Colle 22 - MPSI
Dénombrement
Probabilité

Dénombrement

Exercice 1
Combien de mots différents peut-on faire avec les lettres des mots suivants :

$$OBJET \qquad POP \qquad RESEAU$$

Exercice 2
Un étudiant possède 6 classeurs : 3 noirs, 1 rouge, 1 blanc et 1 bleu.
S'il tient à placer les noirs les uns derrières les autres, de combien de manières peut-il ranger ses classeurs ?

Exercice 3
Pour un jeu de 52 cartes, combien de mains de 5 cartes existe-t-il ?

Exercice 4
Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen.

1. De combien de manière peut-il les choisir ?
2. Même question s'il est obligé de choisir au moins 3 des 5 premières questions.

Exercice 5
Cinq prix distincts doivent être décernés à des étudiants méritants choisis dans une classe de 30 personnes. Combien de résultats peut-on avoir si :

1. le cumul des prix n'est pas possible ;
2. le cumul est admis.

Exercice 6
Soient E un ensemble fini, F un ensemble quelconque et $f : E \to F$ une application.
Montrer que f est injective si, et seulement si,
$$\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E).$$

Exercice 7
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble finie E. Exprimer $\mathrm{Card}(A \cup B \cup C)$ en fonction des cardinaux de $A, B, C, A \cap B, B \cap C, A \cap C$ et $A \cap B \cap C$.

Exercice 8 (X MP)
Soit E un ensemble. Montrer que E est infini si, et seulement si, pour toute fonction $f : E \to E$, il existe $A \subset E$ avec $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$ telle que $f(A) \subset A$.

Exercice 9
Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.
Combien y a-t-il d'injections de E dans F ?

Exercice 10
Soient $E = \{1, ..., n\}$ et $F = \{1, ..., p\}$ avec $n \leq p \in \mathbb{N}$.
Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de E vers F ?

Exercice 11
Combien y a-t-il de relation d'ordre total sur un ensemble E à n éléments ?

Exercice 12
On trace dans un plan n droites en position générale (*i.e.* deux d'entre elles ne sont jamais parallèles ni trois d'entre elles concourantes).
Combien forme-t-on ainsi de triangles ?

Exercice 13

1. Quel est le coefficient de $a^2b^5c^3$ dans le développement de $(a + b + c)^{10}$?
2. Même question avec $a_1^{k_1} a_2^{k_2} ... a_p^{k_p}$ dans $(a_1 + a_2 + ... + a_p)^n$?

Probabilité

Exercice 14
Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{k\}$ soit proportionnelle à k.

Exercice 15
Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{1, 2, ..., k\}$ soit proportionnelle à k^2.

Exercice 16
A quelle(s) condition(s) sur $x, y \in \mathbb{R}$ existe-t-il une probabilité sur $\Omega = \{a, b, c\}$ vérifiant

$$\mathbb{P}(\{a, b\}) = x \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(\{b, c\}) = y?$$

Exercice 17
Soient A, B deux parties d'un ensemble Ω fini vérifiant

$$A \cap B \neq \emptyset, A \cap \overline{B} \neq \emptyset, \overline{A} \cap B \neq \emptyset, \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$$

A quelle condition sur $(a, b, c, d) \in]0; 1[^4$ existe-t-il une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω vérifiant

$$\mathbb{P}(A|B) = a, \mathbb{P}(A|\overline{B}) = b, \mathbb{P}(B|A) = c \text{ et } \mathbb{P}(B|\overline{A}) = d?$$

Dénombrement

Correction de l'exercice 6
Si $E=\emptyset$ alors $f(E)=\emptyset$ et l'équivalence proposée est vraie.
Sinon, on peut écrire $E=\{x_1,...,x_n\}$ avec des x_i deux à deux distincts et $n=\text{Card}E$.
Si f est injective alors
$$f(E)=\{f(x_1),...,f(x_n)\}$$
avec les $f(x_i)$ sont deux à deux distincts. On en déduit
$$\text{Card}(f(E))=n.$$
Inversement, si f est non injective alors
$$\text{Card}f(E)<n.$$

Correction de l'exercice 7
$$\text{Card}(A\cup B\cup C)=\text{Card}A+\text{Card}(B\cup C)+\text{Card}(A\cap(B\cup C))$$
donc
$$\text{Card}(A\cup B\cup C)=\text{Card}A+\text{Card}B+\text{Card}C-\text{Card}(B\cap C)-\text{Card}(A\cap B)-\text{Card}(A\cap C)+\text{Card}(A\cap B\cap C).$$

