Colle 16 - MPSI
Dérivabilité

Exercice 1 (Question de cours)
Démontrer les théorèmes suivants :

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $a \in I$ tel que a ne soit pas une extrémité de I.
   Si f présente un extremum local en a et si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.
2. Le théorème de Rolle.
3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. $f' \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante.
4. Le théorème de la limite de la dérivée :
   si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$.

Exercice 2
Sur quelles parties de $\mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

$$x \mapsto x|x|, \qquad x \mapsto \frac{x}{|x|+1}.$$

Exercice 3
Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}, \qquad x \mapsto (x^2 - 1)\arccos(x^2).$$

Exercice 4
Calculer la dérivée n-ième de

$$x \mapsto x^2(1+x)^n, \qquad x \mapsto (x^2+1)e^x$$

Exercice 5
Calculer la dérivée n-ième de

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, \qquad x \mapsto \frac{1}{1+x}, \qquad x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$$

Exercice 6
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in]0;1[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$

Indication : on pourra utiliser le théorème de Rolle.

Exercice 7
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
Montrer que f est lipschitzienne si, et seulement si, sa dérivée est bornée.

Exercice 8
Montre à l'aide du théorème des accroissements finis que

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}.$$

Exercice 9
Etablir les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in]-1;+\infty[, \dfrac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 10

1. Soit f dérivable sur l'intervalle I, et $(a,b) \in I^2$. Montrer que si f s'annule en n points de $[a;b]$ alors f' s'annule en au moins $n-1$ points de $]a;b[$.
2. Soit P un polynôme de degré n ayant toutes ses racines réelles. Montrer que P' a aussi toutes ses racines réelles.

Correction de l'exercice 1

1.
2. On utilise le théorème précédent en un point c extremum local.
3.
4. L'énoncé est le suivant :
   Si f est continue sur I, dérivable sur $I\backslash\{a\}$ et si $\lim_{x\to a} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$.

Correction de l'exercice 2

1. $f(x) = x|x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   Par opérations, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Quand $h \to 0^+$, $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = h \to 0$
   et quand $h \to 0^-$, $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = -h \to 0$.
   f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
2. $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   Par opérations f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Quand $h \to 0$, $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{1}{|h|+1} \to 1$.
   Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

Correction de l'exercice 3

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$ est définie et continue sur $]-\infty;1]$.
   Par opérations, f est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]0;1[$.
   Quand $h \to 0^+$, $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \sqrt{1-h} \to 1$.
   Quand $h \to 0^-$, $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} \to -1$.
   f n'es par dérivable en 0 mais y admet un nombre dérivée à droite et à gauche.
   Quand $h \to 0^-$, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{\sqrt{-h-2h^2-h^3}}{h} \to -\infty$. f, n'est pas dérivable en 1, il y a une tangente verticale à son graphe en cet abscisse.
2. $f(x) = (x^2-1)\arccos x^2$ est définie et continue sur $[-1;1]$.
   Par opération f est dérivable sur $]-1;1[$.
   Quand $h \to 0^-$, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = (2+h)\arccos((1+h)^2) \to 0$. f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.
   Par parité, f est aussi dérivable en -1 et $f'(-1) = 0$.

Correction de l'exercice 4

On exploite la formule de Leibniz.

1.
$$\begin{aligned}(x^2(1+x)^n)^{(n)} &= \binom{0}{n}x^2((1+x)^n)^{(n)} + \binom{1}{n}(x^2)'((1+x)^n)^{(n-1)} + \binom{2}{n}(x^2)''((1+x)^n)^{(n-2)} \\ &= n!x^2 + 2n.n!x(1+x) + n(n-1)\frac{n!}{2}(1+x)^2\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}((x^2+1)e^x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}(x^2+1)^{(k)}(e^x)^{(n-k)} \\ &= (x^2+2nx+n(n-1)+1)e^x\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5

En calculant les dérivées successives on montre par récurrence

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{(n+1)}}.$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{(n+1)}}.$$

Enfin, comme

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$$

on a

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)} = \frac{n!}{2(1-x)^{(n+1)}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{(n+1)}}.$$

Correction de l'exercice 6

Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = ax^4 + bx^3 + x^2 - (a+b+c)x.$$

φ est dérivable et $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle pour conclure.

Correction de l'exercice 7

($\Leftarrow$) en vertu de l'inégalité des accroissements finis.

($\Rightarrow$) si f est k-lipschitzienne alors $\forall x, y \in I$ tels que $x \neq y$ on a

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq k.$$

A la limite quand $y \to x$ on obtient $|f'(x)| \leq k$. Par suite f' est bornée.

Correction de l'exercice 8

En appliquant le théorème des accroissements finis à $x \mapsto x^{1/x}$ entre n et $n+1$, on obtient

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \frac{1-c}{c^2} c^{1/c}$$

avec $c \in]n; n+1[$.

Puisque $c \sim n \to +\infty$, $\ln c \sim \ln n$ et puisque $c^{1/c} \to 1$

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}.$$

Correction de l'exercice 9

1. Soit $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ définie et de classe C^∞ sur $]-1;+\infty[$.
   $f'(x) = \dfrac{x}{1+x}$. On en déduit le tableau de variations de f qui montre que f est positive.
   Soit $g : x \mapsto \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$ définie et de classe C^∞ sur $]-1;+\infty[$.
   $g'(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$. On en déduit par le tableau de variations de g que g est positive.
2. Soit $f : x \mapsto e^x - 1 - x - \dfrac{1}{2}x^2$ définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.
   $f^{(3)}(x) = e^x > 0$. On déduit par les tableaux de variations de f'', de f' puis de f que f est positive.

Correction de l'exercice 10

1. Soit $(x_i)_{i\in[[1,n]]}$ des racines de f, telles que $a \leq x_1 < x_2 < ... < x_n \leq b$.
   Pour $i \in [[1; n-1]]$, on sait que f est dérivable sur $[a,b]$ donc sur $[x_i, x_{i+1}]$. Le théorème de Rolle sur $[x_i, x_{i+1}]$ donne l'existence de $t_i \in]x_i, x_{i+1}[\subset [a,b]$ tel que $f'(t_i) = 0$. Les t_i sont deux à deux différents, car appartenant à des intervalles deux à deux disjoints. Au final, les $(t_i)_{i\in[[1,n-1]]}$ sont $n-1$ racines de f' dans $[a,b]$.
   f' s'annule au moins $n-1$ fois dans $[a,b]$.
2. Considérons les racines réelles de P et leur ordre de multiplicité : $x_1, x_2, ..., x_p$ d'ordre de multiplicité respectif $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$.
   Comme P est à racines réelles sur $\mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = n = degP$.
   En particulier, $x_1, x_2, ..., x_p$ sont racines de P' d'ordre de multiplicité respectif $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, ..., \alpha_p - 1$: on obtient ainsi $n-p$ racines de P'.
   La fonction P s'annule en $(x_i)_{i\in[[1,p]]}$; ainsi, la démarche de la question 1) donne $p-1$ nouvelles racines de P' : $(t_i)_{i\in[[1,p-1]]}$, avec pour $i \in [[1, p-1]], t_i \in]x_i, x_{i+1}[$.
   Nous obtenons ainsi $(n-p) + (p-1) = n-1$ racines réelles de P' comptées avec leur ordre de multiplicité. Or P' est de degré $n-1$, donc possède au plus $n-1$ racines réelles. Ainsi, les racines de P' sont toutes réelles.