Colle 21 - MPSI Espaces Vectoriels

I. Sous-espace vectoriel

Exercice 1
Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}$.
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$.
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 0\}$.

Exercice 2
Les parties suivantes sont-elles ses sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | (u_n) \text{ bornée}\}$.
2. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | (u_n) \text{ monotone}\}$.
3. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | (u_n) \text{ convergente}\}$.
4. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | (u_n) \text{ arithmétique}\}$.

Exercice 3
Montrer que les parties de $\mathscr{F}([a;b],\mathbb{R})$ suivantes sont des sous-espaces vectoriels :

1. $F = \{f \in \mathcal{C}^1([a;b],\mathbb{R}) | f'(a) = f'(b)\}$.
2. $G = \left\{f \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R}) | \int_a^b f(t)dt = 0\right\}$.

Exercice 4
Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions de E croissantes et

$$\Delta = \{f - g | f, g \in \mathscr{C}\}.$$

Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de E.

II. Algèbre linéaire

Exercice 5
Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ?
Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire liant des vecteurs :

1. (x_1, x_2) avec $x_1 = (1,0,1)$ et $x_2 = (1,2,2)$.
2. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,0,0)$ et $x_2 = (1,1,0)$ et $x_3 = (1,1,1)$.
3. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,2,1)$ et $x_2 = (2,1,-1)$ et $x_3 = (1,-1,-2)$.

Exercice 6
On pose $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0;2\pi] \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = x\cos x, \quad f_3(x) = \sin x, \quad f_4(x) = x\sin x.$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Exercice 7
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1})$ une famille de vecteurs de E. Etablir :

1. Si $(u_1, u_2, .., u_n)$ est libre et $u_{n+1} \notin \text{Vect}(u_1, u_2, ..., u_n)$ alors $(u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1})$ est libre.
2. Si $(u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1})$ est génératrice et $u_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, u_2, ..., u_n)$ alors $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est génératrice.

Exercice 8
On pose $\vec{e}_1 = (1,1,1), \vec{e}_2 = (1,1,0)$ et $\vec{e}_3 = (0,1,1)$. Montrer que $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On pose

$$\varepsilon_1 = e_2 + 2e_3, \quad \varepsilon_2 = e_3 - e_1 \text{ et } \varepsilon_3 = e_1 + 2e_2$$

Montrer que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E.

Exercice 10
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On pose

$$\varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \text{ et } \varepsilon_2 = e_2 + e_3$$

Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre et compléter celle-ci en une base de E.

Exercice 11
Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos x.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Exercice 12
Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Montrer que $(f_0, ..., f_n)$ est libre.
2. En déduire $\dim E$.

Exercice 13
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des suites réelles p périodiques, *i.e.* l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n.$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer celle-ci.

Exercice 14
Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que si $\dim F + \dim G > n$ alors $F \cap G$ contient un vecteur non nul.

Exercice 15
Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs

$$u = (1, 0, 1, 0), \quad v = (0, 1, -1, 0), \quad w = (1, 1, 1, 1), \quad x = (0, 0, 1, 0), \quad y = (1, 1, 0, -1).$$

Soit $F = \text{Vect}(u, v, w)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$.
Quelles sont les dimensions de $F, G, F + G$ et $F \cap G$?

Exercice 16 (ENS Lyon)
Montrer que deux sous-espaces vectoriels d'une espace vectoriel de dimension finie qui sont de même dimension ont un supplémentaire commun.

Exercice 17 (CENTRALE MP)
Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

1. On suppose $\dim F_1 = \dim F_2$. Montrer qu'il existe G sous-espace vectoriel de E tel que $F_1 \oplus G = F_2 \oplus G = E$.
2. On suppose que $\dim F_1 \leq \dim F_2$. Montrer qu'il existe G_1 et G_2 sous-espaces vectoriels de E tels que

$$F_1 \oplus G_1 = F_2 \oplus G_2 = E \text{ et } G_2 \subset G_1.$$

Exercice 18
Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes de $\mathbb{R}^4$:

1. (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 1, 1, 1), x_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $x_3 = (1, 0, 1, 1)$.
2. (x_1, x_2, x_3, x_4) avec $x_1 = (1, 1, 0, 1), x_2 = (1, -1, 1, 0), x_3 = (2, 0, 1, 1)$ et $x_4 = (0, 2, -1, 1)$.

