Colle 10 - MPSI
Suites

Exercice 1

1. **Questions de cours :**
   (a) Définitions : suites majorées, minorées, monotones, convergentes, divergentes.
   (b) Démontrer que toute suite convergeant vers une limite $l >$ est minorée à partir d'un certain rang par $\dfrac{l}{2}$.
2. Calculer lorsqu'elles convergent les limites des suites définies par :

$$u_n = \frac{n+1}{n}, \qquad v_n = \sqrt{n(n+a)} - n, \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}.$$

Exercice 2

1. **Questions de cours :**
   (a) Définitions : suites majorées, minorées, monotones, convergentes, divergentes.
   (b) Démontrer que le produit d'une suite convergeant vers 0 et d'une suite bornée converge vers 0.
2. Calculer lorsqu'elles convergent les limites des suites définies par :

$$u_n = \frac{n}{n+1}, \qquad v_n = n - \sqrt{n^2-1}, \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}.$$

Exercice 3

1. **Questions de cours :**
   (a) Définitions : suites majorées, minorées, monotones, convergentes, divergentes.
   (b) Démontrer que toute suite convergente est bornée.
2. Calculer lorsqu'elles convergent les limites des suites définies par :

$$u_n = \frac{1}{n^2+1}, \qquad v_n = n - \sqrt{n^2-n}, \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 5

Soit u une suite croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n + \dfrac{1}{2^n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq u_n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0 + 2\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.
3. En déduire que u converge.

Exercice 6

Soit (u_n) une suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

Exercice 7

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

$$u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}, \quad n \geq 3.$$

Exercice 8
Soit (u_n) une suite réelle telle que :

$$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad 0 \leq u_{m+n} \leq \frac{m+n}{mn}.$$

Montrer que (u_n) converge vers 0.

Exercice 9
Étudier la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^n n. \end{cases}$$

Exercice 10
Soit (u_n) une suite définie dans $\mathbb{K}$ telle que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{n^2}) convergent.
Montrer que (u_n) converge.

Exercice 11
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2, (u_n), (v_n)$ deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_n \leq a \\ \forall n \in \mathbb{N}, & v_n \leq b \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n = a + b. \end{cases}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers a et b.

Exercice 12
En utilisant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x,$$

montrer l'existence de la limite de la suite de terme général $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}\right)$, et calculer cette limite.

Exercice 13
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n), (v_n)$ les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a & v_0 = b \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, & v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$