CARPETA DE FÍSICA I

de Franco A. Navarro C.

Sin versión aún

ÍNDICE GENERAL

Índice general 3

Índice de figuras 5

Índice de cuadros 7

I Primer Parcial 9

1. Cinemática del punto 11

1. Movimiento Rectilíneo 12

II Segundo Parcial 15

1. Teoremas de conservación 17

1. Impulsó lineal 18
2. Centro de masa y Velocidad centro de masa 21
3. Impulso Angular 25

Bibliografía 27

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Una particula simple y libre. 18
1.2. Sistema de 3 particulas que interactuan entre si. 18
1.3. Un choque plastico perfecto. 22
1.4. Una pelota cayendo. 23
1.5. Grafico de delta $\vec{P}$. 24

ÍNDICE DE CUADROS

Parte I

Primer Parcial

CAPÍTULO 1

CINEMÁTICA DEL PUNTO

1. Movimiento Rectilíneo 12

Muchas veces nos interesa dar una descripcion del movimiento de un objeto sin entrar en las caracteristicas de este. Un ejemplo, a muy grandes rasgos, es el GPS de nuestro teléfono. Un GPS sencillo no puede distinguir si esta describiendo el movimiento de una persona corriendo, de un auto o de tren, e incluso no le interesa si las ruedas son de cierto material o patinan respecto del piso. Por eso, podemos reducir el cuerpo que estamos tratando de describir a un solo punto y ver como este se traslada en funcion del tiempo.

1. Movimiento Rectilíneo

Para el estudio del movimiento de un cuerpo puntual uno hace la siguiente preposicion y es que este adopta una sola posicion en cada instante. Con esta preposicion estamos diciendo que el movimiento de nuestro cuerpo va a tener las caracteristicas de una funcion pero lo que no se dijo es de que va a depender la funcion posicion.

Al menos yo, cuando leo la palabra cinematica me imagino una serie de fotos sacadas consecutivamente en un intervalo de tiempo corto que si uno las pudiera unir, veria lo que muchos conocemos como un video. Y en si la funcion posicion eso. Son una serie de punto en un determinado tiempo que al unirnos nos dicen como un objeto mueve durante un determinado intervalo de tiempo.

Ahora, la funcion de tiempo $\vec{\mathbf{r}}(t)$ puede tener cualquier aspecto de funcion que uno se imagine (poner imagenes) y no solo eso sino que en los movimientos que uno quiera, por ejemplo uno podria tener una $\vec{\mathbf{r}}(t) = x(t) \cdot \hat{x} + y(t) \cdot \hat{y} + z(t) \cdot \hat{z}$ donde la posicion varia en las tres dimensiones a la vez.

Theorem 1.1: Velocidad y movimiento en un MRU

$$v(t) = cte \tag{1.1}$$

$$x(t) = x_0 + v \cdot (t - t_0) \tag{1.2}$$

Proof for Theorem.

Se parte de la base que la velocidad es constante para todo tiempo y que la velocidad es la derivada de la distancia respecto del tiempo.

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} \tag{1.3}$$

Se puede pasar el diferencia al otro lado e integrar en un intervalo de tiempo determinado.

$$v \cdot \partial t = \partial x \Longrightarrow \int_{t_0}^{t} v \cdot \partial t = \int_{x_0}^{x(t)} \partial x \Longrightarrow v \cdot (t - t_0) = x(t) - x_0 \tag{1.4}$$

■

Theorem 1.2: Velocidad y movimiento en un MRUV

$$a = cte \tag{1.5}$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0) \tag{1.6}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{a}{2} \cdot (t - t_0)^2 \tag{1.7}$$

Proof for Theorem.

Se parte de la base que la velocidad es constante para todo tiempo y que la velocidad es la derivada de la distancia respecto del tiempo.

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} \tag{1.8}$$

Se puede pasar el diferencia al otro lado e integrar en un intervalo de tiempo determinado.

$$v \cdot \partial t = \partial x \Longrightarrow \int_{t_0}^{t} v \cdot \partial t = \int_{x_0}^{x(t)} \partial x \Longrightarrow v(t) \cdot (t - t_0) = x(t) - x_0 \tag{1.9}$$

Parte II

Segundo Parcial

CAPÍTULO 1

TEOREMAS DE CONSERVACIÓN

1. Impulsó lineal 18
2. Centro de masa y Velocidad centro de masa 21
3. Impulso Angular 25

Voy a tomar como inicio el mismo que menciono mi JTP, Pablo Gaztañaga, cuando empezo esta segunda parte. Si uno le tendria que resumir a un amigo que rindio en la primera parte, osea el primer parcia. Que le dirias? Cuando lo dijo hubo un silencio y es obvio si por clase eramos unos 20, con toda la furia, de los cuales casi menos de la mitad habiamos aprobado el primer parcial. Pero la respuesta que Pablo queria se menciono en una voz al fondo del aula. En esta segunda se basa en lo mismo que la primera y es la ecuacion de Newton. En muchos libros este tema se lo menciona como las primera integrales de la ecuacion de Newton.

