Colle 28 - MPSI
Groupe symétrique
Déterminant

Groupe symétrique

Exercice 1
Déterminer la signature de :

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 2
Dans $\mathscr{S}_n$ avec $n \geq 2$, on considère une permutation σ et un p-cycle :

$$c = (a_1 a_2 ... a_p)$$

Observer que la permutation $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est un p-cycle qu'on précisera.

Exercice 3
Soit $n \geq 5$.
Montrer que si $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix}$ sont deux cycles d'ordre 3 de $\mathscr{S}_n$, alors il existe une permutation σ, paire, telle que

$$\sigma \circ \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée

Exercice 4
Calculer le déterminant de matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 5
Calculer sous forme factorisée les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{pmatrix}$$

Exercice 6
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{A} = (\overline{a}_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Former une relation liant $\det(A)$ et $\det(\overline{A})$.

Exercice 7
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \overline{A}$.
Montrer que $\det A \in \mathbb{R}$.

Exercice 8
Soit A une matrice antisymétrique réelle d'ordre $2n+1$.
Montrer $\det A = 0$.
Ce résultat est-il encore vrai lorsque A est d'ordre pair ?

Exercice 9
Calculer en établissant une relation de récurrence le déterminant de

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \ddots & -1 & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$$

Exercice 10
Soient n un entier supérieur à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Etablir
$$\begin{cases} \mathrm{rg}(A) = n & \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = n \\ \mathrm{rg}(A) = n-1 & \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1 \\ \mathrm{rg}(A) \leq n-2 & \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 0 \end{cases}$$

2. Montrer
$$\det(\mathrm{Com}(A)) = (\det A)^{n-1}$$

3. En déduire
$$\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A))$$

Exercice 11 (MINES MP)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$ vérifiant pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(A+X) = \det A + \det X$$

Montre que $\det A = 0$ puis $A = 0$.

Exercice 12 (X MP NAVALE MP)
Soient A et H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{rg} H = 1$.
Montrer que

$$\det(A+H)\det(A-H) \leq \det A^2$$

Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 13
Soit $V = \{x \mapsto e^x P(x) | P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont on précisera la dimension.
2. Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V dont on calculera le déterminant.

Exercice 14 (CENTRALE PC)
Soit f un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

1. Montrer qu'il existe d'uniques complexes a et b tels que
$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b\overline{z}$$

2. Exprimer en fonction de a et b le déterminant de f.

Groupe symétrique

Correction de l'exercice 1
On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de la permutation σ :

$$I(\sigma) = \text{Card}\,\{1 \leq i < j \leq n \mid \sigma(i) W \sigma(j)\}$$

On a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ et $I(\sigma)$ se calcule en dénombrant, pour chaque terme de la seconde ligne, le nombre de termes inférieurs qui le suit.

1. $I(\sigma) = 2+3+2+4+3+2+1+0 = 17$ donc $\varepsilon(\sigma) = -1$.
2. $I(\sigma) = 0+1+0+3+0+2+0+0 = 6$ donc $\varepsilon(\sigma) = 1$.

Correction de l'exercice 2
Pour $x = \sigma(a_i)$, on a

$$(\sigma \circ c \circ \sigma^{-1})(x) = \sigma(a_{i+1})$$

en posant $a_{p+1} = a_1$.
Pour $x \notin \{\sigma(a_1), ..., \sigma(a_p)\}$, on a

$$(\sigma \circ c \circ \sigma^{-1})(x) = \sigma \circ \sigma^{-1}(x) = x$$

car $c(\sigma^{-1}(x)) = \sigma^{-1}(x)$.
Ainsi

$$\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} (\sigma(a_1) & \sigma(a_2) & ... & \sigma(a_p) \end{pmatrix}$$

.

