Colle 27 - MPSI
Calcul matriciel - Variable aléatoire

Rang d'une matrice

Exercice 1
Calculer le rang des applications linéaires suivantes :

1. $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ définie par
$$f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$$
2. $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ définie par
$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$$
3. $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ définie par
$$f(x, y, z, t) = (x + y - t, x + z + 2t, 2x + y - z + t, -x + 2y + z)$$

Exercice 2
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner le rang de M et la dimension de son noyau.
2. Préciser noyau et image de M.
3. Calculer M^n.

Exercice 3
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de rang 1.

1. Etablir l'existence de colonnes $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = X^tY$.
2. En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

Trace

Exercice 4
Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant
$$AB - AB = I_n?$$

Exercice 5
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices vérifiant
$$AB - BA = A$$
Calculer $\mathrm{tr}(A^p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par
$$\varphi(M) = MA$$
Exprimer la trace de φ en fonction de celle de A.

Exercice 7
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation
$$X +^t X = \mathrm{tr}(X)A$$
d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Loi binomiale

Exercice 8
Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre p.
Quelle est la loi suivie par la variable $Y = n - X$?

Exercice 9
Une variable aléatoire réelle X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0;1[$.
Pour quelle valeur de k, la probabilité $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ est-elle maximale ?

Exercice 10
Un étudiant résout un QCM constitué de n questions offrant chacune quatre réponses possibles. Pour chaque question, et indépendamment les unes des autres, il a la probabilité p de savoir résoudre celle-ci. Dans ce cas il produit la bonne réponse.
Si en revanche, il ne sait résoudre la question, il choisit arbitrairement l'une des quatre réponses possibles.
On note X la variable aléatoire déterminant le nombre de questions qu'il savait résoudre et Y le nombre de question qu'il a correctement résolues parmi celles où il a répondu « au hasard ».

1. Reconnaître la loi de $Z = X + Y$.
2. Calculer espérance et variance de Z.

Indépendance de variables aléatoires

Exercice 11
Soient X et Y deux variables aléatoires finies sur un espace Ω. On suppose

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

Exercice 12
Montrer que deux événements sont indépendants si, et seulement si, leurs fonctions indicatrices définissent des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 13
Soient X et Y deux variables aléatoires prenant pour valeurs $a_1, ..., a_n$ avec

$$\mathbb{P}(X = a_i) = \mathbb{P}(Y = a_i) = p_i$$

On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.
Montrer que

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i)$$

Exercice 14
Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois binomiales de tailles n et m et de même paramètre p.
Peut-on identifier la loi suivie par la variable aléatoire $Z = X = Y$?

Exercice 15
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?

Espérance et Variance

Exercice 16
Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini. Etablir

$$\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$$

Exercice 17
Soit $p \in]0;1[$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p$$

1. Calculer l'espérance de X_k.

2. On pose
$$Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$$
En calculant de deux façons l'espérance de Y_n, déterminer $p_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$.
3. Quelle est la limite de p_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 18
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[[1; n]]$.

1. Montrer que
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X > k).$$
2. On suppose les variables X et Y uniformes.
Déterminer l'espérance de $\min(X, Y)$ puis $\max(X, Y)$.
Déterminer aussi l'espérance de $|X - Y|$.

Exercice 19
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[[0; n]]$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant
$$\mathbb{P}(X = k) = a\binom{n}{k}$$
Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 20
Soit X une variable aléatoire binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0; 1[$.
Calculer l'espérance de la variable
$$Y = \frac{1}{X+1}$$

Exercice 21
Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage.
Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance ?

Rang d'une matrice

Correction de l'exercice 1

1. $rg(f) = 3$.
2. $rg(f) = 2$.
3. $rg(f) = 4$.

Correction de l'exercice 2

1. En retirant la première ligne à la dernière

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis en ajoutant la deuxième ligne à la dernière

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-(-1)^n \end{pmatrix}$$

Si n est pair alors $\mathrm{rg} M = n-1$, sinon $\mathrm{rg} M = n$.