1. Impulsó lineal

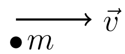

Figura 1.1: Una particula simple y libre.

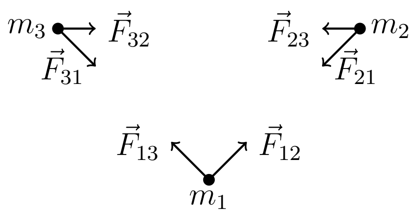

Figura 1.2: Sistema de 3 particulas que interactuan entre si.

Supongamos que nosotros querremos describir una particula como en la figura 1.1. Si, es solo una particula que pareciera ser que no se ve afectada por nada. Si nosotros aplicamos lo que vimos en la primera parte de la materia tendriamos que la ecuacion de Newton para la partícula es la siguiente

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F} \ . \tag{1.1}$$

Pero ahora vamos hacer un truco, que en realidad se hace en la primera parte de la materia, y es mirar a la aceleración como la deriva de la velocidad respecto del tiempo

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \ . \tag{1.2}$$

Con esto podemos reemplazar en la ecuacion 1.1. Ademas, una propiedad de cuando uno deriva es que puede sacar las constantes que esten multiplicando a la variable que estemos derivando y como para este caso la masa es una constante voy hacer lo siguiente y es el paso inverso, meter la masa adentro de la derivada.

$$\begin{gathered} m \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \sum \vec{F} \\ \Downarrow \\ \frac{\partial}{\partial t}(m \cdot \vec{v}) = \sum \vec{F} \ . \end{gathered} \tag{1.3}$$

La expresión que se encuentra dentro de los paréntesis es lo que en fisica se denomina como impulso lineal

$$\vec{P} = m \cdot \vec{v} \tag{1.4}$$

como la velocidad $\vec{v}$ es un vector, el impulso lineal $\vec{P}$ es propiamente un vector.

Este mismo analisis del impulso lineal no se limita al caso de una particula, sino que se puede realizar para un sistemas de N partículas que interactuan entre si. Veamos el caso que se muestra en la figura 1.2, podemos ver un sistema de 3 particulas que interactuan entre si de tal modo que ninguna de ellas mueve a la otra. El primer paso es poner las ecuaciones de Newton para cada una de las particulas.

Para la particula 1 tenemos

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \ .$$

Para la particula 2 tenemos

$$m_2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} \ .$$

Para la particula 3 tenemos

$$m_3 \cdot \vec{a}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} \ .$$

Ahora podriamos sumar las ecuaciones de Newton de todas las particulas, obteniendo

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + m_3 \cdot \vec{a}_3 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} \ .$$

Antes de hacer el truco de ver que la aceleracion es la derivada de la velocidad respecto del tiempo, me gustaria hacer un comentario sobre las fuerzas. Mas que nada me intera los pares, por ejemplo la fuerza $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$. Se puede ver que ambas tiene direcciones opuestas por la figura 1.2 pero ademas sabemos que estas son de igual modulo porque es una fuerza de interaccion, por lo que la suma entre $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$. da cero. Y esto mismo podriamos hacer para cada par de fuerza interna asi que voy a reescribir la ecuacion anterior con los pares entre parentesis.

$$m_1 \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + m_2 \cdot \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} + m_3 \cdot \frac{\partial \vec{v}_3}{\partial t} = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{23} + \vec{F}_{32}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31})$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + m_3 \cdot \vec{v}_3\right) = 0 + 0 + 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3\right) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0 \ . \tag{1.5}$$

De esta ultima expresion tenemos mucho para hablar. Lo primero es que la suma de cada $\vec{P}_i$ donde i es la cantidad de particulas en el sistema que estemos analizando, nos da como resultado el $\vec{P}$ del sistema. Lo segundo que nos dice la expresion es que derivada del impulso lineal del sistema respecto del tiempo del tiempo es cero. Esto nos indica que para todo t el impulso lineal es constante. En otras palabras, que el impulso lineal se conserva para todo t.

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + m_3 \cdot \vec{v}_3 = cte \ . \tag{1.6}$$

Ahora podrimos pensar el mismo ejemplo de las 3 particulas pero ahora teniendo en cuenta que tienen una fuerza externa, por ejemplo que todas esten cayendo por lo que se ven afectadas por su peso. Para el caso de las fuerzas internas seguiria valiendo lo mismo solo que ahora si miramos el sistema de las 3 particulas vemos que la fuerza peso de cada una no se cancela.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{P}_3\right)=\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}=m_1\cdot\vec{g}+m_2\cdot\vec{g}+m_3\cdot\vec{g}$$

como podemos ver ahora el impulso lineal no se conserva. Eso quiere decir que si calculamos el $\vec{P}$ para un t_0 no va a ser igual a un $\vec{P}$ para un t futuro o posterior. Pero lo que si podemos calcular es la diferencia del impulso lineal.

