

LDDRK-DRP 格式频散特性数值实验验证

目 录

一、简介	2
二、数值实验对象及控制方程	2
三、方程的离散格式	2
3.1 Lax-Wendroff 格式及其稳定性分析	3
3.2 DRP 格式及 LDDRK 格式	3
四、数值求解	4
4.1 Lax_Wendroff 格式	4
4.2 LDDRK-DRP 格式	7
参考文献	9

一、简介

在时域空间内构造的高精度空间离散格式往往通过控制泰勒展开式的阶段误差来获得,然而往往这样构造的格式存在着频散过高的缺点,特别是对于计算气动声学这类高精度计算,为此 Tam&Webb 于 1993 年在频域空间内构造出了七点频散相关保持格式-DRP (Dispersion-Relation-Preserving),为了测试 DRP 格式对于初始扰动的控制能力,特地设计数值试验,通过比较 Lax-Wendroff 格式以及优化后的七点中心差分 DRP 格式对于初始扰动的控制能力,得出 DRP 格式的相关性质。

二、数值实验对象及控制方程

考虑受初值问题控制迁移方程(1.1),其初始条件及初始边界条件如式(1.2)
(1.3)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, -20 < x < 450 \quad (1.1)$$

$$t = 0, u = f(x) \quad (1.2)$$

$$f(x) = 0.5 \exp[-(\ln 2)(\frac{x}{3})^2] \quad (1.3)$$

以上 $f(x)$ 实际上是一束高斯脉冲波,接下来就要观察 $f(x)$ 随着时间向前传播的数值实验特性和理论特性。

其中以上方程的理论解为

$$u = f(x-t) \quad (1.4)$$

三、方程的离散格式

对于方程 (1.1), 空间可以采取中心离散为如下通用形式:

$$\frac{du_l}{dt} + \sum_{j=-N}^{j=N} a_j u_{l+j} = 0, l \text{ 为整数} \quad (1.5)$$

$$t = 0, u_l = f(l) = 0.5 \exp[-(\ln 2)(\frac{l}{3})^2] \quad (1.6)$$

3.1 Lax-Wendroff 格式及其稳定性分析

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = - \left(\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{1}{2} (\Delta t) \left[\frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \quad (1.7)$$

Lax-Wendroff 格式为时间和空间均为二阶精度的格式，使用 Von Neumann 方法分析其稳定性如下：

设 U 的某个解为 $u_i^n = U^n e^{I\theta i}$ 则有

$$U^{n+1} e^{I\theta i} = U^n e^{I\theta i} - \Delta t \left(\frac{U^n e^{I\theta(i+1)} - U^n e^{I\theta(i-1)}}{2\Delta x} \right) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \left[\frac{U^n e^{I\theta(i+1)} - 2U^n e^{I\theta i} + U^n e^{I\theta(i-1)}}{(\Delta x)^2} \right]$$

$$U^{n+1} = \left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} I \sin \theta + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (\cos \theta - 1) \right] U^n$$

即得放大系数为

$$G = \left| \frac{U^{n+1}}{U^n} \right| = \left| 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} I \sin \theta + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (\cos \theta - 1) \right| \leq 1 \quad (1.8)$$

从而

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \leq \frac{2 - 2 \cos \theta - \sin \theta}{(\cos \theta - 1)^2} = 1$$

即 Lax-Wendroff 格式的稳定性区间为 $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$

3.2 DRP 格式及 LDDRK 格式

可以看到以上 E 的积分区间为 $[-\pi/2, \pi/2]$ ，此时控制的此区间内的总体频散之和最小，但是导致了群速度与原始方程的误差较大，因此 DRP 格式在标准六阶空间格式的基础上考虑优化积分区间，最终选择的积分区间为 $[0, 1.1]$ ，可以得到较好的群速度。构成的 DRP 格式如下：

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_j = \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-3}^3 a_l U_{j+l}$$

其中 $a_0 = 0, a_1 = -a_{-1} = 0.77088238051822552$
 $a_2 = -a_{-2} = -0.166705904414580469, a_3 = -a_{-3} = 0.02084314277031176$

(1.9)

