Colle 05 - MPSI

I. Applications

Exercice 1
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Établir les implications suivantes :

1. $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
2. $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective.
3. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
4. $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow f$ surjective.

Exercice 2
Soient A et B deux parties d'un ensemble E et

$$\begin{aligned} f : \mathscr{P}(E) &\to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X &\mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 3
Soit $f : E \to F$. Montrer que s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Une application de la question précédente :
Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(k) = 2k, \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g.
2. Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.
   Étudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

II. Analyse

Exercice 4
Calculer la dérivée de

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}.$$

III. Similitudes

Exercice 5

1. Donner l'écriture complexe de la similitude directe de centre $A(1,1)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
   Déterminer la nature et les éléments géométriques de la transformation géométrique définie par l'écriture complexe :
   $$z' = -z + 2i.$$
2. Donner l'écriture complexe de la similitude directe de centre $A(1,-1)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   Déterminer la nature et les éléments géométriques de la transformation géométrique définie par l'écriture complexe :
   $$z' = 3z - 2.$$
3. Donner l'écriture complexe de la similitude directe de centre $A(-1,1)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{-\pi}{4}$.
   Déterminer la nature et les éléments géométriques de la transformation géométrique définie par l'écriture complexe :
   $$z' = -2z - 6.$$

IV. Relation binaire

Exercice 6
On définit une relation binaire $\prec$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$x \prec y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n.$$

Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre.
Cet ordre est-il total ?

Exercice 7
Soient E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application injective.
On définit sur E une relation d'ordre binaire $\prec$ par

$$x \prec y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur E.

Exercice 8
On définit une relation binaire $\prec$ sur $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ par :

$$z \prec z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| < |z'| \text{ ou} \\ |z| = |z'| \text{ et } \mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Re}(z') \end{cases}$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre total.

Éléments de correction

I. Applications

II. Analyse

Correction de l'exercice 4

$$U = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{u}{v}$$

pour $x \neq 0$.
$f'(x) = \frac{U'}{U}$ avec $U' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $v'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
$f'(x) = \frac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$.

III. Similitudes

Correction de l'exercice 5

1. $z' - (1+i) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\left(z-(1+i)\right)$ soit $z' = (-1+i)z + 3 + i$.
   Point fixe $z_0 = i$. Donc $z' - i = -1(z-i)$
   Similitude directe de centre $A(0,1)$, de rapport 1 et d'angle π. (Symétrie centrale).
2. $z' - (1-i) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z-(1-i)\right)$ soit $z' = (1+i)z - 1 - i$.
   Point fixe $z_0 = 1$. Donc $z' - 1 = 3(z-i)$
   Similitude directe de centre $A(1,0)$, de rapport 3 et d'angle 0. (Homothétie de rapport 3).
3. $z' - (-1+i) = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}\left(z-(-1+i)\right)$ soit $z' = (1-i)z - 1 - i$.
   Point fixe $z_0 = -2$. Donc $z' + 2 = -2(z+2)$
   Similitude directe de centre $A(-2,0)$, de rapport 2 et d'angle π. (Symétrie centrale puis Hométhétie de rapport 2).