

"Haute voltige"

TAI de Modélisation Mathématique

Clément DILLY
Guillaume DUMAS
Jérémy GRELAUD
Julien HASSOUN
Amaury ROSSIGNOL
Groupe A

Sommaire

Question a.....	p.2
Question b.....	p.5
i) Euler	
ii) Point milieu (ou Euler amélioré)	
iii) Heun (ou trapèze amélioré)	
iv) RK4	
Question c.....	p.12
Question d.....	p.15
Question e.....	p.17
Question f.....	p.26
Sources.....	p.30

Question a

On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} (M_1 + M_2)L_1^2 y_1''(t) + M_2 L_1 L_2 \cos(y_1(t) - y_2(t)) y_2''(t) + M_2 L_1 L_2 \sin(y_1(t) - y_2(t)) y_2'^2(t) + (M_1 + M_2)g L_1 \sin(y_1(t)) = 0 & (1) \\ M_2 L_1 L_2 \cos(y_1(t) - y_2(t)) y_1''(t) + M_2 L_2^2 y_2''(t) - M_2 L_1 L_2 \sin(y_1(t) - y_2(t)) y_1'^2(t) + M_2 g L_2 \sin(y_2(t)) = 0 & (2) \\ t \geq 0 \end{cases}$$

avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} y_1(0) = y_{10} \\ y_2(0) = y_{20} \\ y_1'(0) = y_{10}' \\ y_2'(0) = y_{20}' \end{cases}$$

Comme indiqué dans le sujet, on pose $y_3(t) = y_1'(t)$ et $y_4(t) = y_2'(t)$. On remplace alors dans (1) et (2) $y_1''(t)$ par $y_3'(t)$ et $y_2''(t)$ par $y_4'(t)$. Pour trouver $y_3'(t)$ et $y_4'(t)$, on procède par combinaison linéaire.

Recherche de $y_3'(t)$

Pour éliminer $y_4'(t)$ du système on fait :

$$\begin{aligned} & M_2 L_2^2 \times (1) - M_2 L_1 L_2 \cos(y_1(t) - y_2(t)) \times (2) = 0 \\ \Rightarrow & M_2 L_2^2 L_1^2 (M_1 + M_2) y_3'(t) + M_2^2 L_1 L_2^3 \cos(y_1(t) - y_2(t)) y_4'(t) \\ & + M_2^2 L_1 L_2^3 \sin(y_1(t) - y_2(t)) y_4^2(t) + (M_1 + M_2) g L_1 L_2^2 M_2 \sin(y_1(t)) \\ & - M_2^2 L_1 L_2^3 \cos(y_1(t) - y_2(t)) y_4'(t) - M_2^2 L_1^2 L_2^2 \cos^2(y_1(t) - y_2(t)) y_3'(t) \\ & + M_2^2 L_1^2 L_2^2 \cos(y_1(t) - y_2(t)) \sin(y_1(t) - y_2(t)) y_3^2(t) \\ & - M_2^2 g L_1 L_2 \cos(y_1(t) - y_2(t)) \sin(y_2(t)) = 0 \end{aligned}$$

Ensuite, on factorise par $M_2 L_2^2 L_1$. Puis, on simplifie des deux côtés de l'égalité.

$$\begin{aligned} & y_3'(t) \left[\underbrace{L_1(M_1 + M_2) - M_2 L_1 \cos^2(y_1(t) - y_2(t))}_{*} \right] = \\ & - M_2 L_2 \sin(y_1(t) - y_2(t)) y_4^2(t) - (M_1 + M_2) g \sin(y_1(t)) \\ & - M_2 L_1 \cos(y_1(t) - y_2(t)) y_3^2(t) + M_2 g \cos(y_1(t) - y_2(t)) \sin(y_2(t)) \\ (*) & = L_1(M_1 + M_2) - M_2 L_1 \cos^2(y_1(t) - y_2(t)) \\ & \text{Or } \cos^2 = 1 - \sin^2 \\ (*) & = M_1 L_1 + M_2 L_1 - M_2 L_1 [1 - \sin^2(y_1(t) - y_2(t))] \\ & = M_1 L_1 + \cancel{M_2 L_1} - \cancel{M_2 L_1} + M_2 L_1 \sin^2(y_1(t) - y_2(t)) \\ & = L_1 (M_1 + M_2 \sin^2(y_1(t) - y_2(t))) = \frac{1}{K} \times \frac{1}{L_2} \end{aligned}$$

Donc $y_3'(t) = K L_2 [\text{anciennne expression}]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_3'(t) = K [& -M_2 L_1^2 \sin(y_1(t) - y_2(t)) y_4^2(t) - (M_1 + M_2) g L_2 \sin(y_1(t)) \\ & - M_2 L_1 L_2 \cos(y_1(t) - y_2(t)) \sin(y_1(t) - y_2(t)) y_3^2(t) \\ & + M_2 g L_2 \cos(y_1(t) - y_2(t)) \sin(y_2(t))] \end{aligned}$$

Recherche de $y_4'(t)$ (Même procédé)

Pour éliminer $y_3'(t)$ du système on fait :

$$M_2 L_1 L_2 \cos(y_1(t) - y_2(t)) x(1) - (M_1 + M_2) L_1^2 x(2) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (M_1 + M_2) L_1^3 M_2 L_2 \cos(y_1(t) - y_2(t)) y_3'(t) + M_2^2 L_1^2 L_2^2 \cos^2(y_1(t) - y_2(t)) y_4'(t) \\ & + M_2^2 L_1^2 L_2^2 \cos(y_1(t) - y_2(t)) \sin(y_1(t) - y_2(t)) y_4^2(t) + M_2 L_1 L_2 \cos(y_1(t) - y_2(t)) \times \\ & (M_1 + M_2) g L_1 \sin(y_1(t)) - (M_1 + M_2) L_1^3 M_2 L_2 \cos(y_1(t) - y_2(t)) y_3'(t) \\ & - M_2 L_1^2 (M_1 + M_2) L_1^2 y_4'(t) + M_2 L_1 L_2 (M_1 + M_2) L_1^2 \sin(y_1(t) - y_2(t)) y_3^2(t) \\ & - (M_1 + M_2) L_1^2 M_2 g L_2 \sin(y_2(t)) = 0 \end{aligned}$$

On simplifie ensuite le tout par $M_2 L_1 L_2$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_4'(t) \left[\underbrace{M_2 L_1 L_2 \cos^2(y_1(t) - y_2(t)) - (M_1 + M_2) L_1 L_2}_{*} = \right. \\ \left. - M_2 L_1 L_2 \cos(y_1(t) - y_2(t)) \overset{*}{\sin(y_1(t) - y_2(t))} y_4^2(t) - \cos(y_1(t) - y_2(t)) \times \right. \\ (M_1 + M_2) g L_1 \sin(y_1(t)) - (M_1 + M_2) L_1^2 \sin(y_1(t) - y_2(t)) y_3^2(t) \\ \left. + (M_1 + M_2) g L_1 \sin(y_2(t)) \right] \end{aligned}$$

$$(*) = M_2 L_1 L_2 \cos^2(y_1(t) - y_2(t)) - (M_1 + M_2) L_1 L_2$$

$$\text{Or } \cos^2 = 1 - \sin^2$$

Donc

$$\begin{aligned} (*) &= \cancel{M_2 L_1 L_2} - M_2 L_1 L_2 \sin^2(y_1(t) - y_2(t)) - \cancel{M_1 L_1 L_2} - \cancel{M_2 L_1 L_2} \\ &= -L_1 L_2 [M_2 \sin^2(y_1(t) - y_2(t)) + M_1] = -\frac{1}{K} \end{aligned}$$

Donc on multiplie par $(-K)$ l'expression de droite et nous obtenons :

$$\begin{aligned} y_4'(t) &= K [M_2 L_1 L_2 \cos(y_1(t) - y_2(t)) \sin(y_1(t) - y_2(t)) y_4^2(t) \\ &\quad + (M_1 + M_2) g L_1 \cos(y_1(t) - y_2(t)) \sin(y_1(t)) + (M_1 + M_2) L_1^2 \sin(y_1(t) - y_2(t)) y_3^2(t) \\ &\quad - (M_1 + M_2) g L_1 \sin(y_2(t))] \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons le système de 4 équations différentielles du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_3(t) \\ y_2'(t) = y_4(t) \\ y_3'(t) = K[-(m_1 + m_2)gL_2 \sin(y_1(t)) + m_2gL_2 \sin(y_2(t)) \cos(y_1(t) - y_2(t)) \\ \quad - m_2L_1L_2 \sin(y_1(t) - y_2(t)) \cos(y_1(t) - y_2(t))y_3^2(t) - m_2L_2^2 \sin(y_1(t) - y_2(t))y_4^2(t)] \\ y_4'(t) = K[(m_1 + m_2)gL_1 \sin(y_1(t)) \cos(y_1(t) - y_2(t)) - (m_1 + m_2)gL_1 \sin(y_2(t)) \\ \quad + (m_1 + m_2)L_1^2 \sin(y_1(t) - y_2(t))y_3^2(t) + m_2L_1L_2 \sin(y_1(t) - y_2(t)) \cos(y_1(t) - y_2(t))y_4^2(t)] \end{cases}$$

Avec $K = \frac{1}{L_1L_2[M_1 + M_2 \sin^2(y_1(t) - y_2(t))]}$

Question b

Avant de donner les schémas explicites du système différentiel, rappelons tout d'abord nos données. L'application F est définie tel que :

$F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$
 et $y \mapsto F(y)$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t, y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)) \\ f_2(t, y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)) \\ f_3(t, y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)) \\ f_4(t, y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3(t) \\ y_4(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix}$$

Avec

$$y_3'(t) = K[-(m_1 + m_2)gL_2 \sin(y_1(t)) + m_2gL_2 \sin(y_2(t)) \cos(y_1(t) - y_2(t)) \\ - m_2L_1L_2 \sin(y_1(t) - y_2(t)) \cos(y_1(t) - y_2(t))y_3^2(t) - m_2L_2^2 \sin(y_1(t) - y_2(t))y_4^2(t)]$$

Et

$$y_4'(t) = K[(m_1 + m_2)gL_1 \sin(y_1(t)) \cos(y_1(t) - y_2(t)) - (m_1 + m_2)gL_1 \sin(y_2(t)) \\ + (m_1 + m_2)L_1^2 \sin(y_1(t) - y_2(t))y_3^2(t) + m_2L_1L_2 \sin(y_1(t) - y_2(t)) \cos(y_1(t) - y_2(t))y_4^2(t)]$$

i) Euler

$$Y_m = \begin{pmatrix} y_m^1 \\ y_m^2 \\ y_m^3 \\ y_m^4 \end{pmatrix} \approx Y(t_m) = \begin{pmatrix} y_1(t_m) \\ y_2(t_m) \\ y_3(t_m) \\ y_4(t_m) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y_{m+1} = Y_m + h F(t_m, Y_m) \in \mathbb{R}^4 \\ Y_0 \in \mathbb{R}^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_{m+1}^1 = y_m^1 + h f_1(t_m, y_m^1, y_m^2, y_m^3, y_m^4) \\ y_{m+1}^2 = y_m^2 + h f_2(t_m, y_m^1, y_m^2, y_m^3, y_m^4) \\ y_{m+1}^3 = y_m^3 + h f_3(t_m, y_m^1, y_m^2, y_m^3, y_m^4) \\ y_{m+1}^4 = y_m^4 + h f_4(t_m, y_m^1, y_m^2, y_m^3, y_m^4) \\ y_0^1 = y_{10}, y_0^2 = y_{20}, y_0^3 = y_{30} \text{ et } y_0^4 = y_{40} \end{cases}$$

Nous obtenons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{m+1}^1 = y_m^1 + h y_m^3 \\ y_{m+1}^2 = y_m^2 + h y_m^4 \\ y_{m+1}^3 = y_m^3 + h y_m^1 \\ y_{m+1}^4 = y_m^4 + h y_m^2 \\ y_0^1 = y_{10}, y_0^2 = y_{20}, y_0^3 = y_{30} \text{ et } y_0^4 = y_{40} \end{array} \right.$$

ii) Point milieu (ou Euler amélioré)