Correction de l'exercice 8
Si E est l'ensemble vide, il n'existe pas de partie A incluse dans E vérifiant $A\neq\emptyset$ et $A\neq E$.
Si E est un ensemble à 1 élément, idem.
Si E est un ensemble fini contenant au moins deux éléments, on peut indexer les éléments de E pour écrire $E=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ avec $n=\text{Card}E\geq 2$. Considérons alors l'application $f:E\to E$ définie par $f(x_1)=x_2,f(x_2)=x_3,...,f(x_{n-1})=f(x_n)$ et $f(x_n)=x_1$.
Soit une partie A de E vérifiant $f(A)\subset A$. Si A est non vide alors il existe $i\in[[1;n]]$ tel que $x_i\in A$ mais alors $f(x_i)\in A$ *i.e.* $x_{i+1}\in A$ et reprenant ce processus, on obtient $x_i,x_{i+1},...,x_n,x_1,...,x_{i-1}\in A$ et donc $A=E$.
Ainsi, si E est un ensemble fini, il existe une application $f:E\to E$ pour laquelle les seules parties A de E vérifiant $f(A)\subset A$ sont $\emptyset$ et E.
Inversement, soit E un ensemble infini et $f:E\to E$.
Soit $x\in E$ et considérons la suite des éléments $x,f(x),f^2(x),...,f^n(x),...$
S'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $f^n(x)=x$ alors la partie $A=\{x,f(x),...,f(^n(x))\}\subset E$ est non vide, distincte de E (car A finie) et vérifie $f(A)\subset A$.
Sinon, la partie $A=\{f^n(x)|n\in\mathbb{N}^*\}\subset E$ est non vide, distincte de E (car $x\notin A$) et vérifie $f(A)\subset A$.

Correction de l'exercice 9
Si $n>p$, il n'y a pas d'injections possibles.
Si $n=0$, il y a une injection : l'application vide.
Si $0<n\leq p$ alors on peut écrire $E=\{x_1,...,x_n\}$ avec les x_i deux à deux distincts.
Pour former une injection de E dans F :

- on choisit $f(x_1)$ dans F : p choix
- on choisit $f(x_2)$ dans $F-\{f(x_1)\}$: $p-1$ choix
- ...
- on choisit $f(x_n)$ dans $F-\{f(x_1),...,f(x_{n-1})\}$: $p-n+1$ choix

Au total, il y a $p\times(p-1)\times...\times(p-n+1)=\dfrac{p!}{(p-n)!}$ choix.

Correction de l'exercice 10
Une application $f:E\to F$ strictement croissante est entièrement déterminée par son image qui est une partie formée de n éléments de F. Il y a $\binom{p}{n}$ parties à n éléments dans F et donc autant d'applications strictement croissantes de E dans F.

Correction de l'exercice 11
Une relation d'ordre total sur E permet de définir une bijection de $\{1,...,n\}$ vers E et inversement.
Par suite, il y a exactement $n!$ relations d'ordre total possibles.

Correction de l'exercice 12
Notons t_n le nombre de triangles formés.
$$t_0=t_1=t_2=0.$$
Pour $n\geq 3$, former un triangle revient à choisir les trois droites définissant ses côtés : il y a $\binom{n}{3}$ possibilités.
Chacune de ses possibilités définit un véritables triangle (car il y a ni concourance, ni parallélisme) et les triangles obtenus sont deux à deux distincts. Finalement
$$t_n=\binom{n}{3}.$$

Correction de l'exercice 13

1. Dans le développement de $(a+b+c)^{10}$ on obtient un terme $a^2b^5c^3$ en choisissant deux a, cinq b et trois c.
   Il y a $\binom{10}{2}$ choix possibles pour les facteurs dont seront issues les a.
   Une fois ceux-ci choisis, il y a $\binom{8}{5}$ choix possibles pour les facteurs fournissant les b.
   Une fois ces choix faits les trois derniers facteurs fournissent les c.
   Au total
   $$\binom{10}{2}\binom{8}{5} = \frac{10!}{2!5!3!} = 2\ 520$$
   termes $a^2b^5c^3$ apparaissant lors du développement de $(a+b+c)^{10}$.
2. $$\frac{n!}{k_1!k_2!...k_p!}.$$
   si $k_1+k_2+...+k_p = n$ et 0 sinon.

