Colle 23 - MPSI
Probabilités sur un univers fini

Questions de cours

Exercice 1
Démontrer que :

1. si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
3. pour toute famille $(A_1, A_2, ..., A_n)$ d'événements deux à deux incompatibles, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Exercice 2
Prouver que l'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur Ω.

Exercice 3
Démontrer la formule des probabilités composées.

Construction d'une probabilité

Exercice 4
Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{k\}$ soit proportionnelle à k.

Exercice 5
Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{1, 2, ..., k\}$ soit proportionnelle à k^2.

Exercice 6
A quelle(s) condition(s) sur $x, y \in \mathbb{R}$ existe-t-il une probabilité sur $\Omega = \{a, b, c\}$ vérifiant

$$\mathbb{P}(\{a, b\}) = x \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(\{b, c\}) = y \quad ?$$

Exercice 7
Soient A, B deux parties d'un ensemble Ω fini vérifiant

$$A \cap B \neq \emptyset, A \cap \overline{B} \neq \emptyset, \overline{A} \cap B \neq \emptyset, \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$$

A quelle condition sur $(a, b, c, d) \in]0;1[^4$ existe-t-il une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω vérifiant

$$\mathbb{P}(A|B) = a, \quad \mathbb{P}(A|\overline{B}) = b, \quad \mathbb{P}(B|A) = c \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B|\overline{A}) = d \quad ?$$

Probabilités conditionnelles

Exercice 8
Soient A et B deux événements avec $\mathbb{P}(A) > 0$. Comparer les probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}(A \cap B | A \cup B) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(A \cap B | A)$$

Exercice 9
On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor a été placé dans l'un de ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N - 1$ coffres sans trouver le trésor.
Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Exercice 10
On se donne $N+1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne numéroté k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire des boules avec remise.

1. Quelle est la probabilité que la $(n+1)$-ième boule tirée soit blanche sachant que les n précédentes l'étaient toutes ?
2. Que devient cette probabilité lorsque $N \to +\infty$?

Exercice 11
Une famille possède deux enfants.

1. Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?
2. Quelle est cette probabilité sachant que l'aîné est un garçon ?
3. On sait que l'un des deux enfants est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre le soit aussi ?
4. On sait que l'un des deux enfants est un garçon et est né un 29 février, quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

Questions de cours

Correction de l'exercice 1

Correction de l'exercice 2

Correction de l'exercice 3

Construction d'une probabilité

Correction de l'exercice 4
Par hypothèse, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(\{k\}) = \alpha k$. Or par additivité

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Donc

$$\alpha = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Correction de l'exercice 5
Si $\mathbb{P}$ est une probabilité solution alors, par hypothèse, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbb{P}(\{1, 2, ..., k\}) = \alpha k^2.$$

En particulier, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ donne $\alpha = \frac{1}{n^2}$.
Aussi

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(\{1, 2, ..., k\}) - \mathbb{P}(\{1, 2, .., k-1\}) = \frac{2k-1}{n^2}$$

Inversement, on définit bien une probabilité en posant

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{2k-1}{n^2}$$

car ces valeurs sont positives de somme égale à 1.
On vérifie aussi par additivité

$$\mathbb{P}(\{1, 2, ..., k\}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{n^2} = \frac{k^2}{n^2}$$

et la probabilité déterminée est bien solution.

Correction de l'exercice 6
Une probabilité solution $\mathbb{P}$ sera entièrement déterminée par les valeurs de $p = \mathbb{P}(\{a\}), q = \mathbb{P}(\{b\})$ et $r = \mathbb{P}(\{c\})$ sous les conditions

$$p, d, r \geq 0 \qquad \text{et} \qquad p + q + r = 1$$

Nous aurons $\mathbb{P}(\{a, b\}) = x$ et $\mathbb{P}(\{b, c\}) = y$ si

$$p + q = x \qquad \text{et} \qquad q + r = y$$

Le système

$$\begin{cases} p+q & = x \\ q+r & = y \\ p+q+r & = 1 \end{cases}$$

a pour solution

$$p = 1 - y, q = x + y - 1 \text{ et } r = 1 - x$$

Cette solution vérifie $p, q, r \geq 0$ si, et seulement si,

$$x \leq 1, y \leq 1 \text{ et } x + y \geq 1$$

ce qui fournit les conditions nécessaires et suffisantes que doivent respecter x et y.

Correction de l'exercice 7
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité solution. Posons

$$x = \mathbb{P}(A \cap B), y = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}), z = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \text{ et } t = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$$

On a $x, y, z, t \geq 0$ et par additivité

$$x + y + z + t = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$$

Inversement, si x, y, z, t sont quatre réels positifs de somme égale à 1, on peut déterminer une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω vérifiant les conditions ci-dessus : il suffit d'introduire un élément de chacun des ensembles disjoints $A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$, de poser la probabilité de l'événement élémentaire associé égale à x, y, z et t respectivement, puis les probabilités des autres événements élémentaires égaux à 0.
Le problème revient alors à déterminer sous quelle condition, il existe $x, y, z, t \geq 0$ de somme égale à 1 tels que

$$\mathbb{P}(A|B) = a, \mathbb{P}(A|\overline{B}) = b, \mathbb{P}(B|A) = c \text{ et } \mathbb{P}(B|\overline{A}) = d$$

Par additivité

$$\mathbb{P}(A) = x + y \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(B) = x + z$$

On a alors $\mathbb{P}(A|B) = a$ si, et seulement si, $x = a(x + z)$. De même, les autres conditions fournissent les équations

$$y = b(1 - (x + z)), x = c(x + y) \text{ et } z = (1 - (x + y))$$

ce qui nous conduit à un système linéaire de quatre équations et trois inconnues.