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_m + h F\left(t_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} F(t_m, y_m)\right) \\ y_0 = y(t_0) \end{cases}$$

On pose :

$$z_m = y_m + \frac{h}{2} F(t_m, y_m)$$

$$\Rightarrow z_m = \begin{pmatrix} y_m^1 \\ y_m^2 \\ y_m^3 \\ y_m^4 \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} f_1(t_m, y_m) \\ f_2(t_m, y_m) \\ f_3(t_m, y_m) \\ f_4(t_m, y_m) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z_m = \begin{pmatrix} y_m^1 + \frac{h}{2} f_3(y_m) \\ y_m^2 + \frac{h}{2} f_4(y_m) \\ y_m^3 + \frac{h}{2} f_1(y_m) \\ y_m^4 + \frac{h}{2} f_2(y_m) \end{pmatrix}$$

$$y_{m+1} = y_m + h F(z_m)$$

$$= \begin{pmatrix} y_m^1 \\ y_m^2 \\ y_m^3 \\ y_m^4 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f_1(z_m) \\ f_2(z_m) \\ f_3(z_m) \\ f_4(z_m) \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} y_{m+1}^1 = y_m^1 + h f_1(z_m) \\ y_{m+1}^2 = y_m^2 + h f_2(z_m) \\ y_{m+1}^3 = y_m^3 + h f_3(z_m) \\ y_{m+1}^4 = y_m^4 + h f_4(z_m) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{m+1}^1 = y_m^1 + h z_m^3 \\ y_{m+1}^2 = y_m^2 + h z_m^4 \\ y_{m+1}^3 = y_m^3 + h f_3(z_m^1, z_m^2, z_m^3, z_m^4) \\ y_{m+1}^4 = y_m^4 + h f_4(z_m^1, z_m^2, z_m^3, z_m^4) \\ y_0^1 = y_{10}, y_0^2 = y_{20}, y_0^3 = y_{30} \text{ et } y_0^4 = y_{40} \end{cases}$$

iii) Heun (ou trapèze amélioré)

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \left[f(t_m, y_m) + F(t_{m+1}, y_m + h f(t_m, y_m)) \right] \\ y_0 = y(t_0) \end{cases}$$

On pose :

$$z_m = y_m + h F(t_m, y_m)$$

$$\Rightarrow z_m = \begin{pmatrix} y_m^1 + h y_m^3 \\ y_m^2 + h y_m^4 \\ y_m^3 + h f_3(y_m) \\ y_m^4 + h f_4(y_m) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{m+1}^1 = y_m^1 + \frac{h}{2} [f_1(t_m, y_m) + f_1(t_{m+1}, z_m)] \\ y_{m+1}^2 = y_m^2 + \frac{h}{2} [f_2(t_m, y_m) + f_2(t_{m+1}, z_m)] \\ y_{m+1}^3 = y_m^3 + \frac{h}{2} [f_3(t_m, y_m) + f_3(t_{m+1}, z_m)] \\ y_{m+1}^4 = y_m^4 + \frac{h}{2} [f_4(t_m, y_m) + f_4(t_{m+1}, z_m)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{m+1}^1 = y_m^1 + \frac{h}{2} (y_m^3 + f_1(z_m)) \\ y_{m+1}^2 = y_m^2 + \frac{h}{2} (y_m^4 + f_2(z_m)) \\ y_{m+1}^3 = y_m^3 + \frac{h}{2} [f_3(y_m) + f_3(z_m)] \\ y_{m+1}^4 = y_m^4 + \frac{h}{2} [f_4(y_m) + f_4(z_m)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{m+1}^1 = y_m^1 + \frac{h}{2} (y_m^3 + z_m^3) \\ y_{m+1}^2 = y_m^2 + \frac{h}{2} (y_m^4 + z_m^4) \\ y_{m+1}^3 = y_m^3 + \frac{h}{2} (f_3(y_m) + f_3(z_m)) \\ y_{m+1}^4 = y_m^4 + \frac{h}{2} (f_4(y_m) + f_4(z_m)) \\ y_0^1 = y_{10}, y_0^2 = y_{20}, y_0^3 = y_{30} \text{ et } y_0^4 = y_{40} \end{cases}$$

iv) RK4

On a tout d'abord :

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \\ y_0 = y(t_0) \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} k_1 = F(t_m, y_m) \\ k_2 = F(t_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} k_1) \\ k_3 = F(t_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} k_2) \\ k_4 = F(t_m + h, y_m + h k_3) \end{cases}$$

Donc on obtient :

$$\begin{pmatrix} y_{m+1}^1 \\ y_{m+1}^2 \\ y_{m+1}^3 \\ y_{m+1}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_m^1 \\ y_m^2 \\ y_m^3 \\ y_m^4 \end{pmatrix} + \frac{h}{6} \begin{bmatrix} y_m^3 \\ y_m^4 \\ f_3(y_m) \\ f_4(y_m) \end{bmatrix} + 2k_2 + 2k_3 + k_4$$

Il faut donc exprimer les 4 vecteurs k_1 , k_2 , k_3 et k_4 .

$$R_1 = \begin{pmatrix} y_m^3 \\ y_m^4 \\ f_3(y_m) \\ f_4(y_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{1m}^1 \\ R_{2m}^1 \\ R_{3m}^1 \\ R_{4m}^1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = F\left(y_m + \frac{h}{2} R_1\right) = F\left[\begin{pmatrix} y_m^1 \\ y_m^2 \\ y_m^3 \\ y_m^4 \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} R_{1m}^1 \\ R_{2m}^1 \\ R_{3m}^1 \\ R_{4m}^1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} R_{1m}^2 \\ R_{2m}^2 \\ R_{3m}^2 \\ R_{4m}^2 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = F\left(y_m + \frac{h}{2} R_2\right) = F\left[\begin{pmatrix} y_m^1 \\ y_m^2 \\ y_m^3 \\ y_m^4 \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} R_{1m}^2 \\ R_{2m}^2 \\ R_{3m}^2 \\ R_{4m}^2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} R_{1m}^3 \\ R_{2m}^3 \\ R_{3m}^3 \\ R_{4m}^3 \end{pmatrix}$$

$$R_4 = F\left(y_m + h R_3\right) = F\left[\begin{pmatrix} y_m^1 \\ y_m^2 \\ y_m^3 \\ y_m^4 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} R_{1m}^3 \\ R_{2m}^3 \\ R_{3m}^3 \\ R_{4m}^3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} R_{1m}^4 \\ R_{2m}^4 \\ R_{3m}^4 \\ R_{4m}^4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{m+n}^1 \\ y_{m+n}^2 \\ y_{m+n}^3 \\ y_{m+n}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_m^1 \\ y_m^2 \\ y_m^3 \\ y_m^4 \end{pmatrix} + \frac{h}{6} \begin{bmatrix} y_m^3 \\ y_m^4 \\ f_3(y_m) \\ f_4(y_m) \end{bmatrix} + 2k_2 + 2k_3 + k_4$$

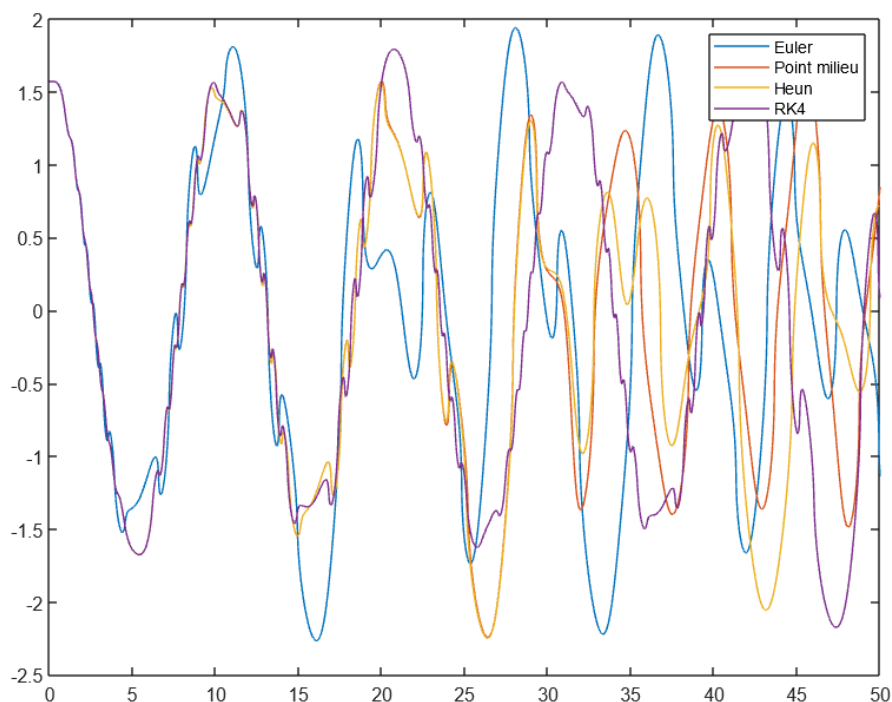
Question c

On fixe arbitrairement les constantes et conditions initiales :

On fixe les constantes suivantes pour l'ensemble des simulations de cette question : Trapèze (M1) : 1kg; L1=1m et L2=1m ; g=1.

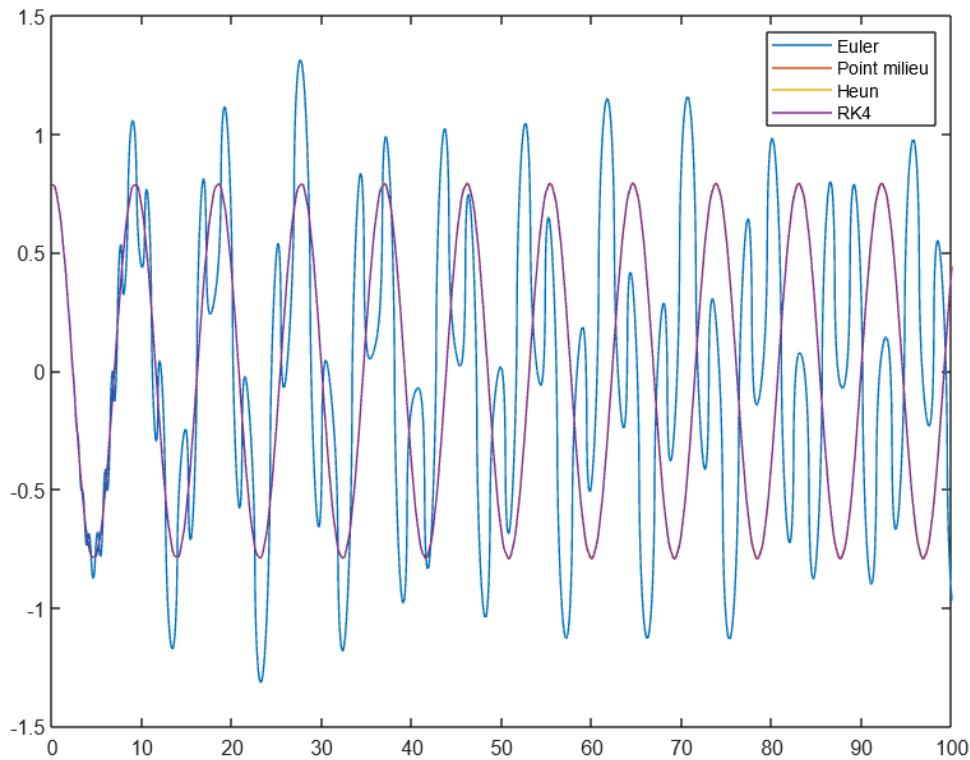
Les différentes simulations permettent de représenter la position angulaire y_2 (rad) en fonction du temps (s). On affiche simultanément les courbes pour les 4 schémas.

