Colle 09 - MPSI
Équations différentielles

Exercice 1
Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int 3^x dx$
2. $\displaystyle\int \cos(x)\sin(x)dx$
3. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$
4. $\displaystyle\int \sin(2x)\cos(3x)dx$
5. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x+2}dx$
6. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x}\left(x^2-x+1\right)dx$
7. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+2}dx$
8. $\displaystyle\int \frac{(\ln(x))^2}{x+x(\ln(x))^3}dx$

Exercice 2
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)-1}{t\ln(t)+t}dt$
2. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}+t}dt$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}dt$
4. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$

Exercice 3
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $$y'+y=0,$$
2. $$(1+x^2)y'+4xy=0$$
3. $$y'+xy=x$$
4. $$y'+y=2e^x+4\sin x+3\cos x$$
5. $$y'+\frac{x}{x^2+1}y=\frac{1}{x^2+1}$$

Exercice 4
Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés :

1. $$(x^2+1)^2y'+2x(x^2+1)y=1, \quad \text{sur } \mathbb{R}$$
2. $$(2+\cos x)y'+\sin x.y=(2+\cos x)\sin x, \quad \text{sur } \mathbb{R}$$
3. $$\cosh x.y'-\sinh x.y=\sinh^3 x, \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Exercice 5
Déterminer les fonctions $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ dérivables telles que

$$f'(x)+f(x)=f(0)+f(1).$$

Exercice 6
Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)+f(-x)=e^x.$$

Correction de l'exercice 1

1.
2. $\dfrac{\sin^2(x)}{2}$
3. $\displaystyle\int \frac{\sin(5x)-\sin(-x)}{2}$
4.
5. $-(x^2+x+1)\mathrm{e}^{-x}$

Correction de l'exercice 2

Correction de l'exercice 3

1.
$$\mathcal{S} = \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$
2.
$$\mathcal{S} = \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{\lambda}{(x^2+1)^2}, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$
3.
$$\mathcal{S} = \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 1+\lambda e^{-\frac{x^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$
(1 solution particulière évidente)

4. Par le principe de superposition :
Solution générale : $y_0(x) = \lambda e^{-x}$
$y_1(x) = e^x$ solution de $y'+y = 2e^x$.
$y_2(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$ solution de $y'+y = 4\sin x + 3\cos x$.
$$\mathcal{S} = \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^x + \dfrac{7}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x + \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$
5. par la méthode de variation de la constante :
Solution générale : $y_0(x) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}}$.
$$\mathcal{S} = \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}}, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 4

1.
$$y(x) = \frac{C+\arctan x}{1+x^2}$$
2.
$$y(x) = (2+\cos x)(C - \ln(2+\cos x))$$
3.
$$y(x) = \cosh^2 x + 1 + C\cosh x$$

Correction de l'exercice 5

$f(0)+f(1) = C$ constante.
$f(x) = C\dfrac{e+1-e^{-x+1}}{e+1}$. (analyse synthèse)

Correction de l'exercice 6
Analyse :
$f'(x) = e^x - f(-x)$ avec f dérivable, donc f' l'est aussi :
$f''(x) = e^x + f'(-x) = e^x + e^{-x} - f(x)$. D'où :

$$y'' + y = 2\cosh x$$

$f(x) = \cosh x + A\cos x + B\sin x$.
Synthèse :
Si f est solution du problème, on doit avoir $A + B = 0$.

$$f(x) = \cosh x + C(\cos x - \sin x).$$