Colle 01 - MPSI

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Énoncer et démontrer le résultat :
$$\sum_{1\leq k\leq n} k^2 = \text{..............................}$$
2. Énoncer et démonstration de la relation de Pascal.

3. Énoncer et démontrer la formule du binôme.

Exercice 2

1. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = 5u_n + 4 \end{cases}$ est une suite à termes positifs.
2. Démontrer par la méthode de votre choix que la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = \dfrac{u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$ est une suite à termes strictement entre 0 et 1.
3. Montrer que :
$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \qquad a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier le produit suivant :
$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(2k+1).$$
5. Montrer que pour tous entiers n et p vérifiant $1 \leq p \leq n-1$, on a :
$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$
6. Soient n et p deux entiers naturels. Calculer la somme double suivante :
$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(i+j).$$

Exercice 3

1. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = -3 \\ u_{n+1} & = 5 - 4u_n \end{cases}$ a pour expression générale $u_n = -4^{n+1} + 1$.
2. Démontrer par la méthode de votre choix que la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = \dfrac{u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$ est une suite à termes strictement entre 0 et 1.
3. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, \qquad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier le produit suivant :
$$Q_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$
5. Montrer que pour tous entiers n et$p$ vérifiant $1 \leq p \leq n-1$, on a :
$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$
6. Soient n et p deux entiers naturels. Calculer la somme double suivante :
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(i+j).$$

Exercice 4

1. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = 5u_n + 4 \end{cases}$ est une suite à termes positifs.

2. Démontrer par la méthode de votre choix que la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$ est une suite à termes strictement entre 0 et 1.

3. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, \qquad \sum_{k=m}^{n} x^k = \frac{x^m - x^{n+1}}{1 - x}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier le produit suivant :
$$I_n = \prod_{k=1}^{n} (2k^2).$$

5. Montrer que pour tous entiers n et p vérifiant $1 \leq p \leq n - 1$, on a :
$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

6. Soit n un entier naturel. Calculer la somme double suivante :
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i + j).$$

Exercice 5

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Sans effectuer de récurrence, démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 6

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre réel $a_n = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair.

Correction de l'exercice 1 (Questions de cours)

1. Énoncer et démontrer le résultat :

$$\sum_{1\leq k\leq n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   Démonstration par récurrence.

2. Énoncer et démonstration de la relation de Pascal.

$$\forall (k,n)\in\mathbb{N}^2,\quad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

   Directement à partir de la formule $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k!)}$.

3. Énoncer et démontrer la formule du binôme.

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

   Démonstration par récurrence.

Correction de l'exercice 2

1.
2. par récurrence soit inégalité à droite puis à gauche, soit par encadrement, soit en étudiant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$: l'intervalle $]0,1[$ à pour image $\left]\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right[$.
3. Montrer que :

$$\forall (a,b)\in\mathbb{C}^2,\qquad a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k.$$

   Il suffit de développer le membre de droite. Somme télescopique.

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Simplifier le produit suivant :

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}(2k+1).$$

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=1}^{n}(2k+1)\\ &= \frac{\prod_{k=1}^{2n+1}k}{\prod_{k=1}^{n}2k}\\ &= \frac{(2n+1)!}{2^n\prod_{k=1}^{n}k}\\ &= \frac{(2n+1)!}{2^n n!}\end{aligned}$$

5. Montrer que pour tous entiers n et p vérifiant $1\leq p\leq n-1$, on a :

$$\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}.$$

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}+\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!}\\
&= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}\times\frac{n-p}{n-p}+\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}\times\frac{p}{p}\\
&= \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!}+\frac{(n-1)!p}{p!(n-p)!}\\
&= \frac{(n-1)!n}{p!(n-p)!}\\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!}\\
&= \binom{n}{p}.
\end{aligned}$$

6. Soit n un entier naturel. Calculer la somme double suivante :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{p}(i+j).$$

Correction de l'exercice 3

1.
2. par récurrence soit inégalité à droite puis à gauche, soit par encadrement, soit en étudiant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$: l'intervalle $]0,1[$ à pour image $\left]\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right[$.
3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, \qquad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

