Пулькин И. С.

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ИНФОРМАЦИОННЫХ КОНФЛИКТОВ

Методические указания для выполнения лабораторных работ

Учебное пособие
для студентов 4 курса
специальности 09030207.65
Информационная безопасность
телекоммуникационных систем
специализации
Разработка защищенных
телекоммуникационных систем

Московский технологический университет
(МИРЭА)
Москва 2017

Общие положения

Лабораторный практикум по дисциплине "Теория принятия решений в условиях информационного конфликта"преследует следующие цели:
— проведение расчетов по теоретическим формулам;
— графическая иллюстрация результатов;
— проведение численных экспериментов;
— изучение языка программирования Python.

Задания могут выполняться как в Вычислительном центре Университета, так и на домашних компьютерах.

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие пункты.

1. Теоретическая часть.

2. Программный код. В этом коде должно быть указано следующее:
— какая задача решается;
— автор программного кода;
— дата написания программного кода;
— смысл переменных;
— может присутствовать описание алгоритма, если этот алгоритм достаточно сложен.

Ниже приведен пример программного кода.

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-
import math
#
# Программа для вычисления периметра
# и площади прямоугольного треугольника
# Автор - Пулькин И. С.
# Дата написания: 10.10.16.
#
# Описание переменных: a и b - длины катетов
#
a = 20.
b = 21.
p = a + b + math.sqrt(a*a + b*b)
s = a*b*0.5
print "Katet 1 = ", a
print "Katet 2 = ", b
print "Perimetr = ", p
```

