

Nom :	Prénom :	Classe :
Nom :	Prénom :	Classe :
Nom :	Prénom :	Classe :

La moitié des points de ce devoir maison sera attribuée à la communication de votre travail (propreté, clarté des explications, respects des formules mathématiques, graphiques, ...)

Exercice 1 (La population du Japon)

Les tableaux ci-dessous donnent l'effectif de la population du Japon (exprimée en million), par paliers de 5 ans, de 1900 à 2010 :

n nombre d'années écoulées depuis 1900	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
Effectif de la population année 1900 + n	44,8	47	50,7	53,4	55,9	59,7	64,5	69,3	73,1	72,4	83,6	87,9

n nombre d'années écoulées depuis 1900	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
Effectif de la population année 1900 + n	92,5	98,8	104,7	111,9	116,8	120,8	123,5	125,6	126,9	127,4	128,6

- Représenter le nuage de points associé à ce tableau.
- Comment peut-on expliquer la baisse de la population de 1940 à 1945 ?
- On décide de modéliser la population entre 1950 et 1980 par une suite géométrique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $v_{50} = 83,6$ et $v_{80} = 116,8$.
 - Vérifier que $q = 1,011151$ est bien la raison de cette suite géométrique.
(On pourra calculer v_{80} à partir de v_{50} et comparer avec le résultat attendu.)
 - Utiliser ce modèle pour estimer la population du Japon en 1973.
Ce résultat vous semble-t-il acceptable ?
- Ce modèle vous semble-t-il pertinent pour estimer la population du Japon de 1980 à 2010 ?
- Selon Pierre-François Verhulst, mathématicien belge, une population donnée a tendance à se stabiliser. Autrement dit, elle a tendance à atteindre un seuil maximal qui ne peut être dépassé du fait des ressources limitées qui empêchent la population de croître davantage.
Expliquer en quoi la population actuelle du Japon donne raison à Pierre-François Verhulst.
- Justifier qu'on peut parler d'une « croissance qui décélère » de 1980 à 2010.

Exercice 2 (Jeu d'argent)

Une urne contient 8 boules blanches, 4 boules noires et 2 boules oranges indiscernables au touché. On propose le jeu suivant, on tire une boule au hasard :

- si la boule est noire, on gagne 2 € ;
- si la boule est blanche, on perd 1 € ;
- si la boule est orange, on ne gagne ni ne perd d'argent.

Ce jeu est-il équitable pour le joueur ?

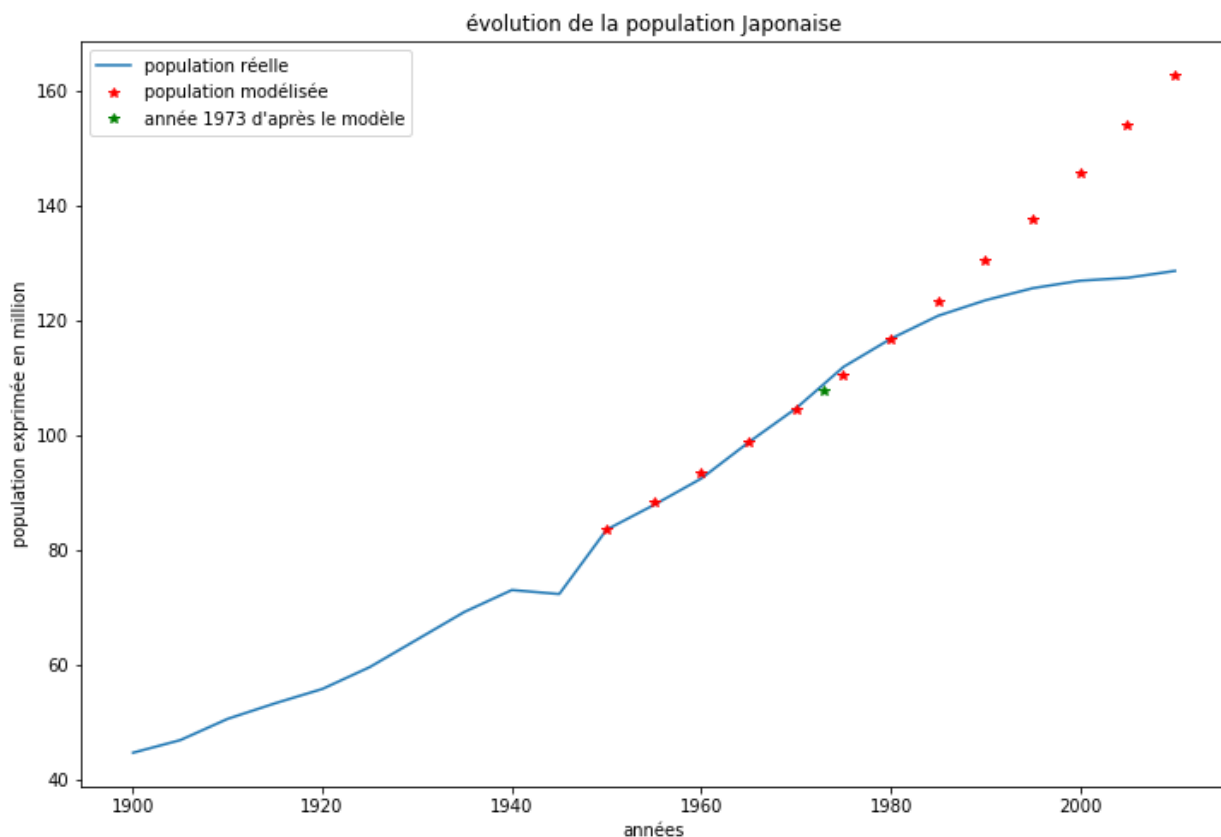
Correction de l'exercice 1 (La population du Japon)