En faisant passer le dénominateur à gauche et développant le produit. Somme télescopique.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier le produit suivant :

$$Q_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

$$\begin{aligned}
Q_n &= \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\\
&= \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}\\
&= \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\\
&= \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\ldots\times\frac{n+1}{n}\\
&= \frac{n+1}{n}.
\end{aligned}$$

5. Montrer que pour tous entiers n et$p$ vérifiant $1 \leq p \leq n-1$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}.$$

(voir question identique, exercice précédent)

6. Soient n et p deux entiers naturels. Calculer la somme double suivante :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(i+j).$$

Correction de l'exercice 4

1. par récurrence soit inégalité à droite puis à gauche, soit par encadrement, soit en étudiant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$: l'intervalle $]0,1[$ à pour image $\left]\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right[$.
2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, \qquad \sum_{k=m}^{n} x^k = \frac{x^m - x^{n+1}}{1-x}.$$

   En faisant passer le dénominateur à gauche et développant le produit. Somme télescopique.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier le produit suivant :

$$I_n = \prod_{k=1}^{n}(2k^2).$$

$$\begin{aligned} I_n &= \prod_{k=1}^{n}(2k^2) \\ &= 2^n\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^2 \\ &= 2^n(n!)^2. \end{aligned}$$

4. Montrer que pour tous entiers n et$p$ vérifiant $1 \leq p \leq n-1$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

   (voir question identique, exercice précédent)

5. Soit n un entier naturel. Calculer la somme double suivante :

$$\sum_{1=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j).$$

Correction de l'exercice 5

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Sans effectuer de récurrence, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (1-x)^n \geq 1 + nx.$$

Utilisation de la formule du binôme de Newton.

Correction de l'exercice 6

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre réel $a_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair.
En développant avec la formule du binôme de Newton.

Chapitre 1

à rajouter

Exercice 7
Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(i+j)$.

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2$.

Exercice 8
Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} ij$.

b) $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} ij$.

On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 9
Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)$.

Exercice 10

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, développer $\cos 3a$ en fonction de $\cos a$.
2. Soit $x \neq \pi\ [2\pi]$. Posons $t = \tan\frac{x}{2}$. Montrer que :
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Exercice 11

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, développer $\sin 3a$ en fonction de $\sin a$.
2. Soit $x \neq \pi\ [2\pi]$. Posons $t = \tan\frac{x}{2}$. Montrer que :
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Exercice 12

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, développer $\cos 4a$ en fonction de $\cos a$.
2. Soit $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Posons $t = \tan\frac{x}{2}$. Montrer que :
$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Exercice 13
Simplifier pour tout p et q réels
$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}.$$
En déduire la valeur de $\tan\frac{\pi}{24}$.

Exercice 14
Soit $x \neq 0\ [2\pi]$. Montrer en procédant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\sin(x) + \sin(2x) + ... + \sin(nx) = \frac{\sin \dfrac{(n+1)x}{2} \sin \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}.$$

Exercice 15
On désire calculer le produit $P(x) = \prod_{0 \leq k \leq n} \cos\left(2^k x\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Commencer par traiter le cas $x = 0\ [\pi]$.
2. Pour $x \neq 0\ [\pi]$, simplifier $\sin(x)P(x)$ et exprimer $P(x)$.

Correction de l'exercice 7

$$\begin{aligned}
a) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(i+j) &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} j\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} mi\right) + \left(n\sum_{j=1}^{m} j\right) \\
&= m\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{m(m+1)}{2} \\
&= \frac{mn(m+n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2+2ij+j^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 \\
&= n\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij + n\sum_{j=1}^{n} j^2 \\
&= 2n\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 \\
&= 2n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} \\
&= \frac{n^2(n+1)\left[2(2n+1)+3(n+1)\right]}{6} \\
&= \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8

$$\begin{aligned}
a) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} ij &= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} j\right) \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\left(\frac{m(m+1)}{2}\right) \\
&= \frac{mn(m+1)(n+1)}{4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b)\sum_{1\leq i<j\leq n} ij &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} ij\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} i \sum_{j=i+1}^{n} j\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)\frac{i+1+n}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(ni^2+ni+n^2i-i^3-i^2-ni^2)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}((n^2+n)i-i^3-i^2)\\
&= \frac{n^2+n}{2}\sum_{i=1}^{n-1} i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} i^3-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2\\
&= \frac{n^2+n}{2}\frac{(n-1)n}{2}-\frac{1}{2}\frac{(n-1)^2n^2}{4}-\frac{1}{2}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\
&= \frac{6(n-1)n^2(n+1)}{24}-\frac{3(n-1)^2n^2}{24}-\frac{2(n-1)n(2n-1)}{24}\\
&= \frac{(n-1)n\left[6n(n+1)-3(n-1)n-2(2n-1)\right]}{24}\\
&= \frac{(n-1)n(3n^2+5n+2)}{24}\\
&= \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 9

