec{z}\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2A.2

On considère les points : A(-1 ; 2) B(-3 ;-2) C(5 ; 4)

Calculer la norme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

EXERCICE 2A.3

En utilisant le critère « $xy' - x'y = 0$ » dire si les vecteurs suivants sont colinéaires :

a. $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

b. $\vec{u}\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

c. $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 21 \\ 15 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

d. $\vec{u}\begin{pmatrix} 21 \\ 28 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 15 \\ 21 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

e. $\vec{u}\begin{pmatrix} 24 \\ -18 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -16 \\ 12 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 2A.4

Soit A(-5 ; 3) B(-3 ; -1) C(1 ; 1) D(4 ; -1) E(-2 ; 2) F(-5 ; -7) G(0 ; -7)

a. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont-ils colinéaires ?

b. Les vecteurs $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont-ils colinéaires ?

c. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont-ils colinéaires ?

d. Les vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont-ils colinéaires ?

e. Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 2A.5

a. A(3 ; 2), B(7 ; 3) et C(15 ; 5) sont-ils alignés ?

b. D(-31 ; 12), E(-10 ; -3) et F(18 ; -22) sont-ils alignés ?

EXERCICE 2A.6

On donne les quatre points : I(6 ; 1) J(-6 ; -3) K(-12 ; -5) L(7 ; -1)

Ces points sont-ils alignés ?

EXERCICE 2A.7

On considère le triangle ABC tel que : A(-1 ; 2) B(-3 ;-2) C(5 ; 4)

I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC].

a. Les droites (IJ) et (BC) sont-elles parallèles ?

b. Calculer les longueurs IJ et BC.

c. Ces résultats étaient-ils prévisibles ? Pourquoi ?

Feuille d'exercices du site Maths en ligne : Définitions du produit scalaire

Exercice 3C.1

1. Déterminer $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ en utilisant la formule $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$:

a. $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 8$	**b.** $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 9$
c. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 5$	**d.** $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 4$

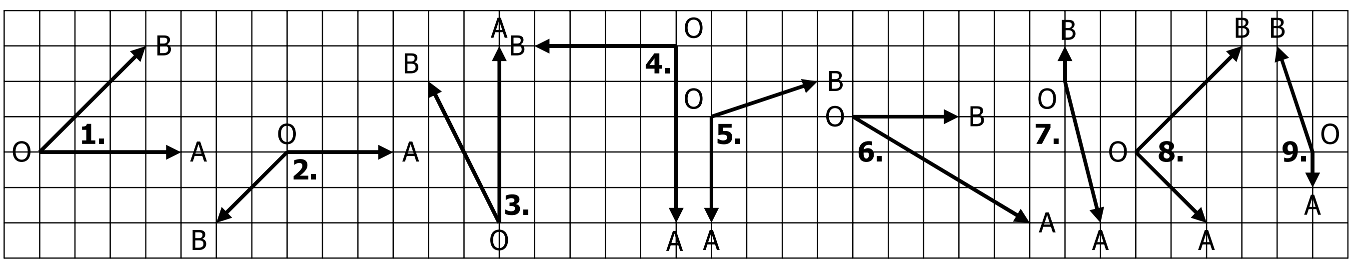
2. Soit ABC un triangle tel que AB = 5, BC = 7 et AC = 8. Calculer $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}$ puis $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$.

Exercice 3C.2

a. Déterminer $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ (l'unité de longueur est le carreau) en utilisant la formule :

$$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = \begin{cases} OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -\,OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).



1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**

b. Soit ABC un triangle isocèle en C tel que AC = BC = 6 et AB = 4. Calculer $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$

Exercice 3C.3

Déterminer $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ en utilisant la formule : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{u}\,.\,\vec{v} =$	$\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{u}\,.\,\vec{v} =$	$\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{u}\,.\,\vec{v} =$	$\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{u}\,.\,\vec{v} =$

Exercice 3C.4

1. On considère les points A(-1 ; 1), B(3 ; 0) et C(4 ; -1).

Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$

2. On considère les points A(3 ; 1), B(-1 ; 5) et C(-2 ; 3).

a. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. Calculer AB et AC.

c. Calculer de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$, puis en déduire $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ puis une valeur approchée de $\widehat{BAC}$.

