

Colle 08 - MPSI - Fonctions usuelles

Fonctions usuelles

Exercice 1

1. Rappeler la définition et les propriétés (ensemble de définition, parité, périodicité, dérivée, représentation graphique) des fonctions suivantes :

$$f(x) = \arcsin x, \quad g(x) = \cosh x.$$

2. Étudier la fonction suivante afin de la représenter :

$$f : x \mapsto \arccos \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

3. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\cos(2 \arccos x);$

b) $\cos(2 \arctan x).$

Exercice 2

1. Rappeler la définition et les propriétés (ensemble de définition, parité, périodicité, dérivée, représentation graphique) des fonctions suivantes :

$$f(x) = \arccos x, \quad g(x) = \tanh x.$$

2. Étudier la fonction suivante afin de la représenter :

$$f : x \mapsto \arcsin(\sin x) + \frac{1}{2} \arccos(\cos 2x).$$

3. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\cos(2 \arcsin x);$

b) $\sin(2 \arctan x).$

Exercice 3

1. Rappeler la définition et les propriétés (ensemble de définition, parité, périodicité, dérivée, représentation graphique) des fonctions suivantes :

$$f(x) = \arctan x, \quad g(x) = \sinh x.$$

2. Étudier la fonction suivante afin de la représenter :

$$f : x \mapsto \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x).$$

3. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sin(2 \arccos x);$

b) $\tan(2 \arcsin x).$

Dérivation

Exercice 4

Étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}.$$

Exercice 5

Calculer la dérivée de

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1}.$$

Calculs de primitives

Exercice 6

Calculer les primitives suivantes :

1. $\int 3^x dx$

2. $\int \cos(x) \sin(x) dx$

3. $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^3} dx$

4. $\int \sin(2x) \cos(3x) dx$

5. $\int \frac{2x+1}{x+2} dx$

6. $\int e^{-x} (x^2 - x + 1) dx$

7. $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 2} dx$

8. $\int \frac{(\ln(x))^2}{x + x(\ln(x))^3} dx$

Fonctions usuelles

Correction de l'exercice 1

- 1.
2. $f(x) = \arccos \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \arccos \left| \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right|$.
 f est 2π périodique, paire, sur $[0, \pi]$, $f(x) = \frac{x}{2}$.
3. (a) $\cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$;
 (b) $\cos(2 \arctan x) = 2 \cos^2(\arctan x) - 1 = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.
 En effet $\cos^2 u = \frac{1}{1 + \tan^2 u}$.

Correction de l'exercice 2

- 1.
2. f est 2π périodique.
 Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = x + x = 2x$.
 Sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $f(x) = x - x = 0$.
 Sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = -x - \pi + x + \pi = 0$.
3. (a) $\cos(2 \arcsin x) = 1 - 2 \sin^2(\arcsin x) = 1 - 2x^2$;
 (b) $\sin(2 \arctan x) = 2 \sin(\arctan x) \cos(\arctan x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Correction de l'exercice 3

- 1.
2. f est 2π périodique.
 Sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $f(x) = x - x = 0$.
 Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = x + x = 2x$.
 Sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f(x) = \pi - x + x = \pi$.
 Sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = -x - \pi - x = -2x - \pi$.
3. (a) $\sin(2 \arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$;
 (b) $\tan(2 \arcsin x) = \frac{2 \tan(\arcsin x)}{1 - \tan^2(\arcsin x)} = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$.

Dérivation

Correction de l'exercice 4

$$f(x) = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}.$$

f est définie pour $x > 0$.

$$f'(x) = u' \times \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)|1-x|} = \frac{\epsilon}{\sqrt{x}(1+x)}, \text{ avec } \epsilon = +1 \text{ si } 1-x > 0 \text{ et } \epsilon = -1 \text{ si } 1-x < 0.$$

Il y a une discontinuité de f' en 1 (mais pas pour f).