Correction de l'exercice 3
Notons que

$$\sigma \circ \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) & \sigma(c) \end{pmatrix}$$

Soit $\sigma : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ une permutation définie par :

$$\sigma(a) = a', \sigma(b) = b', \text{ et } \sigma(c) = c'$$

Si σ est paire alors le problème est résolu.
Si σ est impaire alors soit $c \neq d \in \mathbb{N}_n - \{a, b, c\}$ et $\tau = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$.
$\sigma \circ \tau$ est une permutation satisfaisante.

Déterminant d'une matrice carrée

Correction de l'exercice 4

Correction de l'exercice 5

$$\det A = 2abc, \qquad \det B = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)), \qquad \det C = -4 \sin\frac{b-a}{2} \sin\frac{c-a}{2} \sin\frac{b-c}{2}$$

Pour le dernier, on a utilisé la formule

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\frac{p+q}{2} \sin\frac{p-q}{2}$$

Correction de l'exercice 6
Par conjugaison d'une somme et de produits

$$\det\overline{A} = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \overline{a}_{\sigma(i),i} = \overline{\sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}} = \overline{\det A}$$

Correction de l'exercice 7
Ici ${}^tA = \overline{A}$, donc $\det(A) = \det({}^tA) = \det(\overline{A})$. Comme

$$\det(A) = \det(\overline{A}) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \overline{a}_{\sigma(i),i} = \overline{\sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}} = \overline{\det A}$$

on peut conclure que $\det A \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 8
Comme ${}^tA = -A$ on a
$$\det A = \det {}^tA = \det(-A) = (-1)^{2n+1}\det A = -\det A$$
Donc $\det A = 0$.
La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
fournit un contre-exemple au second problème posé.

Correction de l'exercice 9
Par les opérations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_n$ on obtient
$$\det M_n = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$$
En développant, on parvient à la récurrence
$$\det M_n = \det M_{n-2}$$
Comme $\det M_1 = 0$ et $\det M_2 = 1$, on a
$$\det M_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

Correction de l'exercice 10

1. Si $\mathrm{rg}(A) = n$ alors A est inversible et sa comatrice l'est aussi donc
$$\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = n$$
Si $\mathrm{rg}(A) \leq n - 2$ alors A ne possède pas de déterminant extrait d'ordre $n-1$ non nul. Par suite $\mathrm{Com}(A) = O_n$ et donc
$$\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 0$$
Si $\mathrm{rg}(A) = n - 1$, exploitons la relation $A^t\mathrm{Com}(A) = \det(A).I_n = 0_n$.
Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés aux matrices A et ${}^t\mathrm{Com}(A)$.
On a $f \circ g = 0$ donc $Img \subset kerf$. Comme $\mathrm{rg}(f) = n - 1$, $\dim kerf = 1$ et par suite $\mathrm{rg}(g) \leq 1$.
Ainsi $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) \leq 1$.
Comme $\mathrm{rg}(A) = n - 1$, il existe un déterminant extrait non nul d'ordre $n - 1$ et par suite $\mathrm{Com}(A) \neq 0_n$.
Finalement
$$\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1$$
2. Comme $A^t\mathrm{Com}(A) = \det(A).I_n$ on a
$$\det(A)\det(\mathrm{Com}(A)) = (\det A)^n$$
Si $\det A \neq 0$ alors
$$\det(\mathrm{Com}(A)) = (\det A)^{n-1}$$
Si $\det A = 0$ alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) \leq 1 < n$ donc
$$\det(\mathrm{Com}(A)) = 0$$
3. Si $\mathrm{rg}(A) = n$ alors
$${}^t\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)).\mathrm{Com}(A) = \det(\mathrm{Com}(A)).I_n = (\det A)^{n-1}.I_n$$
Donc
$${}^t\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = (\det A)^{n-1}\mathrm{Com}(A)^{-1}$$
Or ${}^t\mathrm{Com}(A).A = \det(A).I_n$ donc
$${}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A).A^{-1}$$
puis sachant ${}^t(B)^{-1} = ({}^tB)^{-1}$ on a :
$$\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = (\det A)^{n-2}A$$
Si $\mathrm{rg}(A) \leq n - 1$ et $n \geq 3$ alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}A) \leq 1 \leq n - 2$ donc
$$\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = 0_n$$
Si $n = 2$ alors pour
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = A$$