而对于时间推进采用 LDDRK 格式，得到如下方程离散求解格式：

$$\begin{aligned}
 u_l^{n+1} &= u_l^n + \sum_{m=1}^4 w_m k_{lm}^n \\
 \begin{cases}
 k_{l1}^n &= -\left(\frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-3}^3 a_j u_{l+j}^n\right) \Delta t \\
 k_{l2}^n &= -(k_{l1}^n + \beta_2 \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-3}^3 a_j k_{l1}^n) \Delta t \\
 k_{l3}^n &= -(k_{l1}^n + \beta_3 \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-3}^3 a_j k_{l2}^n) \Delta t \\
 k_{l4}^n &= -(k_{l1}^n + \beta_4 \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-3}^3 a_j k_{l3}^n) \Delta t
 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

同样有 LDDRK 格式推导可知，LDDRK 格式和标准 Runge-Kutta 格式一样是时间四阶精度，而 DRP 为空间四阶精度。设以上方程的某一个解为 $u_i^n = U^n e^{I\theta i}$ ，则有

$$\frac{U^{n+1}}{U^n} = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} 2\varphi \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} I\varphi - \frac{2}{3} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \varphi^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^3 I\varphi^3 \right) \tag{1.11}$$

其中 $\varphi = (a_3 \sin 3\theta + a_2 \sin 2\theta + a_1 \sin \theta)$

同时设 $k = \varphi \frac{\Delta t}{\Delta x}$ ，进而由放大系数不大于 1 可得，

$$\left| 1 - 2k + \frac{4}{3}k^3 - I \left(\frac{2}{3}k^4 - 2k^2 \right) \right| < 1 \Rightarrow 0 < k < 0.79447635$$

再由 $|\varphi| \leq 0.82210541$ 得到，LDDRK-DRP 格式的稳定区间为

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{0.79447635}{\max(|\varphi|)} < 0.96639231 \tag{1.12}$$

