

Colle 08 - MPSI

Équations différentielles

Exercice 1

Calculer les primitives suivantes :

$$1. \int 3^x dx$$

$$2. \int \cos(x) \sin(x) dx$$

$$3. \int \frac{x}{(x^2 + 1)^3} dx$$

$$4. \int \sin(2x) \cos(3x) dx$$

$$5. \int \frac{2x+1}{x+2} dx$$

$$6. \int e^{-x} (x^2 - x + 1) dx$$

$$7. \int \frac{e^x}{e^{2x} + 2} dx$$

$$8. \int \frac{(\ln(x))^2}{x + x(\ln(x))^3} dx$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_1^e \frac{\ln(t) - 1}{t \ln(t) + t} dt$$

$$2. \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t} + t} dt$$

$$3. \int_0^1 \frac{1}{e^t + 1} dt$$

$$4. \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt$$

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.

$$y' + y = 0,$$

2.

$$(1 + x^2)y' + 4xy = 0$$

3.

$$y' + xy = x$$

4.

$$y' + y = 2e^x + 4 \sin x + 3 \cos x$$

5.

$$y' + \frac{x}{x^2 + 1} y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés :

1.

$$(x^2 + 1)^2 y' + 2x(x^2 + 1)y = 1, \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

2.

$$(2 + \cos x)y' + \sin x \cdot y = (2 + \cos x) \sin x, \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

3.

$$\cosh x \cdot y' - \sinh x \cdot y = \sinh^3 x, \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Exercice 5

Déterminer les fonctions $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Exercice 6

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x.$$

Correction de l'exercice 3

1.

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2.

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\lambda}{(x^2 + 1)^2}, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3.

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(1 solution particulière évidente)

4. Par le principe de superposition :

Solution générale : $y_0(x) = \lambda e^{-x}$ $y_1(x) = e^x$ solution de $y' + y = 2e^x$. $y_2(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$ solution de $y' + y = 4 \sin x + 3 \cos x$.

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^x + \frac{7}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

5. par la méthode de variation de la constante :

Solution générale : $y_0(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 1}}, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 4

1.

$$y(x) = \frac{C + \arctan x}{1 + x^2}$$

2.

$$y(x) = (2 + \cos x)(C - \ln(2 + \cos x))$$

3.

$$y(x) = \cosh^2 x + 1 + C \cosh x$$

Correction de l'exercice 5 $f(0) + f(1) = C$ constante.

$$f(x) = C \frac{e + 1 - e^{-x+1}}{e + 1}. \text{ (analyse synthèse)}$$

Correction de l'exercice 6

Analyse :

 $f'(x) = e^x - f(-x)$ avec f dérivable, donc f' l'est aussi : $f''(x) = e^x + f'(-x) = e^x + e^{-x} - f(x)$. D'où :

$$y'' + y = 2 \cosh x$$

$$f(x) = \cosh x + A \cos x + B \sin x.$$

Synthèse :

Si f est solution du problème, on doit avoir $A + B = 0$.

$$f(x) = \cosh x + C(\cos x - \sin x).$$