

圏論

M. Nakata

目次

1	参考文献	1
2	導入	1
2.1	圏	1

1 参考文献

- Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Springer.
- 斎藤恭司, 土岡俊介『ベーシック圏論普遍性からの速習コース』(丸善出版)

2 導入

圏論とは, 群, 環, ベクトル空間, 集合, 位相空間などの数学的構造を一般化したものである. 今ではその応用の範囲は広く及ぶ.

2.1 圏

定義

圏 (category) \mathcal{C} は, 以下の要素から構成される:

- i) 対象 (*object*) とよばれるものからなる類 $\text{obj } \mathcal{C}$,
- ii) 各対象 $A, B \in \text{obj } \mathcal{C}$ に対し, 集合 $\text{Hom}(A, B)$ が対応する. $\text{Hom}(A, B)$ の元 $f \in \text{Hom}(A, B)$ を A から B への射 (*morphism*) といい, $f: A \rightarrow B$ あるいは $A \xrightarrow{f} B$ と表す.

さらに, 次の性質をみたす:

- 1) 各対象 $A, B, A', B' \in \text{obj } \mathcal{C}$ に対し, $A \neq A'$ または $B \neq B'$ ならば $\text{Hom}(A, B) \cap \text{Hom}(A', B') = \emptyset$ である.
- 2) \mathcal{C} における 2 つの射 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ に対し, f と g の合成射 (*composite*) とよばれる射 $gf: A \rightarrow C$ が存在し結合律をみたす. すなわち, $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ のとき $h(gf) = (hg)f$ が成立つ.
- 3) 各対象 $A \in \text{obj } \mathcal{C}$ に対し恒等射 (*identity*) とよばれる射 $1_A: A \rightarrow A$ が存在し, $f: A \rightarrow B$ ならば $f1_A = f$ および $1_B f = f$ が成立つ.

$\text{obj } \mathcal{C}$ が小さい類のとき, すなわち $\text{obj } \mathcal{C}$ が集合のとき圏 \mathcal{C} は小さい (*small*) という.

例