$$\begin{cases} (1-a)x - az & = 0 \\ bx + y + bz & = b \\ (1-c)x - cy & = 0 \\ dx + dy + z & = d \end{cases}$$

Les trois premières équations conduisent à la solution

$$x = \frac{abc}{a(1-c) + bc} \qquad y = \frac{ab(1-c)}{a(1-c) + bc} \qquad z = \frac{(1-a)bc}{a(1-c) + bc}$$

avec le dénominateur commun non nul car somme de quantités strictement positives.
La quatrième équation dud système est alors vérifiée si, et seulement si,

$$ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d)$$

La solution (x, y, z) alors obtenue vérifie $x, y, z \geq 0$ et $x + y + z \leq 1$ de sorte qu'on peut encore déterminer $t \geq 0$ tel que $x + y + z + t = 1$.
Finalement, il existe une probabilité telle que voulue si, et seulement si,

$$ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d)$$

ce qui, en divisant par $abcd$, peut encore d'énoncer

$$\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{d}\right)$$

Correction de l'exercice 8

Correction de l'exercice 9
Considérons l'événement A : un trésor est placé dans l'un des coffres. Par hypothèse

$$\mathbb{P}(A) = p$$

Considérons l'événement A_i : un trésor est placé dans le coffre d'indice i. Par hypothèse $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_j)$ et puisque les événements A_i sont deux à deux incompatibles

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{p}{N}$$

La question posée consiste à déterminer

$$\mathbb{P}(A_N|\overline{A}_1 \cap ... \cap \overline{A}_{N-1})$$

On a
$$\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap ... \cap \overline{A}_{N-1}) = 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup ... \cup A_{N-1}) = 1 - \frac{N-1}{N}p$$
et
$$\mathbb{P}(A_N \cap \overline{A}_1 \cap ... \cap \overline{A}_{N-1}) = \mathbb{P}(A_N) = \frac{p}{N}$$
donc
$$\mathbb{P}(A_N | \overline{A}_1 \cap ... \cap \overline{A}_{N-1}) = \frac{p}{N-(N-1)p}$$

Correction de l'exercice 10

1. Dans l'urne d'indice k, la probabilité de tirer une boule blanche vaut $\frac{k}{n}$.

   Dans cette même urne, la probabilité de tirer une successions de n boules blanches vaut $\left(\frac{k}{N}\right)^n$.

   Par la formule des probabilités totales, la probabilité qu'après choix d'une urne, nous tirions une succession de n boules blanches vaut
   $$\pi_n = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{N}\right)^n$$
   Notons A_k l'événement, la boule tirée lors du k-ième tirage est une boule blanche.
   La probabilité conditionnée cherchée vaut
   $$\mathbb{P}(A_{n+1}|A_1 \cap ... \cap A_n) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n \cap A_{n+1})}{\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n)}$$
   avec
   $$\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) = \pi_n$$
   donc
   $$\mathbb{P}(A_{n+1}|A_1 \cap ... \cap A_n) = \frac{1}{N}\frac{\sum_{k=0}^N k^{n+1}}{\sum_{k=0}^N k^n}$$
2. Par somme de Riemann, on a
   $$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n \to \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}, \quad \text{pour } N \to +\infty$$
   En adaptant quelque peu l'expression, on obtient
   $$\pi_n \to \frac{1}{n+1}, \quad \text{pour } N \to +\infty$$
   donc
   $$\mathbb{P}(A_{n+1}|A_1 \cap ... \cap A_n) \to \frac{n+1}{n+2}, \quad \text{pour } N \to +\infty$$

Correction de l'exercice 11

Pour $i = 1, 2$, notons G_i l'événement : « le i-ème enfant de la famille est un garçon ».
On considère les événements G_1 et G_2 indépendants et
$$\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(G_2) = \frac{1}{2}$$
On étudie l'événement $A = G_1 \cap G_2$.

1. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}(G_2) = \frac{1}{4}$.
2. $\mathbb{P}(A|G_1) = \dfrac{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2)}{\mathbb{P}(G_1)} = \mathbb{P}(G_2) = \frac{1}{2}$.
3. $\mathbb{P}(A|G_1 \cup G_2) = \dfrac{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2)}{\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2) - \mathbb{P}(G_1 \cap G_2)} = \frac{1}{3}$.

4. Notons D_i l'événement « le i-ème enfant de la famille est né le 29 février ».
Les événements G_1, G_2, D_1, D_2 sont considérés mutuellement indépendants avec

$$\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(D_2) = \frac{1}{366 + 3 \times 365} = p$$

(en première approximation, une année bissextile a lieu tous les quatre ans)
On veut calculer

$$\mathbb{P}(A|(G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cap D_2))$$

On a

$$\mathbb{P}((G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cap D_2)) = \mathbb{P}(G_1 \cap D_1) + \mathbb{P}(G_2 \cap D_2) - \mathbb{P}(G_1 \cap D_1 \cap G_2 \cap D_2)$$

et donc

$$\mathbb{P}((G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cap D_2)) = p - \frac{1}{4}p^2$$

Aussi

$$\mathbb{P}\left(A \cap [(G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cap D_2)]\right) = \mathbb{P}\left([A \cap D_1] \cup [A \cap D_2]\right)$$

et donc

$$\mathbb{P}\left(A \cap [(G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cap D_2)]\right) = \frac{1}{2}p - \frac{1}{4}p^2$$

Finalement

$$\mathbb{P}(A|(G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cap D_2)) = \frac{2-p}{4-p} \approx 0,5$$