Nom : ....Prénom :		**Classe : ....**
Nom : ....Prénom :		**Classe : ....**
Nom : ....Prénom :		**Classe : ....**

Exercice 1 (Le triangle de Sierpiński)
Le triangle de Sierpiński [1] est une fractale obtenue à partir d'un triangle équilatéral plein. À chaque itération, et sur chaque triangle équilatéral plein, on enlève le triangle équilatéral central passant par les milieux des côtés du triangle plein.

FIGURE 1 – 4 itérations du triangle de Sierpiński

1. Le nombre de triangles blancs.
   (a) Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnant le nombre de nouveaux triangles blancs qui apparaissent à la n-ième étape.
   Exprimer la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Calculer t_0, t_1, t_2, t_4 et vérifier vos résultats à partir de la figure ci-dessus.
   (b) Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnant le nombre total de triangles blancs à la n-ième étape.
   Exprimer la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Calculer T_0, T_1, T_2, T_4 et vérifier vos résultats à partir de la figure ci-dessus.
2. La surface du triangle de Sierpiński noir.
   On considère au départ un triangle équilatéral noir d'1 km^2 d'aire.
   (a) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnant l'aire des nouveaux triangles blancs qui apparaissent à la n-ième étape.
   Exprimer la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Calculer s_0, s_1, s_2, s_4.
   (b) Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnant l'aire du triangle de Sierpiński noir obtenu après à la n-ième étape.
   Exprimer la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Calculer S_0, S_1, S_2, S_4.
   (c) Après combien d'itérations, le triangle de Sierpiński noir aurait une surface inférieure ou égale à 1 mm^2 ?.

1. Wacław Franciszek Sierpiński (1882-1969) est un mathématicien polonais, connu pour ses contributions à la théorie des ensembles, la théorie des nombres, la théorie des fonctions et la topologie. Source WIKIPÉDIA.

Correction de l'exercice 1 (Le triangle de Sierpiński)

1. Le nombre de triangles blancs.

   (a) Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnant le nombre de nouveaux triangles blancs qui apparaissent à la n-ième étape.
   Exprimer la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Calculer t_0, t_1, t_2, t_4 et vérifier vos résultats à partir de la figure ci-dessus.

   $t_0 = 0$ puis à partir du rang $n = 1$, la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 3$ et de terme initial $t_1 = 1$.

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_n = t_1 \times 3^{n-1} \end{cases}$$

   et avec $t_1 = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_n = 3^{n-1} \end{cases}$$

   Vérifions :
   - $t_0 = 0$ ✓
   - $t_1 = 3^0 = 1$ ✓
   - $t_2 = 3^1 = 3$ ✓
   - $t_4 = 3^3 = 27$ ✓

   (b) Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnant le nombre total de triangles blancs à la n-ième étape.
   Exprimer la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Calculer T_0, T_1, T_2, T_4 et vérifier vos résultats à partir de la figure ci-dessus.

   On peut définir cette suite de plusieurs manières différentes et vous en avez trouvées trois.

   On peut remarquer qu'à chaque étape on rajoute les nouveaux triangles dont le nombre est donnée par la suite que nous venons d'étudier, la suite . $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Donc :

$$\begin{cases} T_0 = 0 \\ T_{n+1} = T_n + t_{n+1} \end{cases}$$

   On peut simplifier cette écriture puis que $t_{n+1} = 3^n$.
   Donc :

$$\begin{cases} T_0 = 0 \\ T_{n+1} = T_n + 3^n \end{cases}$$

   On peut aussi trouver de manière empirique une formule de récurrence qui ne dépend que du terme précédent :

$$\begin{cases} T_0 = 0 \\ T_{n+1} = 3T_n + 1 \end{cases}$$

   Vérifions pour le troisième cas :
   - $T_0 = 0$ ✓
   - $T_1 = 3 \times T_0 + 1 = 3 \times 0 + 1 = 1$ ✓
   - $T_2 = 3 \times T_1 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$ ✓
   - $T_3 = 3 \times T_2 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13$ ✓ (non demandé mais nécessaire pour la récurrence).
   - $T_4 = 3 \times T_3 + 1 = 3 \times 13 + 1 = 40$ ✓

   Enfin, il y avait une quatrième et dernière méthode qui n'a pas été proposée. T_n est le nombre totale de triangles blancs, donc T_n est la somme de tous les triangles qui sont apparues à toutes les étapes. Autrement dit :
   $T_n = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n$
   $T_n = 0 + 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1}$
   D'après la formule du cours, pour $q \neq 1$, on a : $1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
   Ici, comme $q = 3$, il n'y a pas de problème, donc :
   $T_n = \dfrac{1 - 3^n}{1 - 3} = \dfrac{1 - 3^n}{-2}$
   D'où :

$$T_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

   Vérifions pour ce quatrième cas :

- $T_0 = \dfrac{3^0 - 1}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0$ ✓
- $T_1 = \dfrac{3^1 - 1}{2} = \dfrac{3-1}{2} = 1$ ✓
- $T_2 = \dfrac{3^2 - 1}{2} = \dfrac{9-1}{2} = 4$ ✓
- $T_4 = \dfrac{3^4 - 1}{2} = \dfrac{81-1}{2} = 40$ ✓

2. La surface du triangle de Sierpiński noir.
On considère au départ un triangle équilatéral noir d'1 km² d'aire.

(a) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnant l'aire des nouveaux triangles blancs qui apparaissent à la n-ième étape.
Exprimer la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Calculer s_0, s_1, s_2, s_4.

