Colle 03 - MPSI

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Énoncer les formules d'Euler, de Moivre.
   Linéariser $\sin^5(x)$.
2. Démontrer l'inégalité triangulaire :
$$\forall (z,z') \in \mathbb{C},\ |z+z'| \leq |z| + |z'|$$
3. Énoncer les formules d'Euler, de Moivre.
   Linéariser $\cos^5(x)$.
4. Simplifier la somme
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) \text{ où } x \not\equiv 0\ [2\pi]$$
5. Simplifier la somme
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \text{ où } x \not\equiv 0\ [2\pi]$$

Exercice 2

On pose $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 2i$. Mettre sous forme algébrique :

$$\frac{1}{z_1}; \qquad z_1^2 + z_2; \qquad \frac{z_1}{z_2}; \qquad z_1^4 + z_2^2 \qquad \frac{2-2i}{i}; \qquad \frac{3-5i}{2-i}.$$

Exercice 3

1. Soient a un réel, h un réel non nul et n un entier naturel non nul, calculer : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kh)$.
2. Soient a un réel et n un entier naturel non nul, calculer : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k+1)a$.
3. Soient a un réel et n un entier naturel non nul, calculer : $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cos(ka)$.

Exercice 4

Etablir :
$$\forall a, b \in \mathbb{C}, |a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|\,.$$

Exercice 5

D'après l'inégalité triangulaire, on a pour tout z et z' dans $\mathbb{C}$: $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.
Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour obtenir l'égalité : $|z+z'| = |z| + |z'|$?

Correction de l'exercice 1

1. Formules d'Euler : $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
   Formule de Moivre : $(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$

$$\begin{aligned}
\sin^5(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 \\
&= \frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^5}{(2i)^5} \\
&= \frac{e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}}{(2i)^5} \\
&= \frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{(2i)^5} + \frac{-5e^{3ix}+5e^{-3ix}}{(2i)^5} + \frac{10e^{ix}-10e^{-ix}}{(2i)^5} \\
&= \frac{\sin(5x)}{(2i)^4} - 5\frac{\sin(3x)}{(2i)^4} + 10\frac{\sin(x)}{(2i)^4} \\
&= \frac{1}{16}\left(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)\right)
\end{aligned}$$

2. $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2Re(z\overline{z}')$. Or $Re(z\overline{z}') \leq |z\overline{z}'| = |z||z'|$ car pour tout nombre complexe $z = a+ib$

$$Re(z) \leq |Re(z)| = \sqrt{a^2}$$

   Ensuite $a^2 \leq a^2 + b^2$ car $b^2 \geq 0$.
   Par croissance de la fonction $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$$

   Finalement $Re(z) \leq |z|$.
   Donc

$$|z+z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z| + |z'|)^2$$

   Par croissance de $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$, on obtient

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|$$

3. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
   Formules d'Euler : $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
   Formule de Moivre : $(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$

$$\begin{aligned}
\cos^5(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 \\
&= \frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^5}{2^5} \\
&= \frac{e^{5ix}+5e^{3ix}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{-3ix}+e^{-5ix}}{2^5} \\
&= \frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2^5} + \frac{5e^{3ix}+5e^{-3ix}}{2^5} + \frac{10e^{ix}+10e^{-ix}}{2^5} \\
&= \frac{\cos(5x)}{2^4} + 5\frac{\cos(3x)}{2^4} + 10\frac{\cos(x)}{2^4} \\
&= \frac{1}{16}\left(\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x)\right)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sin(kx) &= \sum_{k=0}^{n} Im\left[e^{ikx}\right]\\
&= Im\left[\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right]\\
&= Im\left[\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right]\\
&= Im\left[\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{1}{2}x}}\frac{e^{-i\frac{n+1}{2}x}-e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{1}{2}x}-e^{i\frac{1}{2}x}}\right]\\
&= Im\left[e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\right]\\
&= \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) &= \sum_{k=0}^{n} Re\left[e^{ikx}\right]\\
&= Re\left[\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right]\\
&\dots\\
&= Re\left[e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\right]\\
&= \frac{\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2

$$\frac{1}{z_1}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i;\quad z_1^2+z_2=0;\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i;\quad z_1^4+z_2^2=-8;\quad \frac{2-2i}{i}=-2-2i;\quad \frac{3-5i}{2-i}=\frac{11}{5}-\frac{7}{5}i$$

Correction de l'exercice 3

1.

