Rozwiązywanie układów równań metodami bezpośrednimi – Metoda Gausa

Czołem rekruci! Udał się wam ukończyć przyśpieszone, półtoragodzinne szkolenie walki z zombie! Ale teraz czeka WAS ostateczny TEST, który pokaże z jakiej gliny zostaliście zbudowani. Czy poświęciliśmy nasz CENNY CZAS na marne, czy też jesteście godni wstąpić w szeregi naszej armii i własną piersią bronić LUDZKOŚĆ przed zieloną zarazą.

Dlatego PRZYGOTUJCIE się! Za PIEĆ minut, tu do TEJ doliny przybędzie kolejna CHORDA zombie. Każdy z WAS zaraz dostanie szczyt rozwoju współczesnej technologii militarnej KIJ_10. Przygotujcie się i WALCZCIE!!!!

Do generała Pulera seniora podchodzi jakiś oficer, szepce mu coś i zaraz odchodzi.

Generał Pulter senior, wraca do mikrofonu i teraz już dużo bardziej zmieszany mówi.

Eeee…. ten jajogłowy właśnie powiedział mi, że nie jesteście rekrutami do grupy bojowej, ale do jakiejś nowej jednostki obliczeniowej… Tak wiec… nooo… idźcie za tymi ludźmi w kitlach, oni powiedzą wam co robić… a ja wypalę sobie tutaj papierosa.

Ostatnie przemówienie generała Pultera seniora do rekrutów brygady GSL z roku +- 2369. Nagrane i odtwarzane przy każdej nadającej się okazji przez nadgorliwy korpus oficerski.

Zadania od jajogłowych

1. Stwórz funkcję umożliwiającą rozwiązywanie układów równań metodą Gausa-Jordana, lub innym wariantem. Do wykonania zadania proszę wykorzystać bibliotekę GSL bez wykorzystania wbudowanych solverów.
2. Rozpatrujemy układ równań $A \cdot x = y$ gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 2q & 1 & 6 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 6 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 6 & 8 & 6 \\ 5 & 9 & 10 & 7 & 10 \\ 3 & 4 & 9 & 7 & 9 \end{bmatrix} \text{ oraz } b = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 9 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Proszę rozwiązać ten układ równań dla $q \epsilon (0; 3)$ z krokiem 0.01. (Zauważcie, że dla $q = 1$ układ ten jest sprzeczny i nie posiad rozwiązań).
Dla każdej wartości q należy policzyć wektor $c = A * x$ (wektor ten, w idealnej sytuacji powinien być równy wektorowi b). A następnie odchylenie pomiędzy wektorami b i c z wyrażenia:

$$o(q) = 1/5\sqrt{\sum(c_i - b_i)^2}.$$

3. W domu: proszę przygotować wykres odchylenia w funkcji parametru q. Proszę omówić zachowanie wspomnianego odchylenia oraz możliwe jego przyczyny.

UWAGA!

Dla przejrzystości kodu, metodę Gaussa, mnożenie macierzy itp. należy zaprogramować jako funkcje!

Metoda Gausa–Jordana w 3 uderzenia głową w mur

Uwaga! Poniższy tekst jest bardzo uproszczony, pod względem matematyki jak i ilości możliwych wyjątków. Ma on na celu jedynie przybliżenie metody, która będzie przedstawiona na wykładzie. Zakładam, że sama Eliminacja Gausa kołacze się Wam jeszcze po głowie, dlatego będę mocno upraszczał:

Metoda Gausa-Jordana ma na celu sprowadzenie macierzy do macierzy jedynkowej. Dzieje się to w 2 krokach. W pierwszym, podobnie jak w metodzie Gausa sprowadzamy macierz A do macierzy trójkątnej. Z jedną modyfikacją! Na diagonali muszą znajdować się same jedynki! Ponieważ moja **wieczysta** licencja na oprogramowanie do edycji równań właśnie wygasła i nie znalazłem jeszcze jakiegoś zamiennika będę się posługiwał przykładami przygotowanymi wcześniej dla inżynierii materiałowej, albo same wzory będą wyglądać paskudnie. Przepraszam. :(

Zacznijmy od naszego problemu **Ax=b**:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 2 & -6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 18 \\ 28 \\ 28 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Krok 1: dzielimy pierwszy wers przez wartość a_{11}.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & -6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 18 \\ 28 \\ 28 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Krok 2: Tak samo jak w oryginalnej metodzie Gausa zerujemy wszystkie poddiagonalne w pierwszej kolumnie. Nie musimy liczyć współczynnika l_{ij} ponieważ na diagonalnej jest jedynka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2-2\cdot 1 & 4-2\cdot 1 & 2-2\cdot 3 & -6-2\cdot 4 \\ 3-3\cdot 1 & 4-3\cdot 1 & 1-3\cdot 3 & 2-3\cdot 4 \\ 4-4\cdot & 2-4\cdot 1 & 2-4\cdot 3 & 2-4\cdot 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 18-2\cdot 17 \\ 28-3\cdot 17 \\ 28-4\cdot 17 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -14 \\ 0 & 1 & -8 & -10 \\ 0 & -2 & -10 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -16 \\ -23 \\ -40 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Krok 3: Powtarzamy pierwszy krok dla diagonalnej w drugim wersie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -8 & -10 \\ 0 & -2 & -10 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -8 \\ -23 \\ -40 \end{bmatrix} \tag{5}$$

I krok nr 2 dla kolejnych:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -14 & -28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -8 \\ -15 \\ -56 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Itd., itd., aż do uzyskania macierzy trójkątnej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & -14 & -28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -8 \\ 2.5 \\ -56 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -8 \\ 2.5 \\ -21 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Ostatnim krokiem, możliwe, ze dla was poza pętlą zadbanie o jedynkę w ostatnim elemencie macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -8 \\ 2.5 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Połowa drogi za nami! Teraz należy wyzerować wszystkie ponad diagonalne. Zasada jest dość podobna, ale pamiętając, że na dole, poza diagonalą wszędzie mamy zera możemy opuścić jeden for. Więc najpierw zerujemy nad diagonalne w ostatniej kolumnie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4-4\cdot1 \\ 0 & 1 & -2 & -7+7\cdot1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5-0.5\cdot1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17-4\cdot1 \\ -8+7\cdot1 \\ 2.5-0.5\cdot1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

I iteracyjnie przesuwamy się w górę i zerujemy wcześniejsze wersy.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3-3\cdot1 & 0 \\ 0 & 1 & -2+2\cdot1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13-3\cdot2 \\ -1+2\cdot2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

By osiągnąć rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-1\cdot1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-1\cdot3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

KONIEC!

PS. Dla zmniejszenia ilości koniecznych obliczeń, poczynając od wzoru (10) można prowadzić operacje tylko i wyłącznie na wektorze **b**, ale jak będziecie to robić również dla macierzy będzie wam łatwiej kontrolować czy nie popełniliście jakiegoś błędu.