Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

Marcin Knapczyk

7 marca 2024

1. Wstęp teoretyczny

Metoda rozwiązywania układu równań liniowych LU polega na rozłożeniu macierzy na dwie macierze trójkątne - dolnotrójkątną (Lower) i górnotrójkątną (Upper).

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Rysunek 1: Rozkład macierzy na iloczyn macierzy trójkątnej górnej i trójkątnej dolnej

Obliczanie wyznacznika macierzy rozłożonej według rozkładu LU ułatwia fakt, iż wyznacznik macierzy trójkątnej sprowadza się do iloczynu elementów na jej przekątnej, w tym przypadku składowych diagonali macierzy górnej.

Wskaźnik uwarunkowania macierzy określa wpływ danych wejściowych na błąd wyniku, zatem pozwala nam oszacować wiarygodność uzyskanych wyników. Problem, który ma niski wskaźnik uwarunkowania nazywa się dobrze uwarunkowanym, natomiast problem, który ma wysoki wskaźnik uwarunkowania – źle uwarunkowanym. Dane o zbyt dużym wskaźniku uwarunkowania nie za bardzo się nadają do rozwiązywania numerycznego, ponieważ błąd, który wynika z numerycznej reprezentacji liczb, wprowadza nieproporcjonalnie duże rozbieżności w wynikach obliczeń.

$$cond = ||A||_{\alpha,\beta} \cdot ||A^{-1}||_{\alpha,\beta}$$

$$||A||_{1,\infty} = \underset{1\leq i,j\leq n}{max} |a_{i,j}|$$

2. Problem

Na zajęciach wykonywaliśmy różne operacje na macierzy A_{4x4} zdefiniowanej następująco:

$$a_{i,j} = \frac{1}{i + j + \delta}$$

gdzie $\delta = 2$ dla GSL.

0.5	0.333333	0.25	0.2
0.333333	0.25	0.2	0.166667
0.25	0.2	0.166667	0.142857
0.2	0.166667	0.142857	0.125

Tabela 1: Macierz A

2.1. Dekompozycja macierzy

Pierwszym zadaniem było dokonanie dekompozycji LU używając funkcji z biblioteki GSL:

int gsl_linalg_LU_decomp(gsl_matrix *a, gsl_permutation *p, int *signum)

2.2. Wyznacznik macierzy

Następnie obliczyliśmy wyznacznik macierzy mnożąc kolejne wartości na diagonali macierzy górnej uzyskanej na skutek rozkładu.

2.3. Macierz odwrotna

Kolejnym zadaniem było znalezienie macierzy odwrotnej A^{-1}. Dokonaliśmy tego rozwiązując 4 układy równań $A \cdot \vec{x_j} = \vec{b_j}$ dla kolejnych wektorów wyrazów wolnych $\vec{b_j}$ uzyskując kolejne kolumny macierzy odwrotnej.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rysunek 2: Wektory wyrazów wolnych

Do rozwiązania kolejnych układów równań użyta została funkcja:

int gsl_linalg_LU_solve(gsl_matrix *A, gsl_permutation *p, gsl_vector *b, gsl_vector *x)

2.4. Iloczyn AA^{-1}

Policzenie iloczynu macierzy AA^{-1} posłuży do sprawdzenia dokładności naszego rozwiązania - wynik przyrównamy do macierzy tożsamościowej, która w teorii powinna być wynikiem iloczynu.
Iloczyn policzony został standardowym zastosowaniem potrójnej pętli.

2.5. Wskaźnik uwarunkowania

Obliczenie wskaźnika uwarunkowania sprowadza się do znalezienia największych bazwzględnie wartości macierzy A oraz A^{-1} oraz obliczenia ich iloczynu.

3. Wyniki

3.1. Diagonala macierzy U

0.500000	0.033333	-0.001389	0.000102

3.2. Wyznacznik macierzy A

$$\det(\mathrm{A}) = -2.36206 \cdot 10^{-9}$$

3.3. Macierz A^{-1}

200	-1200	2100	-1120
-1200	8100	-15120	8400
2100	-15120	29400	-16800
-1120	8400	-16800	9800

3.4. Iloczyn AA^{-1}

3.5. Wskaźnik uwarunkowania

$$\mathrm{cond}(\mathrm{A}) = 14700$$

1	$-2.27374 \cdot 10^{-13}$	0	0
$-2.84217 \cdot 10^{-14}$	1	$4.54747 \cdot 10^{-13}$	0
0	$-2.27374 \cdot 10^{-13}$	1	0
0	0	0	1

4. Wnioski

Jak wcześniej wspomniano, w teorii iloczyn macierzy i macierzy do niej odwrotnej powinien zwrócić macierz jednostkową. My uzyskaliśmy macierz przybliżoną do jednostkowej - na diagonali są same jedynki, jednak cześć elementów nie leżących na przekątnej ma wartości przybliżone do zera, a nie zerowe, jak mówi teoria.

Wyznacznik macierzy ma bardzo małą wartość, co mogło przełożyć się na znaczną niedokładność obliczeń.

Wnioski te potwierdza bardzo duża wartość wskaźnika uwarunkowania. Można stwierdzić, że metoda LU nie jest metodą optymalną i dokładną do tego zadania, ponieważ otrzymane wyniki są zbyt niedokładne.