Colle 19 - MPSI
Relations de comparaison
Développements limités

Exercice 1 (Question de cours)

1. Rappeler la formule de Stirling
2. Donner le développement limité en 0 des fonctions suivantes :

$$\exp, \quad \sin, \quad \cos, \quad \mathrm{sh}, \quad \mathrm{ch}, \quad x \mapsto \frac{1}{1+x}, \quad x \mapsto \ln(1+x), \quad x \mapsto (1+x)^\alpha, \quad \arctan, \quad \tan, \quad \mathrm{th}.$$

Exercice 2

1. Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \to +\infty$:

$$\frac{\sqrt{x^3+2}}{\sqrt[3]{x^2+3}}, \quad \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}, \quad \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}.$$

2. Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \to 0$:

$$\ln(1+\sin x), \quad \ln(\ln(1+x)), \quad (\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2 .$$

Exercice 3

1. Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \to +\infty$:

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1, \quad \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)}, \quad x\ln(x+1) - (x+1)\ln x.$$

2. Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \to 0$:

$$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}, \quad \tan x - \sin x, \quad e^x + x - 1.$$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que

$$f(x) + f(x+1) \sim \frac{1}{x}, \quad \text{quand } x \to +\infty.$$

1. Étudier la limite de f en $+\infty$.
2. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 5

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\sin x}{x\ln x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x + x^2}{\ln(x+x^2)}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\ln x}}{\ln x}, \quad \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{x}}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln x}.$$

Exercice 6

Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(\pi/4)$ de $\sin x$
2. $DL_4(1)$ de $\dfrac{\ln x}{x^2}$
3. $DL_5(0)$ de $\mathrm{sh}\mathrm{ch}(2x) - \mathrm{ch}x$
4. $DL_3(0)$ de $\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$
5. $DL_3(0)$ de $\ln(1+\sin x)$
6. $DL_3(1)$ de $\cos(\ln(x))$

Exercice 7
Former le développement limité à l'ordre 3 quand $x \to 0$ de $\arctan(e^x)$.
Quelle a l'allure de cette fonction autour de ce point ?

Exercice 8
Soit $f :]-1;0[\cup]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point ?

Exercice 9
Montre que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$$

peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Correction de l'exercice 1

1. $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.
2. $e^x = \sum_{i=0}^n \dfrac{1}{i!}x^i + \circ(x^n)$.
   $\sin x = \sum_{i=0}^n \dfrac{(-1)^i}{(2i+1)!}x^{2i+1} + \circ(x^{2n+2})$.
   $\cos x = \sum_{i=0}^n \dfrac{(-1)^n}{(2i)!}x^{2i} + \circ(x^{2n+1})$.
   $\text{sh}x = \sum_{i=0}^n \dfrac{1}{(2i+1)!}x^{2i+1} + \circ(x^{2n+2})$.
   $\text{ch}x = \sum_{i=0}^n \dfrac{1}{(2i)!}x^{2i} + \circ(x^{2n+1})$.
   $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^n (-1)^i x^i + \circ(x^n)$.
   $\ln(1+x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\dfrac{x^i}{i} + \circ(x^n)$.
   $(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^n \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(i-1))}{i!}x^i + \circ(x^n)$.
   $\arctan x = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dfrac{x^{2i+1}}{2i+1} + \circ(x^{2n+2})$.
   $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \circ(x^3)$.
   $\text{th}x = x - \dfrac{x^3}{3} + \circ(x^3)$.

Correction de l'exercice 2

1. Quand $x \to +\infty$,
$$\frac{\sqrt{x^3+2}}{\sqrt[3]{x^2+3}} \sim \frac{x^{3/2}}{x^{2/3}} = x^{5/6}.$$
$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} = x + o(x) + x + o(x) = 2x + o(x) \sim 2x.$$
$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \frac{(x^2+1)(x^2-41)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{x+o(x)+x+o(x)} \sim \frac{1}{x}.$$
2. Quand $x \to 0$,
$$\ln(1+\sin x) \sim \sin x$$
   car $\sin x \to 0$, or $\sin x \sim x$ donc $\ln(1+\sin x) \sim x$.
$$\ln(1+x) \sim x \to 0 \neq 1$$
   donc $\ln(\ln(1+x)) \sim \ln x$.
$$\ln(1+x)^2 - \ln(1-x)^2 = (\ln(1+x)+\ln(1-x))(\ln(1+x)-\ln(1-x)).$$
   or $\ln(1+x)+\ln(1-x) = \ln(1-x^2) \sim -x^2$
   et $\ln(1+x) - \ln(1-x) = x + o(x) - (-x + o(x)) = 2x + o(x)$
   donc $(\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2 \sim -2x^3$.

