Colle 06 - MPSI
Inégalités dans $\mathbb{R}$
Révision d'analyse

Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

Exercice 1
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (a,b) \in A \times B, a \leq b.$$

Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 2
Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On forme

$$A + B = \{a + b | (a,b) \in A \times B\}$$

Montrer que $A + B$ est majorée et que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Exercice 3
Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}.$$

Exercice 4
1. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{2\sqrt{n}} < (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

2. En déduire la valeur de

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10\ 000} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor.$$

Analyse

Exercice 5
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1}.$$

Exercice 6
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère les fonctions

$$f_\lambda : x \longmapsto \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}.$$

1. Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles.
2. Observer que les tangentes en 1 sont concourantes.

Valeur absolue

Exercice 7
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x + 5 - 6\sqrt{x-4}} = 1.$$

Fonctions usuelles

Exercice 8
Parmi les relations suivantes, lesquelles sont exactes :

1. $(a^b)^c = a^{bc}$
2. $a^b a^c = a^{bc}$
3. $a^{2b} = (a^b)^2$
4. $(ab)^c = a^{c/2} b^{c/2}$
5. $(a^b)^c = a^{(b^c)}$
6. $(a^b)^c = (a^c)^b$

Exercice 9
Établir, pour tout $x \geq 0$ l'encadrement

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 10
Simplifier a^b pour $a = \exp x^2$ et $b = \dfrac{1}{x} \ln x^{1/x}$.

Exercice 11
Comparer

$$\lim_{x \to 0^+} x^{(x^x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} (x^x)^x.$$

Exercice 12
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} x^{\sqrt{x}}$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{1/x}$

Exercice 13
Montrer que pour tout $a, b > 0$

$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln \frac{a+b}{2}.$$

Exercice 14
Résoudre les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x} = \mathrm{e} + 1$
2. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
3. $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

Exercice 15
Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 8^x & = 10y \\ 2^x & = 5y \end{cases}$
2. $\begin{cases} \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{2y} & = a \\ 2xy & = 1 \end{cases}$

Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

Correction de l'exercice 1
Soit $b \in B$. Puisque $\forall a \in A, a \leq b$ la partie A est majorée par b.
A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par b, donc $\sup A$ existe et $\sup A \leq b$. B est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par $\sup A$ sont $\inf B$ existe et $\sup A \leq \inf B$.

Correction de l'exercice 2
A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ donc $\sup A$ et $\sup B$ existent.
Pour tout $x \in A+B$, on peut écrire $x = a+b$ avec $a \in A$ et $b \in B$.
On a $x = a+b \leq \sup A + \sup B$, donc $A+B$ est majorée par $\sup A + \sup B$.
$A+B$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée donc $\sup A+B$ existe et

$$\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B.$$

Pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$

$$a = (a+b) - b \leq \sup(A+B) - b$$

donc A est majorée par $\sup(A+B) - b$, d'où

$$\sup A \leq \sup(A+B) - b$$

Par suite

$$b \leq \sup(A+B) - \sup A$$

et B est donc majorée par $\sup(A+B) - \sup A$ et par suite

$$\sup B \leq \sup(A+B) - \sup A$$

Finalement

$$\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$$

puis l'égalité.

Correction de l'exercice 3

Correction de l'exercice 4

Correction de l'exercice 5

$$U = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{u}{v}$$

pour $x \neq 0$.
$f'(x) = \dfrac{U'}{U}$ avec $U' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
$f'(x) = \dfrac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Correction de l'exercice 6

Correction de l'exercice 7

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}} = 1.$$

On pose $t = \sqrt{x-4}$.

$$\sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-3)^2} = 1$$

$$|t-2| + |t-3| = 1$$

En prenant sur la droite des réels $A(2)$, $B(3)$ et $M(t)$, on a $AM + BM = 1$. Comme les points A, M, B sont alignés, ils le sont dans cet ordre. Donc $2 \leq t \leq 3$.
$S = [8; 13]$.

Fonctions usuelles

Correction de l'exercice 8
(a), (c) et (f)

Correction de l'exercice 9
Par étude des variations de 2 fonctions.

Correction de l'exercice 10
$a^b = x$.

Correction de l'exercice 11
$x^{(x^x)} = \exp(x^x \ln x) = \exp(\exp(x \ln x) \ln x) \to 0$
$(x^x)^x = \exp(x \ln x^x) = \exp(x^2 \ln x) \to 1$.

Correction de l'exercice 12

1. $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}} = 1$
3. $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = 0$

Correction de l'exercice 13
On a

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$$

or

$$a + b = \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 \geq 2\sqrt{ab}$$

donc

$$\ln \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \geq 0.$$

Correction de l'exercice 14

1. $\mathcal{S} = \{0, 1\}$
2. $\mathcal{S} = \{0, 1, 4\}$
3. Obtenir $2^{2x-3} = 3^{x-3/2}$ puis $\mathcal{S} = \{3/2\}$.

Correction de l'exercice 15

1. $x = 1/2, y = \sqrt{2}/5$
2. Obtenir un système somme/produit en x et $2y$ puis le résoudre.