Colle 07 - MPSI
Fonctions usuelles

Fonctions usuelles

Exercice 1
Parmi les relations suivantes, lesquelles sont exactes :

1. $(a^b)^c = a^{bc}$
2. $a^b a^c = a^{bc}$
3. $a^{2b} = (a^b)^2$
4. $(ab)^c = a^{c/2} b^{c/2}$
5. $(a^b)^c = a^{(b^c)}$
6. $(a^b)^c = (a^c)^b$

Exercice 2
Établir, pour tout $x \geq 0$ l'encadrement

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 3
Simplifier a^b pour $a = \exp x^2$ et $b = \dfrac{1}{x}\ln x^{1/x}$.

Exercice 4
Comparer

$$\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} (x^x)^x.$$

Exercice 5
Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$

Exercice 6
Montrer que pour tout $a, b > 0$

$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln \frac{a+b}{2}.$$

Exercice 7
Résoudre les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x} = \mathrm{e} + 1$
2. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
3. $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

Exercice 8
Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 8^x & = 10y \\ 2^x & = 5y \end{cases}$
2. $\begin{cases} \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{2y} & = a \\ 2xy & = 1 \end{cases}$

Fonctions circulaires

Exercice 9

1. Rappeler la définition et les propriétés (ensemble de définition, parité, périodicité, dérivée, représentation graphique) de la fonction suivante :
$$f(x) = \arcsin x.$$
2. Étudier la fonction suivante afin de la représenter :
$$f : x \longmapsto \arccos \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$
3. Simplifier les expressions suivantes :
a) $\cos(2 \arccos x)$; **b)** $\cos(2 \arctan x)$.

Exercice 10

1. Rappeler la définition et les propriétés (ensemble de définition, parité, périodicité, dérivée, représentation graphique) de la fonction suivante :
$$f(x) = \arccos x.$$
2. Étudier la fonction suivante afin de la représenter :
$$f : x \longmapsto \arcsin(\sin x) + \frac{1}{2} \arccos(\cos 2x).$$
3. Simplifier les expressions suivantes :
a) $\cos(2 \arcsin x)$; **b)** $\sin(2 \arctan x)$.

Exercice 11

1. Rappeler la définition et les propriétés (ensemble de définition, parité, périodicité, dérivée, représentation graphique) de la fonction suivante :
$$f(x) = \arctan x.$$
2. Étudier la fonction suivante afin de la représenter :
$$f : x \longmapsto \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x).$$
3. Simplifier les expressions suivantes :
a) $\sin(2 \arccos x)$; **b)** $\tan(2 \arcsin x)$.

Exercice 12

Étudier les variations de la fonction
$$f(x) = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}.$$

Analyse

Exercice 13

Calculer la dérivée de
$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}.$$

Exercice 14

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère les fonctions
$$f_\lambda : x \longmapsto \frac{x+\lambda}{x^2+1}.$$

1. Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles.
2. Observer que les tangentes en 1 sont concourantes.

Fonctions usuelles

Correction de l'exercice 1
(a), (c) et (f)

Correction de l'exercice 2
Par étude des variations de 2 fonctions.

Correction de l'exercice 3
$a^b = x$.

Correction de l'exercice 4
$x^{(x^x)} = \exp(x^x \ln x) = \exp(\exp(x \ln x) \ln x) \to 0$
$(x^x)^x = \exp(x \ln x^x) = \exp(x^2 \ln x) \to 1$.

Correction de l'exercice 5

1. $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}} = 1$
3. $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = 0$

Correction de l'exercice 6
On a
$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$$
or
$$a + b = \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 \geq 2\sqrt{ab}$$
donc
$$\ln \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \geq 0.$$

Correction de l'exercice 7

1. $\mathcal{S} = \{0, 1\}$
2. $\mathcal{S} = \{0, 1, 4\}$
3. Obtenir $2^{2x-3} = 3^{x-3/2}$ puis $\mathcal{S} = \{3/2\}$.