```
print "Square = ", s
```

3. Результаты работы программы, в том числе скриншот.

Лабораторные работы, выполненные в течение семестра, оформляются затем как единая курсовая работа. Оформление курсовой — в соответствии с требованиями деканата Института Кибернетики.

Лабораторная работа 1. Метод Брауна — Робинсон.

Цель работы. Вычисление оптимальных смешанных стратегий и цены игры для антагонистической матричной игры 2×2 методом Брауна — Робинсон.

Теоретическая часть. Антагонистическая игра, или игра с нулевой суммой, это игра, где выигрыш одного игрока всегда равен проигрышу другого. Условия игры можно свести в таблицу, называемую матрицей платежей.

1-й игрок \ 2-й игрок	1 стратегия	2 стратегия
1 стратегия	-4	5
2 стратегия	8	-7

В таблице приведены выигрыши первого игрока при различных вариантах выбора игроков, называемых стратегиями. Например, если первый игрок применит вторую стратегию, а второй применит первую стратегию, то первый игрок получит выигрыш в 8 единиц.

Ясно, что обоим игрокам следует использовать смешанные стратегии применять первую или вторую из своих возможных стратегий поочередно случайным образом с некоторыми вероятностями.

Можно доказать, что каждая антагонистическая игра имеет решение — пару оптимальных стратегий, отступать от которых невыгодно ни одному игроку, если другой продолжает ее придерживаться.

Метод Брауна — Робинсон заключается в следующем: при первой игре стратегии выбираются произвольно, а в каждой из последующих игр каждый из игроков выбирает стратегию, обеспечивающую максимальный выигрыш против того набора стратегий, который противник использовал в предыдущих партиях. Можно доказать, что вероятности выбора стратегий сходятся к оптимальным, а средний выигрыш — к цене игры.

Содержание работы. Требуется написать программу, моделирующую последовательность игр с заданной матрицей платежей размера 2×2, например, с указанной выше. Матрица эта, а также длительность серии игр, должны быть легко изменяемы. Далее, следует отладить программу и проверить ее работоспособность.

Требования к отчету. В скриншоте работы программы должно быть указано: длительность тестовой серии игр, оптимальные стратегии обоих игроков и цена игры. Желателен также ответ на следующие вопросы:
— каковы вычисленные теоретически стратегии игроков и цена игры;

— велика ли разница между теоретическими и найденными программой значениями;
— кто из игроков выигрывает чаще;
— верно ли, что тот, кто выигрывает чаще, выиграет больше.

Лабораторная работа 2. Накопленный и средний выигрыш в длинной серии антагонистических игр.

Цель работы. Моделирование методом статистических испытаний серий антагонистических игр, вычисление накопленного и среднего выигрыша, изучение графических возможностей языка Python.

Теоретическая часть. Пусть двое играют в некоторую антагонистическую игру. Проводится некоторое достаточно большое число партий. Накопленный выигрыш — это суммарный выигрыш во всех партиях. Средний выигрыш — это накопленный выигрыш, разделенный на число сыгранных партий.

Средний выигрыш стремится к цене игры, когда число партий велико. Однако при малом числе партий тенденция может быть не так заметна, поскольку разброс может быть большим. Для исследования вопроса о скорости сходимости среднего выигрыша к цене игры следует использовать метод статистических испытаний. Разыгрывается достаточно длинная серия игр, в каждой из которых оба игрока применяют свои оптимальные смешанные стратегии. (Эти стратегии могут быть найдены как аналитически, так и методом Брауна — Робинсон, описанном в предыдущей лабораторной работе). В каждой партии стратегия выбирается случайным образом в соотвеьствии с оптимальными вероятностями смешанной стратегии.

Содержание работы. Требуется написать программу, реализующую описанную выше последовательность партий, вычисляющую и запоминающую суммарный и средний выигрыш. Следует вывести на экран график зависимости среднего выигрыша от числа сыгранных партий. Поскольку для выявления тенденции может потребоваться большое число партий — несколько десятков или даже сотен тысяч — следует предусмотреть возможность вывода на экран не всех значений, а только каждого десятого или сотого значения.

Требования к отчету. Программа должна выводить на экран или на печать график зависимости среднего выигрыша от числа сыгранных партий. Основываясь на этом графике, следует сделать вывод о том, сколько партий должно быть сыграно, чтобы этот средний выигрыш практически не отличался от цены игры. Для корректности сравнения цена игры должна быть вычислена каким-либо другим способом, например, аналитически, а не только как предел средних выигрышей.

Лабораторная работа 3. Классическая задача о разорении игрока.

Цель работы. Исследование результатов решения классической задачи о разорении игрока.

