Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami iteracyjnymi – transport ciepła

Marcin Knapczyk

21 marca 2024

1. Wstęp teoretyczny

Metody iteracyjne są kolejnym typem podejścia do rozwiązywania układów równań liniowych. Polegają na tworzeniu ciągu kolejnych przybliżeń rozwiązania zadania. Wymaga to określenia warunków zaprzestania iteorwania dla uzyskanej dokładności.

Wyniki są obarczone błędem zaokrągleń oraz samej metody. Dużą zaletą tego podejścia jest jednak możliwość wyznaczenia rozwiązania z dowolną, z góry zadaną dokładniością.

2. Problem

Do rozwiązania mamy dwa układy równań $At = b$ pozwalające wyznaczyć rozkład temperatury w piecu - w wersji z macierzą A 9x9 oraz 99x99.

$$\begin{bmatrix} (-\lambda_{0.5}-\lambda_{1.5}) & \lambda_{1.5} & & & \\ \lambda_{1.5} & (-\lambda_{1.5}-\lambda_{2.5}) & \lambda_{2.5} & & \\ & \lambda_{2.5} & (-\lambda_{2.5}-\lambda_{3.5}) & \lambda_{3.5} & \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_{n-0.5} & (-\lambda_{n-0.5}-\lambda_{n+0.5}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_{0.5}T_L \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\lambda_{n+0.5}T_R \end{bmatrix}$$

Rysunek 1: Układ równań

gdzie λ oznacza współczynnik przewodzenia ciepła danego materiału.

Układy równań rozwiążemy metodą największych spadków. Kolejne przybliżenia rozwiązania otrzymujemy obliczając:

$$r_k = b - At_k$$

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{r_k^T A r_k}$$

$$t_{k+1} = t_k + \alpha r_k$$

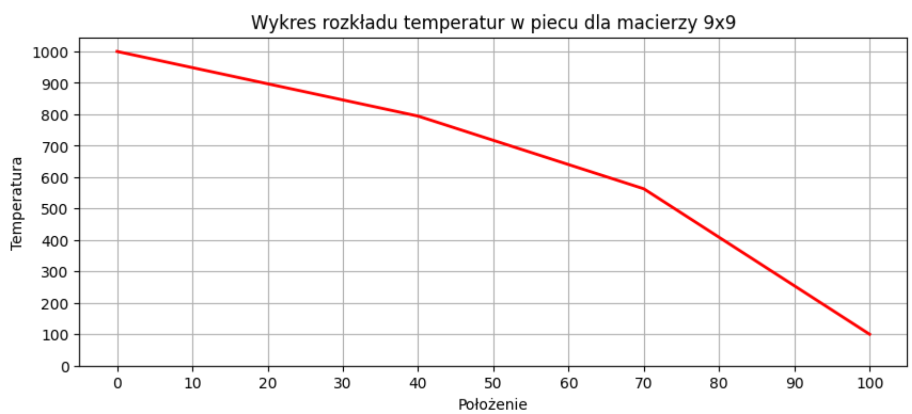
gdzie r_k to wektor reszt, a $r_k^T r_k$ sprowadza się do iloczynu skalarnego wektora r_k z samym sobą. Za każdym powtórzeniem powyższych operacji powinniśmy otrzymywać wektor t, który coraz lepiej spełnia powyższe równanie.

Całość wykonujemy tak długo, aż liczba iteracji przekroczy 60000 albo, gdy wartość normy euklidesowej wektora reszt $||r_k||_2 = \sqrt{r_k^T r_k} < 10^{-6}$.

3. Wyniki

Wyniki przedstawione są za pomocą wykresów rozkładu temperatury w piecu, logarytmu normy wektrora r: $log(||r_k||_2) = f(k)$ oraz normy wektora t: $||t_k||_2 = f(k)$.

