集合論

M. Nakata

目次

定義

2 つの集合 X と Y は，X から Y への全単射が存在するとき**対等**（*equivalent*）であるといい，$X \cong Y$ と表す．この $\cong$ は集合間の同値関係になる（ただし，「集合全体の集合」は存在しない．すべての集合を集めたものは**類**（*class*）とよばれる．類においても集合と同じように同値関係を考えればよい）．集合 X の同値類を $\mathrm{card}(X)$ と書き，X の**濃度**（*cardinality*, *cardinal*）という．n 個の元からなる有限集合 $\{1,2,\dots,n\}$ の濃度を n で表す．さらに，$\aleph_0$ で $\boldsymbol{N}$ の濃度を，$\mathfrak{c}$ で $\boldsymbol{R}$ の濃度を表し，$\mathfrak{c}$ を**連続体濃度**（*cardinality of the continuum*）という．濃度が $\aleph_0$ であるような集合は**可算集合**（*countable set*）とよばれる．集合が有限集合か可算集合のいずれかであることを**高々可算**（*at most countable*）であるという．$\mathrm{card}(X) = \mathfrak{m}$, $\mathrm{card}(Y) = \mathfrak{n}$ であるような集合 X, Y に対して，Y^X の濃度を $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ で表す．$\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を互いに素な集合族とするとき，濃度の和と積をそれぞれ

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{card}(X_\lambda) = \mathrm{card}(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda),$$
$$\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{card}(X_\lambda) = \mathrm{card}(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)$$

と定義する．□

以下では，系と Bernstein の定理は一々断らない．

補題

濃度の和，積および冪乗は well-defined である．すなわち，$\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}, \{Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ をともに互いに素な集合族であって，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\mathrm{card}(X_\lambda) = \mathrm{card}(Y_\lambda)$ なるものとすると，

$$\mathrm{card}(\coprod X_\lambda) = \mathrm{card}(\coprod Y_\lambda),$$
$$\mathrm{card}(\prod X_\lambda) = \mathrm{card}(\prod Y_\lambda),$$
$$\mathrm{card}(X_1^{X_2}) = \mathrm{card}(Y_1^{Y_2}). \square$$

証明

仮定より，全単射の族 $\{f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ が存在する．このとき

$$\coprod f_\lambda(x) = f_\mu(x) \quad (\text{if } x \in X_\mu),$$
$$\left(\prod f_\lambda(x)\right)_\mu = f_\mu(x_\mu)$$

によって写像 $\coprod f_\lambda : \coprod X_\lambda \to \coprod Y_\lambda$, $\prod f_\lambda : \prod X_\lambda \to \prod Y_\lambda$ を定義すれば，これらは全単射である．まず $\coprod f_\lambda$ が全単射であることを示す．任意の $y \in Y_\mu$ に対して $\coprod f_\lambda(f_\mu^{-1}(y)) = y$ だから全射である．$\coprod f_\lambda(x) = \coprod f_\lambda(x')$ とすれば $x, x' \in X_\mu$ であるような μ が存在して，$f_\mu(x) = f_\mu(x')$．よって f_μ の単射性より $x = x'$．次に $\prod f_\lambda$ が全単射であることを示す．$\prod f_\lambda(x) = \prod f_\lambda(x')$ とすれば任意の μ に対して $f_\mu(x_\mu) = f_\mu(x'_\mu)$ であるから，f_μ が単射であることから $x_\mu = x'_\mu$．μ は任意だから $x = x'$ が従う．一方，任意の $y \in \prod Y_\lambda$ に対して，$x_\lambda = f_\lambda^{-1}(y_\lambda)$ によって $x \in \prod X_\lambda$ を定義すれば $\prod f_\lambda(x) = y$．よって $\prod f_\lambda$ は単射でもある．以上より，$\coprod f_\lambda$ と $\prod f_\lambda$ は全単射であるから，

$$\mathrm{card}(\coprod X_\lambda) = \mathrm{card}(\coprod Y_\lambda),$$
$$\mathrm{card}(\prod X_\lambda) = \mathrm{card}(\prod Y_\lambda).$$

最後に，$f : X_2 \to X_1$ に $\hat{f} = f_1 f f_2^{-1}$ を対応させれば，これが $X_1^{X_2}$ から $Y_1^{Y_2}$ への全単射となる．実際，$\hat{f} = \hat{g}$ ならば $f_1 f f_2^{-1} = f_1 g f_2^{-1}$ であるから，$f = g$ となる．また，$h : Y_2 \to Y_1$ に対して $f = f_1^{-1} h f_2$ とおけば $\hat{f} = h$ となる．よって写像 $f \mapsto \hat{f}$ は全単射であり，

$$\mathrm{card}(X_1^{X_2}) = \mathrm{card}(Y_1^{Y_2})$$

が言える．□

補題

集合 X と Y が与えられたとし，$\mathfrak{m} = \mathrm{card}(X)$, $\mathfrak{n} = \mathrm{card}(Y)$ とおく．単射 : $X \to Y$ が存在するとき $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ とすると，これは濃度の順序関係を定める．また，$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ であるための必要十分条件は全射 : $Y \to X$ が存在することである．□