Теоретическая часть. Классическая задача о разорении игрока рассматривалась и была решена в XIX веке. Постановка задачи такова: пусть двое игроков играют в некоторую игру, причем первый выигрывает каждую партию независимо от других с вероятностью p, проигрывает с вероятностью $q = 1 - p$, а ничьих не бывает. В каждой партии разыгрывается ставка в 1 рубль. Первоначальный капитал первого игрока составляет k рублей, а второго — $N - k$ рублей. Партии продолжаются до полного разорения одного из игроков, то есть до того момента, когда ему будет нечего поставить на кон.

Можно представить условие задачи как случайное блуждание некоторой фигурки на отрезке прямой: если капитал первого игрока на текущий момент равен x, то фигурка находится в точке в координатой x. После следующей партии она смещается либо в $x + 1$, либо в $x - 1$, в зависимости от того, выиграл или проиграл первый игрок эту партию. Если фигурка попадает в точку с координатой 0 или N, случайное блуждание заканчивается — происходит разорение одного из игроков.

Задача имеет аналитическое решение. Если, как было указано, первоначальный капитал первого игрока составляет k рублей, а второго — $N - k$ рублей, то вероятность выигрыша первого игрока, то есть разорения второго, равна

$$p_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}.$$

Вывод этой формулы есть, например, в [8].

Содержание работы. Требуется написать программу, производящую вычисления по указанной формуле, а также строящую графики зависимостей. Во всех расчетах считать, что $p > 0,5$. Используя написанную программу, следует провести расчеты, дающие ответы на такие вопросы.

1. Как зависит вероятность общего выигрыша от вероятности p? Построить несколько графиков для различных значений k и N.

2. Пусть k и N возрастают так, что их отношение остается постоянным, $k/N = 0,1$. Как будет меняться вероятность общего выигрыша первого игрока?

3. Каким должно быть p, чтобы первый игрок почти наверняка выигрывал при заданных k и N?

Требования к отчету. В отчете, помимо текста программы, должны присутствовать все вышеупомянутые графики. На основании построенных графиков требуется дать ответ на вопрос, что все-таки важнее для общей победы: капитал или умение играть?

Желательно было бы построение графика случайного блуждания, то есть графика зависимости капитала игрока от количества сыгранных партий для каких-либо значений начального капитала и вероятности выигрыша.

Желательно осветить еще следующие аспекты задачи, требующие не программирования, а аналитического решения.

1. Как ведет себя вероятность общего выигрыша при $p \to 0$ (очень слабый игрок) и при $p \to 1$ (очень сильный). Как эти пределы зависят от соотношения k и N?

2. Приведенная выше формула не годится при $p = 0,5$. Что будет в этом случае? Для выяснения этого вопроса следует перейти в этой формуле к пределу при $p \to 0,5$, используя, например, правило Лопиталя.

3. Пусть $p = 0,5$. Чьи шансы возрастут больше при пропорциональном увеличении капиталов: более богатого или более бедного игрока?

Лабораторная работа 4. Последовательный анализ.

Цель работы. Моделирование процедуры проверки статистической гипотезы о значении неизвестной вероятности методом последовательного анализа.

Теоретическая часть. Допустим, что на вход поступает последовательность нулей и единиц, причем вероятность появления единицы равна p. Значение этой вероятности p нам не известно, известно только, что существуют две возможности: $p = p_1$ и $p = p_2$. Как сделать выбор между этими двумя возможностями?

Можно, проведя достаточно много измерений, то есть получив достаточно длинную входную последовательность нулей и единиц, рассчитать, какова вероятность такой серии при условии выполнения каждой из гипотез и после этого остановиться на той гипотезе, для которой эта вероятность выше. Этот подход имеет существенный недостаток: может оказаться, что выбранная длина серии слишком маоа, обе гипотезы вполне вероятны и отличить их сложно. С другой стороны, иожет оказаться, что серия слишком велика. Если получение данных — дорогостоящая процедура, то имеет смысл сделать входную серию максимально короткой.

Эти трудности преодолены в предложенном А. Вальдом методе последовательного анализа.

Идея последовательного анализа заключается в следующем. Каждое новое наблюдение служит основанием для пересчета вероятностей гипотез. В какой-то момент вероятность одной из гипотез достигает некоторого критически большого значения, а вероятность второй — критически малого. В этот момент наблюдения заканчиваются и принимается первая гипотеза.

Содержание работы. Требуется написать программу, рассчитывающую вероятности гипотез длинных серий нулей и единиц при условии выполнения одной из гипотез: $p = p_1$ или $p = p_2$, где p — вероятность появления единицы. Вероятности $p = p_1$ и $p = p_2$ должны быть заранее заданы, но должны легко изменяться в программе.