四、数值求解

4.1 Lax_Wendroff 格式

取时间步长 $\Delta t = 0.8$ ，空间步长 $\Delta x = 1.0$ ，计算 500 步，其中每 125 步时存储

以此结果。在 Linux 下的 gfortran 环境下编程得到如下结果：

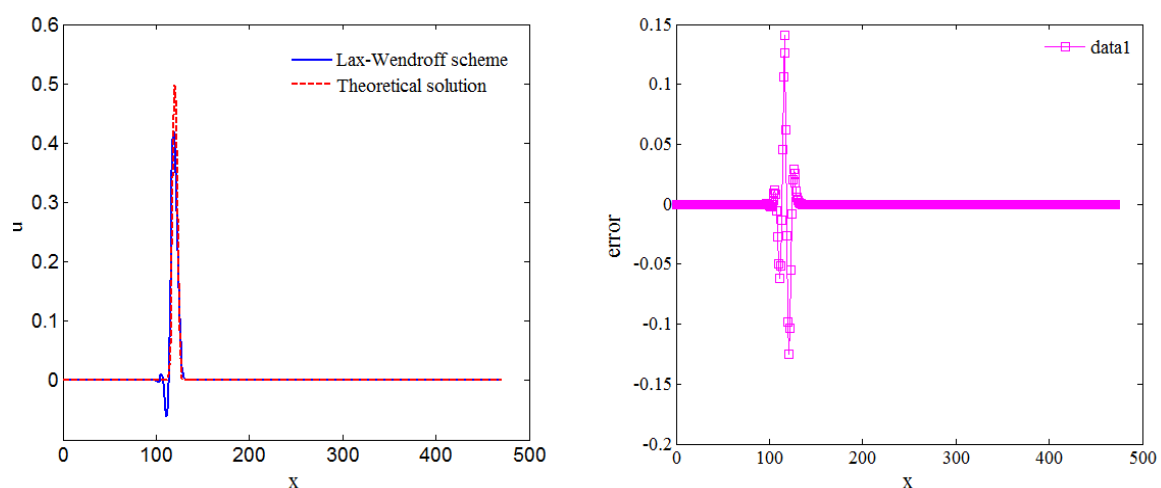


Figure 1 $t=100$ 时 Lax_Wendroff 格式求解结果与理论解对比

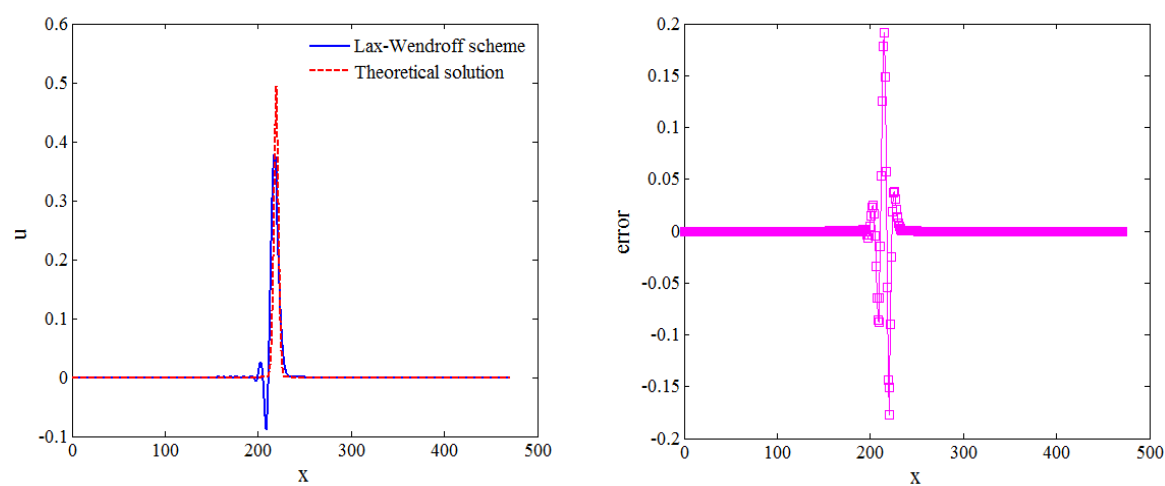


Figure 2 $t=200$ 时 Lax_Wendroff 格式求解结果与理论解对比

