Colle 13 - MPSI
Arithmétiques

Arithmétiques

Exercice 1

1. Question de cours : Démontrer le corollaire suivant du théorème de Bachet-Bézout :
   Si un entier est divisible par deux entiers premiers entre eux, alors il est divisible par leur produit.
2. Une application du théorème de Bézout :
   Soient $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Montrer l'équivalence :
   $$(\exists u, v \in \mathbb{Z}, au + bv = d) \iff pgcd(a, b) | d.$$
3. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système :
   $$\begin{cases} pgcd(x, y) = 10 \\ x + y = 100 \end{cases}$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
   $$(n^2 + n) \wedge (2n + 1) = 1.$$

Exercice 2

1. Question de cours : Démontrer le corollaire suivant du théorème de Bachet-Bézout :
   Si un entier est premier avec deux autres, alors il est premier avec leur produit.
2. Une application du théorème de Bézout :
   Montrer que le pgcd de $2n + 4$ et de $3n + 3$ ne peut être que 1, 2, 3 ou 6.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système :
   $$\begin{cases} pgcd(x, y) = 5 \\ ppcm(x, y) = 60 \end{cases}$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
   $$(3n^2 + n) \wedge (n + 1) = 1.$$

Exercice 3

1. Question de cours : Énoncer et démontrer le théorème de Gauss.
2. Une application du théorème de Bézout :
   Soient $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Montrer l'équivalence :
   $$(\exists u, v \in \mathbb{Z}, au + bv = d) \iff pgcd(a, b) | d.$$
3. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système :
   $$\begin{cases} pgcd(x, y) = 10 \\ x + y = 100 \end{cases}$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
   $$(n^2 + n) \wedge (2n + 1) = 1.$$

Exercice 4

Soient a et b premiers entre eux et $c \in \mathbb{Z}$.
Montrer que $pgcd(a, bc) = pgcd(a, c)$.

Exercice 5

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on note q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b.
Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le quotient de la division euclidienne de $(ab^n - 1)$ par b^{n+1}.

Exercice 6
Soient a et b premiers entre eux.
Montrer que $a \wedge (a+b) = b \wedge (a+b) = 1$.
En déduire que $(a+b) \wedge ab = 1$.

Exercice 7
Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation :

$$pgcd(x,y) + ppcm(x,y) = x + y.$$

Exercice 8
Soit n un entier supérieur à 2.
On suppose que pour tout facteur premier p de n, p^2 ne divise pas n, mais que $p-1$ divise $n-1$.
Établir

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a^n \equiv a \ \ [n].$$

Structures algébriques

Exercice 9
On définit une loi de composition interne $*$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a * b = \ln(e^a + e^b).$$

Quelles en sont les propriétés ? Possède-t-elle un élément neutre ? Y a-t-il des éléments réguliers ?

Exercice 10
Soit $E = [0,1]$. On définit une loi $*$ sur E par

$$\forall x, y \in E, x * y = x + y - xy.$$

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne commutative et associative.
2. Montrer que $*$ possède un neutre.
3. Quels sont les éléments symétrisables ? réguliers ?

Arithmétiques

Correction de l'exercice 1

1.
2.
3. $\mathcal{S} = \{(10,90),(30,70),(70,30),(90,10)\}$
4. $n^2+n = n(n+1)$
   $1\times(2n+1) - 2\times n = 1$ donc $(2n+1)\wedge n = 1$ $2\times(n+1) - 1\times(2n+1) = 1$ donc $(2n+1)\wedge(n+1) = 1$

Correction de l'exercice 2

1.
2. $3\times(2n+4) - 2\times(3n+3) = 6$ donc $pgcd(2n+4, 3n+3)|6$.
3. $\mathcal{S} = \{(5,60),(15,20),(20,15),(60,5)\}$
4. $3n^2+2n = n(3n+2)$
   $1\times(n+1) - 1\times n = 1$ donc $n\wedge(n+1) = 1$ $3\times(n+1) - 1\times(3n+2) = 1$ donc $(3n+2)\wedge(n+1) = 1$