Correction de l'exercice 5

$$U = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{u}{v}$$

pour $x \neq 0$.

$$f'(x) = \frac{U'}{U} \text{ avec } U' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et } v'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

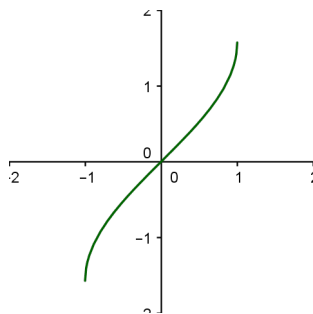
$$f'(x) = \frac{2}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

RAPPELS :

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto [-1; 1].$$

$f(x) = \arcsin(\sin x) = x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\pi - x$ sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. f est 2π périodique, impaire.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

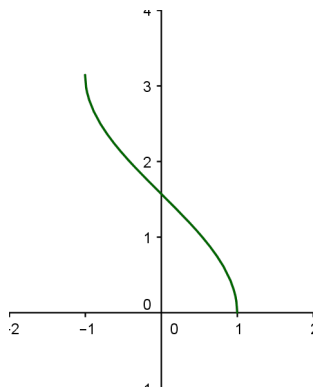


$$\cos : [0; \pi] \mapsto [-1; 1].$$

$g(x) = \arccos(\cos x) = x$ sur $[0; \pi]$. g est 2π périodique et paire.

$$\forall x \in [-1; 1], \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

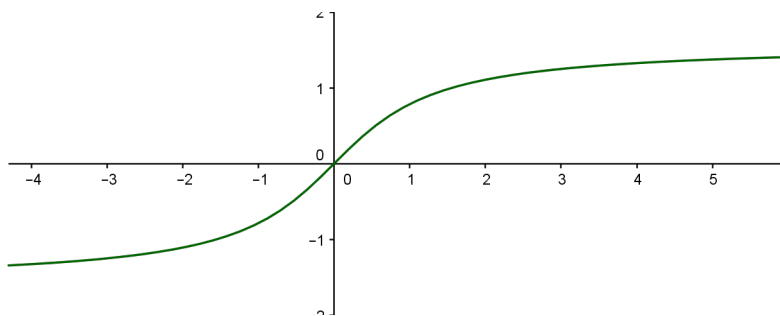
$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \mathbb{R}.$$

$h(x) = \arctan(\tan x) = x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. h est π périodique et impaire.

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$



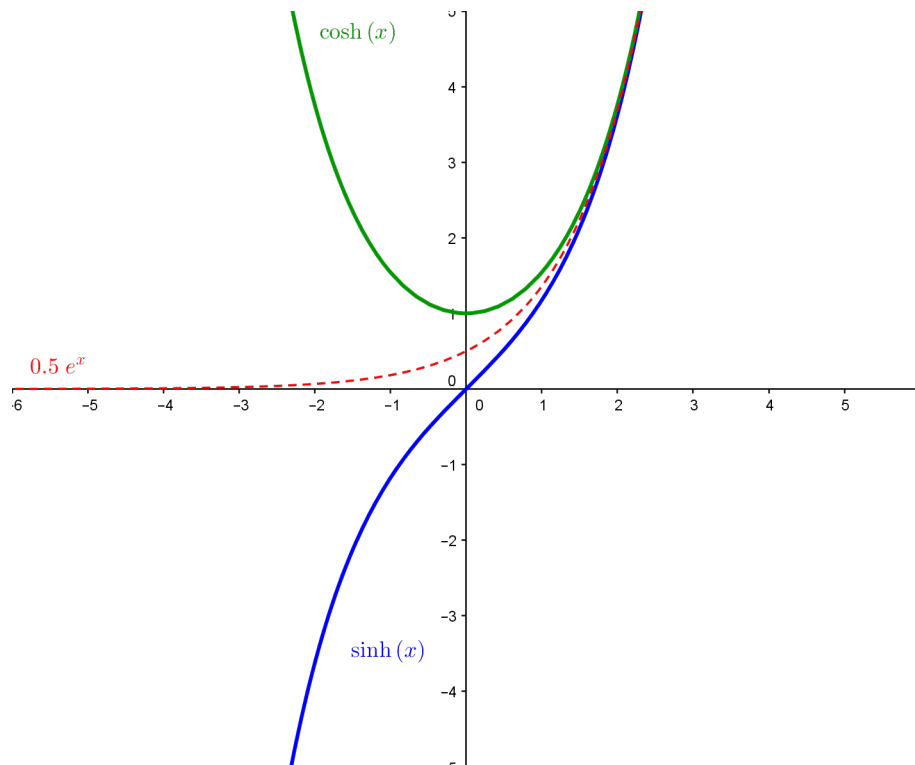
$$\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

$$\cosh'(x) = \sinh(x).$$

$$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$\sinh'(x) = \cosh(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$



$$\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2 x.$$

