Colle 08 - MPSI - Fonctions usuelles

Fonctions usuelles

Exercice 1

1. Rappeler la définition et les propriétés (ensemble de définition, parité, périodicité, dérivée, représentation graphique) des fonctions suivantes :
$$f(x) = \arcsin x, \qquad g(x) = \cosh x.$$
2. Étudier la fonction suivante afin de la représenter :
$$f : x \longmapsto \arccos \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$
3. Simplifier les expressions suivantes :
a) $\cos(2\arccos x)$; **b)** $\cos(2\arctan x)$.

Exercice 2

1. Rappeler la définition et les propriétés (ensemble de définition, parité, périodicité, dérivée, représentation graphique) des fonctions suivantes :
$$f(x) = \arccos x, \qquad g(x) = \tanh x.$$
2. Étudier la fonction suivante afin de la représenter :
$$f : x \longmapsto \arcsin(\sin x) + \frac{1}{2}\arccos(\cos 2x).$$
3. Simplifier les expressions suivantes :
a) $\cos(2\arcsin x)$; **b)** $\sin(2\arctan x)$.

Exercice 3

1. Rappeler la définition et les propriétés (ensemble de définition, parité, périodicité, dérivée, représentation graphique) des fonctions suivantes :
$$f(x) = \arctan x, \qquad g(x) = \sinh x.$$
2. Étudier la fonction suivante afin de la représenter :
$$f : x \longmapsto \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x).$$
3. Simplifier les expressions suivantes :
a) $\sin(2\arccos x)$; **b)** $\tan(2\arcsin x)$.

Dérivation

Exercice 4

Étudier les variations de la fonction
$$f(x) = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}.$$

Exercice 5

Calculer la dérivée de
$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}.$$

Calculs de primitives

Exercice 6

Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int 3^x dx$
2. $\displaystyle\int \cos(x)\sin(x) dx$
3. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$
4. $\displaystyle\int \sin(2x)\cos(3x) dx$
5. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x+2} dx$
6. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x}\left(x^2-x+1\right) dx$
7. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+2} dx$
8. $\displaystyle\int \frac{(\ln(x))^2}{x + x(\ln(x))^3} dx$

Fonctions usuelles

Correction de l'exercice 1

1.
2. $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
   Donc $\cos^2\theta = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$
   Donc $f(x) = \arccos\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}} = \arccos\left|\cos(\frac{x}{2})\right|$.
   f est 2π périodique, paire.
   Sur $[0,\pi]$, $\arccos(\cos a) = a$. Donc pour $\dfrac{x}{2} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ soit $x \in [0,\pi]$, $\arccos\left|\cos(\frac{x}{2})\right| = \arccos\left(\cos(\frac{x}{2})\right) = \dfrac{x}{2}$, soit $f(x) = \dfrac{x}{2}$.
3. (a) $\cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$;
   (b) $\cos(2\arctan x) = 2\cos^2(\arctan x) - 1 = \dfrac{2}{1+x^2} - 1 = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.
   En effet $\cos^2 u = \dfrac{1}{1+\tan^2 u}$.

Correction de l'exercice 2

1.
2. f est 2π périodique, pas de parité.
   On sait que :
   sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin x) = x$
   sur $[0;\pi]$, $\arccos(\cos x) = x$
   D'où :
   - sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin x) = x$
     $2x \in [0;\pi]$, $\arccos(\cos 2x) = 2x$
     $f(x) = x + x = 2x$
   - sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$, $2x \in [\pi; 2\pi]$
     $f(x) = (\pi - x) + \dfrac{2(\pi - x)}{2} = 2\pi - 2x$
   - sur $\left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, $2x \in [2\pi; 3\pi]$
     $f(x) = (\pi - x) + \dfrac{2(x-\pi)}{2} = 0$
   - sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, $2x \in [3\pi; 4\pi]$
     $f(x) = (x - 2\pi) + \dfrac{2(2\pi - x)}{2} = 0$

   Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = x + x = 2x$.
   Sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $f(x) = x - x = 0$.
   Sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = -x - \pi + x + \pi = 0$.
3. (a) $\cos(2\arcsin x) = 1 - 2\sin^2(\arcsin x) = 1 - 2x^2$;
   (b) $\sin(2\arctan x) = 2\sin(\arctan x)\cos(\arctan x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Correction de l'exercice 3

1.
2. f est 2π périodique, pas de parité.
   On sait que :
   sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin x) = x$
   sur $[0;\pi]$, $\arccos(\cos x) = x$
   D'où :
   - Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = x + x = 2x$.
   - Sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f(x) = (\pi - x) + x = \pi$.
   - Sur $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x) = (\pi - x) + (2\pi - x) = 3\pi - 2x$.
   - Sur $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, $f(x) = (x - 2\pi) + (2\pi - x) = 0$.

3. (a) $\sin(2\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$;

   (b) $\tan(2\arcsin x) = \dfrac{2\tan(\arcsin x)}{1-\tan^2(\arcsin x)} = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$.

Dérivation

Correction de l'exercice 4

$$f(x) = \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}.$$

f est définie pour $x > 0$.
$f'(x) = u' \times \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)\,|1-x|} = \dfrac{\epsilon}{\sqrt{x}(1+x)}$, avec $\epsilon = +1$ si $1-x>0$ et $\epsilon = -1$ si $1-x<0$.
Il y a une discontinuité de f' en 1 (mais pas pour f).