2. Dans le cas n impair c'est immédiat.
   Dans le cas n pair, $\ker M = \mathrm{Vect}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $ImM : x_1 - x_2 + x_3 + ... + x_{n-1} - x_n = 0$.
3. $M = I + N$ avec la matrice de permutation

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k = \begin{pmatrix} 2\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ \binom{n}{n-1} & 2\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{n}{2} \\ \binom{n}{2} & & \ddots & \ddots & \binom{n}{1} \\ \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} & 2\binom{n}{0} \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 3

1. A est équivalente à la matrice $J_1 = \mathrm{diag}(1, 0, ..., 0)$, donc il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A = PJ_1Q$.
   Pour $C =^t (1, 0, ..., 0)$, on a $J_1 = C^tC$ donc $A = X^tY$ avec $X = PC$ et $Y =^t QC$.
2. $A^2 = X({}^tYX){}^tY$
   ${}^tYX$ est un scalaire λ donc $A^2 = X\lambda^tY = \lambda X^tY = \lambda A$.

Trace

Correction de l'exercice 4

De telles matrices n'existent pas

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

et donc

$$\mathrm{tr}(AB - BA) = 0 \neq \mathrm{tr}(I_n)$$

Correction de l'exercice 5

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

On a donc

$$\operatorname{tr}A = \operatorname{tr}(AB - BA) = 0$$

En généralisant

$$\operatorname{tr}(A^p) = \operatorname{tr}(A^{p-1})(AB - BA)) = \operatorname{tr}(A^pB) - \operatorname{tr}(A^{p-1}BA)$$

Or

$$\operatorname{tr}(A^{p-1}BA) = \operatorname{tr}((A^{p-1}B)A) = \operatorname{tr}(A(A^{p-1}B)) = \operatorname{tr}(A^pB)$$

Donc

$$\operatorname{tr}(A^p) = 0$$

Correction de l'exercice 6
Calculons les coefficients diagonaux de la représentation matricielle de φ dans la base canonique formée des matrices élémentaires $E_{i,j}$.
On a $\varphi(E_{i,j}) = E_{i,j}A$.
Or $A = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l}E_{k,l}$ donc $\varphi(E_{i,j}) = \sum_{l=1}^n a_{j,l}E_{i,l}$ car $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.
La composante de $\varphi(E_{i,j})$ selon $E_{i,j}$ vaut $a_{j,j}$.
Par suite la trace de φ vaut $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i} = n\operatorname{tr}A$.

Correction de l'exercice 7
Soit X solution. La matrice $X +^t X$ est symétrique.
Cas A n'est pas symétrique :
Nécessairement $\operatorname{tr}(X) = 0$ et l'équation étudiée devient $X +^t X = 0$ dont les solutions sont les matrices antisymétriques. Inversement, ces dernières sont solutions de l'équation initiale.
Cas A est symétrique :
En passant à la trace l'équation étudiée, on obtient

$$2\operatorname{tr}(X) = \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(A).$$

Si $\operatorname{tr}A \neq 2$ alors on obtient à nouveau $\operatorname{tr}X = 0$ et on conclut que X est antisymétrique.
Si $\operatorname{tr}A = 2$ alors $Y = X - \dfrac{1}{2}\operatorname{tr}(X)A$ vérifie $Y +^t Y = X +^t X - \operatorname{tr}A = 0$ donc Y est antisymétrique puis la matrice X est de la forme $\lambda A + Y$ avec Y antisymétrique. Inversement, une telle matrice est solution.

Loi Binomiale

Correction de l'exercice 8
$X(\Omega) = Y(\Omega) = [[0; n]]$. Pour $k \in [[0; n]]$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

donc

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n - k) = \binom{n}{k} p^{n-k}(1-p)^k$$

La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de taille n et de paramètre $q = 1 - p$.

Correction de l'exercice 9
Par définition d'une loi binomiale

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

et donc pour $k \geq 1$

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{n-k+1}{k}\frac{p}{1-p}$$

On en déduit

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} \geq 1 \Leftrightarrow k \leq (n+1)p$$

En notant k_0 la partie entière de $(n+1)p$, la suite $(p_k)_{0\leq k\leq k_0}$ est croissante et la suite $(p_k)_{k_0\leq k\leq n}$ est décroissante.
Le maximum de p_k est donc atteint en $k = k_0$.

Correction de l'exercice 10
Compte tenu de l'expérience modélisée, on peut affirmer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p.

