замечая, что все показатели > 0, получим переходом к пределу при $x \to 0$, что необходимо $a_1 = 0$. Поэтому тождество может иметь только такой вид:

$$a_2 x^{k_2} + a_3 x^{k_3} + \cdots + a_n{}^{k_n} = 0.$$

Повторяя последовательно то же рассуждение, получим: $a_2 = 0$, $a_3 = 0, \ldots, a_n = 0$, т.е. противоречие с предположением, что не все a_i равны нулю; это противоречие и доказывает наше утверждение (аналогичное рассуждение можно было бы применить и к предыдущему примеру).

4) Примером линейно-независимой системы являются функции: $\varphi_1 = \sin^2 x$, $\varphi_2 = \cos^2 x$, $\varphi_3 = 1$. Действительно, полагая $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, получаем тождество (для $-\infty < x < \infty$):

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0.$$

3. Пусть мы имеем $\boldsymbol{n}$ функций от x, имеющих непрерывные производные до $n-1$-го порядка:

$$y_1, \ \ y_2, \ \ \ldots, \ \ y_n$$

Определитель:

$$W[y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_n] \equiv W(x) \equiv \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \cdots, & y_n, \\ y_1', & y_2', & \cdots, & y_n', \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \cdots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{10}$$

называется *детерминантом Вронского* этих функций. Легко доказывается следующая теорема:

Теорема 3. *Если функции* $y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_n$ *линейно зависимы, то детерминант Вронского тождественно равен нулю.*

Пусть функции $y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_n$ линейно зависимы, т. е. существует тождественное соотношение

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n = 0, \tag{11}$$

где не все a_i равны нулю. Без ограничения общности мы можем допустить, что $a_n \neq 0$ (иначе мы изменили бы нумерацию функций). Разрешаем соотношение (11) относительно y_n, получаем тождество:

$$\left.\begin{aligned} y_n = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1}, \\ \left(\beta_i = -\frac{a_i}{a_n}, \ i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n-1\right). \end{aligned}\right\} \tag{11$'$}$$

Из тождества (11$'$) дифференцированием по x получаем:

$$\left.\begin{aligned} y_n' = \beta_1 y_1' + \beta_2 y_2' + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1}', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(n-1)} = \beta_1 y_1^{(n-1)} + \beta_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{11$''$}$$

Умножаем в выражении (10) первый столбец на $-\beta_1$, второй — на $-\beta_2$, ..., $(n-1)$-й на $-\beta_{n-1}$ и прибавляем к последнему; величина детерминанта W не изменится, но в силу соотношений $(11')$ и $(11'')$ последний столбец нового детерминанта будет состоять из нулей, откуда следует, что $W \equiv 0$, а это и требовалось доказать.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть частные решения однородного уравнения $(3')$, то справедлива обратная, притом более сильная теорема:

Теорема 4. *Если решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы* [в интервале (2)], то $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ *не обращается в нуль ни в одной точке рассматриваемого интервала.*

Допустим противное: пусть $W(x_0) = 0$, $a < x_0 < b$. Обозначим величины y_i при $x = x_0$ через y_{i0} и значения ${y_i}^{(k)}(x_0)$ — через ${y_{i0}}^{(k)}$ и составим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} C_1y_{10} + C_2y_{20} + \ldots + C_ny_{n0} &= 0,\\ C_1{y_{10}}' + C_2{y_{20}}' + \ldots + C_ny_{n0}' &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ C_1{y_{10}}^{(n-1)} + C_2{y_{20}}^{(n-1)} + \ldots + C_n{y_{n0}}^{(n-1)} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Рассматривая в уравнениях (12) величины $C_1, C_2, \ldots, C_n$ как неизвестные, мы получим для детерминанта системы (12) значение $W(x_0) = 0$. Следовательно, однородная система (12) из n уравнений с n неизвестными имеет систему решений $C_1, C_2, \ldots, C_n$, причём не все C_i равны нулю. Составим функцию

$$\widetilde{y}(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n; \tag{8'}$$

в силу следствия 1 теорем 1 и 2 она является решением уравнения $(3')$; в силу условий (12) мы имеем при $x = x_0$

$$\widetilde{y}(x_0) = 0, \quad \widetilde{y}'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad \widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{12'}$$

Начальные условия $(12')$, по теореме существования, определяют единственное решение уравнения $(3')$; но таким решением, очевидно, является тривиальное решение $y = 0$, следовательно, $\widetilde{y}(x_0) \equiv 0$ (в интервале $a < x < b$), и мы получаем из равенства $(8')$:

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = 0$$

для всякого x в интервале (2), причём не все C_i равны нулю, т.е. функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы против предположения. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теоремы 3 и 4 можно объединить в следующей формулировке: *детерминант Вронского, составленный для системы n решений линейного уравнения n-го порядка $(3')$ или тождественно равен нулю или не обращается в нуль ни в одной точке того интервала, где коэффициенты уравнения непрерывны.*