Colle 26 - MPSI - Application linéaire - Matrice

Opérations sur les matrices

Exercice 1
Inverser, si cela est possible, les matrices suivantes par la méthode de votre choix :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2
On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les matrices $AI, 3A$ et A^2.
2. Démontrer que $A^2 - 3A + 2I = O$ où O est la matrice nulle.
3. Vérifier que l'égalité précédente peut s'écrire $I = A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I\right)$.
4. En déduire qu'il existe une matrice B telle que $AB = I$.
5. Calculer BA et commenter le résultat obtenu.

Exercice 3
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n.

Matrice d'une application linéaire

Exercice 4
On considère $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et $f : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X]$ définie par $f(P) = P'$.
Déterminer $Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 5
On note $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner une base de $Ker(f)$.
2. Donner $rg(f)$.
3. Donner une base de $Im(f)$.

Exercice 6
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \{(a, -a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

1. Donner une base de F et $\dim(F)$.
2. Montrer que G est un ev, donner une base de G et $\dim(G)$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
4. En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

5. On note f la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
   On pose $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.
   Donner B en n'utilisant que la définition.
   En déduire A par calcul.
6. Vérifier à l'aide de la matrice A que f est bien une symétrie.

Exercice 7
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que f est une projection.
2. Déterminer F et G les éléments caractéristiques de f.
3. En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
4. On pose $B = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.
   Donner B en n'utilisant que la définition.

Exercice 8
Déterminer la matrice relative aux bases canoniques des applications linéaires f suivantes :

1. $$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, y - 2x + z) \end{cases}$$
2. $$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (y + z, z + x, x + y) \end{cases}$$
3. $$f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4 \\ P \mapsto (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{cases}$$

Exercice 9
Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P(X + 1)$.

1. Ecrire la matrice A de φ dans la bases canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Justifier que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 10
Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + a\overline{z}$.

1. Former la matrice de l'endomorphisme f du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ dans la base $(1, i)$.
2. Déterminer image et noyau de f.

Opérations sur les matrices

Correction de l'exercice 1

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad E^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2

Correction de l'exercice 3

1. $A^2 - 3A + 2I = 0$. Comme $A\left(\dfrac{-1}{2}A + \dfrac{3}{2}I\right) = I$, on a

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

2. $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. Sachant que le reste de la division euclidienne considérée est de la forme $aX + b$, en évaluant en 1 et 2, on détermine a et b et on obtient :

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + (2^n - 1)X + 2 - 2^n$$

3. On peut remplacer X par A dans le calcul qui précède et on obtient :

$$A^n = (A^2 - 3A + 2I)Q(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$$

et donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ 3.2^n - 3 & 3.2^n - 2 \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Correction de l'exercice 4

Correction de l'exercice 5

Correction de l'exercice 6

Correction de l'exercice 7

$F = \{(x, y, f) \mid x - y + 2z = 0\} = \mathrm{Vec}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \qquad G = \mathrm{Vec}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Correction de l'exercice 8

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 9

1. Les colonnes de A sont formées des coefficients de

$$\varphi(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i$$

Ainsi $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ avec

$$a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1} \text{ si } i \leq j \text{ et } a_{i,j} = 0 \text{ sinon}$$

2. L'endomorphisme φ est inversible avec

$$\varphi^{-1}(P) = P(X-1)$$

On en déduit $\varphi^{-1}(X^j) = (X-1)^j$ d'où

$$A^{-1} = ((-1)^{j-1} a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1}$$

Correction de l'exercice 10

1. Posons $x = Re(a)$ et $y = Im(a)$.
$f(1) = 1 + x + iy$ et $f(i) = i - ai = y + i(1-x)$.
La matrice de f dans la base $(1, i)$ est donc

$$\begin{pmatrix} 1+x & y \\ y & 1-x \end{pmatrix}$$

2. Si $|a| \neq 1$ alors $\det f \neq 0$. $Imf = \mathbb{C}$ et $ker f = \{O\}$.
Si $|a| = 1$ alors $\det f = 0$ et $f \neq 0$. f est un endomorphisme de rang 1.
On a $f\left(e^{i\theta/2}\right) = 2e^{i\theta/2}$ et $f\left(e^{i(\theta+\pi)/2}\right) = 0$ donc $Imf = \text{Vect}\left\{e^{i\theta/2}\right\}$ et $ker f = Imf$.