

Rozwiązywanie układów równań metodami bezpośrednimi – Metoda Gausa

Marcin Knapczyk

14 marca 2024

1. Wstęp teoretyczny

Metoda eliminacji Gaussa to algorytm służący do rozwiązywania układów równań liniowych. Polega na sprowadzeniu macierzy powstałej z równań do postaci macierzy trójkątnej, czyli o uzyskanie zera pod przekątną macierzy. Wykorzystuje w tym celu operacje elementarne na wierszach, czyli mnożenie (przez liczbę różną od zera) i dodawanie do siebie.

Metoda ta może służyć także do:

- obliczania rzędu macierzy,
- obliczania wartości wyznacznika,
- obliczania macierzy odwrotnej,
- wyznaczenia rozkładu LU.

2. Problem

Do rozwiązania mamy układ równań $A \cdot x = b$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 2q & 1 & 6 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 6 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 6 & 8 & 6 \\ 5 & 9 & 10 & 7 & 10 \\ 3 & 4 & 9 & 7 & 9 \end{bmatrix} \text{ oraz } b = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 9 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Układ rozwiązujemy dla $q \in (0;3)$ z krokiem 0.01.

Dla każdej wartości q liczymy wektor $c = A \cdot x$. Następnie liczymy odchylenie pomiędzy wektorami b i c za pomocą wzoru:

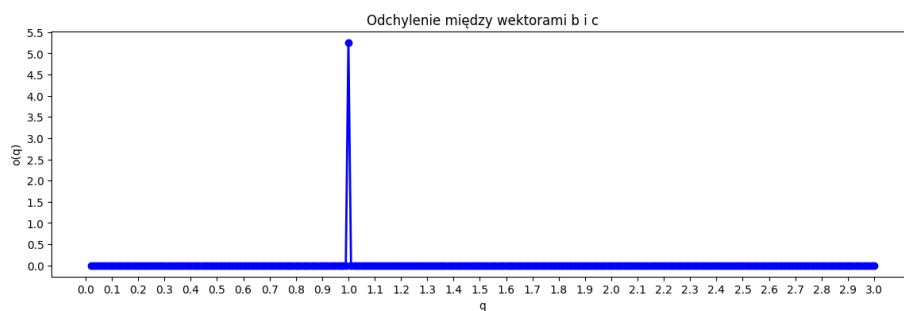
$$o(q) = \frac{1}{5} \sqrt{\sum (c_i - b_i)^2}$$

3. Wyniki

Wartości odchylenia $o(q)$ okazują się bardzo małe dla wszystkich $q \in (0; 1) \cup (1; 3)$. Są one rzędu 10^{-14} .

Wyjątek stanowi odchylenie dla $q = 1$, gdyż dla niego odchylenie wynosi aż 5.25738. Spowodowane jest to tym, że dla $q = 1$ nie istnieje rozwiązanie układu równań.

Poniżej znajduje się sporządzony wykres wielkości odchylenia między wektorami b i c :



Rysunek 1: Wykres odchylenia w funkcji parametru q

4. Wnioski

Odchylenie między wektorami b i c świadczy o dość dużej dokładności rozwiązań otrzymanych dzięki metodzie eliminacji Gaussa. Wartości odchylenia, w których liczby zaczynają pojawiać się na 14. miejscu po przecinku są praktycznie nie znaczące. Wyjątek stanowi liczenie rozwiązania dla $q = 1$, które nie istnieje.

Istotną wadą takiego bezpośredniego podejścia jest jednak stosunkowo duża złożoność obliczeniowa. Problem ten rozwiązuje korzystanie z gotowych rozwiązań zawartych w różnych bibliotekach obliczeniowych, które zostały mocno zoptymalizowane pod względem ilości wykonywanych operacji.