Colle 24 - MPSI
Applications linéaires

Exercice 1 (Questions de cours)
Démontrer les points suivants :

1. f est injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{0\}$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ injective et soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille libre de vecteurs de E.
   Alors $(f(x_1), ..., f(x_n))$ est une famille libre de vecteurs de F.
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille génératrice de E.
   Alors $\text{Im } f = \text{Vect}(f(x_1), ..., f(x_n))$: ie $(f(x_1), ..., f(x_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$.
4. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Alors $\ker(p) \oplus \text{Im } (p) = E$, et p est la projection sur $\text{Im } (p)$ parallèlement à $\ker(p)$

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 3
Soit $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par
$$\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f.$$
Montrer que φ est un endomorphisme et préciser sont noyau.

Exercice 4
Soient a un élément d'un ensemble X non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Montrer que $E_a : \mathcal{F}(X, E) \to E$ définie par $E_a(f) = f(a)$ est une application linéaire.
2. Déterminer l'image et le noyau de l'application E_a.

Exercice 5
Montre que l'application partie entière Ent : $\mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}[X]$ est linéaire et déterminer son noyau.

Exercice 6
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Comparer $\ker f \cap \ker g$ et $\ker(f + g)$.
2. Comparer $\text{Im } f + \text{Im } g$ et $\text{Im } (f + g)$.
3. Comparer $\ker f$ et $\ker f^2$.
4. Comparer $\text{Im } f$ et $\text{Im } f^2$.

Exercice 7
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A, B deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer
$$f(A) \subset f(B) \Leftrightarrow A + \ker f \subset B + \ker f.$$

Exercice 8 (MINES MP)
Caractériser les sous-espaces F d'un espace vectoriel E tels que
$$h^{-1}(h(F)) = h(h^{-1}(F)).$$

Exercice 9 (MINES MP)
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On se donne $f \in \mathcal{L}(E, F)$, une famille $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ de sous-espaces vectoriels de E et une famille $(F_j)_{1 \leq j \leq p}$ de sous-espaces vectoriels de F.

1. Montrer
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(E_i)$$
2. Montrer que si f est injective et si la somme des E_i est directe alors la somme des $f(E_i)$ est directe.

3. Montrer
$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{p} F_j\right) \supset \sum_{j=1}^{p} f^{-1}(F_j).$$
Montrer que cette inclusion peut être stricte.
Donner une condition suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 10 (CCP MP)
Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = Id$.

1. Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\mathrm{Im}\ (g \circ f) = \mathrm{Im}\ g$.
2. Montrer
$$E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\ g$$
3. Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?
4. Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$.

Correction de l'exercice 1 (Questions de cours)

Correction de l'exercice 2
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y') \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

De plus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x', y') \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= (x' + y')/2 \\ y &= (x' - y')/2 \end{cases}$$

f est donc bijective. Finalement f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et

$$f^{-1} : (x', y') \mapsto \left(\frac{(x' + y')}{2}, \frac{(x' - y')}{2}\right).$$

Correction de l'exercice 3
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = ... = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g).$$

De plus $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc φ est un endomorphisme $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$f \in \ker\varphi \Leftrightarrow f'' - 3f' + 2f = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ de racines 1 et 2. La solution générale est

$$f(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

Par suite

$$\ker\varphi = \{C_1e^x + C_2e^{2x} | C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Correction de l'exercice 4

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{F}(X, E)$.

   $$E_a(\lambda f + \mu g) = ... = \lambda E_a(f) + \mu E_a(g)$$

   Par suite E_a est une application linéaire.
2. $f \in \ker E_a \Leftrightarrow f(a) = 0$.

   $$\ker E_a = \{f \in \mathcal{F}(X, E) | f(a) = 0\}$$

   Im $E_a \subset E$ et $\forall\vec{x} \in E$, en considérant $f : X \to E$ la fonction constante égale à $\vec{x}$, on a $E_a(f) = \vec{x}$. Par suite $\vec{x} \in$ Im E_a et donc $E \subset$ Im E_a.
   Par double inclusion Im $E_a = E$.