Correction de l'exercice 11 (MINES MP)
Notons $n = 1$: la relation $\det(A + X) = \det A + \det X$ est vraie pour tout A et tout X.
On suppose dans la suite $n \geq 2$.
Pour $X = A$ la relation $\det(A + X) = \det A + \det X$ donne $2^n \det A = 2\det A$ et donc $\det A = 0$.
La matrice A n'est donc pas inversible et en posant $r < n$ égal à son rang, on peut écrire $A = QJ_rP$ avec P, Q inversibles et

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

Posons alors $X = QJ'_rP$ avec

$$J'_r = \begin{pmatrix} O_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Puisque $A + X = QI_nP = QP$, la matrice $A + X$ est inversible et donc $\det X = \det(A + X) \neq 0$.
On en déduit que la matrice J'_r est l'identité et donc $r = 0$ puis $A = 0_n$.

Correction de l'exercice 12 (X MP NAVALE MP)
La matrice H est équivalente à la matrice J_1 dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position $(1, 1)$. Notons $P, G \in GL_n[\mathbb{R})$ telles que

$$H = QJ_1P$$

et introduisons $B \in \mathcal{M}_n\mathbb{R}$ déterminée par

$$A = QBP$$

La relation

$$\det(A + H)\det(A - H) \leq \det A^2$$

équivaut alors à la relation

$$\det(B + J_1)\det(B - J_1) \leq \det B^2$$

Notons $C_1, ..., C_n$ les colonnes de B et $\mathcal{B} = (E_1, ..., E_n)$ la base canonique de l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a

$$\det(B + J_1) = \det_{\mathcal{B}}(C_1 + E_1, C_2, ..., C_n)$$

et

$$\det(B - J_1) = \det_{\mathcal{B}}(C_1 - E_1, C_2, ..., C_n)$$

Par multilinéarité du déterminant

$$\det(B + J_1) = \det B + \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, ..., C_n)$$

et

$$\det(B - J_1) = \det B - \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, ..., C_n)$$

d'où l'on tire

$$\det(B + J_1)\det(B - J_1) = \det B^2 - \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, ..., C_n)^2 \leq \det B^2$$

Déterminant d'un endomorphisme

Correction de l'exercice 13

1. Il est clair que V est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   On pose $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = x^k e^x$.
   $\mathcal{B} = (f_0, ..., f_n)$ forme une base de V, donc $\dim V = n + 1$.
2. Pour $f(x) = P(x)e^x$ on a $D(f)(x) = f'(x) = (P(x) + P'(x))e^x$.
   D est bien une application de V dans V.
   De plus la linéarité de D découle de la linéarité de la dérivation et on peut conclure que $D \in \mathcal{L}(V)$.
   Puisque $(x^k e^x)' = (x^k + kx^{k-1})e^x$ on a $D(f_k)) = f_k + kf_{k-1}$ donc on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & n \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

   Par suite $\det D = 1 \times 1 \times ... \times 1 = 1$.

Correction de l'exercice 14 (CENTRALE PC)

1. La famille $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
   Pour $a, b \in \mathbb{C}$, l'application $\varphi_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et sa matrice dans la base $(1, i)$ est

$$\begin{pmatrix} Re(a) + Re(B) & Im(b) - Im(a) \\ Im(a) + Im(b) & Re(a) - Re(b) \end{pmatrix}$$

   Pour f endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ de matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

   dans la base $(1, i)$, on a $f = \varphi_{a,b}$ si, et seulement si,

$$a = \frac{\alpha + \delta}{2} + i\frac{\beta + \gamma}{2}, \qquad \text{et} \qquad b = \frac{\alpha - \delta}{2} + i\frac{\beta + \gamma}{2}$$

2. Le déterminant de f vaut

$$\det f = \alpha\delta - \beta\gamma = |a|^2 - |b|^2$$