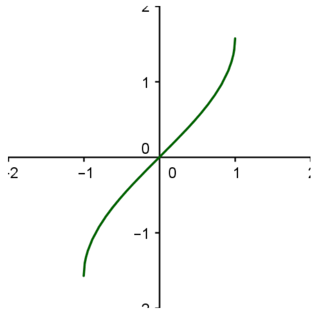
Correction de l'exercice 5

$$U = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{u}{v}$$

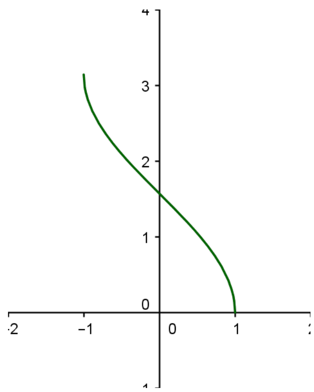
pour $x \neq 0$.
$f'(x) = \dfrac{U'}{U}$ avec $U' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
$f'(x) = \dfrac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$.

RAPPELS :

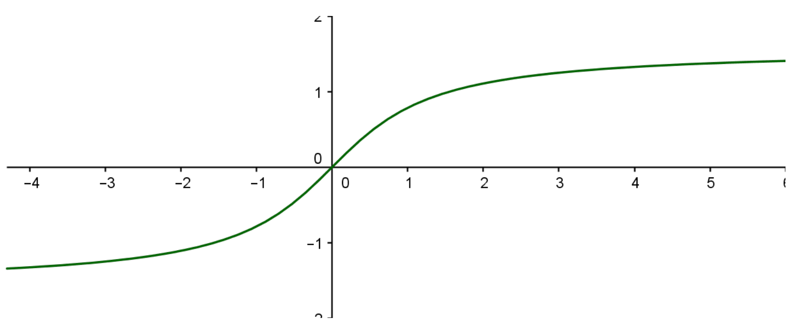
$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longmapsto [-1;1]$.
$f(x) = \arcsin(\sin x) = x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\pi - x$ sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. f est 2π périodique, impaire.
$\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.



$\cos : [0;\pi] \longmapsto [-1;1]$.
$g(x) = \arccos(\cos x) = x$ sur $[0;\pi]$. g est 2π périodique et paire.
$\forall x \in [-1;1]$, $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$
$\arccos'(x) = \dfrac{1}{\cos'(\arccos x)} = -\dfrac{1}{\sin(\arccos x)} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.



$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \mathbb{R}$.
$h(x) = \arctan(\tan x) = x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. g est π périodique et impaire.
$\arctan'(x) = \dfrac{1}{\tan'(\arctan x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

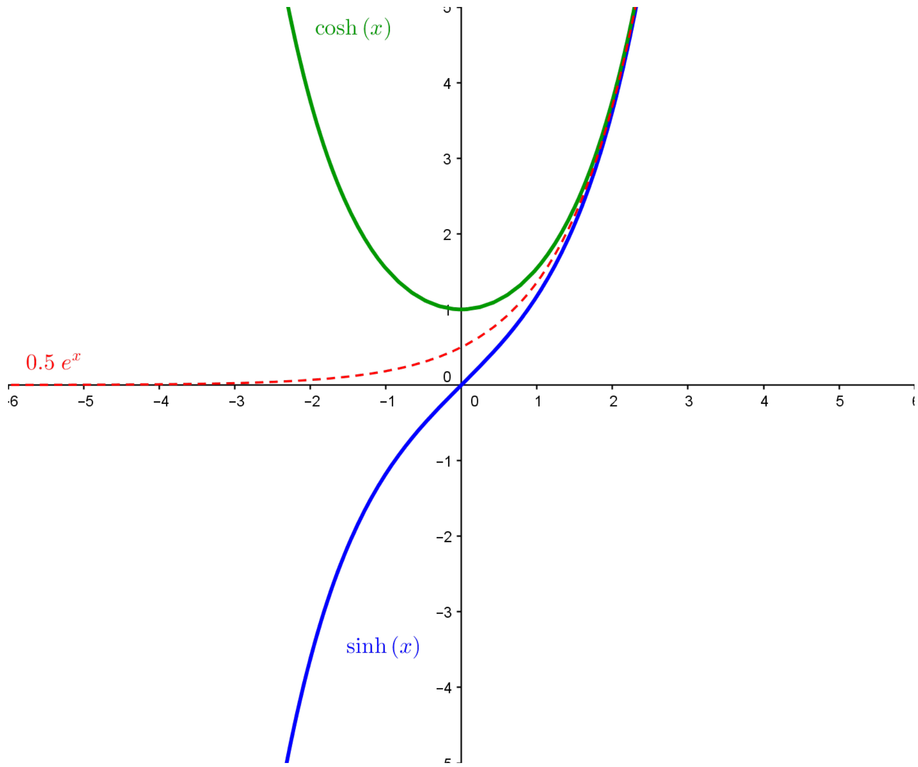


$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
$\cosh'(x) = \sinh(x)$.

$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

$\sinh'(x) = \cosh(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$



$$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x+1}}.$$
$\tanh'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2 x$.