Feuille d'exercices du site Maths en ligne : Produit scalaire et Trigonométrie

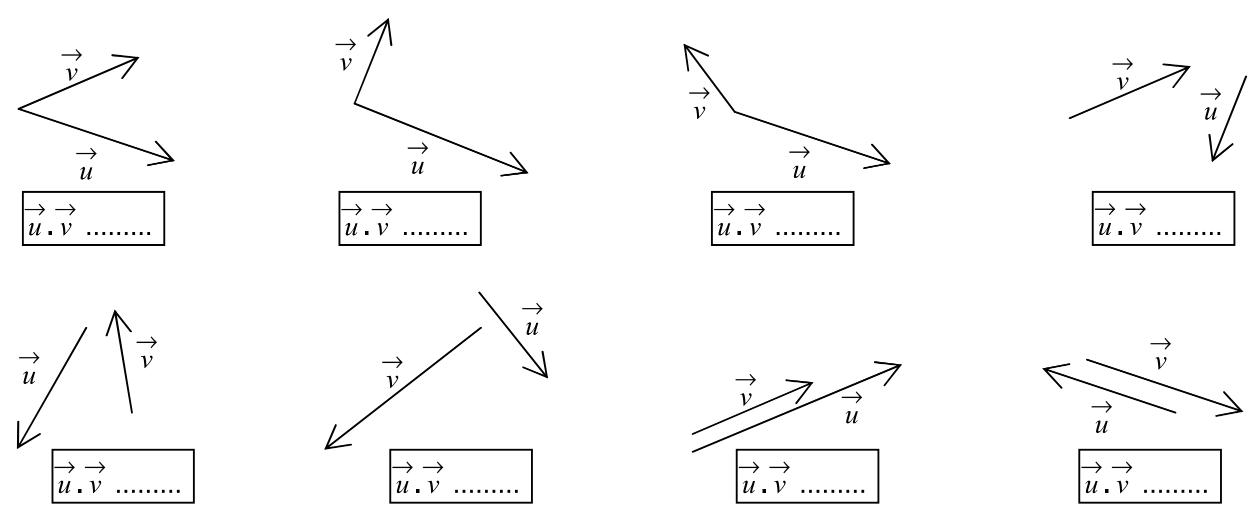
Exercice 3B.1

Déterminer le cosinus de $(\vec{u},\vec{v})$ puis l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ (ou une approximation, si c'est possible) :

$\|\vec{u}\| = 4$ $\|\vec{v}\| = 8$ $\vec{u}.\vec{v} = 32$ → $\cos(\vec{u},\vec{v}) =$ → $(\vec{u},\vec{v}) =$	$\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$ $\vec{u}.\vec{v} = 2\sqrt{3}$ → $\cos(\vec{u},\vec{v}) =$ → $(\vec{u},\vec{v}) =$
$\|\vec{u}\| = 2$ $\|\vec{v}\| = 3$ $\vec{u}.\vec{v} = -6$ → $\cos(\vec{u},\vec{v}) =$ → $(\vec{u},\vec{v}) =$	$\|\vec{u}\| = 1$ $\|\vec{v}\| = 6$ $\vec{u}.\vec{v} = -3$ → $\cos(\vec{u},\vec{v}) =$ → $(\vec{u},\vec{v}) =$
$\|\vec{u}\| = 3$ $\|\vec{v}\| = 7$ $\vec{u}.\vec{v} = 14$ → $\cos(\vec{u},\vec{v}) =$ → $(\vec{u},\vec{v}) \approx$	$\|\vec{u}\| = 6$ $\|\vec{v}\| = 1$ $\vec{u}.\vec{v} = 7$ → $\cos(\vec{u},\vec{v}) =$ → $(\vec{u},\vec{v}) =$
$\|\vec{u}\| = 2$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ $\vec{u}.\vec{v} = -3$ → $\cos(\vec{u},\vec{v}) =$ → $(\vec{u},\vec{v}) =$	$\|\vec{u}\| = 3\sqrt{2}$ $\|\vec{v}\| = 2$ $\vec{u}.\vec{v} = -6$ → $\cos(\vec{u},\vec{v}) =$ → $(\vec{u},\vec{v}) =$

Exercice 3B.2

Dans chaque cas, indiquer si le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est positif (>0), négatif (<0) ou nul (=0).



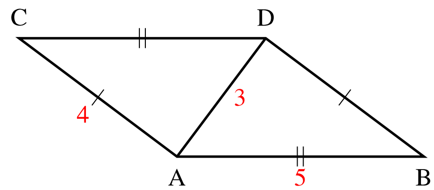
Feuille d'exercices du site Lycée d'Adultes : Définitions du produit scalaire

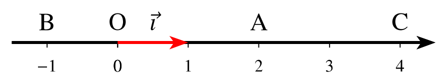
Le produit scalaire.

