Colle 02 - MPSI

Exercice 1 (Trigonométrie pour tous)
Énoncer les formules d'addition : $\cos(a \pm b)$ $\sin(a \pm b)$.
Énoncer les formules suivantes : $\cos a \cos b$; $\sin a \cos b$; $\sin a \sin b$.
Démontrer la formule : $\tan(a \pm b)$.

Exercice 2
Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 7y + z = 2 \\ x + 8z = 3 \\ x + 7y + 3z = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y = a \\ x + 2z = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

Exercice 3
On pose $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 2i$. Mettre sous forme algébrique :

$$\frac{1}{z_1}; \qquad z_1^2 + z_2; \qquad \frac{z_1}{z_2}; \qquad z_1^4 + z_2^2 \qquad \frac{2-2i}{i}; \qquad \frac{3-5i}{2-i}.$$

Exercice 4
Etablir :

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, |a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|.$$

Correction de l'exercice 1
Énoncer les formule d'addition : $\cos(a \pm b) \qquad \sin(a \pm b)$.

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).\end{aligned}$$

Énoncer les formules suivantes : $\cos a \cos b; \qquad \sin a \cos b; \qquad \sin a \sin b$.

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}\\ \sin a \cos b &= \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}\\ \sin a \sin b &= \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}.\end{aligned}$$

Démontrer la formule : $\tan(a \pm b)$.

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}\\ &= \frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}\\ &= \frac{\dfrac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)}+\dfrac{\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}{\dfrac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)}-\dfrac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}\\ &= \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}.\\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a+\tan(-b)}{1-\tan a\tan(-b)}\\ &= \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2
Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x+2y-z=1\\ x-y+2z=2\\ 3x-y+z=3\end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=1\\ x-y+3z=2\\ 2x-y+z=3\end{cases}$ c) $\begin{cases} x-7y+z=2\\ x+8z=3\\ x+7y+3z=4\end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z=2\\ x+y+2z=3\\ 2x+2y+z=3\end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+z=1\\ x+2y=a\\ x+2z=0\end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y+mz=m\\ x+my-z=1\\ x+y-z=1\end{cases}$

a) $S=\left\{\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right)\right\}$ b) $S=\left\{\left(\frac{5}{4};-\frac{3}{8};\frac{1}{8}\right)\right\}$ c) $S=\left\{\left(3;\frac{1}{7};0\right)\right\}$
d) $S=\{(1-y;y;1)\,,y\in\mathbb{R}\}$
e) Si $a\neq 2$ $S=\emptyset$, si a=2 $S=\{(-2z,1+z,z)\,,z\in\mathbb{R}\}$
f) Si $m\neq 1$ et $m\neq -1$ $S=\left\{\left(\frac{2m}{m+1};0;\frac{m-1}{m+1}\right)\right\}$, si $m=1$ $S=\{(1-y,y,0)\,,y\in\mathbb{R}\}$, et si $m=-1$ $S=\emptyset$.

Correction de l'exercice 3

$$\frac{1}{z_1}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i;\quad z_1^2+z_2=0;\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i;\quad z_1^4+z_2^2=-8;\quad \frac{2-2i}{i}=-2-2i;\quad \frac{3-5i}{2-i}=\frac{11}{5}-\frac{7}{5}i$$

Correction de l'exercice 4
D'une part :

$$(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|ab|$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}(|a+b| + |a-b|)^2 &= |a+b|^2 + |a-b|^2 + 2|a+b||a-b| \\ &= a\overline{a} + b\overline{b} + a\overline{b} + \overline{a}b + a\overline{a} + b\overline{b} - a\overline{b} - \overline{a}b + 2|a^2 - b^2| \\ &= 2|a|^2 + 2|b|^2 + 2|a^2 - b^2| \\ &= (|a| + |b|)^2 - 2|ab| + |a|^2 + |b|^2 + 2|a^2 - b^2| \\ &= (|a| + |b|)^2 + (|a| - |b|)^2 + 2|a^2 - b^2|\end{aligned}$$

Donc

$$(|a| + |b|)^2 \leq (|a+b| + |a-b|)^2$$

On peut alors conclure par croissance de $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$:

$$|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$$