$$\begin{aligned}
S=\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kh) &= \sum_{k=0}^{n} Re\left[e^{i(a+kh)}\right]\\
&= Re\left[e^{ia}\sum_{k=0}^{n} e^{ikh}\right]\\
&= Re\left[e^{ia}\frac{1-e^{i(n+1)h}}{1-e^{ih}}\right]\\
&= Re\left[e^{ia}\frac{e^{i\frac{n+1}{2}h}}{e^{i\frac{1}{2}h}}\frac{e^{-i\frac{n+1}{2}h}-e^{i\frac{n+1}{2}h}}{e^{-i\frac{1}{2}h}-e^{i\frac{1}{2}h}}\right]\\
&= Re\left[e^{i\left(a+\frac{n}{2}h\right)}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}h\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}h\right)}\right]\\
&= \frac{\cos\left(a+\frac{n}{2}h\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}h\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}h\right)}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k+1)a &= \sum_{k=0}^{n} Im\left[\binom{n}{k} e^{i(k+1)a}\right] \\
&= Im\left[e^{ia} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ika}\right] \\
&= Im\left[e^{ia}(e^{ia}+1)^n\right] \\
&= Im\left[e^{ia}(e^{\frac{ia}{2}}(e^{\frac{ia}{2}}+e^{-\frac{ia}{2}}))^n\right] \\
&= Im\left[e^{ia}e^{\frac{ina}{2}}\left(2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\right)^n\right] \\
&= Im\left[e^{\frac{i(n+2)a}{2}}2^n\cos^n\left(\frac{a}{2}\right)\right] \\
&= 2^n \sin\left(\frac{i(n+2)a}{2}\right)\cos^n\left(\frac{a}{2}\right)
\end{aligned}$$

3. Si $a \not\equiv 0\ [2\pi]$

$$\begin{aligned}
S = \sum_{k=1}^{n} k\cos(ka) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{da}\left[\sin(ka)\right] \\
&= \frac{d}{da}\left[\sum_{k=1}^{n}\sin(ka)\right] \\
&= \frac{d}{da}\left[\sum_{k=0}^{n}\sin(ka)\right] \\
&= \frac{d}{da}\left[\frac{\sin\left(\frac{n}{2}a\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}a\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}a\right)}\right] \\
&= \frac{\left[\frac{n}{2}\cos\left(\frac{n}{2}a\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}a\right)+\sin\left(\frac{n}{2}a\right)\frac{n+1}{2}\cos\left(\frac{n+1}{2}a\right)\right]\sin\left(\frac{1}{2}a\right)-\sin\left(\frac{n}{2}a\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}a\right)\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}a\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}a\right)} \\
&= \frac{\frac{n}{2}\left[\cos\left(\frac{n}{2}a\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}a\right)+\sin\left(\frac{n}{2}a\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}a\right)\right]\sin\left(\frac{1}{2}a\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n}{2}a\right)\left[\cos\left(\frac{n+1}{2}a\right)\sin\left(\frac{1}{2}a\right)-\sin\left(\frac{n+1}{2}a\right)\cos\left(\frac{1}{2}a\right.\right.}{\sin^2\left(\frac{1}{2}a\right)} \\
&= \frac{\frac{n}{2}\sin\left(\frac{n}{2}a+\frac{n+1}{2}a\right)\sin\left(\frac{1}{2}a\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n}{2}a\right)\sin\left(\frac{1}{2}a-\frac{n+1}{2}a\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}a\right)} \\
&= \frac{\frac{n}{2}\sin\left(\frac{n+2}{2}a\right)\sin\left(\frac{1}{2}a\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n}{2}a\right)\sin\left(\frac{n}{2}a\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}a\right)} \\
&= \frac{\frac{n}{2}\sin\left(\frac{n+2}{2}a\right)\sin\left(\frac{1}{2}a\right)-\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{n}{2}a\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}a\right)}
\end{aligned}$$

Si $a \equiv 0\ [2\pi]$

$$\begin{aligned}
S = \sum_{k=1}^{n} k\cos(ka) &= \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4
D'une part :

$$(|a|+|b|)^2 = |a|^2+|b|^2+2|ab|$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}(|a+b|+|a-b|)^2 &= |a+b|^2+|a-b|^2+2|a+b||a-b| \\ &= a\overline{a}+b\overline{b}+a\overline{b}+\overline{a}b+a\overline{a}+b\overline{b}-a\overline{b}-\overline{a}b+2|a^2-b^2| \\ &= 2|a|^2+2|b|^2+2|a^2-b^2| \\ &= (|a|+|b|)^2-2|ab|+|a|^2+|b|^2+2|a^2-b^2| \\ &= (|a|+|b|)^2+(|a|-|b|)^2+2|a^2-b^2|\end{aligned}$$

Donc

$$(|a|+|b|)^2 \leq (|a+b|+|a-b|)^2$$

On peut alors conclure par croissance de $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$:

$$|a|+|b| \leq |a+b|+|a-b|$$

Correction de l'exercice 5

Il y a égalité ssi $\Re(z\overline{z}') = |z\overline{z}'|$ ssi $z\overline{z}'$ est un réel positif, ssi z et z' ont même argument.
Donc $\exists \theta \in \mathbb{R}, x = |x|e^{i\theta}, y = |y|e^{i\theta}$.
Finalement, $\lambda x = \mu y$ avec $\lambda = |y|$ et $\mu = |x|$.