Colle 30 - MPSI
Séries

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Montrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge en utilisant une comparaison série-intégrale.
2. Montrer l'équivalence : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
3. Démontrer que si une série $\sum u_n$ de termes réels ou complexes converge absolument, alors la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 2

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} \qquad u_n = \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)} \qquad u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \qquad u_n = e - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad u_n = \frac{1}{n\cos^2 n} \qquad u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Exercice 3

A l'aide d'une comparaison avec une intégrale, donner la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n} \qquad \sum_{n\geq 0} a^{\sqrt{n}}, a \in]0;1[\qquad \sum_{n\geq 0} u_n, \text{ avec } u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 4

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.
Montrer que $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ est aussi convergente.

Exercice 5

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes.
Montrer que les suivantes sont aussi convergentes

$$\sum \max(u_n, v_n) \qquad \sum \sqrt{u_n v_n} \qquad \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

Exercice 6

Soient (u_n) une suite de réels positifs et (v_n) la suite déterminée par

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$$

Montrer

$$\sum u_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum v_n \text{ converge}$$

Exercice 7

Soit (u_n) ue suite décroissante réelle. On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

1. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Déterminer la limite $S_{2n} - S_n$.
2. En déduire $2nu_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. Conclure que $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Correction de l'exercice 1 (Questions de cours)

Correction de l'exercice 2

1. $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ Série divergente.
2. $u_n \sim \dfrac{e^n}{e^{2n}} \sim e^{-n}$ donc par comparaison de séries à termes positifs, la séries est convergente.
3. $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ série absolument convergente.
4. $u_n \sim \dfrac{e}{2n}$, série divergente.
5. $u_n = \exp(-n + o(n))$ donc $n^2 u_n \to 0$ série ACV.
6. $u_n \geq \dfrac{1}{n}$ donc DV.
7. $n^2 u_n = \dfrac{n^2}{(\ln n)^{\ln n}} = e^{2\ln(n) - \ln(n)\ln(\ln n)} \to 0$ donc ACV.

Correction de l'exercice 3

1. On a
$$\left(\frac{1}{x\ln x}\right)' = -\frac{\ln x + 1}{(x\ln x)^2}$$
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ est décroissante sur $]1; +\infty[$.
On en déduit
$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln n} \geq \int_2^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$
2. Notons que les termes sommés sont positifs. La fonction $x \mapsto a^{\sqrt{x}}$ est décroissante donc
$$a^{\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^{n} a^{\sqrt{x}} dx$$
puis
$$\sum_{k=0}^{n} a^{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_0^n a^{\sqrt{x}} dx = 1 + 2\int_0^{\sqrt{n}} u a^u du$$
or $\int_0^{+\infty} u a^u du$ est définie donc
$$\sum_{n\geq 0} a^{\sqrt{n}} < +\infty$$
3. Puisque $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est décroissante
$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^2}$$
donc
$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$
d'où l'on obtient : $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.
Il y a donc divergence de la série de terme général u_n.

Correction de l'exercice 4

Puisque $2ab \leq a^2 + b^2$ on a
$$\sqrt{u_n u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$$
Or $\sum u_n$ et $\sum u_{n+1}$ convergent donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ CV.

Correction de l'exercice 5
On exploite les comparaisons

$$\max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n \qquad \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n)$$

et

$$\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{u_n}{u_n + v_n} v_n \leq v_n$$

Par comparaison de série à termes positifs on peut alors conclure.

Correction de l'exercice 6
Supposons la convergence de la série $\sum u_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} (u_{2k} + u_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{2n+1} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Puisque $\sum v_n$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées, celle-ci converge.
Supposons la convergence de la série $\sum v_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty}$$

Puisque $\sum u_n$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées, celle-ci converge.
En substance, on observe aussi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} v_n$$

Correction de l'exercice 7

1. En notant S la somme de la série,
$$S_{2n} - S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} S - S = 0.$$
2. On a
$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq n u_{2n}$$
De plus $n u_{2n} \geq 0$ car la suite (u_n) décroît te tend vers 0 (car la série converge).
Par encadrement $n u_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ puis $2n u_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
3. De plus
$$0 \leq (2n+1) u_{2n+1} \leq 2n u_{2n} + u_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
donc on a aussi $(2n+1) u_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et finalement
$$n u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$