Exercice 19
Dans $E = \mathbb{R}^{]-1;1[}$ on considère :

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quel est le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) ?

I. Sous-espace vectoriel

Correction de l'exercice 1

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}$ pas stable par multiplication scalaire : $(0,1)$ appartient mais pas $-(0,1)$.
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$ oui.
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 0\}$ pas stable par addition : $(1,0)+(0,1)$.

Correction de l'exercice 2

1. oui
2. non
3. oui
4. oui

Correction de l'exercice 3

1. $F \subset \mathcal{F}(5a;b]\mathbb{R})$ et $0 \in F$.
   Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ et
   $$(\lambda f + \lambda g)'(a) = ... = (\lambda f + \lambda g)'(b)$$
   donc $\lambda f + \mu g \in F$.
2. idem.

Correction de l'exercice 4

$\Delta \subset E$. $0 - 0 = 0$, avec $0 \in \mathscr{C}$ donc $0 \in \Delta$.
Soient $h, h' \in \Delta$. On peut écrire $h = f - g$ et $h' = f' - g'$ avec $f, g, f', g' \in \mathscr{C}$. On a alors $h + h' = (f + f') - (g + g')$ avec $(f + f'), (g + g') \in \mathscr{C}$.
$\forall \lambda \geq 0$, on a $\lambda h = \lambda f - \lambda g$ avec $\lambda f, \lambda g \in \mathscr{C}$.
$\forall \lambda < 0$, on a $\lambda h = (-\lambda g) - (-\lambda f)$ avec $(-\lambda f), (-\lambda g) \in \mathscr{C}$.
Dans les deux cas $\lambda h \in \Delta$.

II. Algèbre linéaire

Correction de l'exercice 5

1. oui
2. oui
3. non $x_3 = x_2 - x_1$.

Correction de l'exercice 6

Supposons
$$af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0$$
On a
$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad (a + bx)\cos x + (c + dx)\sin x = 0.$$
Pour $x = 0$ et $x = \pi$ on obtient le système :
$$\begin{cases} a & = 0 \\ a + b\pi & = 0 \end{cases}$$
d'où $a = b = 0$. De même en prenant $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$ on obtient $c = d = 0$.

Correction de l'exercice 7

1. Supposons $\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} = 0_E$.
   Si $\lambda_{n+1} \neq 0$ alors $u_{n+1} = \dfrac{1}{\lambda_{n+1}}(\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n)$ ce qui est exclu.
   Donc $\lambda_{n+1} = 0$ donc $\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n = 0_E$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ car la famille $(u_1, ..., u_n)$ est libre.
2. Soit $x \in E$. On peut écrire $x = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1}$ car $(u_1, ..., u_{n+1})$ génératrice.
   On peut écrire $u_{n+1} = \dfrac{1}{\lambda_{n+1}}(\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n)$ car $u_{n+1} \in \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_n)$, on a donc $x = \mu_1 u_1 + ... + \mu_n u_n$ avec $\mu_i = \lambda_i + \lambda_{n+1}\mu_i$. On a donc $x \in \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_n)$.
   Finalement $(u_1, ..., u_n)$ est génératrice.

Correction de l'exercice 8
Supposons $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \vec{0}$.
On a

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda - 1 + \lambda_3 & 0 \end{cases}$$

qui donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
La famille $\mathcal{B}$ est une famille libre formée de $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 9
idem

Correction de l'exercice 10
Les vecteurs ε_1 et ε_2 ne sont pas colinéaires donc forme une famille libre.
Pour $\varepsilon_3 = e_2$ (ou e_3 mais surtout pas e_1), on montre que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre et donc est une base de E.

Correction de l'exercice 11

1. $E = \text{Vect}(f_0, f_1, f_2)$ avec $f_0(x) = \cos x$, $f_1(x) = x\cos x$ et $f_2(x) = x^2\cos x$.
   E est donc un sous espace-vectoriel et (f_0, f_1, f_2) en est une famille génératrice.
2. Supposons $\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2 = 0$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\cos x = 0$.
   Pour $x = 2n\pi$, on obtient, $\alpha + 2n\pi\beta + 4n^2\pi^2\gamma = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Si $\gamma \neq 0$, alors $\alpha + 2n\pi\beta + 4n^2\pi^2\gamma \to \pm\infty$. C'est exclu, donc $\gamma = 0$.
   On alors $\alpha + 2n\pi\beta = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Pour $n = 0$, puis $n = 1$ on obtient successivement $\alpha = \beta = 0$.
   Finalement (f_0, f_1, f_2) est une famille libre. C'est donc une base de E de $\dim E = 3$.

