# Colle 10 - MPSI
# Suites

**Exercice 1**

1. **Questions de cours :**
   (a) Définitions : suites majorées, minorées, monotones, convergentes, divergentes.
   (b) Démontrer que toute suite convergeant vers une limite $l >$ est minorée à partir d'un certain rang par $\dfrac{l}{2}$.
2. Calculer lorsqu'elles convergent les limites des suites définies par :

$$u_n = \frac{n+1}{n}, \qquad v_n = \sqrt{n(n+a)} - n, \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}.$$

**Exercice 2**

1. **Questions de cours :**
   (a) Définitions : suites majorées, minorées, monotones, convergentes, divergentes.
   (b) Démontrer que le produit d'une suite convergeant vers 0 et d'une suite bornée converge vers 0.
2. Calculer lorsqu'elles convergent les limites des suites définies par :

$$u_n = \frac{n}{n+1}, \qquad v_n = n - \sqrt{n^2-1}, \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}.$$

**Exercice 3**

1. **Questions de cours :**
   (a) Définitions : suites majorées, minorées, monotones, convergentes, divergentes.
   (b) Démontrer que toute suite convergente est bornée.
2. Calculer lorsqu'elles convergent les limites des suites définies par :

$$u_n = \frac{1}{n^2+1}, \qquad v_n = n - \sqrt{n^2-n}, \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

**Exercice 4**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 5**

Soit $u$ une suite croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n + \dfrac{1}{2^n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq u_n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0 + 2\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.
3. En déduire que $u$ converge.

**Exercice 6**

Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que $(u_n)$ converge si et seulement si $(u_n)$ est stationnaire.

**Exercice 7**

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

$$u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}, \quad n \geq 3.$$

**Exercice 8**
Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que :

$$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad 0 \leq u_{m+n} \leq \frac{m+n}{mn}.$$

Montrer que $(u_n)$ converge vers 0.

**Exercice 9**
Étudier la suite $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^n n. \end{cases}$$

**Exercice 10**
Soit $(u_n)$ une suite définie dans $\mathbb{K}$ telle que les suites $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ et $(u_{n^2})$ convergent.
Montrer que $(u_n)$ converge.

**Exercice 11**
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2, (u_n), (v_n)$ deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_n \leq a \\ \forall n \in \mathbb{N}, & v_n \leq b \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n = a + b. \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent respectivement vers $a$ et $b$.

**Exercice 12**
En utilisant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x,$$

montrer l'existence de la limite de la suite de terme général $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}\right)$, et calculer cette limite.

**Exercice 13**
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n), (v_n)$ les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a & v_0 = b \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, & v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

**Correction de l'exercice 1**

**Correction de l'exercice 2**

**Correction de l'exercice 3**

**Correction de l'exercice 4**

**Correction de l'exercice 5**

**Correction de l'exercice 6**

**Correction de l'exercice 7**

**Correction de l'exercice 8**
En prenant $m = n$, on a $u_{2n} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \to 0$
En prenant $m = n + 1$, on a $u_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{n(n+1)} \to 0$

**Correction de l'exercice 9**

**Correction de l'exercice 10**

**Correction de l'exercice 11**
$u_n \leq a$ donc $0 \leq a - u_n$
De plus $v_n \leq b$ donc $0 \leq b - v_n$
Donc $0 \leq a - u_n < a - u_n + b - v_n$
Or $a - u_n + b - v_n to 0$ donc par le théorème des gendarmes $u_n \to a$.
On procède de même pour démontrer que $b_n \to b$.