Correction de l'exercice 3

1.
2.
3. $\mathcal{S} = \{(10,90),(30,70),(70,30),(90,10)\}$
4. $n^2+n = n(n+1)$
   $1\times(2n+1) - 2\times n = 1$ donc $(2n+1)\wedge n = 1$ $2\times(n+1) - 1\times(2n+1) = 1$ donc $(2n+1)\wedge(n+1) = 1$

Correction de l'exercice 4

Correction de l'exercice 5
$a-1 = bq+r$ avec $0\leq r<b$.
$ab^n-1 = (bq+r+1)b^n-1 = qb^{n+1}+b^n(r+1)-1$. Or $0\leq b^n(r+1)-1<b^{n+1}$ donc il s'agit bien de la division euclidienne de ab^n-1 par b^{n+1}.
Le quotient est donc bien q.

Correction de l'exercice 6
Posons $d = pgcd(a, a+b)$. On a $d|a$ et $d|(a+b)$ alors $d|b = (a+b)-a$. Donc $d|pgcd(a,b) = 1$ donc $d = 1$.
De même $pgcd(b, a+b) = 1$. Ainsi $a\wedge(a+b) = b\wedge(a+b) = 1$ et par suite $ab\wedge(a+b) = 1$.

Correction de l'exercice 7
Posons $\delta = pgcd(x,y)$.
On peut écrire
$$x = \delta x' \text{ et } y = \delta y' \text{ avec } x'\wedge y' = 1$$
L'équation dévient :
$$1+x'y' = x'+y' \iff (x'-1)(y'-1) = 0 \iff x' = 1 \text{ ou } y' = 1$$
$\mathcal{S} = \{(\delta,\delta k),(\delta k,\delta)/k,\delta\in\mathbb{N}\}$.

Correction de l'exercice 8
Par hypothèses, on peut écrire $n = p_1p_2...p_r$ avec $p_1,...,p_r$ nombres premiers deux à deux distincts.
Soit $a\in\mathbb{Z}$. Considérons $1\leq i\leq r$.
Si p_i ne divise pas a, le petit théorème de Fermat assure que $a^{p_i-1}\equiv 1\ [p_i]$.
Puisque p_i divise $n-1$, on a encore $a^{n-1}\equiv 1\ [p_i]$ et donc $a^n\equiv a\ [p_i]$.
Si p_i divise a alors p_i divise aussi a^n et donc $a^n\equiv 0\equiv a\ [p_i]$.

Structures algébriques

Correction de l'exercice 9

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, b * a = \ln(e^b + e^a) = \ln(e^a + e^b) = a * b.$$

$*$ est commutative.

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (a*b)*c = \ln(e^{a*b} + e^c) = \ln(e^a + e^b + e^c) = \ln(e^a + e^{b*c}) = a*(b*c).$$

$*$ est associative.

$$a * \epsilon = a \Leftrightarrow \ln(e^a + e^\epsilon) = a \Leftrightarrow e^\epsilon = 0.$$

Il n'y a donc pas de neutre.

$$a * b = a * c \Rightarrow \ln(e^a + e^b) = \ln(e^a + e^c) \Rightarrow e^b = e^c \Rightarrow b = c.$$

Tout élément est régulier.

Correction de l'exercice 10

1. $1 - (x + y - xy) = (1-x)(1-y)$, donc si $x \leq 1$ et si $y \leq 1$ alors $x * y \leq 1$.
   $x + y - xy = x(1-y) + y \geq 0$.
   Par suite $*$ est bien une loi de composition interne sur E.
2. 0 est un élément neutre de E.
3. Si $x \in]0,1]$ alors pour tout $y \in [0,1]$, $x * y = x(1-y) + y > 0$ et donc x n'est pas inversible dans E.
   Ainsi, seul 0 est inversible.
   Pour tout $x, y, z \in [0,1]$,
   $$x * y = x * z \Leftrightarrow y(1-x) = z(1-x).$$
   Ainsi tout $x \in [0,1[$ est régulier tandis que 1 ne l'est visiblement pas.