page /

université PARIS DIDEROT PARIS 7

VÉRIFICATION DES APTITUDES ET DES CONNAISSANCES

DATE : 20/09/2026

UV : Stats et Simu.

Après avoir rempli l'en-tête, rabattre et coller le coin noirci

Nom : ADDA BRAHIM

Prénom : Otmane

N° d'étudiant : 22214254

N° de place :

N.B. - Il est interdit aux candidats, sous peine d'exclusion, de signer leur composition ou d'y apporter un signe distinctif quelconque.

Correcteurs			
Nom : Appréciations :	NOTE	Nom : Appréciations :	NOTE

Note définitive :

Ne rien inscrire ici

page /

Question 7 :

1) $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)$, si t ~~∉ [2,3]~~ < 2, nous avons $F_X(t) = 0$

Soit $t \in [2,3]$, on a :

$F_X(t) = \int_2^t \frac{2}{5} x = \frac{2}{5} \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^t$

$= \frac{1}{5}(t^2 - 4)$

Le résultat reste vrai si $t \geq 3$. On a alors $\overbrace{\int_2^3 \frac{2}{5} x \, dx}^{=1 \text{ car densité}} + \overbrace{\int_3^t f_X(x) dx}^{=0}$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ \frac{1}{5}(t^2 - 4) & \text{si } t \in [2;3] \\ 1 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

3) ~~On~~ ~~[illegible]~~ On se place sur le Rectangle (abcd), On tire un point $A = (X, Y)$ et deux v.a.r uniformes sur $[0,2]$ U_1, U_2 et on pose

NE RIEN ÉCRIRE ICI

$$\begin{cases} X = bU_1 + (a-b)U_1 \\ Y = MU_2 \end{cases} \quad \text{avec } M = \max(f_X(x))$$

On cherche alors X tel que $F(X) \leq Y$ avec F la fonction répartition. Si la condition est vérifiée on prend X, sinon on réitère l'algorithme.

2) On prend $U \sim Unif([0,2])$, ensuite, on cherche la fonction quantile donc on pose $u = F(t)$ et on cherche à exprimer $t = F^{-1}(u)$. On pose alors $Y \sim F^{-1}(U)$ notre nouvelle variable aléatoire. Étape 1 : Prendre U v.a.r uniforme $_{[0,2]}$ Étape 2 : Résoudre $F(t) = u$ Étape 3 : Renvoyer $Y = F^{-1}(U)$

4) Soit $Y = X^2$. On pose h ~~mesurable~~ borélienne positive. Calculons $E[h(Y)]$

$$E[h(Y)] = \int h(y) f_X(x)\,dx$$

$$= \int_2^3 h(x^2)\,\frac{2}{5}x\,dx \qquad \text{soit } x^2 = u \iff x = \sqrt{u}$$

$$\implies dx = du \times \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\iff E[h(Y)] = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} h(u)\,\frac{2}{5}\sqrt{u}\,\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(u)\,\frac{1}{5}\mathbb{1}_{[\sqrt{2};\sqrt{3}]}\,du$$

On en déduit que Y a pour loi : $f_Y(x) = \frac{1}{5}\mathbb{1}_{[\sqrt{2};\sqrt{3}]}$

(Q7 : 2) donc $\frac{1}{5}(t^2 - 4) = u$ sur $[2,3]$

si $t \in [2,3]$, $u \in [0,2]$

$\iff 5u = t^2 - 4$

$\iff \sqrt{5u+4} = t$

Donc $Y \sim F(U)$ avec $F(u) = \sqrt{5u-4}\,\mathbb{1}_{[0;2]}(u)$