Correction de l'exercice 3

1. Quand $x \to +\infty$,
$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1 = \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \sim \frac{1}{x\ln x}.$$
$$\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} = \frac{\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}{\sqrt{\ln(x+1)}+\sqrt{\ln(x-1)}}$$
   or $\ln\dfrac{x+1}{x-1} = \ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right) \sim \dfrac{2}{x-1} \sim \dfrac{2}{x}$
   et $\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln(x-1)} = 2\sqrt{\ln x} + o\left(\sqrt{\ln x}\right) \sim 2\sqrt{\ln x}$

donc $\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} \sim \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$.

$$x\ln(x+1) - (x+1)\ln x = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln x = 1 + o(1) - \ln x \sim -\ln x.$$

2. Quand $x \to 0$,

$$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} \sim \frac{2x^2}{2} = x^2.$$

$$\tan x - \sin x = \tan x(1-\cos x) = 2\tan x \sin^2\frac{x}{2} \sim \frac{x^3}{2}.$$

$$e^x - 1 \sim x$$

donc $e^x + x - 1 = x + x + o(x) = 2x + o(x) \sim 2x$.

Correction de l'exercice 4

1. f est décroissante donc possède une limite l en $+\infty$.
   Quand $x \to +\infty, f(x) \to l$ et $f(x+1) \to l$ donc $f(x) + f(x+1) \to 2l$
   or $f(x) + f(x+1) \sim \dfrac{1}{x} \to 0$
   donc $l = 0$.
   Sinon, autre méthode :
   Par passage à la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + f(x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
2. Quand $x \to +\infty$, on a
   $$f(x+1) + f(x) \le 2f(x) \le f(x) + f(x-1)$$
   donc
   $$2f(x) \sim \frac{1}{x}$$
   puis
   $$f(x) \sim \frac{1}{2x}.$$

Correction de l'exercice 5

- Quand $x \to 0^+$,
  $$\frac{x+\sin x}{x\ln x} = \frac{x+x+o(x)}{x\ln x} \sim \frac{2}{\ln x} \to 0$$
- Quand $x \to 0^+$,
  $$\ln x + x^2 = \ln x + o(\ln x)$$
  et puisque
  $$x + x^2 \sim x \to 0 \neq 1$$
  on a
  $$\ln(x+x^2) \sim \ln x$$
  donc
  $$\frac{\ln x + x^2}{\ln(x+x^2)} \sim \frac{\ln x}{\ln x} = 1 \to 1.$$
- Quand $x \to 1$, on peut écrire $x = 1 + h$ avec $h \to 0$,
  $$\frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{\ln(1+h)}{2h+h^2} \sim \frac{h}{2h} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$
- Quand $x \to +\infty$,
  $$\frac{x^{\ln x}}{\ln x} = e^{(\ln x)^2 - \ln\ln x} = e^{(\ln x)^2 + o(\ln x)^2} \to +\infty.$$
- Quand $x \to +\infty$,
  $$\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{x}} = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\ln x - \frac{\ln x}{x}\ln\ln x\right) = \exp\left(\frac{(\ln x)^2}{x} + o\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)\right) \to 1.$$

- Quand $x \to +\infty$,
$$\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln x} = \frac{\ln(2x+o(x))}{\ln x} \sim \frac{\ln 2 + \ln x}{\ln x} \sim 1 \to 1.$$

Correction de l'exercice 6

1. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(x-\frac{\pi}{4})^3 + o((x-\frac{\pi}{4})^3)$.
2. $\frac{\ln x}{x^2} = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$.
3. $\mathrm{sh}x\mathrm{ch}(2x) - \mathrm{ch}x = -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{121}{120}x^5 + o(x^5)$.
4. $\ln\frac{x^2+1}{x+1} = \ln(1+x^2) - \ln(1+x) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.
5. $\ln(1+\sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
6. $\cos(\ln x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

Correction de l'exercice 7
On procède par intégration du développement limité de la fonction dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan(e^x)\right) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2} \times \frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{1+x+x^2+o(x^2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2).$$

En intégrant
$$\arctan(e^x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3).$$
La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$. Puisque le terme qui suit dans le développement limité change de signe, la courbe traverse cette tangente : il s'agit d'un point d'inflexion.

Correction de l'exercice 8
On a
$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$
Par suite f peut être prolongée par continuité en 0 en posant
$$f(0) = -\frac{1}{2}.$$
De plus ce prolongement est dérivable en 0 et
$$f'(0) = \frac{1}{3}.$$
L'équation de la tangente en 0 est
$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$$
et la courbe est localement en dessous de celle-ci.

Correction de l'exercice 9
f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et
$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \; x \overset{\rightarrow}{\to} 0 \; -\frac{1}{2}.$$
Donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = -1/2$ et finalement f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.