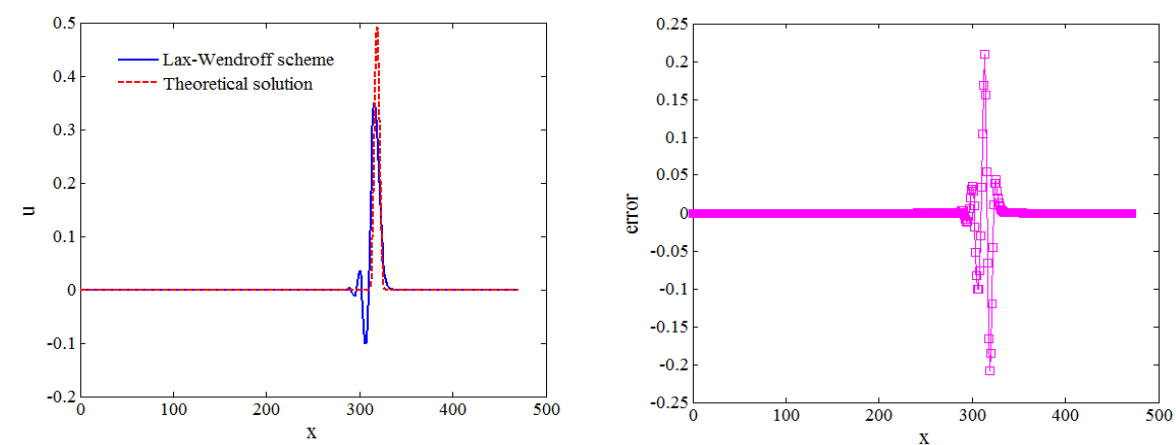


Figure 3 $t=300$ 时 Lax_Wendroff 格式求解结果与理论解对比

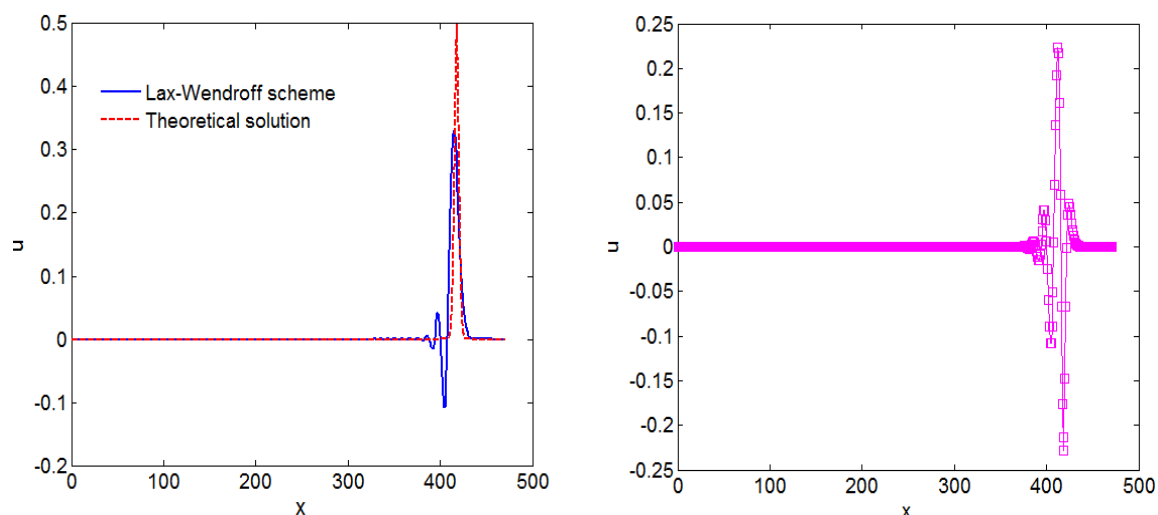


Figure 4 $t=400$ 时 Lax_Wendroff 格式求解结果与理论解对比

由以上 Lax-Wendroff 格式求解结果和理论解对比图 1~4 可以看出，Lax-Wendroff 格式对于高斯脉冲波的模拟出现了较大频散，并且随着时间推移，其频散逐渐放大，幅值也发生了变化，说明 Lax-Wendroff 格式既产生了频散，同时产生了耗散，但由于耗散为正耗散，离散方程求解依然稳定。下面给出随着时间推移误差方差变化图：