Simulation avec $T=50s$ $N=10000$ et $M2=60kg$, $y_1(0) = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ et $y_2(0) = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$, ce sont les positions angulaires ; $y_3(0)=0$ et $y_4(0)=0$, ce sont les vitesses initiales du trapèze et du trapéziste :

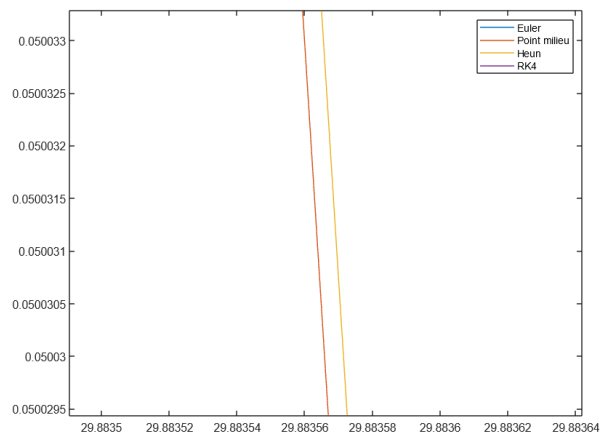
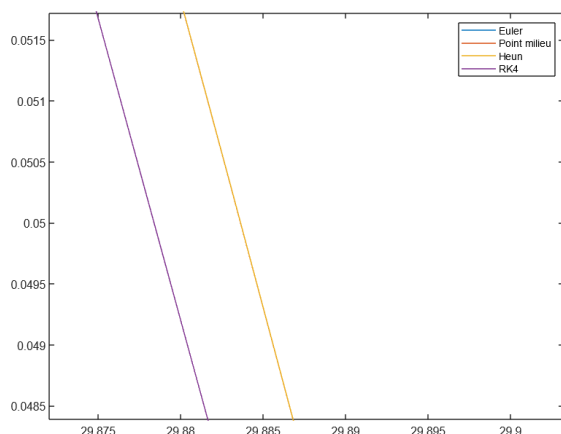


Il est difficile de tirer des conclusions avec ces conditions initiales, les 4 courbes sont similaires au début mais se dispersent très rapidement devenant très différentes.

Simulation pour $M_2=60$ kg, $T=100$ s, $N=10000$ et $y_1(0)=y_2(0)=\frac{\pi}{4}$ rad rad = 45° ; $y_3(0)=0$ et $y_4(0)=0$:



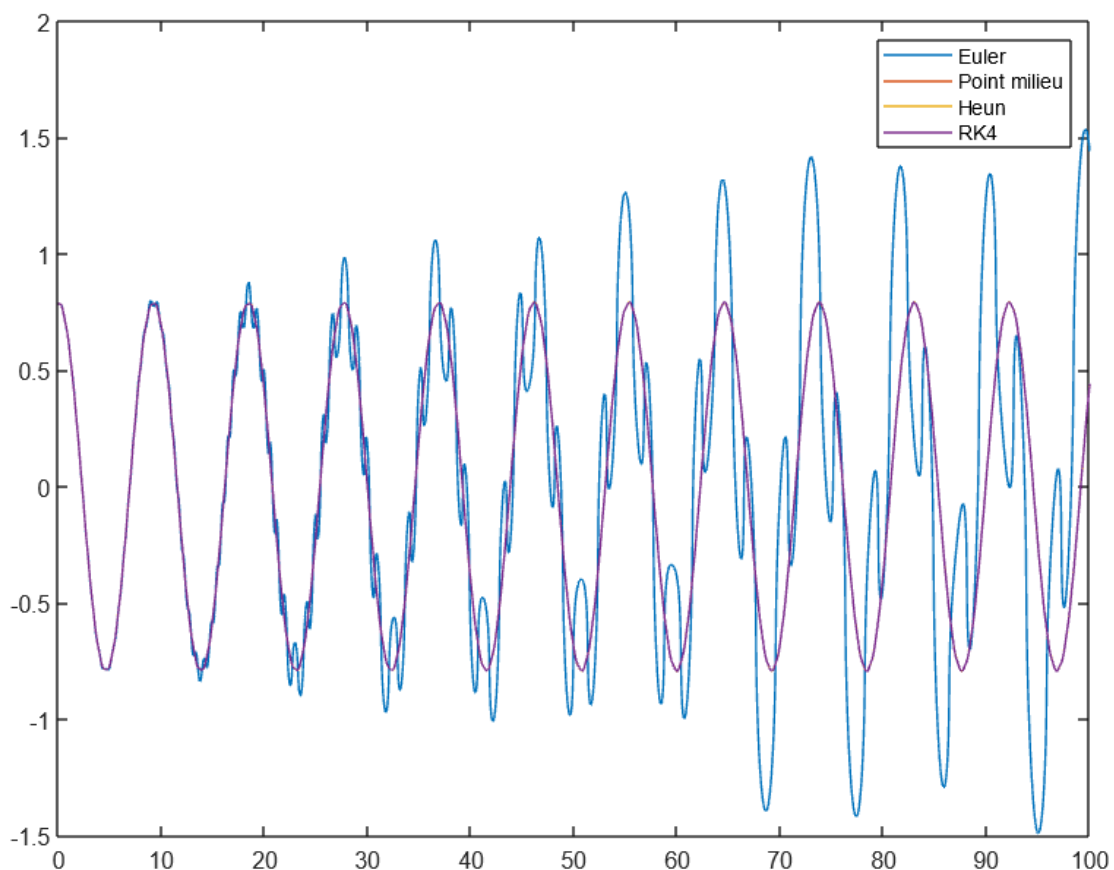
On constate que les courbes correspondant aux méthodes RK4, point-milieu et Heun sont assez similaires et quasi-périodiques dans ces conditions-là. Cependant, la courbe correspondant à la méthode d'Euler diffère de plus en plus au fil du temps avec une variation d'amplitude et un déphasage.



En zoomant grandement l'image on observe une forte similitude entre Rk4 et Heun ainsi que point-milieu. Pour apercevoir la courbe de la méthode point-milieu il faut zoomer davantage sur Heun car ces deux méthodes sont encore plus similaires.

Cette différence flagrante entre la méthode d'Euler et les trois autres s'explique par le fait que la méthode d'Euler est moins précise et engendre une erreur plus importante car elle se base sur une seule estimation de la pente de la tangente (dérivée) sur un pas de temps $[t_n, t_{n+1}]$. De plus, les erreurs s'accumulent au fil des itérations. Une solution pour obtenir une courbe plus précise serait d'augmenter le N pour un même T (c'est-à-dire diminuer le pas). Mais il faut faire attention à ne pas choisir un N trop élevé à cause du cumul des erreurs au fil des itérations (l'erreur sera toujours présente mais plus loin/décalée dans le temps).

Par exemple si nous reprenons le cas précédent mais avec $N = 40\,000$, la courbe d'Euler diverge plus tard (après 10 secondes au lieu de 5 environ) mais l'erreur est de plus en plus importante au fil du temps, les amplitudes varient entre -1.5 et +1.5 alors que précédemment elles variaient entre -1.3 et +1.3)



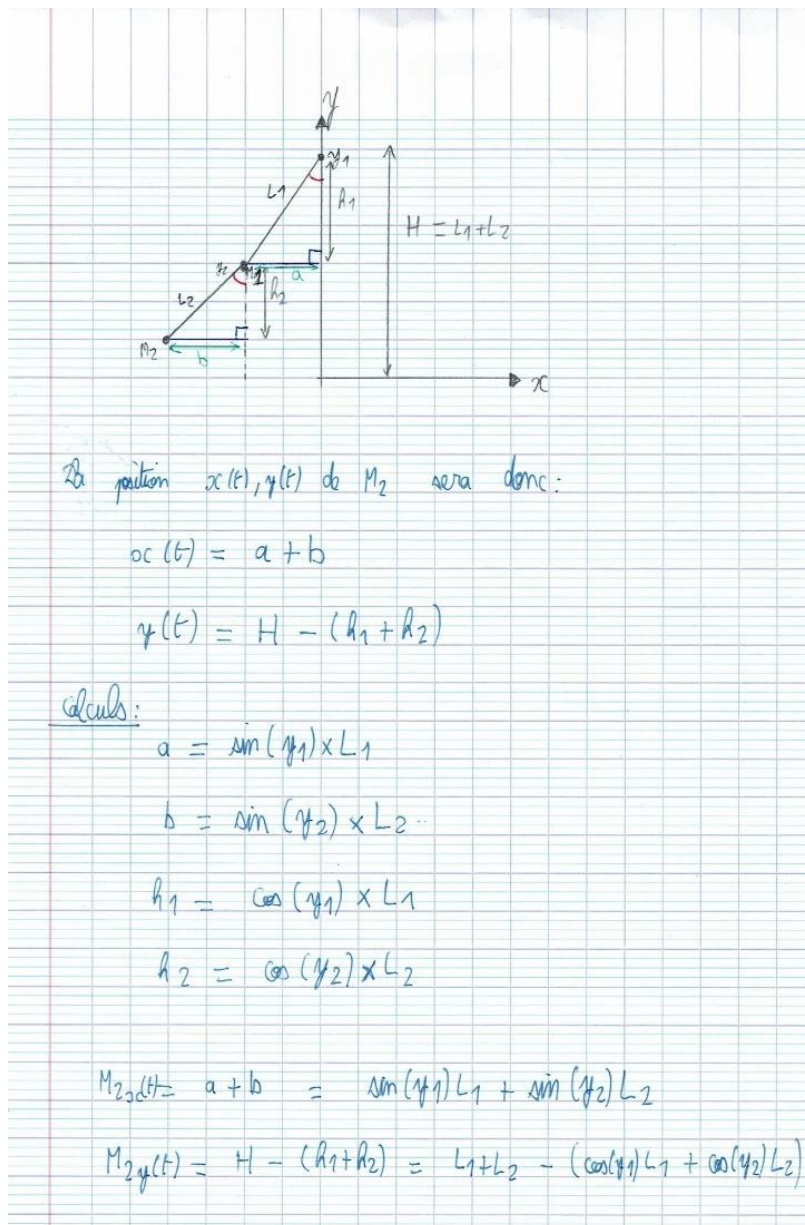
Les 3 autres méthodes sont quant à elles plus précises car elles se basent sur plusieurs estimations (entre 2 et 4 : 2 pour point-milieu, 3 pour Heun et 4 pour RK4) de pente de tangente sur un pas de temps $[t_n, t_{n+1}]$. Une pondération de ces estimations permet de réduire les erreurs d'estimation de $y_2(t)$. A priori, RK4 serait la méthode la plus précise des 4.

Question d

Nous cherchons à exprimer les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de la Masse M_2 et à représenter grâce aux 4 schémas la trajectoire $(x(t), y(t))$ de la masse M_2 .