Отдельная подпрограмма должна генерировать последовательность нулей и единиц. Она должна запрашивать, какую из возможностей принять, и получать эту информацию с клавиатуры. После этого должна начинаться генерация серии.

Пересчет вероятностей гипотез на основании вновь полученных данных может производиться, например, по фориуле Байеса

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2)},$$

где
H_1 и H_2 — гипотезы о значении вероятностей;
A — событие, состоящее в получении нового измерения (нуля или единицы);
$P(H_1)$ и $P(H_2)$ — априорные вероятности гипотез;
$P(A|H_1)$ и $P(A|H_2)$ — условные вероятности зафиксированного события;
$P(H_1|A)$ — апостериорная вероятность.

До начала серии априорные вероятности принимаются равными $1/2$, то есть сначала гипотезы считаются равновероятными. После наступления каждого события по формуле Байеса вычисляются апостериорные вероятности, то есть происходит переоценка гипотез. На следующем шаге за априорные вероятности принимаются апостериорные вероятности предыдущего шага.

Когда апостериорная вероятность одной из гипотез достигает значения $1 - \alpha$, расчеты прекращаются и эта гипотеза принимается. Значение уровня значимости α, обычно равное 0,05, тоже должно быть легко изменяемо в программе.

Требования к отчету. В скриншоте работы программы, помимо входных параметров p_1, p_2 и α, должно быть указано:
— длительность серии нулей и единиц и количество нулей и единиц в ней;
— какая гипотеза была принята.
Следует построить график зависимости апостериорной вероятности от длины серии.

Желателен был бы теоретический анализ задачи, содержащий ответы на такие вопросы.
1. Какова вероятность ошибочного выбора гипотезы для данной длины серии?
2. Вероятности гипотез для данной длины серии могут быть подсчитаны на основании формул для последовательных испытаний Бернулли. Какой метод более эффективен?

Лабораторная работа 5. Графическая иллюстрация множества достижимых итогов в неантагонистической биматричной игре.

Цель работы. Разработка программы, иллюстрирующей множество всех возможных исходов в неантагонистической биматричной игре для случая некооперативного поведения игроков.

Теоретическая часть. Неантагонистические игры — это игры, в которых интересы сторон не обязательно противоположны. Такие игры описываются матрицами, например, такого вида:

$$\begin{pmatrix} (4,3) & (-2,-2) \\ (-1,-4) & (1,5) \end{pmatrix}.$$

В каждой клетке матрицы стоит пара чисел: выигрыши первого и второго игроков соответственно. Например, если первый игрок применит вторую стратегию, а второй применит первую стратегию, то первый игрок проиграет 1 единицу, а второй проиграет 4 единицы.

Игры такого типа называют *биматричными*. Как видно, интересы игроков могут частично совпадать.

В данной лабораторной работе рассматривается случай некооперативного поведения игроков: игроки полностью лишены возможности как-либо договариваться и согласовывать свои ходы. В таких случаях, как и в антагонистических играх, бывает уместно применять смешанные стратегии.

Пусть дана матрица биматричной игры 2×2. Пусть каждый из игроков применяет смешанные стратегии: первый выбирает свою первую стратегию с вероятностью x, а вторую — с вероятностью $1 - x$. Аналогично, второй игрок выбирает свои стратегии с вероятностями y и $1 - y$. Тогда могут быть подсчитаны средние выигрыши обоих игроков: $S_1(x, y)$ для первого игрока и $S_2(x, y)$ для второго. При заданных вероятностях x и y выигрыш может быть изображен точкой $(S_1(x, y), S_2(x, y))$ в плоскости с координатами S_1, S_2.

При изменении вероятностей выбора стратегий x и y эта точка также будет меняться. Для всех возможных наборов (x, y) точки $(S_1(x, y), S_2(x, y))$ будут заполнять некоторую область в плоскости с координатами S_1, S_2. Таким образом, пара функций $(S_1(x, y)$ и $S_2(x, y))$ задает отображение единичного квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ в плоскости x, y на некоторую область в плоскости S_1, S_2. Эта область и есть множество достижимых итогов.

Содержание работы. Для заданной матрицы неантагонистической игры требуется вычислить формулы для $S_1(x, y)$ и $S_2(x, y)$, построить область достижимых исходов и изобразить ее графически. Для построения области следует задать конечное множество значений переменных x и y, например, $x = 0, 0,02, 0,04, \ldots, 1$ — 51 возможное значение, и аналогично для y. Для всех выбранных $51 \times 51 = 2601$ точек должны быть вычислены и построены их образы в плоскости S_1, S_2. Как исходная матрица игры, так и количество выбранных точек должно быть легко изменяемо в программе.

Требования к отчету. Отчет должен содержать текст программы и изображение полученной области. Можно ли по этому изображению сказать, как сложится игра при многократном повторении?

Лабораторная работа 6. Построение выпуклой оболочки множества.

Цель работы. Разработка программы, иллюстрирующей множество всех возможных исходов в неантагонистической биматричной игре для случая кооперативного поведения игроков.