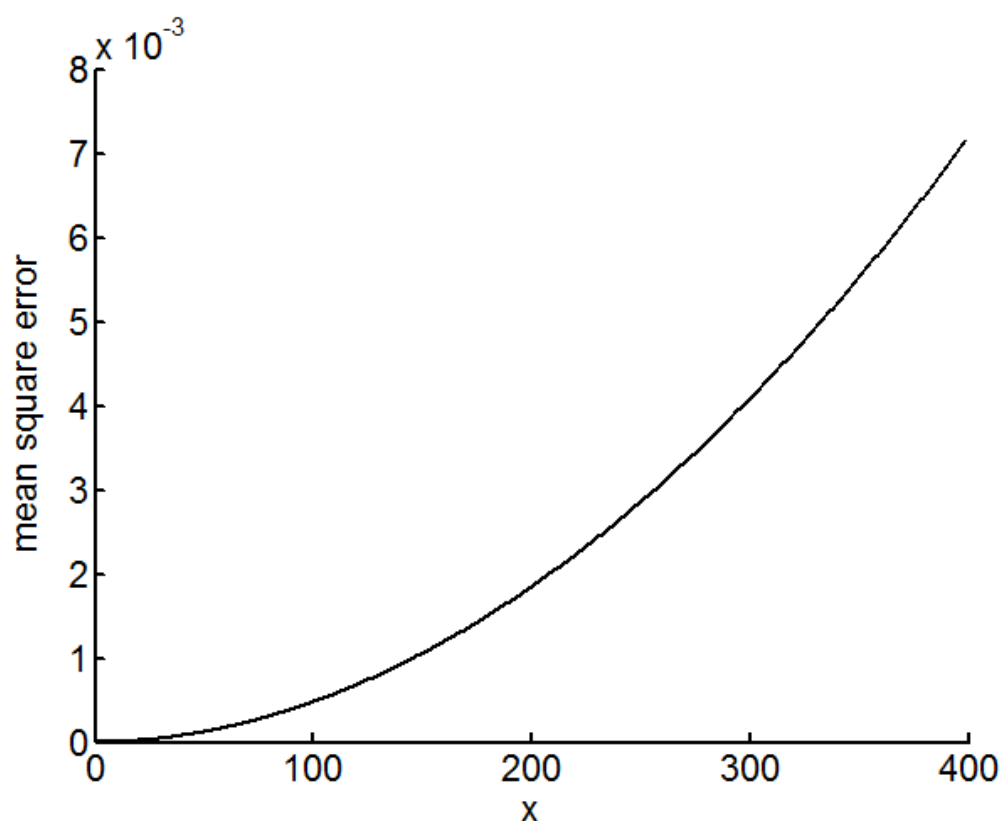


Figure 5 Lax-Wendroff 格式求解误差均方随时间变化曲线图

由以上误差曲线变化图，可以看出 Lax-Wendroff 格式求解的误差随着时间推移逐渐放大，并且放大速度越来越快，显示出 Lax-Wendroff 格式在求解该问题时的不足。

4.2 LDDRK-DRP 格式

在时间步长和空间步长与上述 Lax-Wendroff 格式相同的情况下，同样去 100s, 200s, 300s, 400s 时刻的求解波形图，并且与理论解对比，结果如下：