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

De plus, pour $k\in[[0;n]]$, si l'événement $(X=k)$ est réalisé, il y a $n-k$ questions pour lesquelles l'étudiant répond au hasard avec une probabilité $1/4$ de réussir :

$$\mathbb{P}(Y=j|X=k)=\binom{n-k}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^j\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k-j}$$

avec $j\in[[0;n-k]]$.

1. La variable Z prend ses valeurs dans $[[0;n]]$.
   Pour $k\in[[0;n]]$, l'événement $(Z=k)$ peut être décomposé en la réunion disjointe des événements

   $$(X=j,Y=k-j) \text{ avec } j\in\{0,1,...,k\}$$

   Ainsi

   $$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k)&=\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(X=j,Y=k-j)\\
&=\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(Y=k-j|X=j)\mathbb{P}(X=j)\\
&=\sum_{j=0}^{k}\binom{n-j}{j-j}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-j}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\\
&=\sum_{j=0}^{k}\frac{n!}{(k-j)!(n-k)!j!}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-j}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}p^j(1-p)^{n-j}\\
&=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-j}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}p^j(1-p)^{n-j}\\
&=\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{4}(1-p)\right)^{k-j}p^j\\
&=\binom{n}{k}\left[(1-p)\frac{3}{4}\right]^{n-k}\left[\frac{1}{4}(1-p)+p\right]^k\\
&=\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k} \text{ avec } q=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}p
\end{aligned}$$

2. On a alors

   $$\mathbb{E}(Z)=\frac{(3p+1)n}{4}$$

   et

   $$V(Z)=\frac{3n(3p+1)(1-p)}{16}$$

Indépendance de variables aléatoires

Correction de l'exercice 11
Soient $A\subset\{X_1,...,x_n\}$ et $B\subset\{y_1,...,y_m\}$. On a

$$(X=A)\cap(Y=B)=(\Cup_{x\in A}X=x)\cap(\Cup_{y\in B}Y=y)$$

En développant

$$(X=A)\cap(Y=B)=\Cup_{(x,y)\in A\times B}(X=x)\cap(Y=y)$$

Cette réunion étant disjointe

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=A,Y=B) &= \sum_{(x,y)\in A\times B}\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\\ &= \sum_{x\in A}\mathbb{P}(X=x)\sum_{y\in B}\mathbb{P}(Y=y)\\ &= \mathbb{P}(X=A)\mathbb{P}(Y=B)\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 12
Soient A, B deux événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Supposons les fonctions indicatrices 1_A et 1_B indépendantes. On a

$$\mathbb{P}(1_A=1, 1_B=1)=\mathbb{P}(1_A=1)\mathbb{P}(1_B=1)$$

ce qui se relit

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Inversement, supposons les événements A et B indépendants. On sait alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B)&=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\\ \mathbb{P}(\overline{A}\cap B)&=\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)\\ \mathbb{P}(A\cap \overline{B})&=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})\\ \mathbb{P}(\overline{A}\cap \overline{B})&=\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B})\end{aligned}$$

ce qui se relit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1_A=1, 1_B=1)&=\mathbb{P}(1_A=1)\mathbb{P}(1_B=1)\\ \mathbb{P}(1_A=0, 1_B=1)&=\mathbb{P}(1_A=0)\mathbb{P}(1_B=1)\\ \mathbb{P}(1_A=1, 1_B=0)&=\mathbb{P}(1_A=1)\mathbb{P}(1_B=0)\\ \mathbb{P}(1_A=0, 1_B=0)&=\mathbb{P}(1_A=0)\mathbb{P}(1_B=0)\end{aligned}$$

On en déduit que les variables aléatoires 1_A et 1_B sont indépendantes.