Correction de l'exercice 8

1. $x = 1/2, y = \sqrt{2}/5$
2. Obtenir un système somme/produit en x et $2y$ puis le résoudre.

Fonctions circulaires

Correction de l'exercice 9

1.
2. $f(x) = \arccos \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}} = \arccos \left|\cos(\frac{x}{2})\right|$.
   f est 2π périodique, paire, sur $[0, \pi]$, $f(x) = \dfrac{x}{2}$.
3. (a) $\cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$;
   (b) $\cos(2\arctan x) = 2\cos^2(\arctan x) - 1 = \dfrac{2}{1+x^2} - 1 = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.
   En effet $\cos^2 u = \dfrac{1}{1+\tan^2 u}$.

Correction de l'exercice 10

1.
2. f est 2π périodique.
   Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = x + x = 2x$.
   Sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $f(x) = x - x = 0$.
   Sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = -x - \pi + x + \pi = 0$.

3. (a) $\cos(2\arcsin x) = 1 - 2\sin^2(\arcsin x) = 1 - 2x^2$;

   (b) $\sin(2\arctan x) = 2\sin(\arctan x)\cos(\arctan x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Correction de l'exercice 11

1.
2. f est 2π périodique.
   Sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $f(x) = x - x = 0$.
   Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = x + x = 2x$.
   Sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f(x) = \pi - x + x = \pi$.
   Sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = -x - \pi - x = -2x - \pi$.

3. (a) $\sin(2\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$;

   (b) $\tan(2\arcsin x) = \dfrac{2\tan(\arcsin x)}{1-\tan^2(\arcsin x)} = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$.

Correction de l'exercice 12

$$f(x) = \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}.$$

f est définie pour $x > 0$.
$f'(x) = u' \times \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)\,|1-x|} = \dfrac{\epsilon}{\sqrt{x}(1+x)}$, avec $\epsilon = +1$ si $1-x > 0$ et $\epsilon = -1$ si $1-x < 0$.
Il y a une discontinuité de f' en 1 (mais pas pour f).

Analyse

Correction de l'exercice 13

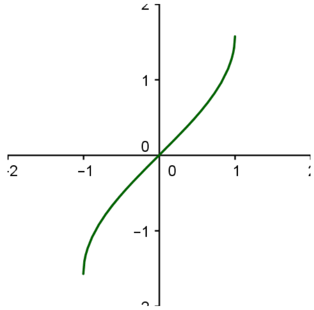
$$U = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{u}{v}$$

pour $x \neq 0$.
$f'(x) = \dfrac{U'}{U}$ avec $U' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
$f'(x) = \dfrac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$.

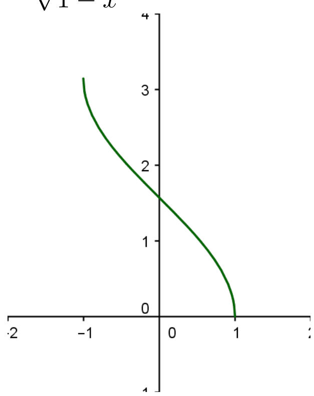
Correction de l'exercice 14

RAPPELS :

- $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longmapsto [-1;1]$.
  $f(x) = \arcsin(\sin x) = x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\pi - x$ sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. f est 2π périodique, impaire.
  $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.



- $\cos : [0;\pi] \longmapsto [-1;1]$.
  $g(x) = \arccos(\cos x) = x$ sur $[0;\pi]$. g est 2π périodique et paire.
  $\forall x \in [-1;1]$, $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$
  $\arccos'(x) = \dfrac{1}{\cos'(\arccos x)} = -\dfrac{1}{\sin(\arccos x)} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.



- $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \mathbb{R}$.
  $h(x) = \arctan(\tan x) = x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. g est π périodique et impaire.
  $\arctan'(x) = \dfrac{1}{\tan'(\arctan x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$.