Colle 04 - MPSI
Les nombres complexes
Applications

I. Nombres complexes

Exercice 1
Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$;
2. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2

1. Calculer les racines carrées de
$$8-6i, \qquad 3+4i, \qquad 7+24i.$$
2. Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 3
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$.
2. $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$.
3. $z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$.

Exercice 4
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$.
2. $z^3 = 4\sqrt{2}(1-i)$.
3. $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$.

Exercice 5
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre les équations suivantes :
$$(z+1)^n = (z-1)^n; \qquad (z+i)^n = (z-1)^n.$$

Exercice 6

1. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité. Calculer :
$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} |z-1|.$$
2. (X PC)
Soient $n \geq 3$, $\omega_1, ..., \omega_n$ les racines n-ièmes de l'unité avec $\omega_n = 1$. Calculer :
$$S_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^p.$$
3. Soit ω une racine n-ième de l'unité. On pose
$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k.$$
En calculant $(1-\omega)S$, déterminer la valeur de S.

Exercice 7
Établir :

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, |a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|.$$

Exercice 8

1. Soient a un réel, h un réel non nul et n un entier naturel non nul, calculer :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos(a + kh).$$

2. Soient a un réel et n un entier naturel non nul, calculer :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k+1)a.$$

3. Soient a un réel et n un entier naturel non nul, calculer :

$$S = \sum_{k=1}^{n} k \cos(ka).$$

II. Applications

Exercice 9
On considère $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(k) = 2k + 1$.
f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 10
On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y$.
f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 11
On considère $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$.
f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 12
On considère $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(k) = \begin{cases} \dfrac{k}{2} & \text{si } k \text{ pair} \\ \dfrac{k-1}{2} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$.
f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 13
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Établir les implications suivantes :

1. $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
2. $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective.
3. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
4. $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow f$ surjective.

Exercice 14
Soient A et B deux parties d'un ensemble E et

$$\begin{aligned} f : \mathscr{P}(E) &\to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X &\mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.

Éléments de correction

I. Nombres complexes

Correction de l'exercice 1
$z=5$ n'est pas solutions pour les deux ensembles.

1. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right|=1 \iff |z-3|=|z-5|$.
   L'ensemble de solution est la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(3,0)$ et $B(5,0)$.
2. $$\begin{aligned}\left|\frac{z-3}{z-5}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2} &\iff |z-3|^2=\frac{1}{2}|z-5|^2\\ &\iff (z-3)\overline{(z-3)}=\frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)}\\ &\iff z\overline{z}-(z+\overline{z})=7\\ &\iff |z-1|^2=8\\ &\iff |z-1|=2\sqrt{2}\end{aligned}$$
   L'ensemble des solutions est donc le cercle de centre le point $\Omega(1,0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 2
1. Pour $z=a+ib$, on cherche $\omega=\alpha+i\beta$ tel que $(\alpha+i\beta)^2=a+ib \iff \alpha^2-\beta^2=a$ et $2\alpha\beta=b$ auquel on rajoute $\alpha^2+\beta^2=\sqrt{a^2+b^2}$.
   $\omega_1=3-i$ et $\omega_2=-3+i(=-\omega_1)$.
   $\omega_1=2+i$ et $\omega_2=-2-i(=-\omega_1)$.
   $\omega_1=4+3i$ et $\omega_2=-4-3i(=-\omega_1)$.
2. Il faut calculer les racines de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{4}}$ de deux manières différentes.
   $\omega_1=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$ qui peut aussi s'écrire $\omega_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
   $\omega_2=-\omega_1$.
   $\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2=e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $e^{i\frac{\pi}{8}}=\omega_1$ ou ω_2
   $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Correction de l'exercice 3
1. $\Delta=1$ et les solutions sont $1+i$ et i.
2. $\Delta=-3+4i$ et les solutions sont $2+3i$ et $1+i$.
3. $\Delta=-75-100i$ et les solutions sont $5-12i$ et $-2i$.