Correction de l'exercice 5
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $F, G \in \mathbb{K}(X)$. On peur écrire

$$F = \text{Ent}(F) + \widehat{F} \quad \text{et} \quad G = \text{Ent}(G) + \widehat{G}$$

avec $\deg\widehat{F}, \deg\widehat{G} < 0$. Puisque

$$\lambda F + \mu G = \lambda\text{Ent}(F) + \lambda\widehat{F} + \mu\text{Ent}(G) + \mu\widehat{G}$$

avec $\deg(\lambda\widehat{F} + \mu\widehat{G}) < 0$ on a

$$\text{Ent}(\lambda F + \mu G) = \lambda\text{Ent}(F) + \mu\text{Ent}(G).$$

Ainsi Ent est linéaire.

$$\ker\text{Ent} = \{F \in \mathbb{K}(X) | \deg F < 0\}.$$

Correction de l'exercice 6

1. Soit $x \in \ker f \cap \ker g$ on a $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0_E$. Ainsi

   $$\ker f \cap \ker g \subset \ker(f + g).$$

2. Soit $y \in \text{Im }(f+g)$. Il existe $x \in E$, $y = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \in \text{Im } f + \text{Im } g$. Ainsi
$$\text{Im }(f+g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g.$$
3. Soit $x \in \ker f$, $f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$ donc $x \in \ker f^2$. Ainsi $\ker f \subset \ker f^2$.
4. Soit $y \in \text{Im } f^2$. Il existe $x \in E$, $y = f^2(x) = f(f(x)) = f(\vec{u})$ avec $\vec{u} = f(x)$ donc $y \in \text{Im } f$. Ainsi $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.

Correction de l'exercice 7
$\Rightarrow$
Supposons $f(A) \subset f(B)$.
Soient $\vec{x} \in A + \ker f$. On peut écrire $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in A$ et $\vec{v} \in \ker f$.
$f(\vec{x}) = f(\vec{u}) \in f(A) \subset f(B)$ donc il existe $\vec{w} \in B$ tel que $f(\vec{x}) = f(\vec{w})$.
On a alors $\vec{x} = \vec{w} + (\vec{x} - \vec{w})$ avec $\vec{w} \in B$ et $\vec{x} - \vec{w} \in \ker f$.
Ainsi $\vec{x} \in B + \ker f$.
$\Leftarrow$
Supposons $A + \ker f \subset B + \ker f$.
Soit $\vec{y} \in f(A)$. Il existe $\vec{x} \in A$ tel que $\vec{y} = f(\vec{x})$. Or $\vec{x} \in A \subset A + \ker f \subset B + \ker f$ donc on peut écrire $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in B$ et $\vec{v} \in \ker f$.
On a alors $\vec{y} = f(\vec{x}) = f(\vec{u}) \in f(B)$.

Correction de l'exercice 8
Les inclusions suivantes sont toujours vraies
$$F \subset h^{-1}(h(F)) \quad \text{et} \quad h(h^{-}(F)) \subset F$$
Si $h^{-1}(h(F)) = h(h^{-1}(F))$ alors
$$h^{-1}((h(F)) = F \quad \text{et } h(h^{-1}(F)) = F$$
Les inclusions $h^{-1}(h(F)) \subset F$ et $F \subset h(h^{-1}(F))$ entraînent respectivement $\ker h \subset F$ et $F \subset \text{Im } h$.
Inversement, supposons
$$\ker h \subset F \subset \text{Im } f$$
Pour $x \in h^{-1}(h(F))$, il existe $a \in F$ tel que $h(x) = h(a)$. On a alors $x - a \in \ker h \subset F$ et donc $x = a + (x-a) \in F$. Ainsi
$$h^{-1}(h(F)) \subset F \quad \text{puis} \quad h^{-1}(h(F)) = F$$
Aussi pour $y \in F \subset \text{Im } h$, il existe $a \in E$ tel que $y = h(a)$ et puisque $y \in F, a \in h^{-1}(F)$. Ainsi $F \subset h(h^{-1}(F))$ puis $F = h(h^{-1}(F))$.
Finalement
$$h^{-1}(h(F)) = h(h^{-1}(F)).$$