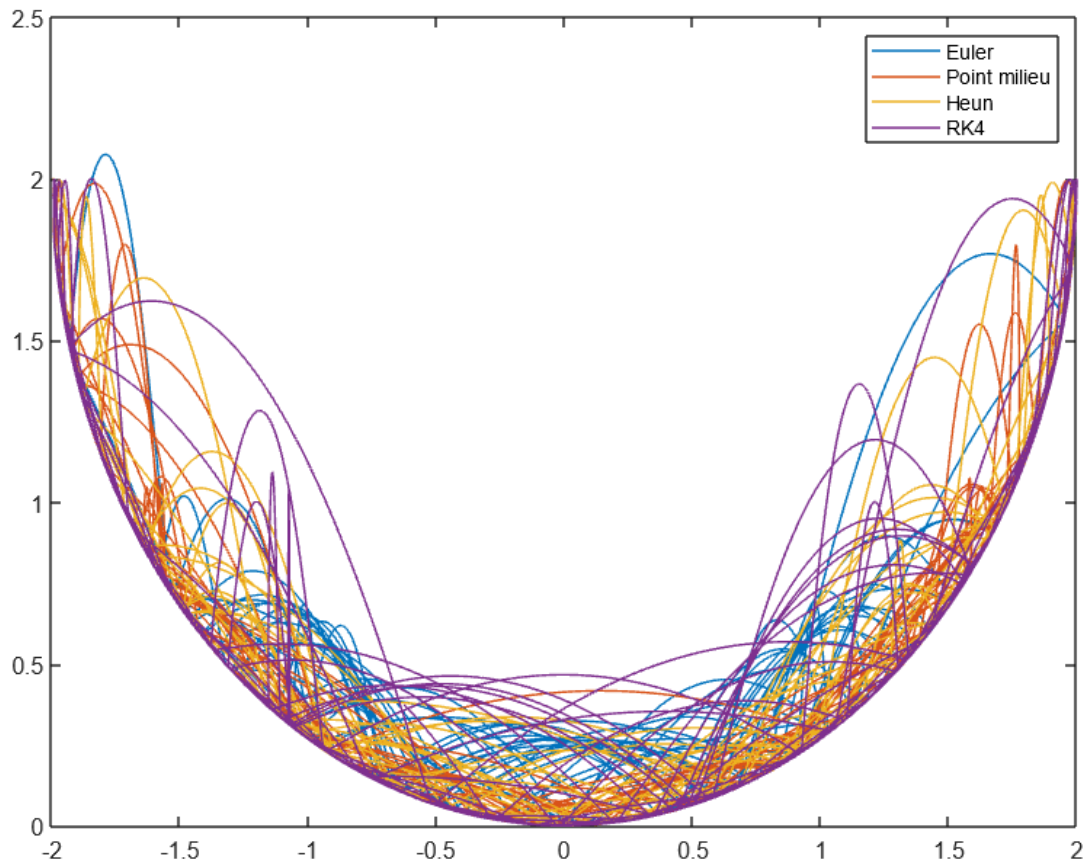
Rappelons que y_1 et y_2 sont les positions angulaires par rapport à la verticale à l'instant t des masses M_1 et M_2 . y'_1 et y'_2 sont quant à elles les vitesses angulaires correspondantes.

Pour exprimer les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de M_2 on se place dans un repère dont l'origine correspond à la position de M_2 lorsque le double pendule est à la verticale au repos ($y_1=y_2=y'_1=y'_2=0$).

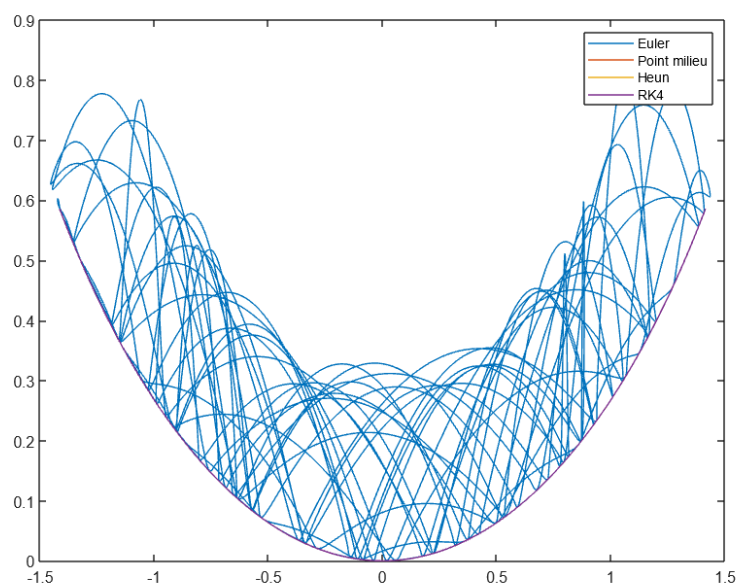


On obtient donc les équations exprimant les coordonnées $x(t)$, $y(t)$ de la masse M_2 en fonction de y_1 et y_2 (soit les positions angulaires).

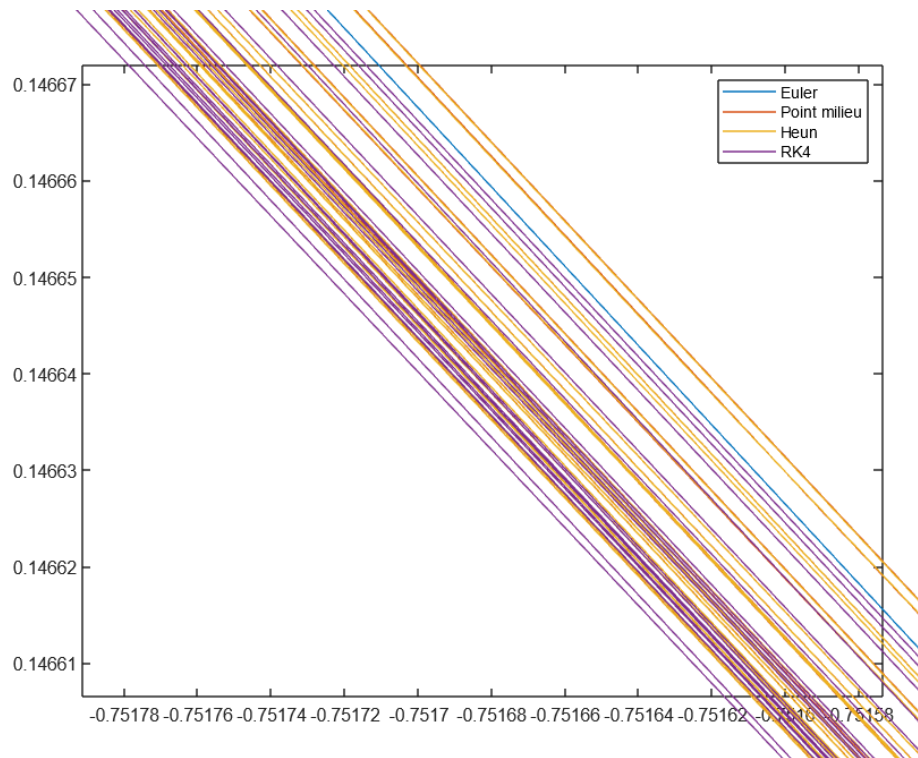
Exemple de simulation avec les 4 schéma de la position de M2 en fonction du temps
 (conditions : $y_1(0) = y_2(0) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$, $y'_1(0) = y'_2(0) = 0$ M1=1kg, M2=60kg, L1=1m, L2=1m, g=1;
 T=100s, N=10000 pts) :



Mêmes conditions sauf pour $y_1(0) = y_2(0) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$:



Zoom:



Conclusions : Nous obtenons des résultats cohérents avec la question précédente. Pour un angle de départ de $\frac{\pi}{2}$ les 4 méthodes donnent des trajectoires bien différentes, alors que pour un angle de départ de $\frac{\pi}{4}$ comme dit à la question précédente, seule la méthode d'Euler donne des résultats très différents. Les 3 autres méthodes donnent une trajectoire régulière avec peu de comportement chaotique. On s'aperçoit déjà de l'impact des conditions initiales sur le comportement du double pendule pouvant mener à un comportement chaotique (avec un angle de départ de $\frac{\pi}{2}$ notamment).

Question e

Test de la sensibilité aux conditions initiales du double pendule et détermination du passage vers une évolution chaotique en fonction des conditions initiales :

$$\begin{cases} y_1(0) = y_{10} \\ y_2(0) = y_{20} \\ y_1'(0) = y_{10}' \\ y_2'(0) = y_{20}' \end{cases}$$

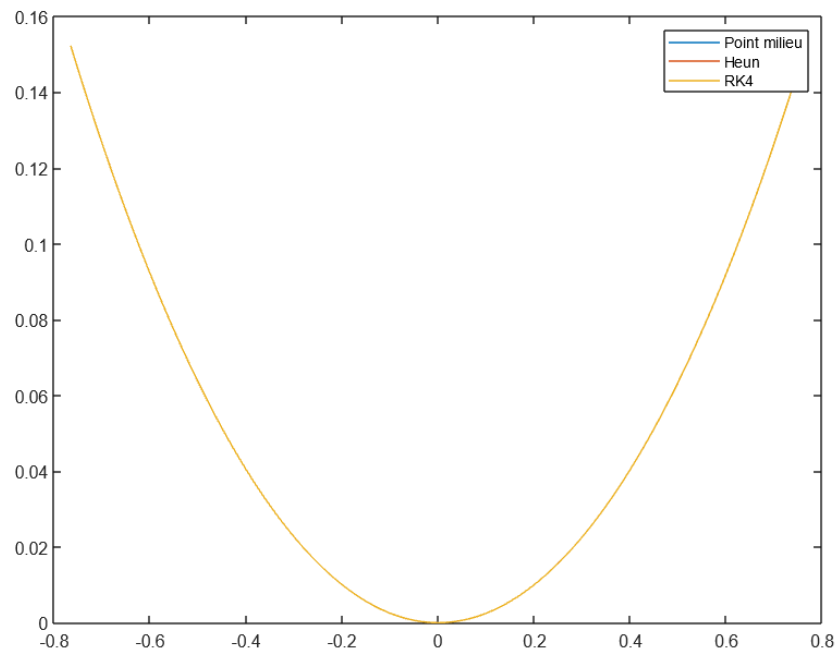
Conditions initiales :

On fixe les constantes : $M_1=1\text{kg}$, $M_2=60\text{kg}$, $L_1=1\text{m}$, $L_2=1\text{m}$, $g=1$

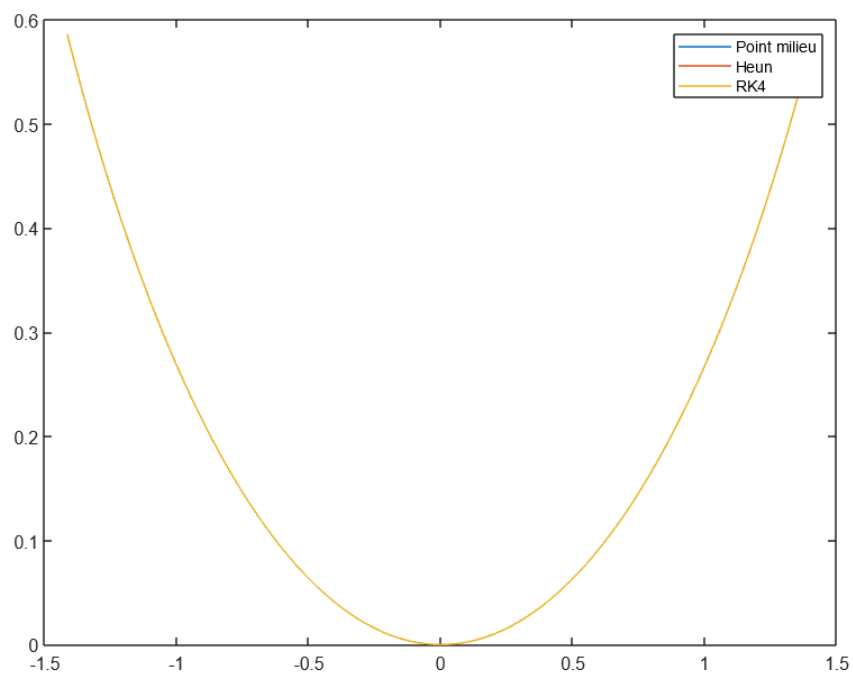
Les simulations sont réalisées avec $T=100$ secondes et $N=10\,000$.

Pour faciliter l'interprétation et l'identification du passage au chaos, nous utiliserons toutes les méthodes sauf celle d'Euler comportant trop d'imprécisions.