Sur les trois expressions du produit scalaire

Exercice 1

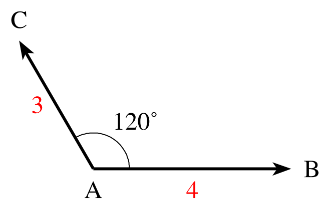
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ pour les 2 figures en choisissant la définition la mieux adaptée :

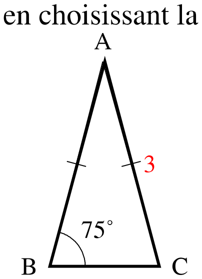


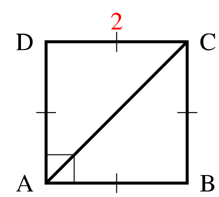


Exercice 2

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ pour les 3 figures en choisissant la définition la mieux adaptée :

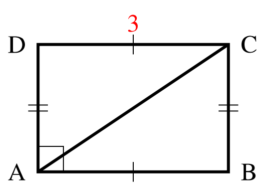


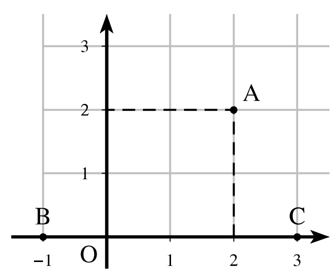




Exercice 3

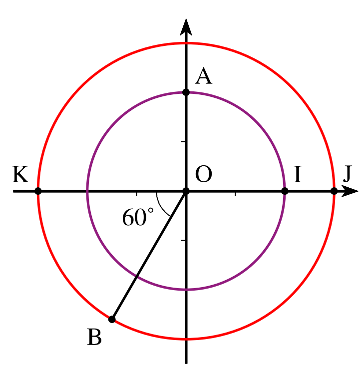
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ pour les figures suivantes en choisissant la définition la mieux adaptée :





Exercice 4

Sur la figure ci-contre, on a tracé deux cercles de centre O et de rayons respectifs 2 et 3.



1) Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ}$ c) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OB}$

b) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OK}$ d) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$

Feuille d'exercices du site Lycée d'Adultes : Définitions du produit scalaire II

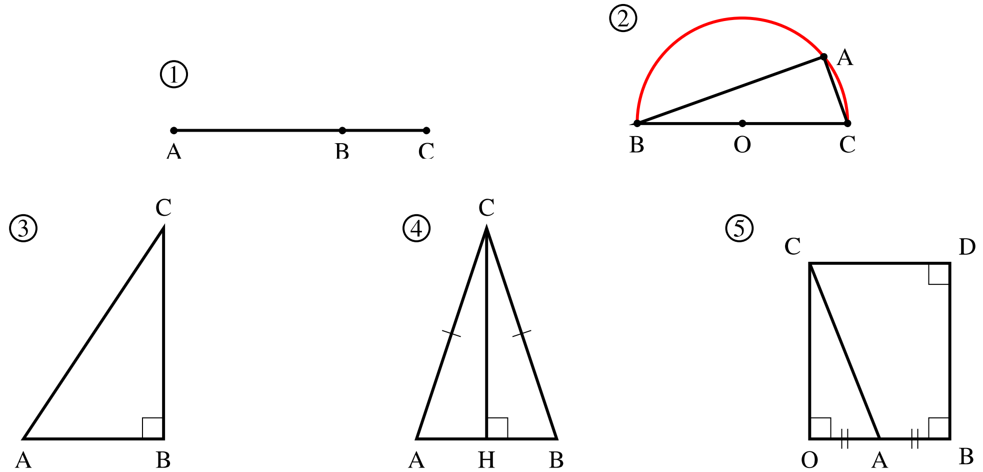
2) Prouver que dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les coordonnées de B sont $-\dfrac{3}{2}$ et $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, puis calculer :

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AI}$ b) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IJ}$ c) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BA}$

Exercice 5

À chacune des figures ci-dessous, associer, parmi les égalités suivantes, celle qui donne le bon résultat du calcul de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

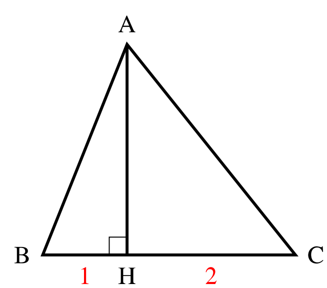
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2$
c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB^2$
d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}AB^2$
e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$



Exercice 6

Quel théorème permet d'affirmer :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = -6$$



Exercice 7

On donne trois points $A(4\,;\,1)$, $B(0\,;\,5)$ et $C(-2\,;-1)$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) En déduire que $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et donner une mesure, à un degré près, de $\widehat{BAC}$.