$s_0 = 0$, puis à partir du rang $n = 1$, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$ et de terme initial $s_1 = \dfrac{1}{4}$.

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_n = s_1 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} \end{cases}$$

et avec $s_1 = \dfrac{1}{4}$, on obtient :

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n} \end{cases}$$

Calculons :
- $s_0 = 0$
- $s_1 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^1 = \dfrac{1}{4}$
- $t_2 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$
- $t_4 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^4 = \dfrac{1}{256}$

(b) Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnant l'aire du triangle de Sierpiński noir obtenu après à la n-ième étape.
Exprimer la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Calculer S_0, S_1, S_2, S_4.

Pour cette question, le plus simple est de s'inspirer du quatrième cas de la question **1.(b)** et de réutiliser les résultats du **1.(a)** et du **2.(a)**.
S_n est égale à 1 moins la somme totale de tous les petits triangles blancs. A chaque étape, il y a t_n nouveaux petits triangles blancs qui ont tous la même aire s_n. Autrement dit :
$S_n = 1 - (t_0 \times s_0 + t_1 \times s_1 + t_2 \times s_2 + t_3 \times s_3 + ... + t_n \times s_n)$
$S_n = 1 - \left(0 + 1 \times \dfrac{1}{4} + 3 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + 3^2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 + ... + 3^{n-1} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)$

D'après la formule du cours, pour $q \neq 1$, on a : $1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
On va essayer de coller au mieux à cette formule.

Reprenons la somme entre parenthèses : $E_n = 1 \times \dfrac{1}{4} + 3 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + 3^2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 + ... + 3^{n-1} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

En la multipliant par 3, on obtient : $3E_n = 3 \times \dfrac{1}{4} + 3^2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + 3^3 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 + ... + 3^n \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

En rajoutant 1, on a :

$$\begin{aligned}
3E_n+1 &= 1+3\times\frac{1}{4}+3^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+3^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+...+3^n\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\\
&= 1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+...+\left(\frac{3}{4}\right)^n\\
&= \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}\\
&= \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}}\\
&= \left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]\div\frac{1}{4}\\
&= \left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]\times\frac{4}{1}\\
&= 4-4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Donc pour la somme entre parenthèses E_n on trouve :

$$\begin{aligned}
&3E_n+1=4-4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\\
\iff &3E_n=3-4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\\
\iff &E_n=\frac{3-4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{3}\\
\iff &E_n=1-\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\\
\iff &E_n=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $S_n=1-E_n$, on en déduit :

$$S_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Calculons :

- $S_0=\left(\frac{3}{4}\right)^0=1$. C'est bien $1-s_0=1-0=1$, ✓
- $S_1=\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{3}{4}$. C'est bien $1-s_0-t_1\times s_1=1-0-1\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, ✓
- $S_2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$. C'est bien $1-s_0-t_1\times s_1-t_2\times s_2=1-0-1\times\frac{1}{4}-3\times\frac{1}{16}=\frac{9}{16}$, ✓
- $S_4=\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$. C'est bien $1-s_0-t_1\times s_1-t_2\times s_2-t_3\times s_3-t_4\times s_4=1-0-1\times\frac{1}{4}-3\times\frac{1}{16}-9\times\frac{1}{64}-27\times\frac{1}{256}=\frac{81}{256}$, ✓

(c) Après combien d'itérations, le triangle de Sierpiński noir aurait une surface inférieure ou égale à 1 mm^2 ?.
On cherche donc la valeur de n tel que $S_n \leq 1$ mm^2.
Tout d'abord, effectuons une conversion puisque S_n à l'origine est exprimée en km^2.
1 mm $= 10^{-6}$ km, donc :
1 mm^2 $= \left(10^{-6}\right)^2 = 10^{-12}$ km^2.
On cherche donc n tel que :

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 10^{-12}$$

C'est une équation que nous ne sommes pas capable de résoudre actuellement mais nous pouvons trouver malgré tout la solution.

- La première méthode consiste à tester des valeurs avec la calculatrice et ainsi de trouver de proche en proche le résultat.
- La deuxième solution consiste a programmer la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en Python :

```python
for n in range(100):
    u = (3/4)**n
    print(n, u)
```

  On peut alors lire dans la console, entre autres, les résultats suivants :
  `94 1.8020164816629136e-12`
  `95 1.3515123612471852e-12`
  `96 1.0136342709353888e-12`
  `97 7.602257032015416e-13`
  $S_n \leq 1$ mm^2 pour $n \geq 97$.
- Troisième et dernière solution, on programme à nouveau la suite en Python, mais cette fois-ci avec une boucle **tant que** et ainsi n'afficher que le résultat final.

```python
n = 0
u = 1
while u > 1e-12 :
    n = n + 1
    u = (3/4)**n
print(n , u)
```

  On aura uniquement dans la console la réponse :
  `97 7.602257032015416e-13`