3.1. Macierz 9x9

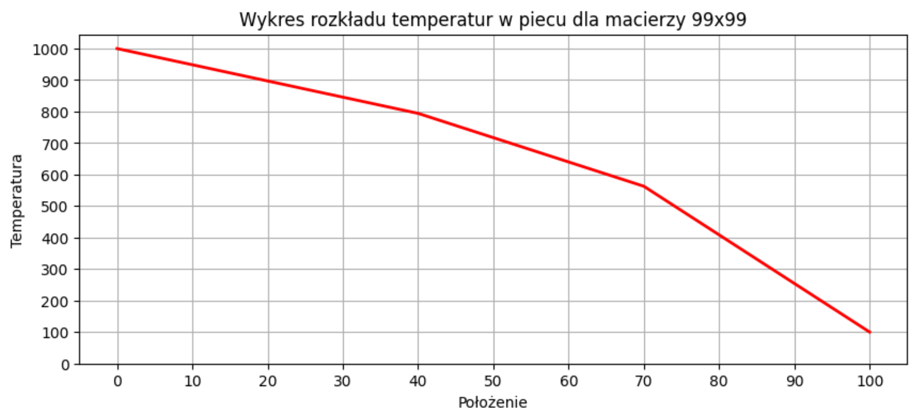


Rysunek 2: Rozkład temperatur w piecu

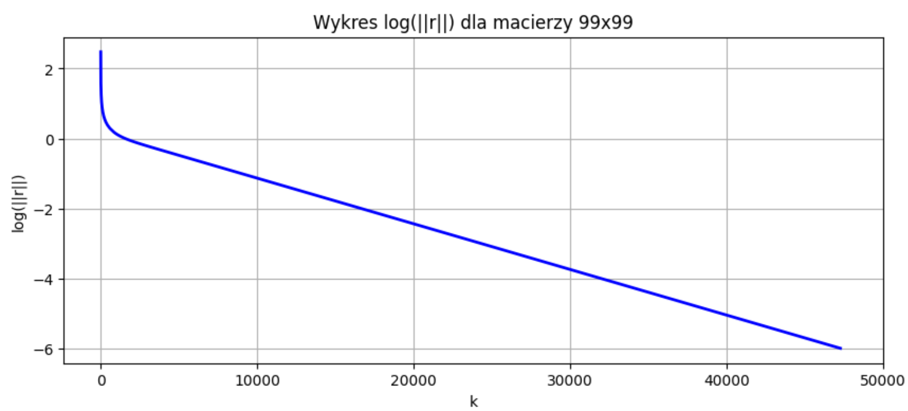
Rysunek 3: Wartości logarytmu normy r_k

Rysunek 4: Wartości normy t_k

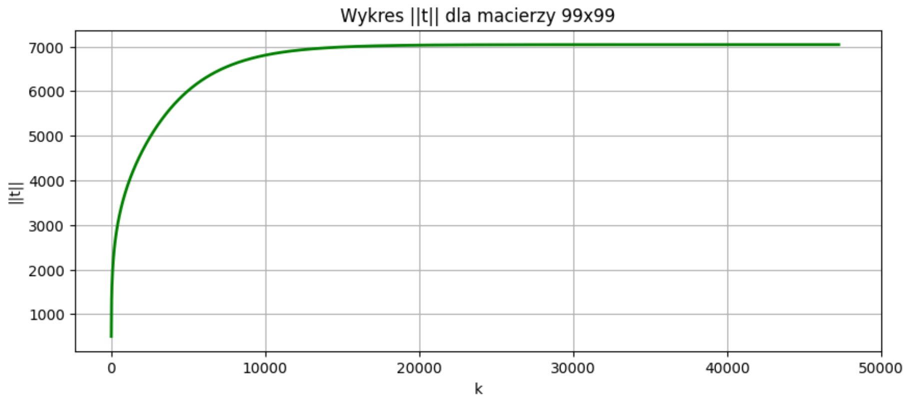
3.2. Macierz 99x99



Rysunek 5: Rozkład temperatur w piecu



Rysunek 6: Wartości logarytmu normy r_k



Rysunek 7: Wartości normy t_k

4. Wnioski

Na wykresie rozkładu temperatury widać jej stopniowy spadek, z wyraźnymi zakrzywieniami w miejscach zmiany wykorzystywanego materiału do budowy pieca. Zgadza się to z założeniami.

Z kolei wykres logarytmu normy wektora r, który wraz z kolejnymi iteracjami zbliża się do zera pokazuje, jak wynikowe wartości temperatur zbliżają się do poprawnego wyniku. Można także odczytać, że wartość k nie dochodzi do 60000, zatem spełniony został warunek $||r_k||_2 = \sqrt{r_k^T r_k} < 10^{-6}$. Oznacza to, że uzyskane wyniki są dosyć dokładne.

Wykres normy wektora t na początku szybko rośnie, by potem się wygładzić. Tożsame jest to z początkowym wzrostem temperatur rozwiązania (na początku w wektorze t znajdują się zera) i późniejszym utrzymywaniem się na podobnym poziomie.

Dla wektora t o początkowych wartościach bardziej zbliżonych do wyniku, ilość wymaganych do satysfakcjonującej dokładności wyniku iteracji maleje. Na przykład dla macierzy 9x9 dla początkowych wartośći zbliżonych do wyniku co do części jedności, ilość iteracji zmalała z 534 do 310.