Теоретическая часть. Выпуклым множеством назвыается такое множество, которое вместе с любыми двумя точками содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки. Другое определение — выпуклое множество, это такое множество, которое лежит полностью по одну сторону от любой из своих касательных. Выпуклая оболочка заданного множества — минимальное выпуклое множество, содержащее данное.

В предыдущей лабораторной работе было построено множество допустимых исходов биматричной игры в некооперативном случае. Это множество выпуклым быть не обязано.

В этой работе рассматривается случай кооперативного поведения игроков: игроки могут договариваться и согласовывать свои ходы. Оказывается, можно доказать, что в этом случае множество всех возможных исходов это ни что иное, как выпуклая оболочка того множества, которое получалось в некооперативном случае.

Множество исходов, оптимальных по Парето — это множество, состоящее из таких исходов, для которых ни один игрок не может увеличить свой выигрыш в одностороннем порядке, то есть не уменьшая выигрыш второго игрока. Графическое изображение дает четкое и наглядное представление о том, какие исходы оптимальны по Парето — это северо-восточный угол.

Содержание работы. Должна быть разработана программа, строящая выпуклую оболочку произвольного конечного набора точек на плоскости. Алгоритм построения следует уточнить у своего преподавателя или найти в интернете.

Выпуклая оболочка конечного набора точек всегда является выпуклым многоугольником. Программа должна рассчитывать координаты всех вершин этого многоугольника и рисовать все его стороны.

Используя эту программу, следует построить выпуклую оболочку множества возможных исходов из предыдущей работы. При этом, в связи с возможной трудоемкостью алгоритма, следует взять не слишком большое количество исходных точек (x, y), например $11\times 11 = 121$ точку. Среди этих точек обязательно должны быть вершины исходного единичного квадрата в плоскости x, y.

Требования к отчету. Отчет должен содержать текст программы, изображение исходного набора точек и изображение границ полученной выпуклой оболочки, желательно на одном чертеже, с выделением цветом или толщиной линий. При оформлении лабораторной работы в бумажном варианте следует на чертеже указать множество оптимальных по Парето исходов.

Лабораторная работа 7. Моделирование популяций и поиск эволюционно стабильных стратегий.

Цель работы. Моделирование динамики популяций.

Теоретическая часть. Подробно о том, как естественный отбор может формировать альтруистическое поведение, описано в книге Р. Докинза "Эгоистичный ген" (4). Там приведены многочисленные примеры того, как гены альтруизма закрепляются в популяции, а доля особей с такими генами возрастает.

Для моделирования динамики популяций мы рассмотрим модель "голуби и ястребы".

Пусть имеется популяция, состоящая из голубей. Голуби — птицы мирные (в этой модели!), и если двум голубям все-таки приходится бороться за что-то, например, за самку или за территорию, то до реальной драки дело не доходит: оба голубя проводят демонстрации, принимают угрожаюшие позы и так далее. В какой-то момент одному из них это надоедает, и он уходит, признав себя побежденным. Он уходит целым и невредимым, потеряв только свое время. Оценим его потери в 10 очков. Выигрыш победителя оценим в 50 очков, минус то же потерянное время, итого 40 очков.

А вот в популяции голубей появляется ястреб. В случае конкуренции ястреб лезет в драку. Поскольку голубь не дерется, он сразу убегает. Поэтому в таком поединке ястреб получает 50 очков, а голубь — 0 очков.

Ястребы имеют огромное преимущество над голубями: они выигрывают все поединки, и поэтому имеют больше шансов на размножение. Доля ястребов в популяции начинает расти.

Теперь становится возможной ситуация, когда ястреб встречается с ястребом. Оба они лезут в драку, а победитель — только один. Будем считать, что победитель заработал те же 50 очков, а проигравший получил тяжелые увечья и лишился 100 очков.

Если ястребов в популяции много, то в стычках между собой они потеряют, скорее всего, много очков, больше, чем голуби. Поэтому число голубей в популяции начинает увеличиваться.

В результате в популяции устанавливается некоторое равновесное количество голубей и ястребов. Пусть доля голубей в популяции равна p, а доля ястребов равна $(1-p)$. Мы получим тот же результат — стабильность популяции, если будем считать,что все особи на самом деле ведут себя одинаково — с вероятностью p — как голуби, и с вероятностью $(1-p)$ — как ястребы.

Такая стратегия поведения носит название *эволюционно стабильной стратегии.* А именно, эволюционно стабильная стратегия — стратегия поведения, которая, будучи принята достаточно большим числом членов популяции, не может быть вытеснена никакой другой стратегией.