証明

$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ の必要十分条件が全射 : $Y \to X$ の存在であることはよい． $\leqslant$ が順序関係であることを確かめる．まず，全単射 $1_X : X \to X$ が存在するから $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{m}$ である．$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ かつ $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ のとき単射 : $X \to Y$ および : $Y \to X$ が存在するから，全単射 : $X \to Y$ が存在する． 従って $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$. 最後に，$X, Y, Z$ は集合で $\mathfrak{m} = \mathrm{card}(X)$, $\mathfrak{n} = \mathrm{card}(Y)$, $\mathfrak{l} = \mathrm{card}(Z)$ とおき，$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ かつ $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{l}$ とする．このとき 2 つの単射 $f : X \to Y$ および $g : Y \to Z$ が存在する．$gf : X \to Z$ は単射である．実際，$gf(x) = gf(x')$ ならば $f(x) = f(x')$，従って $x = x'$．よって X から Z への単射が存在するから $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{l}$. 以上で $\leqslant$ が順序関係であることを示せた．□

命題

$a, b \in \boldsymbol{R}$, $a < b$ とする．

$$\mathrm{card}(\boldsymbol{Z}) = \mathrm{card}(\boldsymbol{Q}) = \aleph_0, \tag{1}$$

$$\mathrm{card}([a,b]) = \mathrm{card}((a,b)) = \mathfrak{c}, \tag{2}$$

$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}, \tag{3}$$

$$2 \leqslant \mathfrak{n} \Longrightarrow \mathfrak{m} < \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}. \tag{4}$$

ここで, $[a,b] = \{x \in \boldsymbol{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ を**閉区間**（*closed interval*）といい, $(a,b) = \{x \in \boldsymbol{R} : a < x < b\}$ を**開区間**（*open interval*）という.

ここから特に，$\aleph_0 < \mathfrak{c}$ が分かる.

証明

(1) の証明

$n \in \boldsymbol{N}$ に対して，$\phi(2n-1) = -n$, $\phi(2n) = n-1$ とすれば，$\phi\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Z}$ は全単射となる．よって $\mathrm{card}(\boldsymbol{Z}) = \aleph_0$．$\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{Q}$ への全単射を式で表すのは難しい．有理数列 $\{a_n\}$ を次の数列とする：

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \ldots$$

具体的には以下の手順で求める：

1. n/m $(m, n \in \boldsymbol{N},\ 1 \leqslant n \leqslant m)$ の形の有理数を，$1/(2q-1), \ldots, (2q-1)/(2q-1), 2q/2q, \ldots, 1/2q$ の順番で並べる．
2. 並べた有理数を順番に見ていき，約分した結果すでに現れた有理数と等しくなるものは除外する．
3. 残った有理数を順番に番号付ける．

こうして $\{a_n\}$ を得る．この構成から分かるように，$\boldsymbol{Q}' = \{x \in \boldsymbol{Q} : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ とおくと，写像 $n \mapsto a_n$ は $\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{Q}'$ への全単射になる．あとは $\boldsymbol{Q}'$ と $\boldsymbol{Q}$ が対等であることを示せばよい．$\boldsymbol{Q}'$ は $\boldsymbol{Q}$ の部分集合である $\boldsymbol{Q}'$ 自身と対等であるのは明らかだから，$\boldsymbol{Q}$ から $\boldsymbol{Q}'' = \{x \in \boldsymbol{Q} : 0 < x < 1\} \subset \boldsymbol{Q}'$ への全単射の存在を言う．$x \in \boldsymbol{Q}''$ に対して，

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{x-1/2}{x} = 1 - \frac{1}{2x} & (\text{if } x \leqslant \frac{1}{2}), \\ \frac{x-1/2}{1-x} = -1 + \frac{1}{2(1-x)} & (\text{if } x > \frac{1}{2}) \end{cases}$$

とすると，$\psi\colon \boldsymbol{Q}'' \to \boldsymbol{Q}$ は全単射である．実際，$x < x' < 1/2 < y < y'$ のとき $\psi(x) < \psi(x') < \psi(1/2) = 0 < \psi(y) < \psi(y')$ だから，ψ は単射．また，任意に $z \in \boldsymbol{Q}$ を取ると，$z > 0$ ならば

$$\frac{1}{2} < \frac{2z+1}{2(z+1)} < 1, \quad \psi\left(\frac{2z+1}{2(z+1)}\right) = z$$

となり，$z < 0$ ならば

$$0 < \frac{1}{2(1-z)} < \frac{1}{2}, \quad \psi\left(\frac{1}{2(1-z)}\right) = z$$

となるから，ψ は全射でもある．よって $\boldsymbol{Q}''$ と $\boldsymbol{Q}$ は対等であり，従って $\mathrm{card}(\boldsymbol{Q}) = \mathrm{card}(\boldsymbol{Q}') = \aleph_0$.