Feuille d'exercices du site Lycée d'Adultes :

Propriétés

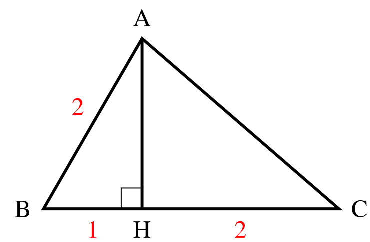
Exercice 8

En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-contre, calculer les produits scalaires suivants :

a) $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}\right) \cdot \overrightarrow{AB}$

b) $\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) \cdot \overrightarrow{AB}$

c) $\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right)$



Orthogonalité

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de m et déterminer le réel m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a) $\vec{u}\,(-5\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(m\,;-2)$

b) $\vec{u}\,(m\,;\,3-m)$ et $\vec{v}\,(2\,;-m)$

c) $\vec{u}\,(m-4\,;\,2m+1)$ et $\vec{v}\,(2m\,;\,3-m)$

Exercice 10

On donne A$(-4\,;\,1)$, B$(-1\,;\,2)$ et C$(1\,;-4)$.

1) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

2) En déduire la nature du triangle ABC

Distance

Exercice 11

On donne les trois points A$(1\,;\,3)$, B$(-1\,;\,1)$ et C$(3\,;-2)$.

1) Calculer BC, puis $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

2) On note H le projeté orthogonal de A sur (BC).

   a) Pourquoi $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC}$?

   b) Pourquoi H est-il un point du segment [BC] ?

   c) En déduire BH et HC.

Exercice 12

ABCD est un parallélogramme tel que :

$$AB = 4 \quad , \quad AD = 2 \quad \text{et} \quad \widehat{BAD} = 60^\circ$$

1) Démontrer que : $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = 28$ et $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})^2 = 12$

2) En déduire les longueur AC et BD, et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$

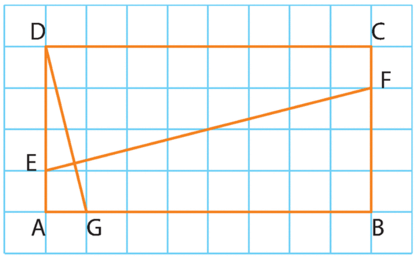
Problèmes issus du livre Sesamath :

Page 236-237 :

89 Que fait l'algorithme suivant ?

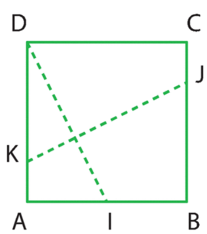
```
xu=float(input("xu="))
yu=float(input("yu="))
xv=float(input("xv="))
yv=float(input("yv="))
p=xu*xv+yu*yv
print("p=",p)
```

69 Dans un rectangle ABCD de longueur 8 et de largeur 4, on place les points E, F et G tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.



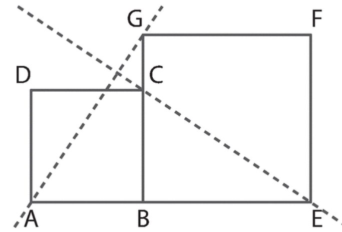
1. Dans le repère (A ; G, E), donner les coordonnées de tous les points de la figure.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DG}$.
3. Que peut-on en déduire ?

72 Dans un carré ABCD de côté 6, on construit le milieu I du segment [AB] et les points J et K tels que : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.



1. Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{DA}$.
2. En déduire que les droites (DI) et (JK) sont perpendiculaires.

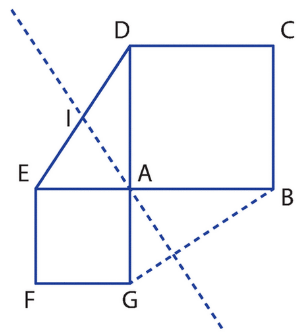
73 On considère deux carrés ABCD et BEFG disposés comme sur la figure ci-contre tel que AB = 1 et BE = *a*.



A. Avec coordonnées
1. Dans le repère (A ; B, D), donner les coordonnées de tous les points de la figure.
2. Démontrer que les droites (AG) et (CE) sont perpendiculaires.

B. Sans coordonnées
1. Développer le produit scalaire $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE})$.
2. En déduire que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$ puis que les droites (AG) et (CE) sont perpendiculaires.

75 ABCD est un carré de côté *a* et AEFG est un carré de côté *b* avec D, A et G alignés, ainsi que B, A et E comme sur la figure ci-contre. Le point I est le milieu du segment [DE].



A. Sans coordonnées
1. Justifier que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AI}$.
2. Développer le produit scalaire $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG})$.
3. En déduire que les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.

B. Avec coordonnées
1. Dans le repère (A ; B, D) donner les coordonnées des points A, I, B et G.
2. En déduire que les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.