Colle 18 - MPSI
Polynômes - Fractions rationnelles

Polynômes

Exercice 1
Résoudre dans $\mathbb{K}[X]$ les équations suivantes :

1. $Q^2 = XP^2$ d'inconnues P et Q.
2. $P \circ P = P$ d'inconnu P.
3. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ d'inconnu P.

Exercice 2 (X PC Centrale MP)
Trouver les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X^2) = P(X)P(X+1).$$

Fractions rationnelles

Exercice 3
Effectuer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}, \qquad \dfrac{2X}{X^2+1}.$
2. $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}, \qquad \dfrac{4}{(X^2+1)^2}.$
3. $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2}, \qquad \dfrac{1}{X^2+X+1}.$

Exercice 4
Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$.

Exercice 5
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que

$$\deg F' < \deg F - 1 \Rightarrow \deg F = 0.$$

Exercice 6
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

1. Soit a un zéro d'ordre $\alpha \geq 1$ de F. Montrer que a est un zéro d'ordre $\alpha - 1$ de F'.
2. Comparer les pôles de F et de F', ainsi que leur ordre de multiplicité.

Exercice 7 (Mines MP)
Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}.$$

Polynômes

Correction de l'exercice 1

1. Si (P, Q) est un couple de solution de polynômes non nuls alors $Q^2 = XP^2$ donne $2\deg Q = 1+2\deg P$ avec $\deg P; \deg Q \in \mathbb{N}$ ce qui est impossible.
   Il reste le cas où l'un des polynômes est nul, alors l'autre l'est aussi.
   Réciproquement ...
2. Si $\deg P \geq 2$ alors $\deg P \circ P = (\deg P)^2 > \deg P$ et donc P n'est pas solution.
   Sinon, $P = aX + b$ et alors
   $$\begin{aligned} &P \circ P = P \\ \Leftrightarrow &a(aX+b)+b = aX+b \end{aligned}$$
   On obtient ($a = 1$ et $b = 0$) ou ($a = 0$ et b quelconque). $P = X$ ou $P = constant$.

Correction de l'exercice 2

Le polynôme nul est solution. Soit P une solution non nulle.
Soit a une racine de P, alors a^2 l'est aussi, puis $a^4, a^8, \ldots$.
Or les racines de P sont en nombres fini, donc les a^{2^n} sont redondants. $a = 0$ ou a est une racine de l'unité.
De plus si a est racine de P alors $(a-1)$ l'est aussi. Donc $(a-1)^2$ à nouveau.
On en déduit que $a - 1 = 0$ ou $a - 1$ est racine de l'unité.
Si $a \neq 0, 1$ alors $|a| = |a-1| = 1$ d'où l'on tire $a = -j$ ou $-j^2$.
Au final, les racines possibles de P sont $0, 1 - j$ et $-j^2$.
Le polynôme P s'écrit donc :
$$P(X) = \lambda X^\alpha (X-1)^\beta (X+j)^\gamma (x+j^2)^\delta$$
avec $\lambda \neq 0, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$.
En injectant cette expression dans l'équation
$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$
on obtient
$$\lambda^2 = \lambda, \alpha = \beta, \text{ et } \gamma = \delta = 0$$
soit
$$P(x) = [X(X-1)]^\alpha.$$

Fractions rationnelles

Correction de l'exercice 3

1. $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = 1 - \dfrac{8}{X-1} + \dfrac{13}{X-2}$, $\quad \dfrac{2X}{X^2+1} = \dfrac{1}{X-i} + \dfrac{1}{X+i}$.
2. $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{5}{X-2} + \dfrac{5}{X-3}$, $\quad \dfrac{4}{(X^2+1)^2} = -\dfrac{1}{(X-i)^2} - \dfrac{i}{X-i} - \dfrac{1}{(X+i)^2} + \dfrac{i}{X+i}$.
3. $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2} = -\dfrac{1}{X^2} + \dfrac{5}{X} - \dfrac{4}{(X+1)^2} - \dfrac{5}{(X+1)}$, $\quad \dfrac{1}{X^2+X+1} = -\dfrac{i/\sqrt{3}}{X-j} + \dfrac{i/\sqrt{3}}{X-j^2}$.

Correction de l'exercice 4

Si F est solution alors $\deg F^2 = 2\deg F = 1$ avec $\deg F \in \mathbb{Z}$. C'est impossible.

Correction de l'exercice 5

Posons $F = \dfrac{A}{B}$.
Supposons $\deg F' < \deg F - 1$.
$F' = \dfrac{A'B - AB'}{B^2}$. Si A ou B sont constants c'est assez rapide.
Sinon,
$$\begin{aligned} &\deg F' < \deg F - 1 \\ \Rightarrow &\deg \frac{A'B - AB'}{B^2} < \deg \frac{A}{B} \\ \Rightarrow &\deg(A'B - AB') - 2\deg B < \deg A - \deg B - 1 \\ \Rightarrow &\deg(A'B - AB') < \deg A + \deg B - 1 \\ \Rightarrow &\deg(A'B - AB') < \deg A'B = \deg AB' \end{aligned}$$

Donc coeff$(A'B) = $ coeff(AB')
en effet, en posant $A = a_n x^n + ... + a_0$, et $B = b_m x^m + ... + b_0$ on a :
coef$(A'B) = n a_n B_m$ et coef$(AB') = m A_n B_m$ donc $n = m$. D'où $\deg A = \deg B$ puis $\deg F = 0$.

Correction de l'exercice 6
Posons $F = \dfrac{P}{Q}$.

1. Soit a zéro de multiplicité $\alpha \geq 1$. On a $P = (X-a)^\alpha \widetilde{P}$ avec $\widetilde{P}(a) \neq 0$ et $Q(a) \neq 0$.

$$F' = \frac{(X-a)^{\alpha-1}(\alpha\widetilde{P}Q + (X-a)\widetilde{P}'Q - (X-a)\widetilde{P}Q')}{Q^2}.$$

   a n'est pas racine de $\alpha\widetilde{P}Q + (X-a)\widetilde{P}'Q - (X-a)\widetilde{P}Q'$, donc a racine de F de multiplicité $\alpha - 1$ de F'.
2. Soit a un pôle de F multiplicité α. On a $P(a) \neq 0$ et $Q = (X-a)^\alpha \widetilde{Q}$ avec $\widetilde{Q}(a) \neq 0$.

$$F' = \frac{(X-a)P'\widetilde{Q} - \alpha P\widetilde{Q} - (X-a)P\widetilde{Q}'}{(X-a)^{\alpha+1}\widetilde{Q}^2}.$$

   a n'est pas racine de $(X-a)P'\widetilde{Q} - \alpha P\widetilde{Q} - (X-a)P\widetilde{Q}'$ donc a un pôle de multiplicité $\alpha+1$ de F'.

Correction de l'exercice 7 (Mines MP)
Les pôles de cette fraction rationnelle sont simples et sont les racines n-ièmes de l'unité $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_{n-1}$. Sachant que la fraction rationnelle est de degré strictement négatif, sa partie entière est nulle et sa décomposition en éléments simples cherchée s'écrit

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{X - \omega_k}.$$

La partie polaire

$$\lambda = X - a$$

d'un pôle simple en a d'une fraction rationnelle P/Q s'obtient par la relation

$$\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

En effet si $Q(X) = (X-a)R(X)$ on a $Q'(a) = R(a)$.
Ici

$$\alpha_k = \left(\frac{X^{n-1}}{(X^n-1)'}\right)(\omega_k) = \frac{1}{n}$$

et donc

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - \omega_k}.$$