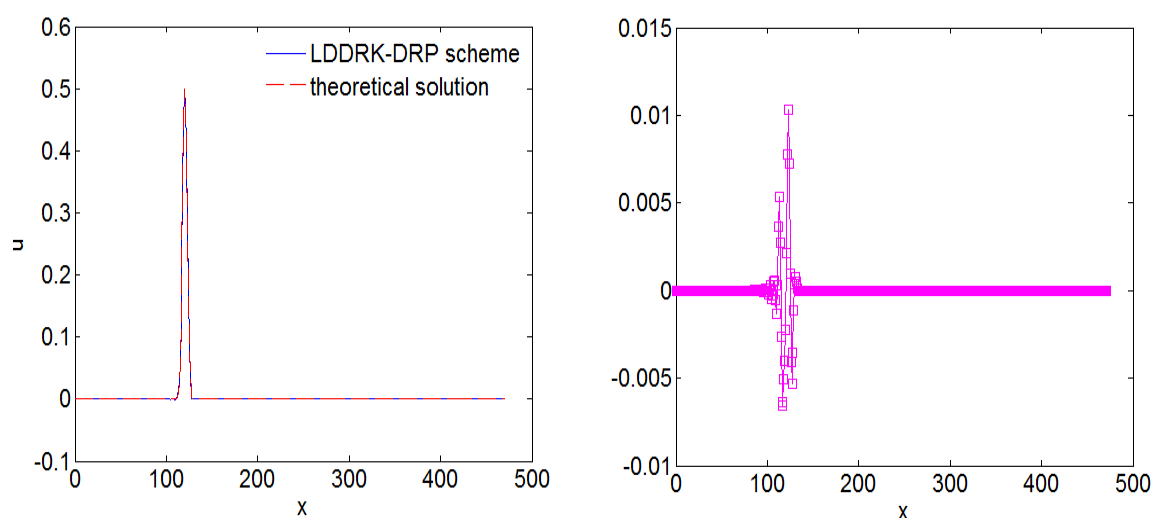


Figure 6 $t=100$ 时 LDDRK-DRP 格式求解结果与理论解对比

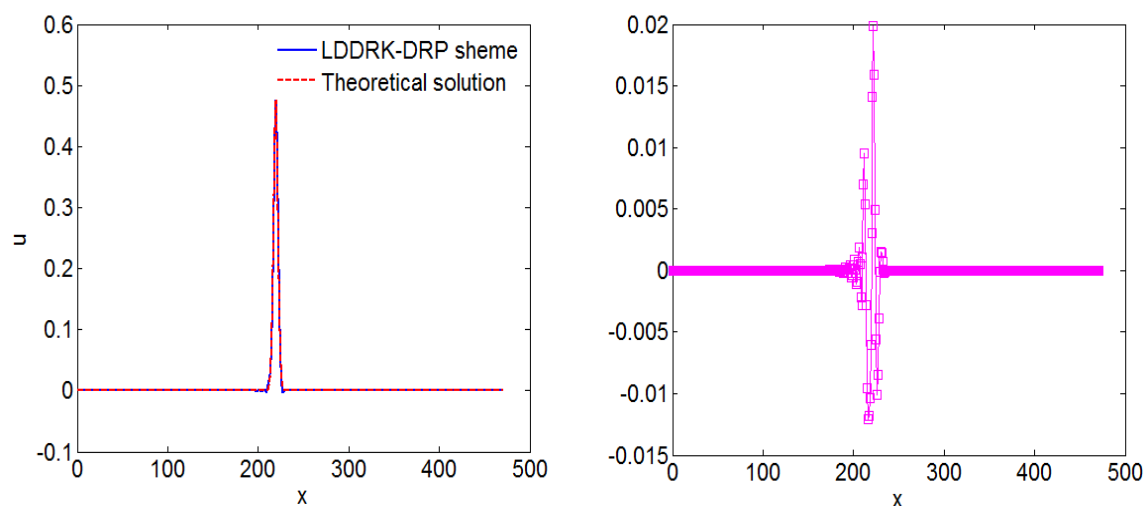
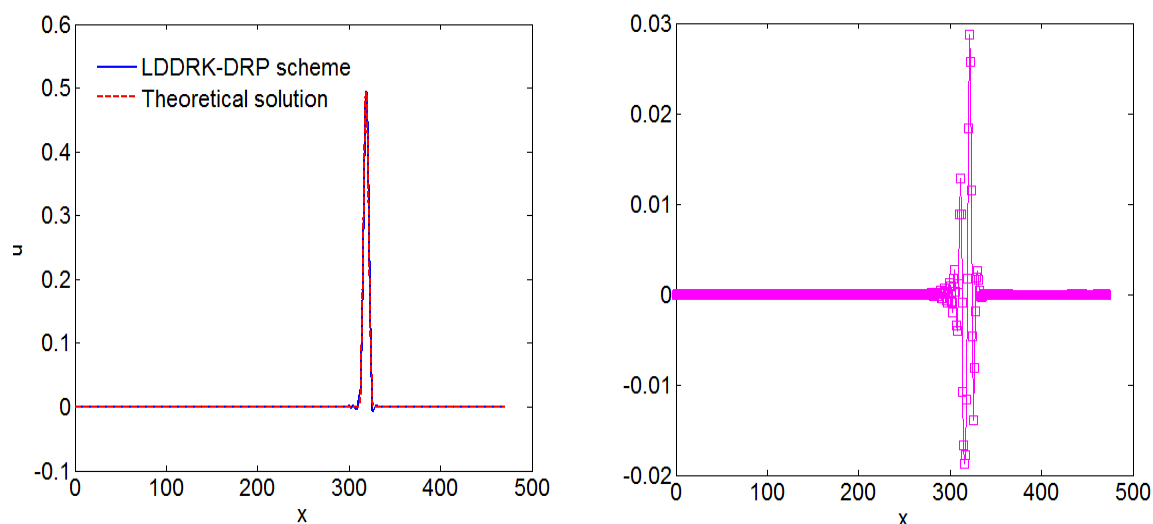
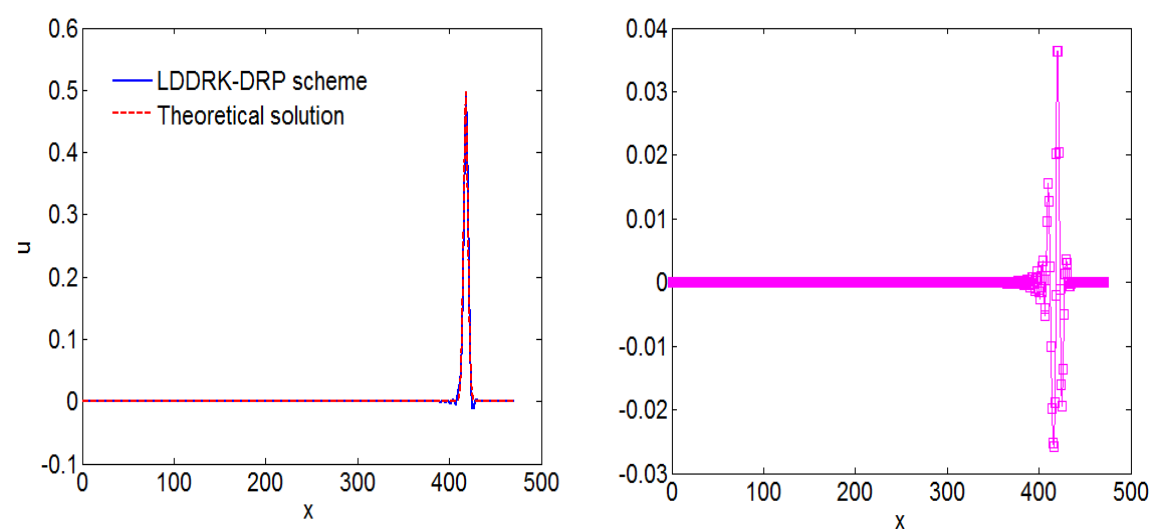