Correction de l'exercice 4
1. $z^3=8e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $z_0=2e^{i\frac{\pi}{12}}$ solution particulière.
   $S=\left\{z_0,z_0j,z_0j^2\right\}$ avec $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $j^2=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $z^3=8e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $z_0=2e^{-i\frac{\pi}{12}}$ solution particulière.
   $S=\left\{z_0,z_0j,z_0j^2\right\}$ avec $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $j^2=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $z^3=8e^{i\frac{3\pi}{4}}$ donc $z_0=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ solution particulière.
   $S=\left\{z_0,z_0j,z_0j^2\right\}$ avec $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $j^2=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Correction de l'exercice 5
1. Notons $\omega_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k\in\mathbb{Z}$ les racines n-ièmes de l'unité. Si z est solution alors nécessairement $z\neq 1$ et $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n=1$ donc il existe $k\in\{0,1,..,n-1\}$ tel que
   $$\frac{z+1}{z-1}=\omega_k$$

ce qui donne

$$(\omega_k - 1)z = \omega_k + 1$$

Si $k = 0$ alors cela donne $0 = 2$ donc nécessairement $k \in \{1, ..., n-1\}$ et $\omega_k \neq 1$.
Par suite

$$z = \frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1} = \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{2i\sin\frac{k\pi}{n}} = -i\cot\frac{k\pi}{n}$$

Inversement, en remontant le calcul, tout est fonctionne. Finalement

$$S = \left\{-i\cot\frac{k\pi}{n} | k \in \{1, ..., n-1\}\right\}$$

et comme la fonction cot est injective sur $]0; 2\pi[$, il y a exactement $n-1$ solutions.

2. De la même manière

$$S = \left\{\cot\frac{k\pi}{n} | k \in \{1, ..., n-1\}\right\}$$

Correction de l'exercice 6

1. Notons $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{N}$. Par factorisation en utilisant « l'angle moyen » on a

$$|w_k - 1| = 2\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{z\in\mathbb{U}_n} |z-1| &= \sum_{k=0}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n} \\ &= 2Im\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) \\ &= 4Im\left(\frac{1}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}\right) \\ &= 2\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} \\ &= 2\cot\frac{\pi}{2n}\end{aligned}$$

2. Quitte à réindexer, on peut supposer

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \omega^k \text{ avec } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

Si n ne divise pas p alors, puisque $\omega^p \neq 1$

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \omega^{kp} = \omega_p \frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p} = 0$$

Si n divise p alors

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \omega^{kp} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

3. On a

$$\begin{aligned}(1-\omega)S &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{k=1}^{n} k\omega^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k - n\omega^n \\ &= -n\end{aligned}$$

Donc

$$S = \frac{n}{\omega - 1}$$

Correction de l'exercice 7
D'une part :

$$(|a|+|b|)^2 = |a|^2+|b|^2+2|ab|$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}(|a+b|+|a-b|)^2 &= |a+b|^2+|a-b|^2+2|a+b||a-b|\\ &= a\overline{a}+b\overline{b}+a\overline{b}+\overline{a}b+a\overline{a}+b\overline{b}-a\overline{b}-\overline{a}b+2|a^2-b^2|\\ &= 2|a|^2+2|b|^2+2|a^2-b^2|\\ &= (|a|+|b|)^2-2|ab|+|a|^2+|b|^2+2|a^2-b^2|\\ &= (|a|+|b|)^2+(|a|-|b|)^2+2|a^2-b^2|\end{aligned}$$

Donc

$$(|a|+|b|)^2 \leq (|a+b|+|a-b|)^2$$

On peut alors conclure par croissance de $x\in\mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}\in\mathbb{R}$:

$$|a|+|b| \leq |a+b|+|a-b|$$

Correction de l'exercice 8

1.