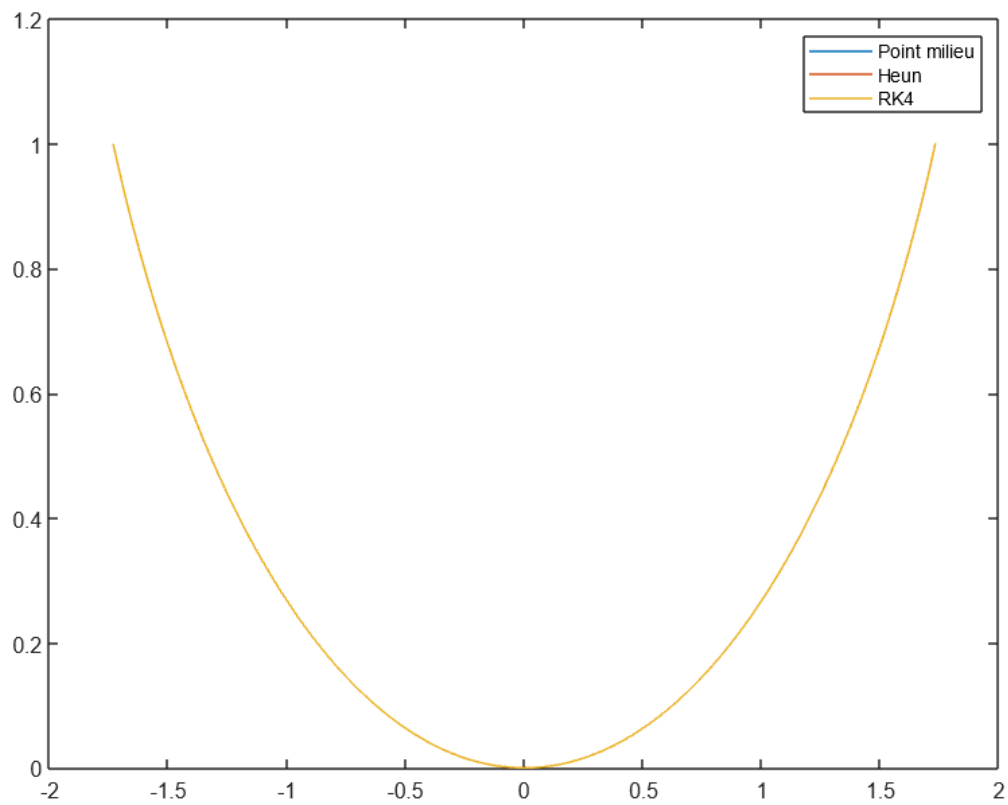
Simulation 1 : $y_1(0) = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$, $y_2(0) = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$, $y'_1(0)=0$, $y'_2(0)=0$:



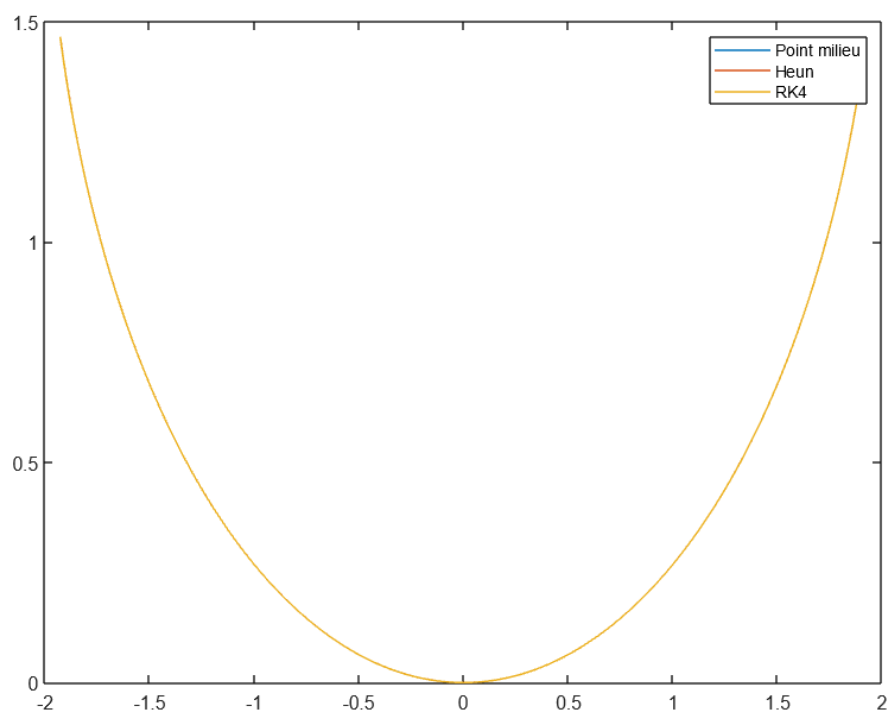
Simulation 2 : $y_1(0) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$, $y_2(0) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$, $y'_1(0)=0$, $y'_2(0)=0$:



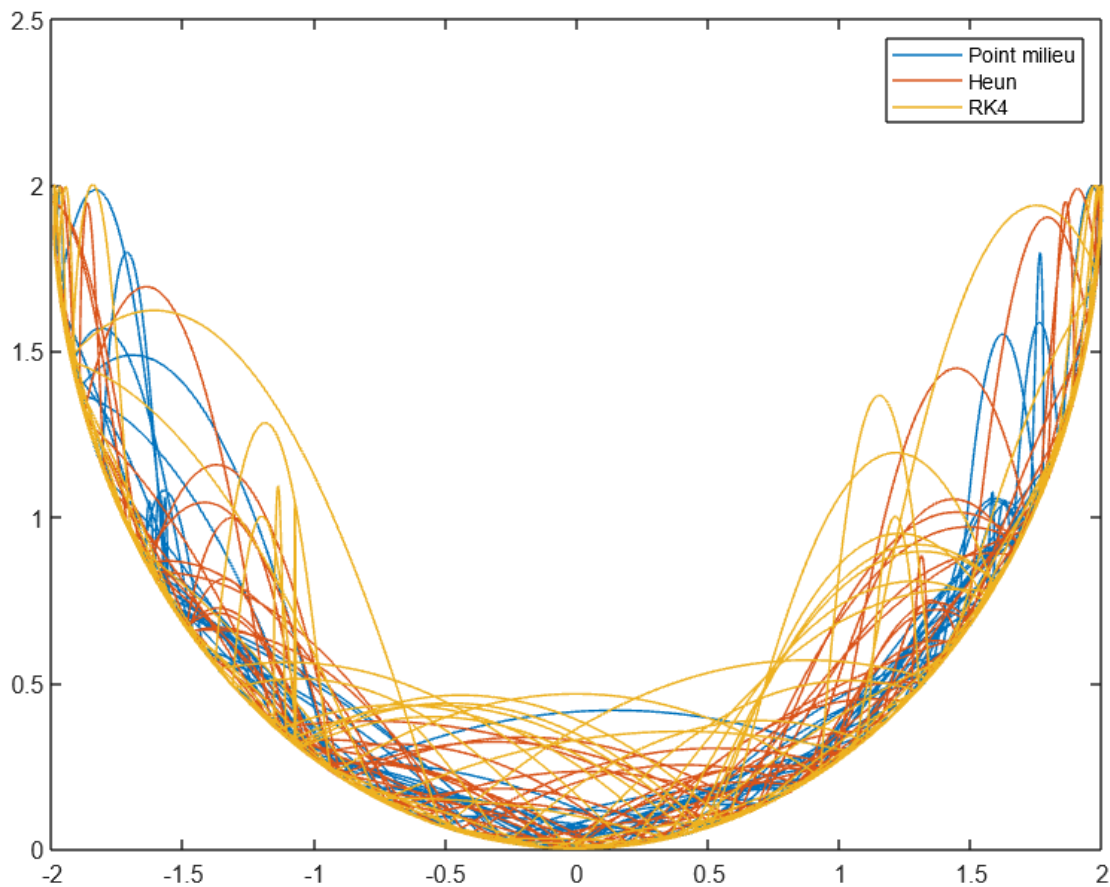
Simulation 3 : $y_1(0) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$, $y_2(0) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$, $y'_1(0)=0$, $y'_2(0)=0$:



Simulation 4 : $y_1(0) = 75^\circ$, $y_2(0) = 75^\circ$, $y'_1(0)=0$, $y'_2(0)=0$:



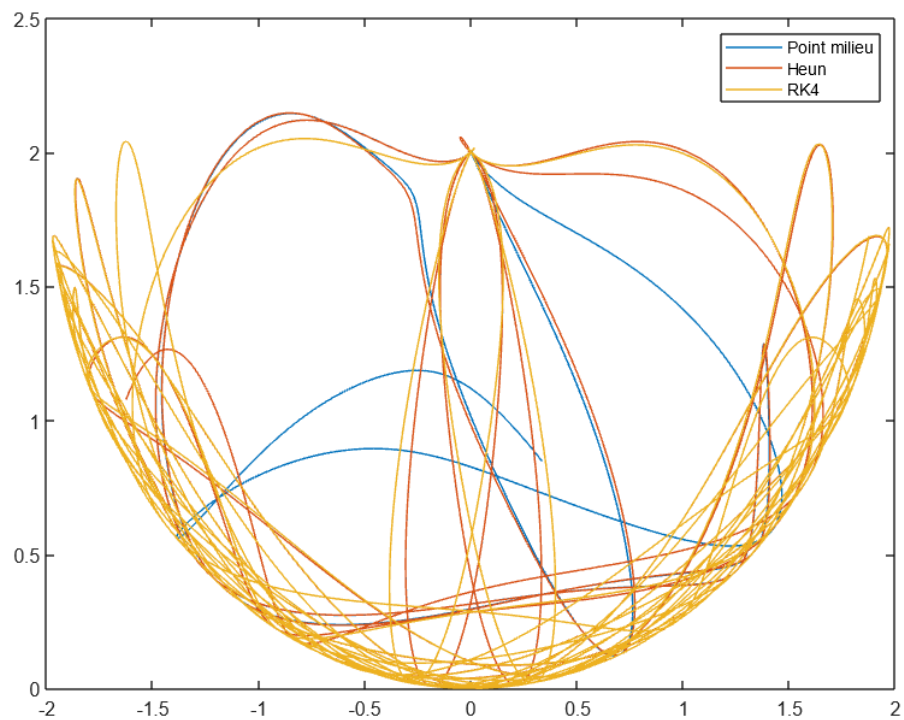
Simulation 5 : $y_1(0) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$, $y_2(0) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$, $y'_1(0)=0$, $y'_2(0)=0$:



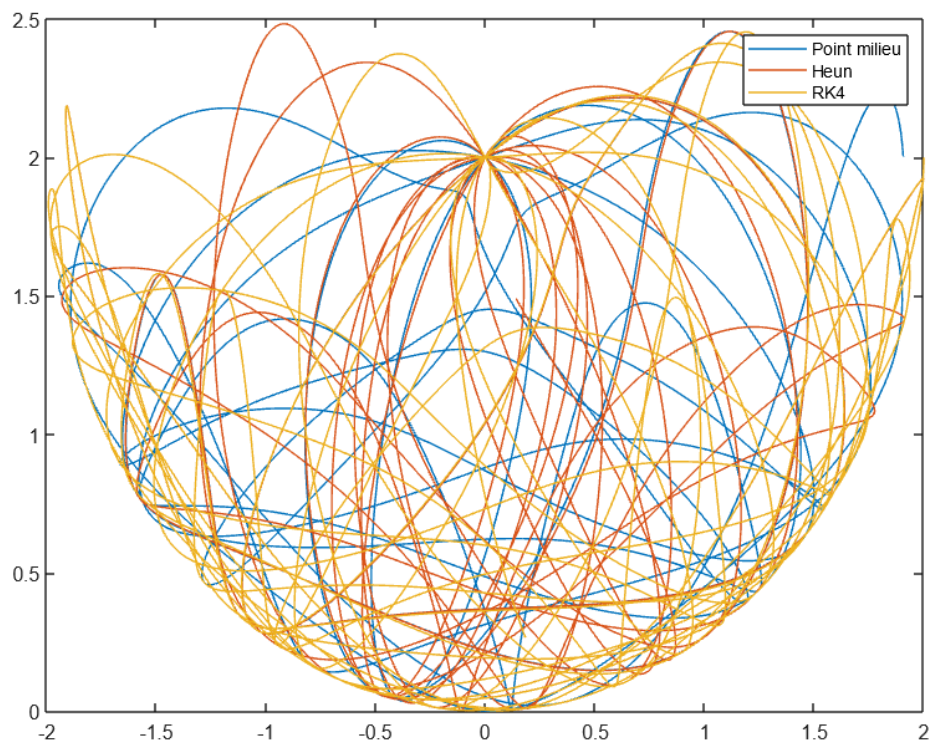
On remarque que pour des valeurs inférieures à $\frac{\pi}{2}$ de $y_1(0)$ et $y_2(0)$, le pendule double a un comportement régulier, avec une trajectoire de M_2 similaire à celle d'un pendule simple. Cependant, à partir de $y_1(0) = y_2(0) = \frac{\pi}{2}$, son comportement devient chaotique. Le comportement du pendule double est donc sensible aux conditions initiales.