(2) の証明

まず $\mathrm{card}((a,b)) = \mathfrak{c}$ は,

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2x-(a+b)}{b-a}\right)$$

によって定まる写像 $f\colon (a,b) \to \boldsymbol{R}$ が全単射であることから分かる．次に $\mathrm{card}([a,b]) = \mathfrak{c}$ を考える．$\boldsymbol{R}$ と $(a,b) \subset [a,b]$ が対等であることは示した．当然 $[a,b]$ は $[a,b] \subset \boldsymbol{R}$ と対等だから，結局 $[a,b]$ と $\boldsymbol{R}$ は対等で，$\mathrm{card}([a,b]) = \mathfrak{c}$.

(3) の証明

$2^{\boldsymbol{N}}$ から開区間 $(0,1)$ への単射と全射をそれぞれ構成する．以下，簡単のため $2=\{0,1\}$ と書く．写像 $f\colon \boldsymbol{N}\to 2$ に対して

$$B_f^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k}{2^k},\qquad B_f=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{2^k},$$
$$T_f^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k}{3^k},\qquad T_f=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{3^k},$$

とおき，

$$\beta(f)=\begin{cases} B_f & (\text{if } B_f\in(0,1)),\\ \frac{1}{2} & (\text{if } B_f\notin(0,1)),\end{cases}$$
$$\tau(f)=\begin{cases} T_f & (\text{if } T_f\in(0,1)),\\ \frac{2}{3} & (\text{if } T_f\notin(0,1)),\end{cases}$$

と定義する（B は binary，T は ternary の頭文字）．このとき，$\beta\colon 2^{\boldsymbol{N}}\to(0,1)$ は全射で $\tau\colon 2^{\boldsymbol{N}}\to(0,1)$ は単射であることを示す．

任意の実数 $r\in(0,1)$ は 2 進少数展開 $r=\sum r_k 2^{-k}$ を持つ．そこで写像 $R\colon n\mapsto r_n$ を考えれば，$\beta(R)=B_R=r$．よって β は全射．次に，$f,g\colon \boldsymbol{N}\to 2$ であって，$f\neq g$, $\tau(f)=\tau(g)$ なるものが存在したとする．もし $\tau(f)=\tau(g)=2/3$ ならば，$T_f=T_g=0$ より $f=g=0$ が従うから，$\tau(f)=\tau(g)\neq 2/3$（$0\leqslant T_f\leqslant 1/2$ に注意）．このとき $T_f=T_g$．$f\neq g$ であるから，$f_n\neq g_n$ となる $n\in\boldsymbol{N}$ が存在する．そのような n のうち最小のものを m とすると，

$$T_f^{(n)}=T_g^{(n)}\ (n<m),\quad T_f^{(m)}\neq T_g^{(m)}.$$

そこで，$f_m=1>0=g_m$ としてもよく，そのとき $T_f^{(m)}>T_g^{(m)}$ が成立つ．さて，新しい写像 $f',g'\colon \boldsymbol{N}\to 2$ を，

$$f'_n=f_n\ (n\leqslant m),\qquad f'_n=0\ (n>m),$$
$$g'_n=g_n\ (n\leqslant m),\qquad g'_n=1\ (n>m)$$

と定義する．すると，簡単な計算より，

$$T_{f'}=T_f^{(m-1)}+\frac{1}{3^m},$$
$$T_{g'}=T_g^{(m-1)}+\frac{1}{2\cdot 3^m},$$

が分かる．ここから $T_g \leqslant T_{g'} < T_{f'} \leqslant T_f$ となるから，$T_f \neq T_g$．従って τ の単射性が示された．

以上より $2^{\aleph_0} = \mathrm{card}((0,1)) = \mathfrak{c}$ となる．

(4) の証明

この証明は **Cantor の対角線論法**（*Cantor's diagonal argument*）とよばれる．X, Y を集合として，$\mathfrak{m} = \mathrm{card}(X)$, $\mathfrak{n} = \mathrm{card}(Y)$ とおく．$\mathfrak{n} \geqslant 2$ とする．単射 : $X \to Y^X$ の存在はすぐに分かる．たとえば Y の異なる 2 元 $a, b \in Y$ を選び（$\mathfrak{n} \geqslant 2$ だから選ぶことができる），$x \in X$ に対して $\chi_x(x) = a$，$y \neq x$ のとき $\chi_x(y) = b$ とすれば，写像 $x \mapsto \chi_x$ が単射である． 全射 : $X \to Y^X$ が存在しないことを示すために，$f : X \to Y^X$ を全射とする．

ここで，写像 $g : X \to Y$ を，$f(x)(x) = a$ のとき $g(x) = b$，$f(x)(x) \neq a$ のとき $g(x) = a$ と定義すれば $g \notin f(X)$ である．実際各 $x \in X$ に対して $g(x) \neq f(x)(x)$ となり，$g = f(y)$ なる $y \in X$ は存在しない．これは f が全射でないことを意味するから矛盾．よって X から Y^X への全射は存在せず，従って $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$．□