Problem1

考虑最优解，我们选取的是使得球弹起最小的高度，即球与鼓之间的相对距离的最大值为 0.4m，这个方案下球会弹起最小的高度，因此这是一个最节省能量的方案。

我们在这里建立一个相对简单的模型，此模型中，球与鼓碰撞之后进行竖直上抛运动，当落下至初始位置的时候与鼓再次相碰，继而形成周期运动。鼓首先进行一段时间的竖直上抛运动，随后在某一位置 y_{d1f} 开始进行恒加速度的匀减速直线运动，直至运动停止，随即用相同的加速度进行向上的匀加速直线运动，到达碰撞的位置，与球进行碰撞。

$$T = \frac{2v_0}{g}$$

1. 鼓竖直上抛的过程经过 t1 结束，则

$$y_{d1f} = v_{1i}t1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$v_{1f} = v_{2i} = v_{1i} - gt1$$

2. 鼓进入匀加速直线运动状态，经过 t2 回到初始状态，

$$0 = y_{d1f} + v_{2i}t2 + \frac{1}{2}at_2^2$$

鼓与球之间的最大距离为 $\Delta H = 0.4m$，

$$\Delta H = (v_0 - v_{1i})t1 + \frac{(v_0 - v_{1i})^2}{2(g+a)}$$

$$v_{2f} = v_{2i} + a_2t_2$$

$$T = t1 + t2$$

3. 考虑碰撞的过程，设恢复系数为 e，则考虑动量守恒与恢复系数的定义可以得到

$$mv_0 + Mv_{1i} = Mv_{2f} - mv_0$$

$$v_0 - v_{1i} = e(v_0 + v_{2f})$$

我们根据一定的化简之后，使用 MATLAB 求其数值解，求解代码如附件 Problem1.m 所示。我们不妨对于 $e =?$ 为例进行求解，可得

Problem2

首先计算转动惯量 I

$$I = \iint dm(y^2+z^2) = \iint rd\theta dz(z^2+r^2\sin\theta^2) = 0.0865kg\cdot m^2$$

对于 2 的情况，我们首先考虑只有一个力的存在时，对于鼓的质心所产生的力矩

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$|\vec{M}| = rF\alpha = 1.035N\cdot m$$

根据角动量定理，此时的角加速度为

$$\beta = \frac{M}{I} = 11.97s^{-2}$$

假设其匀角加速度运动，在 0.1s 内可以转过的角度为

$$\Theta = \frac{1}{2}\beta\Delta t^2 = 0.06rad$$

这已经是本问题中所遇到的最大的旋转角，可以见得其依然很小，由于鼓面转动的角度很小，又由于鼓的半径与绳子的长度相比很小，我们便可以忽略在这个过程中，力的方向的变化，继而认为这个过程中，力的方向是不变的。

产生误差可以分成两种情况，对称的情况与非对称的情况。对称的情况意味着早拉绳与拉力不同所带来的影响是同方向的，即可以认为鼓围绕某一轴做定轴转动，非对称的情况即为拉绳起始时间与拉力不同所造成的影响方向不同，理论上应该研究刚体的定点转动。

我们首先研究对称的情况，

不妨根据定轴转动的轴对于不同的受力点进行编号，此处定轴转动的轴即为拉力对称轴通过圆心的垂线。利用已经求得的转动惯量，可以列出动力学方程如下

$$|\vec{M}| = I\frac{d\omega}{dt}$$

不妨设鼓面转过角度为 δ（虽然以上已经证明了角度转动很小，但是如下为了得到更加准确的结果，我们仍然考虑不同位置的不同 δ 的情况）

$$\omega = \frac{d\delta}{dt}$$

$$\vec{r} = (r\sin\theta\cos\delta, r\cos\theta\cos\delta, r\sin\delta)$$

$$\vec{F} = (F\sin\theta\cos\alpha, F\cos\theta\cos\alpha, F\sin\alpha)$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

这里我们使用将时间分割成小时间段的方法进行数值模拟，即利用

$$\omega = \omega + \frac{|M|}{I}\Delta t$$

$$\delta = \delta + \omega\Delta t$$

只需要求出每个位置的总力矩，就可以对其进行数值模拟，代码如附件 Problem2.m 所示