On remarque aussi que les constantes ont un impact sur le comportement chaotique du pendule. Si nous reprenons un angle de départ de $\frac{\pi}{2}$ mais avec un $M_2=1\text{kg}$ au lieu de 60kg , nous obtenons un comportement encore plus chaotique. A l'aide de nouvelles simulations, nous avons aussi remarqué que cette diminution de masse M_2 a aussi diminué le seuil de passage à un comportement chaotique, en l'occurrence à partir de 80° environ :

Simulation pour $y_1(0)=y_2(0)=1.4$ rad ($\approx 80^\circ$) et $M_2=1\text{kg}$:



Simulation pour $y_1(0)=y_2(0)=\frac{\pi}{2}$ rad et $M_2=1\text{kg}$:



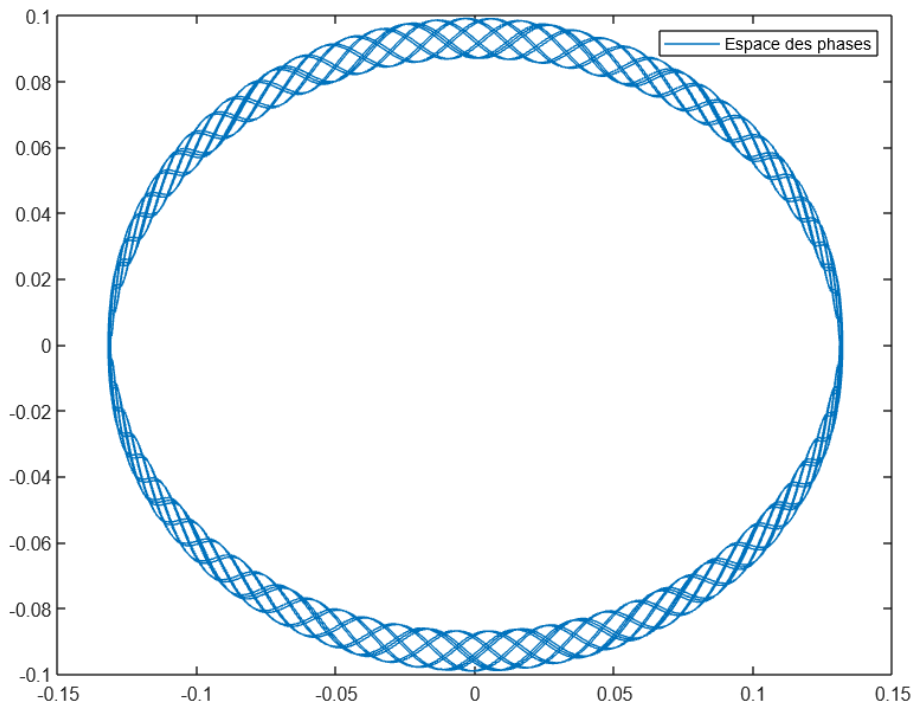
On a aussi remarqué que le seuil de passage à un comportement chaotique dépend de la longueur des fils du double pendule L_1 et L_2 .

Pour vérifier la dépendance du comportement du double pendule aux conditions initiales, il est intéressant d'utiliser l'espace des phases.

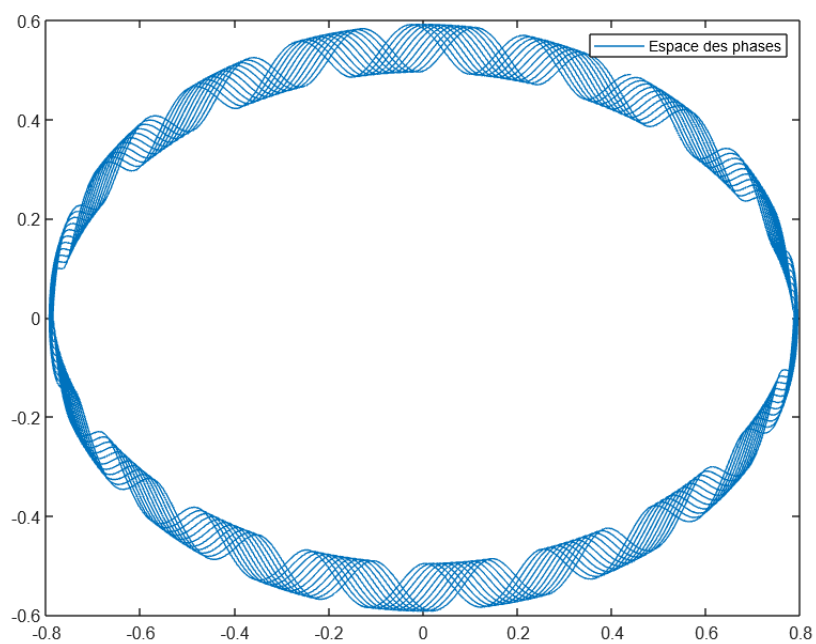
On va plutôt considérer des sous-espaces de dimension 2.

Espace des phases : (y_2, y'_2) : (pour $M_2=60\text{kg}$)

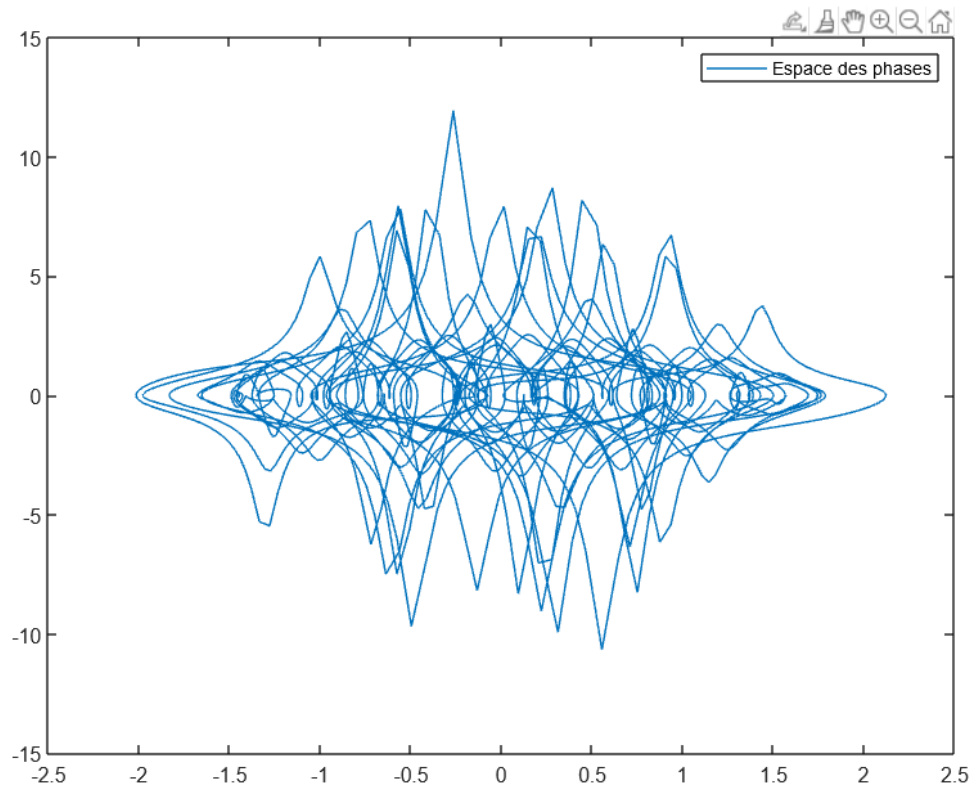
Cas non chaotique $\frac{\pi}{24}$:



Cas non chaotique $\frac{\pi}{4}$:



Cas chaotique $\frac{\pi}{2}$:

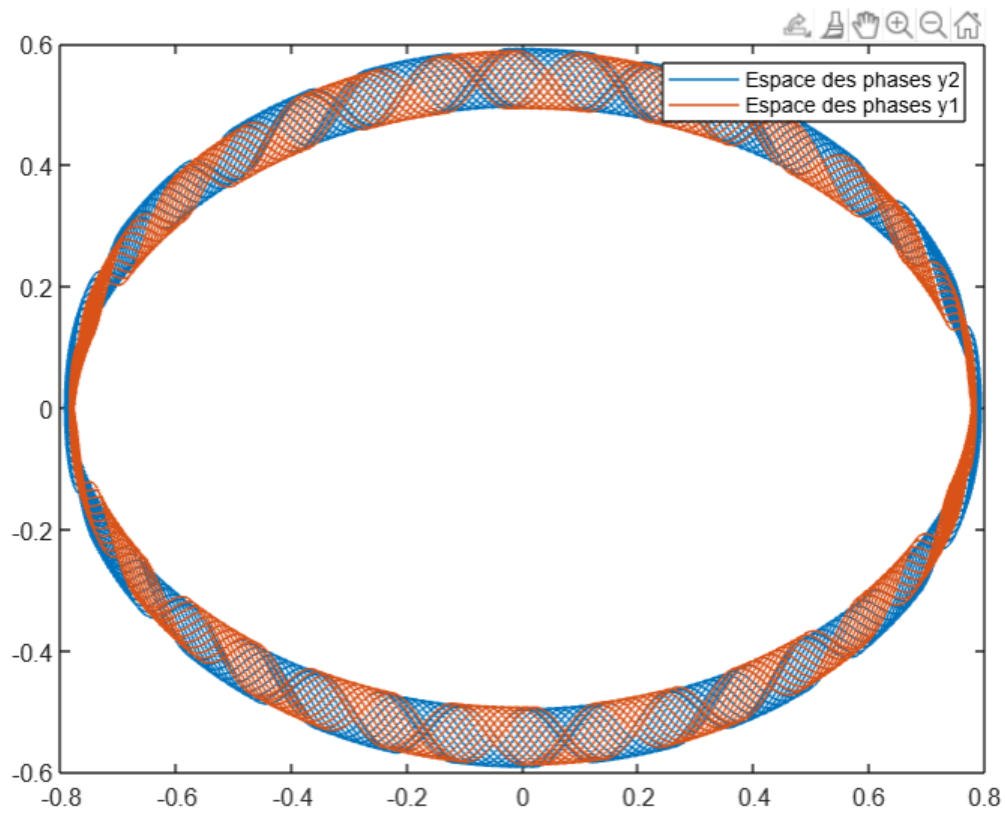


Conclusions : Dans les cas non chaotiques on obtient des « anneaux torsadés », ce qui montre que le mouvement du pendule est pseudo-cyclique. Même si la trajectoire dans l'espace des phases ne repasse pas par le même chemin, elle reste dans le même domaine, celui de « l'anneau ».