Figure 7 $t=200$ 时 LDDRK-DRP 格式求解结果与理论解对比

Figure 8 $t=300$ 时 LDDRK-DRP 格式求解结果与理论解对比Figure 9 $t=400$ 时 LDDRK-DRP 格式求解结果与理论解对比

由上图可知，LDDRK-DRP 格式求解结果与理论结果吻合很好，幅值随着时间推移基本不变，频散较小，并且求解误差基本在 0.04 以内，同样获得随着时间变化 LDDRK-DRP 格式求解结果误差的均方变化图线如下：

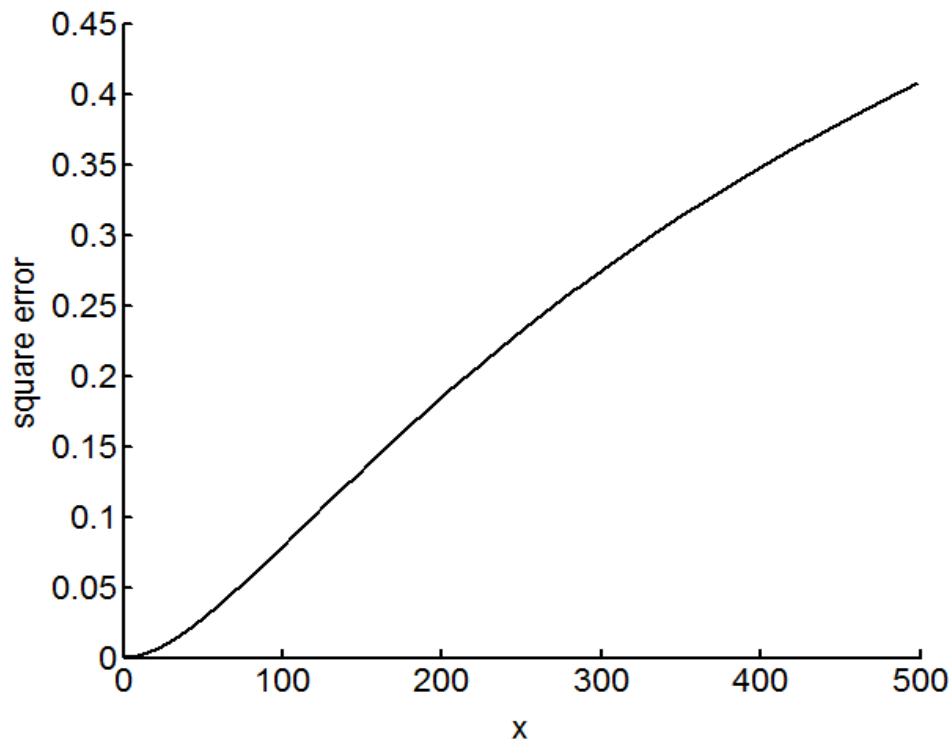


Figure 10 LDDRK-DRP 格式求解误差均方随时间变化曲线图

由以上误差变化曲线可知，LDDRK-DRP 格式求解的均方误差也随着时间推移而变大，但是有一个增大速度变缓，因此可知 LDDRK-DRP 格式比 Lax-Wendroff 格式要稳定，精度要高。

参考文献

- [1] 李晓东, 高军辉. 计算声学 Lectures.2015.
- [2] K. W. TAM. Computational Aeroacoustics: A Wave Number Approach[M].Cambridge, Cambridge University Press. 2012.