$$\begin{aligned}
a)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\\
&= \frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}\\
&= n+1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j+\sum_{j=i+1}^{n} i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+i(n-i)\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(i^2+i+2ni-2i^2)\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(-i^2+(2n+1)i)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(2n+1)\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10

1. Pour tout $a\in\mathbb{R}$, développer $\cos 3a$ en fonction de $\cos a$.
   $\cos 3a=\cos(2a+a)=\cos 2a\cos a-\sin 2a\sin a$

or $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et $\in 2a = 2\sin a \cos a$
$\cos 3a = 2\cos^3 a - \cos a - 2\sin^2 a \cos a$
puis $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$
$\cos 3a = 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a + 2\cos^3 a = 4\cos^3 a - 3\cos a$.

2. Soit $x \neq \pi\ [2\pi]$. Posons $t = \tan \frac{x}{2}$. Montrer que :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{1+t^2}$ donc $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Correction de l'exercice 11

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, développer $\sin 3a$ en fonction de $\sin a$. $\sin 3a = \sin(2a+a) = \sin(2a)\cos a + \cos(2a)\sin a$
or $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$ et $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$
$\sin 3a = 2\sin a \cos^2 a + \sin a - 2\sin^3 a$
puis $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$
$\sin 3a = 2\sin a - 2\sin^3 a + \sin a - 2\sin^3 a = -4\sin^3 a + 3\sin a$.

2. Soit $x \neq \pi\ [2\pi]$. Posons $t = \tan \frac{x}{2}$. Montrer que :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{1+t^2}$ donc $\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$.

Correction de l'exercice 12

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, développer $\cos 4a$ en fonction de $\cos a$.
$\cos 4a = \cos(2\times 2a) = 2\cos^2(2a) - 1 = 2\left(2\cos^2 a - 1\right)^2 - 1 = 4\cos^4 a - 4\cos^2 a + 1$.

2. Soit $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Posons $t = \tan \frac{x}{2}$. Montrer que :

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ donc $\tan x = \tan 2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1-t^2}$.

Correction de l'exercice 13

$$\begin{aligned}\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} &= \frac{-\sin \frac{p-q}{2}}{\cos \frac{p-q}{2}} \\ &= -\tan \frac{p-q}{2}\end{aligned}$$

Pour $p = \frac{\pi}{4}$ et $q = \frac{\pi}{6}$ on obtient

$$\tan \frac{\pi}{24} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

Correction de l'exercice 14
L'hérédité est obtenue par :

$$\begin{aligned}
\sin(x)+\sin(2x)+...+\sin(nx)+\sin(n+1)x &= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\sin(n+1)x \\
&= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}+\sin(n+1)x\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\left(\sin\frac{nx}{2}+2\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\left(\sin\frac{nx}{2}+\sin\frac{(n+2)x}{2}-\sin\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{(n+2)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

en utilisant $\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ avec $p=\frac{(n+2)x}{2}$ et $q=\frac{nx}{2}$.

Exercice 16
On désire calculer le produit $P(x)=\prod_{0\leq k\leq n}\cos\left(2^kx\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

1. Commencer par traiter le cas $x=0$ $[\pi]$.
   Alors $P(x)=1$.

2. Pour $x\neq 0$ $[\pi]$, simplifier $\sin(x)P(x)$ et exprimer $P(x)$.
   En exploitant successivement la formule $\sin(2a)=2\sin a\cos a$:

$$\begin{aligned}
\sin xP(x) &= \sin x\prod_{0\leq k\leq n}\cos\left(2^kx\right) \\
&= \sin x\cos x\cos 2x\cos 4x....\cos\left(2^nx\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sin 2^{n+1}x
\end{aligned}$$

   Donc

$$P(x)=\frac{\sin\left(2^{n+1}x\right)}{2^{n+1}\sin x}.$$