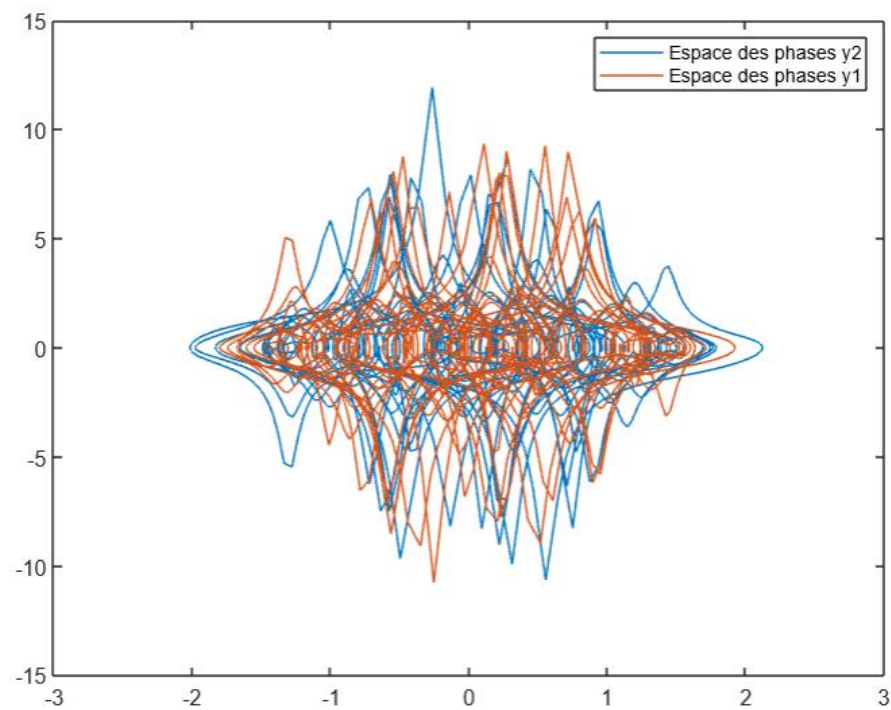
Cependant, lors d'une évolution chaotique on obtient une forme non régulière et non cyclique ce qui prouve que c'est un mouvement chaotique. Donc tracer le sous-espace des phases (y_2, y'_2) est intéressant afin de déterminer si le mouvement du pendule est chaotique ou non.

L'étude du sous-espace des phases (y_1, y'_1) est également intéressante et nous confirme les résultats précédents. Nous présentons ci-dessous la superposition des 2 sous-espaces des phases.

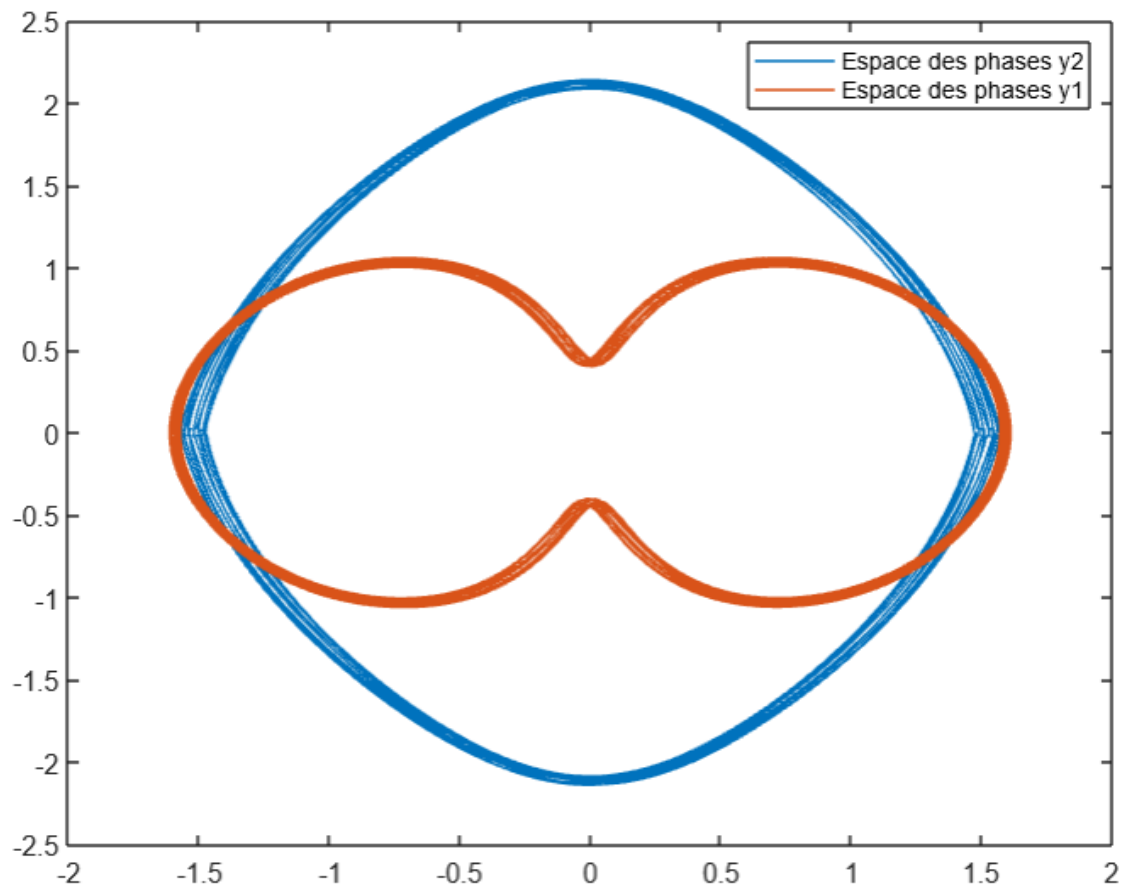
Cas non chaotique $\frac{\pi}{4}$ M2 = 60kg :



Cas chaotique $\frac{\pi}{2}$ M2 = 60kg :



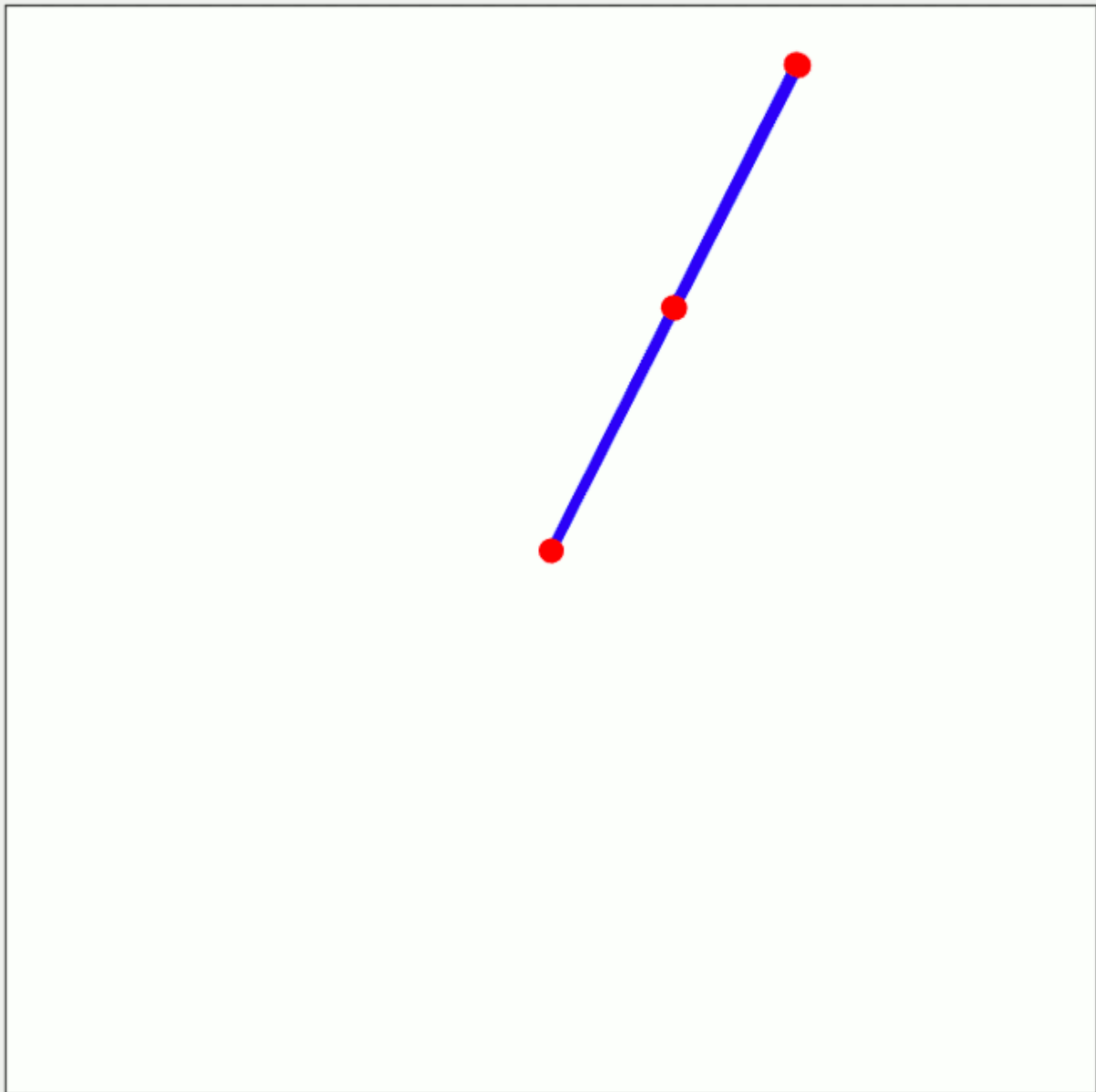
Cas non chaotique $\frac{\pi}{2}$ M2 = 0,75 kg :



Dans le cas ci-dessus, on remarque d'ailleurs que la trajectoire dans le sous-espace des phases (y_2, y_2') se rapproche d'un comportement périodique (d'un pendule simple).

Enfin, nous avons pu mieux visualiser la sensibilité du double pendule aux conditions initiales à l'aide d'une animation de Wikipédia :

Double Pendulum at t=0 seconds



Exemple d'animation de 3 pendules avec des conditions initiales légèrement différentes permettant de visualiser clairement la sensibilité du double pendule aux conditions initiales

(source Wikipédia :

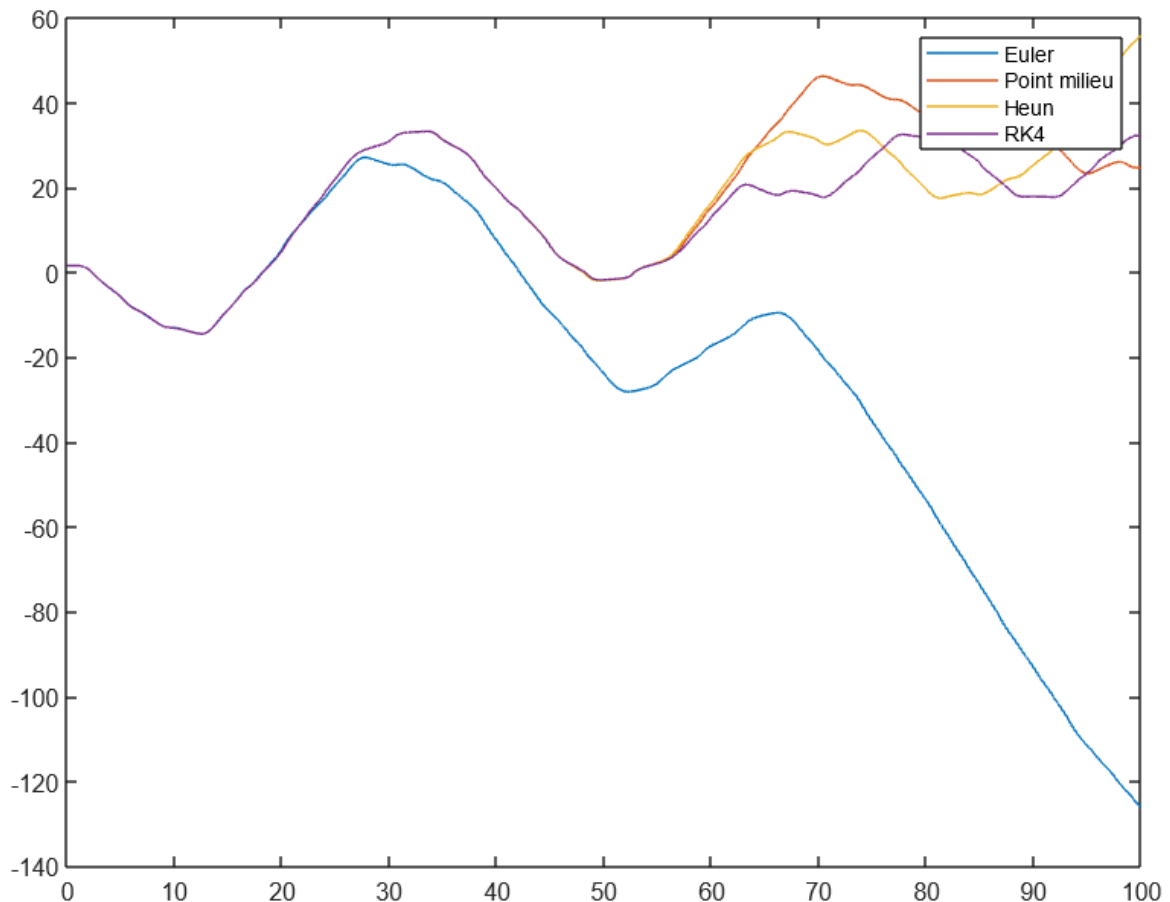
https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_double#/media/Fichier:Demonstrating_Chaos_with_a_Double_Pendulum.gif)

Question f

Pour cette question, nous partons avec les conditions initiales : $y_1(0)=y_2(0)=\frac{\pi}{2}$ $M_1=1\text{kg}$, $L_2=L_1=1\text{ m}$ et $g=1$. Nous cherchons donc la valeur de M_2 afin d'obtenir un système quasi-périodique.