Correction de l'exercice 12

1. Supposons $\lambda_0 f_0 + ... + \lambda_n f_n = 0$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$:
   $$\lambda_0 + \lambda_1 x + ... + \lambda_n x^n = 0.$$
   Si $\lambda_n \neq 0$ alors $\lambda_0 + \lambda_1 x + ... + \lambda_n x^n \to \pm\infty, x \to +\infty$, c'est absurde.
   Nécessairement $\lambda_n = 0$ puis de même $\lambda_{n-1} = ... = \lambda_0 = 0$.
   Finalement $(f_0, ..., f_n)$ est libre.
2. Par suite $n + 1 \leq \dim E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\dim E = +\infty$.

Correction de l'exercice 13
On vérifie aisément que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Pour tout $0 \leq i \leq p - 1$, on note e_i la suite définie par

$$e_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i\ [p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie aisément que les suites $e_0, ..., e_{p-1}$ sont linéairement indépendantes et on a

$$\forall u \in E, u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$$

La famille $(e_0, ..., e_{p-1})$ est donc une base de E et par suite $\dim E = p$.

Correction de l'exercice 14
On sait (formule de Grassmann) que
$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$
donc
$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G)$$
or $\dim(F + G) \leq \dim E = n$, donc $\dim(F \cap G) > 0$.
Par suite $F \cap G$ possède un vecteur non nul.

Correction de l'exercice 15
(u, v, w) forme une famille libre donc une base de F. Ainsi $\dim F = 3$.
(x, y) forme une famille libre donc une base de G. Ainsi $\dim G = 2$.
(u, v, w, x) forme une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^4$. Ainsi $F + G = E$ et $\dim(F + G) = 4$.
Enfin
$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 1.$$

Correction de l'exercice 16 (ENS Lyon)
Notons F et G les sous-espaces vectoriels de même dimension d'un espace vectoriel E.
Raisonnons par récurrence décroissante sur $n = \dim F = \dim G \in \{0, 1, ..., \dim E\}$.
Si $n = \dim E$, l'espace nul est un supplémentaire commun.
Supposons la propriété établie au rang $n + 1 \in \{1, ..., \dim E\}$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension n.
Si $F = G$ alors n'importe quel supplémentaire de F est convenable.
Sinon, on a $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$ car ils sont de même dimension. Il existe donc $x \in F$ et $x' \in G$ tels que $x \notin G$ et $x' \notin F$.
On a alors $x + x' \notin F \cup G$.
Posons $F' = F \oplus \mathrm{Vect}(x + x')$ et $G' = \oplus \mathrm{Vect}(x + x')$.
Comme $\dim F' = \dim G' = n + 1$, par hypothèse de récurrence, F' et G' possède un supplémentaire commun H et par suite $H \oplus \mathrm{Vect}(x + x')$ est supplémentaire commun à F et G.
Récurrence établie.

Correction de l'exercice 17 (Centrale MP)

1. idem exercice précédent
2. Soit F_1' un sous-espace vectoriel contenant F_1 et de même dimension que F_2.
   F_1' et F_2 possèdent un supplémentaire commun G.
   Considérons H un supplémentaire de F_1 dans F_1'.
   En posant $G_1 = H \oplus G$ et $G_2 = G$ on conclut.

Correction de l'exercice 18

1. (x_1, x_2, x_3) est libre donc de rang 3
2. $x_3 = x_1 + x_2$ et $x_4 = x_1 - x_2$, on a
   $$\mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$$
   Comme (x_1, x_2) est libre, le rang de la famille est 2.

Correction de l'exercice 19
On a $f_1 = f_3 + f_4$ et $f_2 = f_3 - f_4$ donc
$$\mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \mathrm{rg}(f_3, f_4) = 2$$
car (f_3, f_4) est libre.