Probabilité

Correction de l'exercice 14

Par hypothèse, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(\{k\}) = \alpha k$. Or par additivité

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Donc

$$\alpha = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Correction de l'exercice 15

Si $\mathbb{P}$ est une probabilité solution alors, par hypothèse, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbb{P}(\{1,2,...,k\}) = \alpha k^2.$$

En particulier, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ donne $\alpha = \dfrac{1}{n^2}$.
Aussi

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(\{1,2,...,k\}) - \mathbb{P}(\{1,2,..,k-1\}) = \frac{2k-1}{n^2}$$

Inversement, on définit bien une probabilité en posant

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{2k-1}{n^2}$$

car ces valeurs sont positives de somme égale à 1.
On vérifie aussi par additivité

$$\mathbb{P}(\{1,2,...,k\}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{n^2} = \frac{k^2}{n^2}$$

et la probabilité déterminée est bien solution.

Correction de l'exercice 16

Une probabilité solution $\mathbb{P}$ sera entièrement déterminée par les valeurs de $p = \mathbb{P}(\{a\}), q = \mathbb{P}(\{b\})$ et $r = \mathbb{P}(\{c\})$ sous les conditions

$$p,d,r \geq 0 \qquad \text{et} \qquad p+q+r = 1$$

Nous aurons $\mathbb{P}(\{a,b\}) = x$ et $\mathbb{P}(\{b,c\}) = y$ si

$$p+q = x \qquad \text{et} \qquad q+r = y$$

Le système

$$\begin{cases} p+q & = x \\ q+r & = y \\ p+q+r & = 1 \end{cases}$$

a pour solution

$$p = 1 - y, q = x + y - 1 \text{ et } r = 1 - x$$

Cette solution vérifie $p, q, r \geq 0$ si, et seulement si,

$$x \leq 1, y \leq 1 \text{ et } x + y \geq 1$$

ce qui fournit les conditions nécessaires et suffisantes que doivent respecter x et y.

Correction de l'exercice 17
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité solution. Posons

$$x = \mathbb{P}(A \cap B), y = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}), z = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \text{ et } t = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$$

On a $x, y, z, t \geq 0$ et par additivité

$$x + y + z + t = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$$

Inversement, si x, y, z, t sont quatre réels positifs de somme égale à 1, on peut déterminer une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω vérifiant les conditions ci-dessus : il suffit d'introduire un élément de chacun des ensembles disjoints $A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$, de poser la probabilité de l'événement élémentaire associé égale à x, y, z et t respectivement, puis les probabilités des autres événements élémentaires égaux à 0.
Le problème revient alors à déterminer sous quelle condition, il existe $x, y, z, t \geq 0$ de somme égale à 1 tels que

$$\mathbb{P}(A|B) = a, \mathbb{P}(A|\overline{B}) = b, \mathbb{P}(B|A) = c \text{ et } \mathbb{P}(B|\overline{A}) = d$$

Par additivité

$$\mathbb{P}(A) = x + y \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(B) = x + z$$

On a alors $\mathbb{P}(A|B) = a$ si, et seulement si, $x = a(x + z)$. De même, les autres conditions fournissent les équations

$$y = b(1 - (x + z)), x = c(x + y) \text{ et } z = (1 - (x + y))$$

ce qui nous conduit à un système linéaire de quatre équations et trois inconnues.

$$\begin{cases} (1-a)x - az & = 0 \\ bx + y + bz & = b \\ (1-c)x - cy & = 0 \\ dx + dy + z & = d \end{cases}$$

Les trois premières équations conduisent à la solution

$$x = \frac{abc}{a(1-c) + bc} \qquad y = \frac{ab(1-c)}{a(1-c) + bc} \qquad z = \frac{(1-a)bc}{a(1-c) + bc}$$

avec le dénominateur commun non nul car somme de quantités strictement positives.
La quatrième équation dud système est alors vérifiée si, et seulement si,

$$ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d)$$

La solution (x, y, z) alors obtenue vérifie $x, y, z \geq 0$ et $x + y + z \leq 1$ de sorte qu'on peut encore déterminer $t \geq 0$ tel que $x + y + z + t = 1$.
Finalement, il existe une probabilité telle que voulue si, et seulement si,

$$ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d)$$

ce qui, en divisant par $abcd$, peut encore d'énoncer

$$\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{d}\right)$$