Nous avons fait plusieurs tests expérimentaux avec les programmes Matlab des diverses méthodes. Il en ressort que si $M2 \geq M1$, le mouvement du pendule est chaotique. Nous avons vu précédemment que pour $M2=60\text{kg}$ le mouvement du pendule double était complètement chaotique avec les conditions initiales du problème des trapézistes. Augmenter encore cette masse ne change pas le résultat. De même, quand $M2 \ll M1$ le comportement reste chaotique :

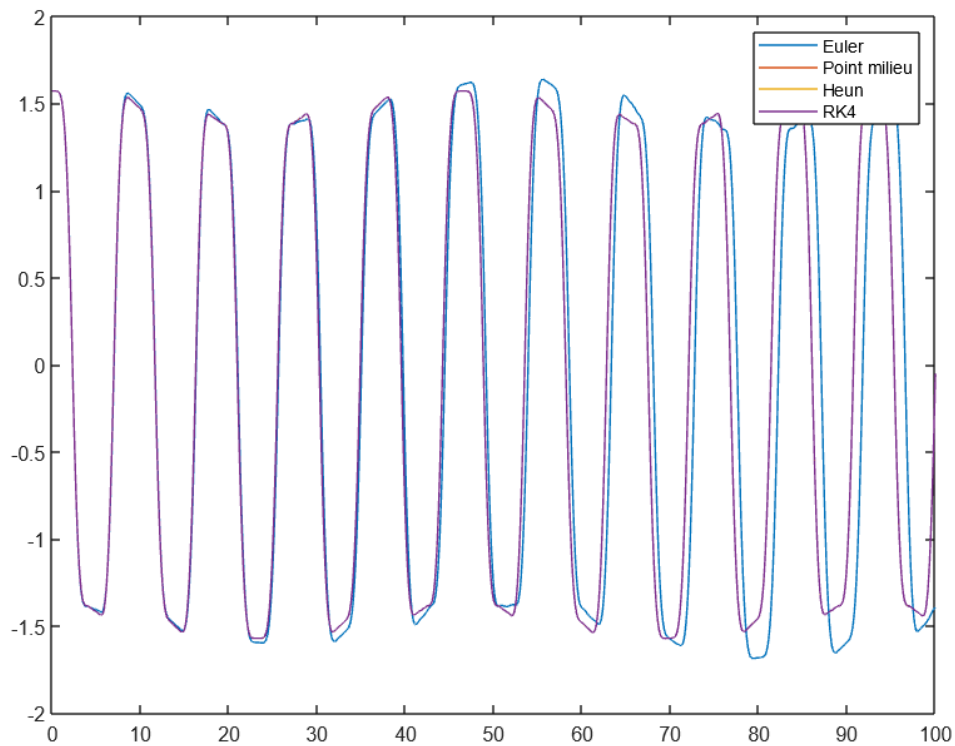
Exemple pour $M2=0,1\text{ kg}$: (position angulaire y_2 en fonction du temps)



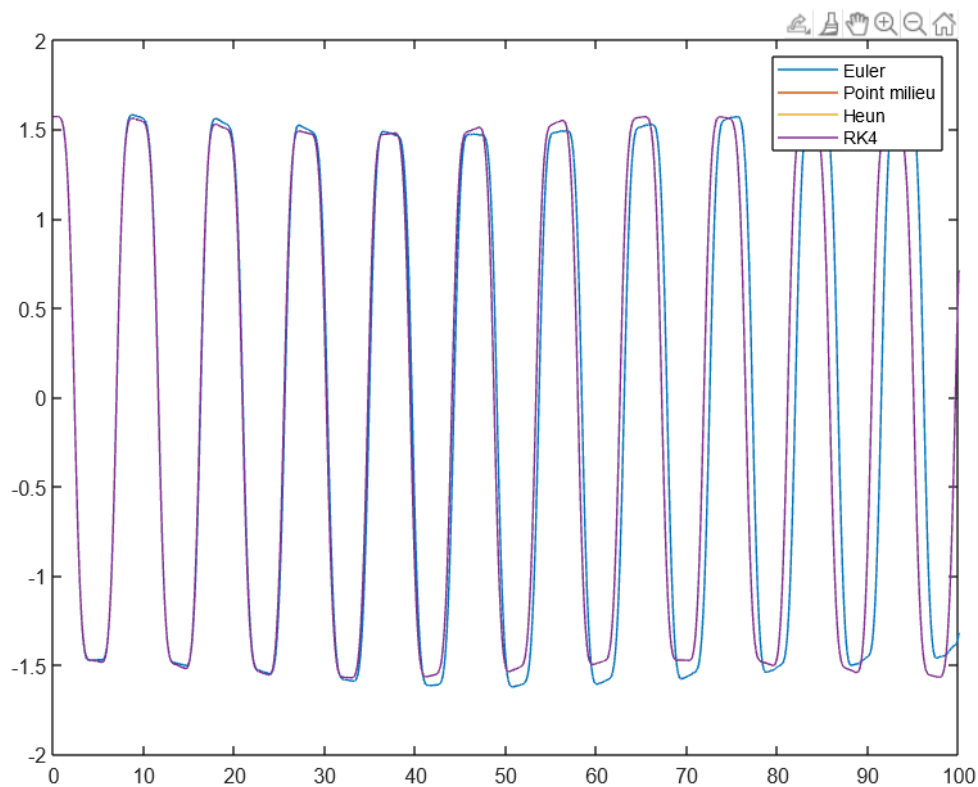
On voit bien que le système n'est pas du tout périodique.

Nous avons finalement trouvé un domaine de valeurs permettant de maintenir une quasi-périodicité : il faut un $M2$ de l'ordre de $(3/4)M1$. Dans cet exemple là comme $M1=1$ un $M2$ compris entre 0,7 et 0,8 donnera un système quasi-périodique.

Exemple pour $M_2=0,8$ kg : (position angulaire y_2 en fonction du temps)

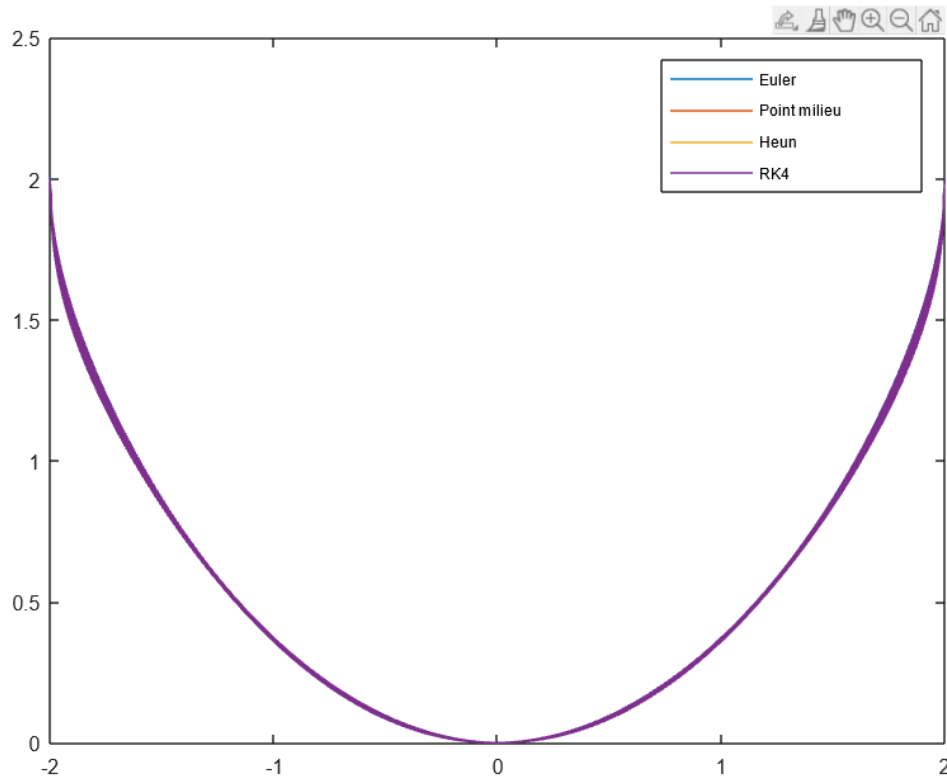


Exemple pour $M_2=0,75$ kg : (position angulaire y_2 en fonction du temps)

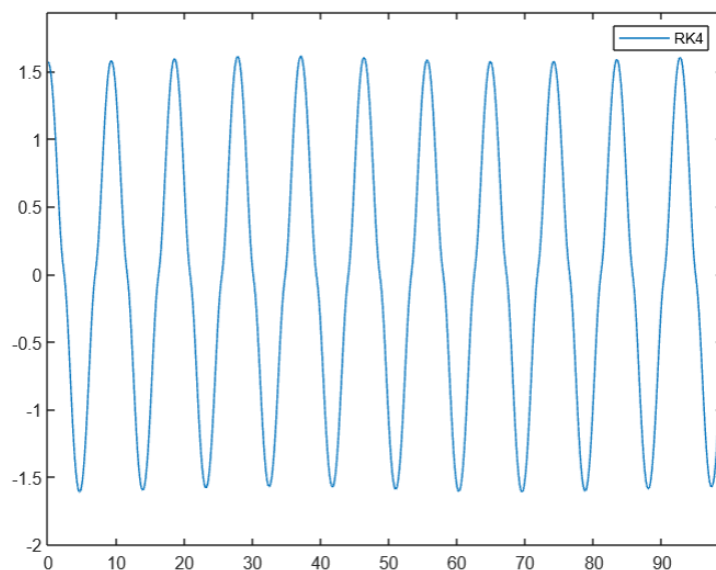


Le système est bien quasi-périodique dans les deux cas même si comme précédemment on remarque une erreur croissante au cours du temps avec la méthode d'Euler. On remarque par ailleurs que la courbe a une forme pseudo-sinusoidale.

Dans le cas d'un système périodique nous obtenons la trajectoire suivante pour M2 :



Nous vérifions également que dans ces conditions le mouvement de M1 est pseudo périodique. On constate que la courbe n'est pas sinusoidale, ce qui explique la forme différente de la trajectoire dans le sous-espace des phases (y_1, y'_1) par rapport à celle du sous-espace (y_2, y'_2).



Sources

Modélisation d'un double pendule : https://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Systemes/pendule_double.php

Thèse: https://njaquier.ch/files/PenduleDouble_Jaquier.pdf