$$\begin{aligned}S=\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kh) &= \sum_{k=0}^{n} Re\left[e^{i(a+kh)}\right]\\ &= Re\left[e^{ia}\sum_{k=0}^{n}e^{ikh}\right]\\ &= Re\left[e^{ia}\frac{1-e^{i(n+1)h}}{1-e^{ih}}\right]\\ &= Re\left[e^{ia}\frac{e^{i\frac{n+1}{2}h}}{e^{i\frac{1}{2}h}}\frac{e^{-i\frac{n+1}{2}h}-e^{i\frac{n+1}{2}h}}{e^{-i\frac{1}{2}h}-e^{i\frac{1}{2}h}}\right]\\ &= Re\left[e^{i\left(a+\frac{n}{2}h\right)}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}h\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}h\right)}\right]\\ &= \frac{\cos\left(a+\frac{n}{2}h\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}h\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}h\right)}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}S=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k+1)a &= \sum_{k=0}^{n} Im\left[\binom{n}{k}e^{i(k+1)a}\right]\\ &= Im\left[e^{ia}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ika}\right]\\ &= Im\left[e^{ia}(e^{ia}+1)^n\right]\\ &= Im\left[e^{ia}(e^{\frac{ia}{2}}(e^{\frac{ia}{2}}+e^{-\frac{ia}{2}}))^n\right]\\ &= Im\left[e^{ia}e^{\frac{ina}{2}}\left(2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\right)^n\right]\\ &= Im\left[e^{\frac{i(n+2)a}{2}}2^n\cos^n\left(\frac{a}{2}\right)\right]\\ &= 2^n\sin\left(\frac{i(n+2)a}{2}\right)\cos^n\left(\frac{a}{2}\right)\end{aligned}$$

3. Si $a \not\equiv 0\ [2\pi]$

$$
\begin{aligned}
S = \sum_{k=1}^{n} k\cos(ka) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{da}\left[\sin(ka)\right] \\
&= \frac{d}{da}\left[\sum_{k=1}^{n}\sin(ka)\right] \\
&= \frac{d}{da}\left[\sum_{k=0}^{n}\sin(ka)\right] \\
&= \frac{d}{da}\left[\frac{\sin\left(\frac{n}{2}a\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}a\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}a\right)}\right] \\
&= \frac{\left[\frac{n}{2}\cos\left(\frac{n}{2}a\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}a\right)+\sin\left(\frac{n}{2}a\right)\frac{n+1}{2}\cos\left(\frac{n+1}{2}a\right)\right]\sin\left(\frac{1}{2}a\right)-\sin\left(\frac{n}{2}a\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}a\right)\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}a\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}a\right)} \\
&= \frac{\frac{n}{2}\left[\cos\left(\frac{n}{2}a\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}a\right)+\sin\left(\frac{n}{2}a\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}a\right)\right]\sin\left(\frac{1}{2}a\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n}{2}a\right)\bigl[\cos\bigl(\frac{n+1}{2}a\bigr)\sin\bigl(\frac{1}{2}a\bigr)-\sin\bigl(\frac{n+1}{2}a\bigr)\cos\bigl(\frac{1}{2}a}{\sin^2\left(\frac{1}{2}a\right)} \\
&= \frac{\frac{n}{2}\sin\left(\frac{n}{2}a+\frac{n+1}{2}a\right)\sin\left(\frac{1}{2}a\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n}{2}a\right)\sin\left(\frac{1}{2}a-\frac{n+1}{2}a\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}a\right)} \\
&= \frac{\frac{n}{2}\sin\left(\frac{n+2}{2}a\right)\sin\left(\frac{1}{2}a\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n}{2}a\right)\sin\left(\frac{n}{2}a\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}a\right)} \\
&= \frac{\frac{n}{2}\sin\left(\frac{n+2}{2}a\right)\sin\left(\frac{1}{2}a\right)-\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{n}{2}a\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}a\right)}
\end{aligned}
$$

Si $a \equiv 0\ [2\pi]$

$$
\begin{aligned}
S = \sum_{k=1}^{n} k\cos(ka) &= \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

II. Applications