Les tableaux ci-dessous donnent l'effectif de la population du Japon (exprimée en million), par paliers de 5 ans, de 1900 à 2010 :

n nombre d'années écoulées depuis 1900	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
Effectif de la population année 1900 + n	44,8	47	50,7	53,4	55,9	59,7	64,5	69,3	73,1	72,4	83,6	87,9

n nombre d'années écoulées depuis 1900	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
Effectif de la population année 1900 + n	92,5	98,8	104,7	111,9	116,8	120,8	123,5	125,6	126,9	127,4	128,6

1. Représenter le nuage de points associé à ce tableau.



2. Comment peut-on expliquer la baisse de la population de 1940 à 1945 ?

On peut expliquer cette baisse de la population de 1940 à 1945 par la seconde guerre mondiale et ses nombreuses pertes humaines.

3. On décide de modéliser la population entre 1950 et 1980 par une suite géométrique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $v_{50} = 83,6$ et $v_{80} = 116,8$.

- (a) Vérifier que $q = 1,011151$ est bien la raison de cette suite géométrique.
(On pourra calculer v_{80} à partir de v_{50} et comparer avec le résultat attendu.)

$$v_{80} = v_{50} \times q^{30}$$

En prenant $v_{50} = 83,6$ et $q = 1,011151$, on obtient :

$$v_{80} = 83,6 \times 1,011151^{30} \approx 116,59.$$

Comme nous trouvons dans le tableau pour l'année 1980 une population de 116,8 millions, notre modèle semble

bon. (l'erreur commise est de $116,8 - 116,59 = 0,21$ millions d'habitants soit $\frac{0,21}{116,8} \approx 0,00179 = 0,179\%$ d'erreur)

- (b) Utiliser ce modèle pour estimer la population du Japon en 1973.
Ce résultat vous semble-t-il acceptable ?

Pour estimer la population du Japon en 1973, on va calculer v_{73} .

$$v_{73} = v_{50} \times q^{23}$$

$$v_{73} = 83,6 \times 1,011151^{23} \approx 107,89.$$

En 1973, la population de Japon devrait être, d'après notre modèle de 107,89 millions d'habitants.

Dans les faits, la population était de 104,7 millions en 1970 puis de 111,9 millions en 1975. Notre estimation semble crédible.

4. Ce modèle vous semble-t-il pertinent pour estimer la population du Japon de 1980 à 2010 ?

On peut comparer les valeurs réelles avec les valeurs obtenus par ce modèle par un petit programme écrit en Python :

```
1 v50 = 83.6
2 q = 1.011151
3 for i in range(30,61,5) :
4     v = v50 * q ** i
5     print(v)
```

(à ligne 3 `range(30,61,5)` signifie que la première valeur de i sera 30, la dernière valeur sera 60 (61 borne sup exclue) et que l'on va aller de 5 en 5. Les valeurs de i seront donc 30, 35, 40, 45, 50, 55 puis 60 ce qui nous permettra bien de calculer v_{80} puis v_{85} , v_{90} , v_{95} , v_{100} , v_{105} et enfin v_{110} .)

Nous obtenons alors les résultats suivants :

n nombre d'années écoulées depuis 1900	80	85	90	95	100	105	110
Effectif de la population année 1900 + n	116,8	120,8	123,5	125,6	126,9	127,4	128,6
Estimation avec le modèle	116,6	123,24	130,27	137,7	145,55	153,85	162,62
Erreur	-0,2	2,44	6,77	12,1	18,65	26,45	34,02

On constate que l'erreur commise sur ces années devient trop important. Il faudra donc changer de modèle.

5. Selon Pierre-François Verhulst, mathématicien belge, une population donnée a tendance à se stabiliser. Autrement dit, elle a tendance à atteindre un seuil maximal qui ne peut être dépassé du fait des ressources limitées qui empêchent la population de croître davantage.

Expliquer en quoi la population actuelle du Japon donne raison à Pierre-François Verhulst.

On constate sur le graphique que l'on a tracé à la question 1 qu'effectivement l'augmentation de la population du Japon ralentit à partir de l'année 1980 et que l'on imagine qu'un seuil ne sera pas dépassé.

6. Justifier qu'on peut parler d'une « croissance qui décélère » de 1980 à 2010.

Entre 1980 et 2010, la population du Japon continue d'augmenter mais elle augmente de moins en moins vite. On peut donc parler de croissance qui décélère.

Correction de l'exercice 2 (Jeu d'argent)

Une urne contient 8 boules blanches, 4 boules noires et 2 boules oranges indiscernables au touché. On propose le jeu suivant, on tire une boule au hasard :

- si la boule est noire, on gagne 2 € ;
- si la boule est blanche, on perd 1 € ;
- si la boule est orange, on ne gagne ni ne perd d'argent.

Ce jeu est-il équitable pour le joueur ?