Содержание работы. Требуется написать программу, моделирующую динамику популяций, состоящих из голубей и ястребов. Число очков, получаемых в конфликтах между особями, может быть таким, как описано выше, но должно быть легко изменяемо в программе.

Пусть популяция состоит из N особей. На первом этапе моделируются конфликты между особями. Пусть каждая особь встречается с каждой другой по одному разу. Для каждой особи подсчитывается суммарное число очков, набранных ею в этих конфликтах.

На втором этапе проводится генетический отбор. Все особи выстраиваются по рейтингу в соответствии с числом набранных очков. Особи, попавшие в нижнюю треть рейтинга, удаляются из популяции — вымирают. Особи из средней трети рейтинга остаются в популяции без изменений. Для каждой из особей верхней трети рейтинга появляется ее потомок, такой же, как сама эта особь — эти особи размножаются.

После смены нескольких поколений в популяции устанавливается равновесное соотношение численностей голубей и ястребов. График динамики количества голубей должен выводиться на экран или на печать.

Требования к отчету. Кроме вышеупомянутого графика, необходимо указать условия моделирования: число особей в популяции и число очков, получаемых в конфликтах. Желательно дополнить отчет аналитическим решением задачи о стабильном соотношении голубей и ястребов в популяции и сравнить полученные значения.

Лабораторная работа 8. Вычисление вектора Шепли.

Цель работы. Вычисление вектора Шепли.

Теоретическая часть. Вектор Шепли — это один из возможных подходов к решению проблемы справедливого дележа. Мы рассмотрим его на примере модели "Малое Гадюкино" (Демешев Б. "Кооперативная теория игр" [3]).

Село Малое Гадюкино примыкает к автомобильной дороге. Все n домов в этом селе стоят на одной-единственной улице и находятся на расстояниях $x_1, x_2, \dots, x_n$ метров от автодороги. Жители села решили заасфальтировать эту улицу. Каждый метр асфальта стоит 1. Как жителям распределить взносы?

Мы можем с самого начала считать, что все расстояния упорядочены, то есть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Каждый из Гадюкинцев хотел бы заплатить поменьше. Вообще, каждый из Гадюкинцев хотел бы участвовать в финансировании дороги только до своего дома, потому что остальной частью улицы он не пользуется. Тем не менее общие интересы требуют асфальтирования всей улицы.

Концепция вектора Шепли предлагает такой рецепт. Допустим, что в число плательщиков все жители деревни добавляются в некотором определенном порядке. Если дорога до вновь добавившегося жителя не оплачена, он оплачивает строительство участка от уже построенного ранее до его дома. Если дорога до его дома уже оплачена, то он не платит ничего.

Всех n жителей можно расположить в некотором порядке $n!$ способами. Набор усредненных по всем $n!$ перестановкам платежей для всех жителей деревни и есть вектор Шепли.

Рассмотрим пример. Пусть $n = 5$, а расстояния до дороги приведены в следующей таблице

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
40	90	150	240	300

Рассмотрим перестановку (42153). Первым в число плательщиков добавляется четвертый житель, и он оплачивает 240 метров дороги. Следующими добавляются второй и первый жители, и они не доплачивают ничего, потому что дорога до них уже профинансирована. Следующим добавляется пятый житель, и он оплачивает оставшиеся до него 60 метров дороги. Третий житель также ничего не платит.

Рассмотрим теперь перестановку (21534). В этом случае второй оплачивает 90 метров, пятый оплачивает 210 метров, а остальные не платят ничего.

Для других перестановок платежи, разумеется, будут другие. Из 5 объектов можно составить $5! = 120$ перестановок. Усредненные по всем этим перстановкам платежи и есть вектор Шепли.

Содержание работы. По заданным расстояниям $x_1, x_2, \ldots, x_n$ следует вычислить вектор Шепли.

Требования к отчету. Отчет должен содержать исходные данные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и результат расчетов: набор платежей для всех жителей — вектор Шепли.

Литература

1. Вентцель Е. С. Исследование операций. М.: Наука, 1980 — 208с.
2. Данилов В.И. Лекции по теории игр. М.:РЭШ, 2002. http://www.nes.ru/RUssIan/research/abstracts/2002/Danilov-r.htm
3. Демешев Б. Кооператвная теория игр. http://demeshev.files.wordpress.com/2010/06/coop_gt1.pdf
4. Докинз Р. Эгоистичный ген. М.: Мир, 1993.—318 с.
5. Коковин С. Г. Лекции по теории игр и политологии. http://math.nsc.ru/ mathecon/Kokovin/m1tigran.pdf
6. Колобашкина Л. В., Алюшин М. В. Информационные технологии принятия решений в условиях конфликта. Часть 1. Основы теории игр. М.: МИФИ, 2010 — 164 с.
7. Пиндайк Р. С., Рубинфельд Д. Л. Микроэкономика. М.: Дело, 2001 — 771с.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984 — 528с.
9. Авинаш Диксит, Барри Нейлбафф. Теория игр. Искусство стратегического мышления в бизнесе и жизни. М.: Манн, Иванов и Фербер, 2015 — 464с.