Correction de l'exercice 9
1. Si $y \in f(\sum_{i=1}^n E_i)$ alors on peut écrire $y = f(x_1 + ... + x_n)$ avec $x_i \in E_i$. On a alors $y = f(x_1) + ... + f(x_n)$ avec $f(x_i) \in f(E_i)$ et ainsi
$$f\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) \subset \sum_{i=1}^n f(E_i).$$
Si $y = f(x_1) + ... + f(x_n)$ avec $x_i \in E_i$. On a alors $y = f(x)$ avec $x = x_1 + ... + x_n \in \sum_{i=1}^n E_i$ donc
$$f\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) \supset \sum_{i=1}^n f(E_i).$$
2. Si $f(x_1) + ... + f(x_n) = 0$ avec $x_i \in E_i$ alors $f(x_1 + .. + x_n) = 0$ donc $x_1 + ... + x_n = 0$ car f injective puis $x_1 = ... = x_n = 0$ car les E_i sont en somme directe et enfin $f(x_1) = ... = f(x_n) = 0$. Ainsi les $f(E_i)$ sont en somme directe.
3. Soit $x \in \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j)$. On peut écrire $x = x_1 + ... + x_p$ avec $f(x_j) \in F_j$ donc
$$f(x) = f(x_1) + ... + f(x_p) \in \sum_{j=1}^p F_j.$$
Ainsi
$$\sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j) \subset f^{-1}\left(\sum_{j=1}^p F_j\right).$$

On obtient une inclusion stricte en prenant par exemple pour f une projection sur une droite D et en prenant F_1, F_2 deux droites distinctes de D et vérifiant $D \subset F_1 + F_2$.
$f = 0$ ou $f = Id$ sont des conditions suffisantes faciles... Plus finement, supposons chaque F_j inclus dans Im f (et $p \geq 1$). Pour $x \inf -1 \left(\sum_{j=1}^{p} F_j\right)$, on peut écrire $f(x) = y_1 + ... + y_p$ avec $y_j \in F_j$. Or $F_j \subset \operatorname{Im} f$ donc il existe $x_j \in E$ vérifiant $f(x_j) = y_j$. Evidemment $x_j \inf^{-1}(F_j)$. Considérons alors $x_1' = x - (x_2 + ... + x_p)$, on a $f(x_1') = y_1$ donc $x_1' \in f^{-1}(F_j)$. Ainsi $f^{-1}(\sum_{j=1}^{p} F_j) \subset \sum_{j=1}^{p} f^{-1}(F_j)$ puis l'égalité.

Correction de l'exercice 10

1. Evidemment $\ker f \subset \ker(g \circ f)$ et Im $(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
   Pour $x \in \ker(g \circ f)$, on a $f(x) = f(g(f(x))) = f(0) = 0$, donc $x \in \ker f$.
   Pour $y \in \operatorname{Im} g$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$ et alors $y = g(f(g(x))) = g(f(y)) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.
2. Si $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} g$ alors on peut écrire $x = g(a)$ et puisque $f(x) = 0, a = f(g(a)) = 0$ donc $x = 0$.
   Pour $x \in E$, on peut écrire $x = (x - g(f(x))) + g(f(x))$ avec $x - g(f(x)) \in \ker f$ et $g(f(x)) \in \operatorname{Im} g$.
3. Si f est inversible alors $f \circ g = Id$ entraîne $g = f^{-1}$. Cette condition suffisante est aussi évidemment nécessaire.
4. $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f$ et donc $g \circ f$ est un projecteur.