Colle 14 - MPSI
Limite Continuité

Exercice 1 (Questions de cours :)

1. Définition de la limite d'une fonction en un point.
   Caractérisation séquentielle.
2. Définition de la continuité d'une fonction en un point.
   Caractérisation séquentielle.
3. Théorème des valeurs intermédiaires.
4. Théorème de la bijection.

Exercice 2
Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} x\times \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 3
Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

$$\lim_{x\to 1^+} \ln x \times \ln(\ln x), \qquad \lim_{x\to +\infty} e^{x-\sin x}.$$

Exercice 4
Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

$$\lim_{x\to 0^+} x^x, \qquad \lim_{x\to 0} x\lfloor 1/x\rfloor.$$

Exercice 5
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction T périodique (avec $T>0$) telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.
Montrer que f est constante.

Exercice 6
Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 7
Montrer que les seules applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

Exercice 8
On veut montrer que toute fonction $f:I\to\mathbb{R}$ continue et injective est strictement monotone.
On pourra effectuer le raisonnement par l'absurde suivant, on suppose :

$$\exists (x_1,y_1)\in I^2, x_1<y_1 \text{ et } f(x_1)\geq f(y_1) \text{ et } \exists (x_2,y_2)\in I^2, x_2<y_2 \text{ et } f(x_2)\leq f(y_2).$$

Montrer que la fonction $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t)=f((1-t)x_1+tx_2)-f((1-t)y_1+ty_2)$$

s'annule. Conclure.

Exercice 9
Montrer qu'une fonction continue et périodique définie sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 10
Soit $f:[0;+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue possédant une limite finie l en $+\infty$.
Montrer que la fonction f est bornée.

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1;1[$.
2. Déterminer, pour $y \in]-1;1[$ une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de $f(x)$.

Exercice 12
Soit $f : [0;+\infty[\to [0;+\infty[$ continue vérifiant

$$f \circ f = Id.$$

Déterminer f.

Correction de l'exercice 1

Correction de l'exercice 2

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\ &\to 1, x \to 0\end{aligned}$$

$$\left|x \times \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| \to 0 \text{ quand } x \to 0.$$

Correction de l'exercice 3
$\ln x \times \ln(\ln x) = X \ln X$ avec $X = \ln x \to 0, x \to 1^+$
Donc $\ln x \times \ln(\ln x) \to 0$.
$e^{x-\sin x} \geq e^{x-1} \to +\infty$.

Correction de l'exercice 4
$x^x = e^{x\ln x} = e^X$ avec $X = x\ln x \to 0$ quand $x \to 0^+$.
Donc $x^x \to 1$.

$$\begin{aligned} & & 1/x - 1 \leq \lfloor 1/x \rfloor \leq 1/x & \\ \text{donc} & & 1 - x \leq x\lfloor 1/x \rfloor \leq 1 & \quad \text{si } x \text{ positif} \\ \text{ou} & & 1 - x \geq x\lfloor 1/x \rfloor \geq 1 & \quad \text{si } x \text{ négatif}\end{aligned}$$

Donc $x\lfloor 1/x \rfloor \to 1$.

Correction de l'exercice 5
Posons $l = \lim_{x\to+\infty} f$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(x) = f(x+nT)$.
Quand $n \to +\infty$, $x + nT \to +\infty$ donc $f(x+nT) \to l$.
Or $f(x+nT) = f(x) \to f(x)$ donc par unicité de la limite $l = f(x)$.

Correction de l'exercice 6
Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = f(x) - x$.
φ est continue et vérifie : $\varphi(0) = f(0) \geq 0$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule en un point x_0 et on a alors $f(x_0) = x_0$.

Correction de l'exercice 7
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue.
Par l'absurde : si f n'est pas constante alors il existe $a < b$ tel que $f(a) \neq f(b)$.
Soit y un nombre non entier compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ et donc f n'est pas à valeurs entières.
Absurde.

Correction de l'exercice 8
La fonction φ est continue, $\varphi(0) = f(x_1) - f(y_1) \geq 0$ et $\varphi(1) = f(x_2) - f(y_2) \leq 0$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule en un certain t.
Posons $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$ et $y_0 = (1-t)y_1 + ty_2$.
$\varphi(t) = 0$ donne $f(x_0) = f(y_0)$ or $x_0 < y_0$ donc f n'est pas injective.
Absurde.

Correction de l'exercice 9
Soit $T > 0$ une période de f.
Sur $[0,T]$, f est bornée par un certain M car f est continue sur un segment.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x_nT \in [0,T]$ pour $n = E(x/T)$ donc $|f(x)| = |f(x_nT)| \leq M$.
Ainsi f est bornée par M sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 10
Soit $\epsilon = 1 > 0$. Il existe $A \in [0;+\infty[$ tel que
$$\forall x \in [A;+\infty[, |f(x) - l| \leq 1$$
Ainsi, la fonction f est bornée par $M_1 = |l| + 1$ sur $[A;+\infty[$.
Aussi, f est continue sur le segment $[0;A]$, elle est donc aussi bornée sur $[0;A]$ par un certain M_2.
Finalement, f est bornée sur $[0;+\infty[$ par $M = \max(M_1, M_2)$.

Correction de l'exercice 11

1. Sur $[0;+\infty[$,
$$f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$
est continue et strictement croissante, $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f = 1$.
Ainsi f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers $[0;1[$. Sur $]-\infty;0[$,
$$f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$
est continue et strictement croissante, $\lim_{x\to0^-} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f = -1$.
Ainsi f réalise une bijection de $]-\infty;0[$ vers $]-1;0[$.
Finalement f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1;1[$.
2. Pour $y \in [0;1[$, son antécédent $x = f^{-1}(y)$ appartient à $[0;+\infty[$.
$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$
Pour $y \in]-1;0[$, son antécédent $x = f^{-1}(y)$ appartient à $]-\infty;0[$.
$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}.$$
Finalement,
$$\forall y \in]-1;1[, f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}.$$

Correction de l'exercice 12
La fonction f est bijective et continue donc strictement monotone. Elle ne peut être décroissante car alors elle ne serait pas surjective sur $[0;+\infty[$, elle est donc strictement croissante.
En effet, f est surjective, donc $\forall y \in [0;+_infty[, \exists x \in [0;+\infty[, f(x) = y$. Soit $(x_1, x_2) \in [0;+\infty[$ tel que x_1 ait pour image 0 et $x_1 < x_2$.
$f(x_1) > f(x_2)$ car f décroissante.
$0 > f(x_2)$ absurde.

S'il existe un $x \in [0;+\infty[$ tel que $f(x) < x$ alors par stricte croissance
$$f(f(x)) < f(x)$$
et donc $f(f(x)) < f(x) < x$ ce qui contredit $f \circ f = Id$. De même $f(x) > x$ est impossible et donc $f = Id$.