Colle 11 - MPSI
Suites

Exercice 1
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que (u_n+v_n) et (u_n-v_n) convergent.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 2
On suppose (u_n) est une suite réelle croissante telle que (u_{2n}) converge. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 3
Soit (u_n) une suite définie dans $\mathbb{K}$ telle que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{n^2}) convergent.
Montrer que (u_n) converge.

Exercice 4
Soit (u_n) une suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

Exercice 5
Justifier que la suite de terme général $\cos(n)$ diverge.

Exercice 6
Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

$$u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}, \quad n \geq 3.$$

Exercice 7
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad \text{et } S'_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

Exercice 8
Soit (u_n) une suite réelle telle que :

$$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad 0 \leq u_{m+n} \leq \frac{m+n}{mn}.$$

Montrer que (u_n) converge vers 0.

Exercice 9
Etudier la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^n n. \end{cases}$$

Exercice 10
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2, (u_n), (v_n)$ deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_n \leq a \\ \forall n \in \mathbb{N}, & v_n \leq b \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n = a+b. \end{cases}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers a et b.

Exercice 11
En utilisant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x,$$

montrer l'existence de la limite de la suite de terme général $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}\right)$, et calculer cette limite.

Exercice 12
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n), (v_n)$ les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a & v_0 = b \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, & v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Correction de l'exercice 1

Correction de l'exercice 2

Correction de l'exercice 3

Correction de l'exercice 4

Correction de l'exercice 5
Par l'absurde. Supposons que la suit de terme général $\cos(n)$ converge vers une limite l.
Comme $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$ par passage à la limite on en déduit que $l = 2l^2 - 1$
Soit $2l^2 - l - 1 = 0$.
2 racines $l_1 = -\frac{1}{2}$ et $l_2 = 1$.
Prenons par exemple $l = 1$.
$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall n > N,\ |cos(n) - l| < \epsilon$
Prenons alors $\epsilon = 0,5$, on a : $\exists N > 0,\ \forall n > N,\ |cos(n) - 1| < 0,5$ soit $0,5 < \cos(n) < 1,5$
Absurde car si $\cos(n) > 0$ alors $\cos(\llcorner n + \pi \lrcorner) < 0$.