Correction de l'exercice 13
L'événement $\{X=Y\}$ se décompose en les événements incompatibles $\{X=a_i\cap Y=a_i\}$. Par hypothèse d'indépendance

$$\mathbb{P}(X=a_i\cap Y=a_i)=\mathbb{P}(X=a_i)\mathbb{P}(Y=a_i)=p_i^2$$

donc

$$\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{i=1}^n p_i^2$$

Puis par complémentation

$$\mathbb{P}(X\neq Y)=1-\sum_{i=1}^n p_i^2=\sum_{i=1}^n -\sum_{i=1}^n p_i^2=\sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)$$

Correction de l'exercice 14
Voir la correction de l'exercice 3.
On obtient $Z\sim\mathcal{B}(n+m,p)$

Correction de l'exercice 15
La réponse est négative en général.
Supposons que X et Y suivent des lois de Bernoulli de paramètre $1/2$.
On a

$$\mathbb{P}(X+Y=2)=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)=1/4$$

et

$$\mathbb{P}(X-Y=0)=\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)=1/2$$

Or l'événement $X+Y=2$ est inclus dans l'événement $X-y=0$ et donc

$$\mathbb{P}(X+Y=2\cap X-Y=0)=\mathbb{P}(X+Y)=2$$

et l'on constate

$$\mathbb{P}(X+Y\cap X-Y=0)\neq\mathbb{P}(X+Y=2)\mathbb{P}(X-Y=0)$$

Espérance et variance

Correction de l'exercice 16
Par la formule de Huygens
$$V(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \geq 0$$

Correction de l'exercice 17

1. $\mathbb{E}(X_k) = 1 \times p + (-1) \times (1-p) = 2p - 1$.
2. Par l'indépendance des variables
$$\mathbb{E}(Y_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = (2p-1)^n$$
Aussi $Y_n \in \{1, -1\}$ et
$$\mathbb{E}(Y_n) = 1 \times p_n + (-1) \times (1 - p_n) = 2p_n - 1$$
On en déduit
$$p_n = \frac{1 + (2p-1)^n}{2}$$
3. Puisque $|p| < 1$, $p_n \to \dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 18

1. En écrivant
$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)$$
on obtient
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}((X = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k)$$
2. Par la propriété au-dessus
$$\mathbb{E}(\min(XnY)) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k \text{ et } Y \geq k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k)\mathbb{P}(Y \geq k)$$
Puisque $\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(Y \geq k) = \dfrac{n+1-k}{n}$ on obtient
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\min(X,Y)) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2 \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\end{aligned}$$
Aussi
$$\min(X,Y) + \max(X,Y) = X + Y$$
donc
$$\mathbb{E}(\max(X,Y)) = n + 1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$$
Encore
$$\min(X,Y) = \frac{1}{2}((X+Y) - |X-Y|)$$
donc
$$\mathbb{E}(|X-Y|) = n + 1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n} = \frac{n^2-1}{3n}$$

Correction de l'exercice 19
La valeur de a se déduit de l'identité
$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1$$

et l'on obtient $a = \dfrac{1}{2^n}$.

$$\mathbb{E}(X) = a\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = an\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = an2^{n-1} = \frac{n}{2}$$

et la variance est

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Or

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = a\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = an(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}$$

Donc

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n(n+1)}{4}$$

puis

$$V(X) = \frac{n}{4}$$

Correction de l'exercice 20
Puisque

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

l'espérance de Y est donnée par

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Or

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$$

donc

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k}$$

puis par glissement d'indice

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{p(n+1)}{\sum}^{n+1}_{k=1}\binom{n+1}{k}p^k(1-p)^{(n+1)-k}$$

et enfin par la formule du binôme avec un terme manquant

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n1)}$$

Correction de l'exercice 21
En distinguant les boules, il y a $\binom{2n}{n}$ tirages possibles et, pour $0 \le k \le n$, exactement $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ tirages conduisant à l'obtention de k boules rouges. On en déduit

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}}$$

L'espérance de X est

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k}$$

On a

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k} = \binom{2n-1}{n-1}$$

en considérant les coefficients de X^{n-1} dans le développement de

$$(1+X)^{n-1}(1+X)^n = (1+X)^{2n-1}$$

et donc

$$\mathbb{E}(X) = n\frac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n}{2}$$

On calcule la variance par la relation

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

en commençant par calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$.

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2}\binom{n}{n-k}$$

et en considérant le coefficient de X^{n-2} dans le développement de

$$(1+X)^{n-2}(1+X)^n = (1+X)^{2n-2}$$

on obtient

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = n(n-1)\frac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n(n-1)^2}{2(2n-1)}$$

puis

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{n^3}{2(2n-1)}$$

et enfin

$$V(X) = \frac{n^2}{4(2n-1)}$$