多様体論

M. Nakata

目次

1　参考文献　1

2　導入　1

2.1　ベクトル束 1

1　参考文献

- Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Springer.
- 小林昭七『接続の微分幾何とゲージ理論』(裳華房)

2　導入

2.1　ベクトル束

M を n 次元多様体として，その点 $p \in M$ における接空間を T_pM，余接空間を T_p^*M と書く．$(x^1,\dots,x^n)$ を点 p の近傍での局所座標系とすると， $X \in T_pM$ に対して

$$X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

のとき $X = (x^1(p),\dots,x^n(p),a^1,\dots,a^n)$ として，$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ に局所座標系を定めることができる．$T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M$ にも同様に局所座標系を定義できる．

定義

多様体 M 上の**ベクトル束**（*vector bundle*）とは，多様体 E であって次の条件をみたすものである：

i) 微分可能な写像 $\pi\colon E \to M$ があり，各点 $x \in M$ に対して $E_x = \pi^{-1}(x)$ は同じ次元 r のベクトル空間である．E_x を x 上の**ファイバー**（*fiber*）という．
ii) 各点 $x \in M$ とその近傍 $U \subset M$ に対して，微分同相 $\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \boldsymbol{R}^r$ が存在して，$\{y\} \subset M$ への制限が線形同型となる．

例

i) TM と T^*M はともにファイバーの次元が n のベクトル束である．実際，$X \in T_pM$ に対して $\pi(X) = p$ とすればこれはファイバーを与え，$\pi^{-1}(p) = T_pM$ と R^n は線形同型となる．T^*M も同様．
ii) **直積束**（*product bundle*）$E = M \times \boldsymbol{R}^r$ はベクトル束である．

定義

$\{U_\alpha\} \subset M$ を M の被覆とすると各 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ は $U_\alpha \times \boldsymbol{R}^r$ と同型になる．よって，$x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対して２つの同型

$$\varphi_\alpha(x)\colon E_x \to \boldsymbol{R}^r \quad \varphi_\beta(x)\colon E_x \to \boldsymbol{R}^r$$

が存在する．このとき，$\psi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\alpha(x)\varphi_\beta(x)^{-1}$ によって $\psi_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \boldsymbol{R})$ が定まる．これらの写像の族 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ を被覆 $\{U_\alpha\}$ に対する E の**変換関数**（*transition functions*）とよぶ．

注

E の変換関数 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ は次の性質をもつ：

$$\psi_{\alpha\beta}(x)\psi_{\beta\gamma}(x) = \psi_{\alpha\gamma}(x) \quad (x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma); \tag{1}$$
$$\psi_{\alpha\alpha}(x) = I_r; \tag{2}$$
$$\psi_{\beta\alpha}(x) = \psi_{\alpha\beta}(x)^{-1}. \tag{3}$$