Diagonalizacja macierzy metodą potęgową

Wprowadzenie:

Dzięki niespotykanej wydajności zaprojektowanego pieca cały wasz zespół dostał sposobność pracy dla największego wśród żywych wynalazcy: Zombinarda Va Dinciego! Ten zakrawający o szaleństwo geniusz przedstawia wam swój najnowszy projekt pułapki przeciwko zombie! To oparte o drgającą antyrezonansowo, dwuwymiarową strunę… …wywołującą kawitację w warstwie Helmholtza… …nadlepkość fononową… … kanapka z podwójnym serem… …uderzenie subsoniczne… … 987 plam na suficie, 988, 989… …1275, 1278, cholera zgubiłem się, trzeba zacząć od nowa… … interferencję koloru zielonego z zapachem waniliowym… … sprawi, że zombie po prostu zamienią się w lody pistacjowe. Ogólnie jaki widzicie to bardzo proste i aż dziw bierze, że nikt nie zrobił tego wcześniej. Jedyne dwa prawdziwe wyzwania stojące przed projektem to konieczność przeprowadzenia bardzo dokładnych obliczeń częstotliwości rezonansowych struny i utrzymania otrzymanych w ten sposób lodów w stanie zamrożonym aż do czasu zebrania ich przez ekipę sprzątającą. Nim dopuszczą was do obliczeń na ostatnim pozostałym z zamierzchłych czasów super komputerze Amiga 500 musicie udowodnić swoją przydatność na prostszym zadaniu:

Cel:

Udowodnienie Va Dinciemu, że potraficie wyznaczyć wartości wszystkich siedmiu wektorów własnych $\boldsymbol{x}_i$, dla symetrycznej macierzy A oraz wszystkich siedmiu wartości własnych $\lambda_i\ i = 0, 1, 2, \ \dots n - 1$

Obiekt pracy:

Symetryczna macierz A o wymiarze 7x7 (n=7), wypełniona elementami:

$$A_{ij} = (2 + |i + j|)^{\frac{-|i+j|}{2}}$$

Metoda pracy:

Metoda potęgowa: To metoda iteracyjna pozwalająca obliczyć wszystkie wektory własne macierzy za pomocą schematu:

1. Przygotowanie macierzy $W_0 = A$, (macierz, która będzie ulegać zmianie w trakcie obliczeń).
2. Przygotowanie n elementowego wektora startowego $\boldsymbol{x}_0^0 = [1, 1, \dots]$
3. Obliczenie kolejnych przybliżeń wektora własnego, x_0^{i+1} i wartości własnej λ_0^{i+1} według schematu poniżej. UWAGA. Indeks dolny oznacza numer wektora

własnego i jego wartości własnej, ich ilość jest równa rozmiarowi macierzy. Indeks górny oznacza kolejne przybliżenia.

$$\boldsymbol{x}_0^{i+1} = W_0 \boldsymbol{x}_0^i$$

$$\lambda_0^i = \frac{\left(\boldsymbol{x}_0^{i+1}\right)^T \boldsymbol{x}_0^i}{\left(\boldsymbol{x}_0^i\right)^T \boldsymbol{x}_0^i}$$

Po zakończeniu iteracji ten wektor stanie się wyjściowym w kolejnej

$$\boldsymbol{x}_0^i = \frac{\boldsymbol{x}_0^{i+1}}{\left\|\boldsymbol{x}_0^{i+1}\right\|_2}$$

To na dole to norma euklidesowa wektora

* Typowo nie iterujemy wektorów $\boldsymbol{x}^i$ i $\boldsymbol{x}^{i+1}$. By nie doszło do nadpisania wartości tworzymy np. wektor x i x_new.

4. Punkt 3 powtarzamy M razy.
5. W celu obliczenia kolejnego wektora własnego i kolejnej wartości własnej należy zredukować macierz W_0 i usunąć z niej już obliczony wektor własny:
   $$W_1 = W_0 - \lambda_0 \boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{x}_0^T$$
   $\boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{x}_0^T$ to iloczyn tensorowy. Tj.: $B = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$ zwraca macierz z elementami: $B_{ij} = \boldsymbol{x}_i * \boldsymbol{y}_j$ (jak tabliczka mnożenia).
6. Powtarzamy punkty 2-4.
7. Całość powtarzamy aż do wyznaczenia wszystkich wektorów własnych.

Zadanie do wykonania

1. Napisz program wyznaczający wszystkie wektory własne i wartości własne macierzy. Wartość M =12.
   UWAGA! Aby zachować przejrzystość kodu, poszczególne operacje mnożenia wektorów i macierzy należy zapisać jako funkcje. I ogólnie rzecz biorąc stosować rozsądne gospodarowanie kodem.

2. Wypisz do pliku otrzymane wartości własne oraz wektory własne.

3. Stwórz macierz wektorów własnych $X = [\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}]$ i oblicz wartość macierzy $D = X^T A X$ (Oczywiście trzeba ją też wypisać)

4. Wypisz do pliku kolejne przybliżenia wartości własnych (w każdej iteracji), przygotuj wykres przedstawiający jak zmieniały się te wartości dla kolejnych iteracji.

5. Całość powtórz dla M=120.

6. Omów otrzymane wyniki. Jaka jest, a jakie powinny być wartości i kolejności wektorów własnych? Ile iteracji jest potrzebne do znalezienia każdej z tych wartości? Jakie są różnice pomiędzy obliczeniami dla M = 12, a m=120? Czy ma to wpływ na wartość macierzy D?