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}=m_1\cdot\vec{g}+m_2\cdot\vec{g}+m_3\cdot\vec{g} \tag{1.7}$$

$$\Downarrow$$

$$\partial\vec{P}=(m_1\cdot\vec{g}+m_2\cdot\vec{g}+m_3\cdot\vec{g})\cdot\partial t$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\vec{P}_I}^{\vec{P}_F}\partial\vec{P}=\int_{t_I}^{t_F}m_1\cdot\vec{g}\cdot\partial t+\int_{t_I}^{t_F}m_2\cdot\vec{g}\cdot\partial t+\int_{t_I}^{t_F}m_3\cdot\vec{g}\cdot\partial t$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{P}_F-\vec{P}_I=\Delta\vec{P}=m_1\cdot\vec{g}\cdot(t_F-t_I)+m_2\cdot\vec{g}\cdot(t_F-t_I)+m_3\cdot\vec{g}\cdot(t_F-t_I)$$

Una mencion de este caso y es que uno podria agarrar un interavalo de tiempo tan chico para que todos los terminos que estan a la derecha tiendan a cero. Y si lo pongo asi podria decir que el impulso lineal se conserva pero esto solo me serviria si quiero buscar la velocidad en un instante muy corto de tiempo.
En resumen, el impulso lineal se puede calcular de la siguiente manera

$$\vec{P}=\sum_i m_i\cdot\vec{v}_i$$

$$\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}=\sum\vec{F}^{EXT}$$

2. Centro de masa y Velocidad centro de masa

Voy a seguir con el ejemplo del sistema de 3 masas de la figura 1.2 y voy a partir de la ecuacion 1.6 para seguir desarrollando un poco mas.
El paso siguiente pensar la velocidad como la derivada de la posicion respecto del tiempo. Por lo que obtenes que

$$\vec{P} = m_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial t} + m_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial t} + m_3 \cdot \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial t}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{P} = \frac{\partial}{\partial t}(m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3)$$

ahora si a esta expresion la dividimos por la suma de todas las masas obtenemos

$$\frac{\vec{P}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}\right) = cte \tag{1.8}$$

De esta ecuacion nos interesa lo que parece en el parentesis. Es lo que se denomina como "Centro de Masa".

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{1.9}$$

Este es un vector que apunta a un punto imaginario que mejor representa al sistema de masas que estemos analizando. Digo imaginario porque no es necesario que este punto que mejor representa al sistema este en una de las masas. Existe el caso que eso pase y es cuando una de las es muchisimo mayor a las otras. Por ejemplo, si m_1 tiende a infinito, el centro de masa va a estar en la misma posicion que la particula 1.
Ahora me gustaria hablar sobre la derivada del centro de masa y es la velocidad centro de masa. Al igual que en la primera parte de cinematica, el vector posicion al derivarlo respecto del tiempo se obtiene la velocidad.

$$\frac{\vec{P}}{m_1 + m_2 + m_3} = \vec{v}_{CM} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{r}_{CM}) = cte$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + m_3 \cdot \vec{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{1.10}$$

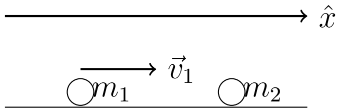

Figura 1.3: Un choque plastico perfecto.

En el caso donde la sumatoria de fuerzas externas de nuestro sistema sea cero. Podremos ver que el Centro de masa se mueve como un MRU. Esto se puede ver claro con el ejemplo de las 3 particulas porque al llegar a la expresión de la velocidad centro de masa mediante podemos ver que esta igualado al impulso lineal divido la suma de las masas, el impulso lineal era constante para todo tiempo, las masas tambien lo son, entonces por tautologia la velocidad centro de masa es constante. En general esto pasa para todo sistema donde la suma de las fuerzas externas sea igual a cero.
Una expresion mas en general del centro de masa y la velocidad centro de masa es la siguiente

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$$

Ejemplo 2.1: Choque plastico perfecto

Supongamos el escanario de dos pelotitas de masa m como se puede ver en la figura 1.3 donde la primera pelota tiene una velocida $\vec{v}_1$ y la segunda pelota tiene una velocidad $\vec{v}_2 = 0$. En un tiempo t estas chochan y se quedan pegadas. Que se puede decir del impulso lineal? Este se conserva o no? Y las velocidades despues del choque?

De primeras podemos ver que al estar apoyada en el piso la normal de cada masa compensa el peso. Por lo si planteamos la conservacion del impulso lineal

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) = \sum F^{EXT} = 0 \ .$$

Obviamente que la justicacion correcta es hacer las ecuaciones de Newton para cada particular y usar como vinculo que en $\hat{y}$, o $\hat{z}$ dependiendo del sistema que uno tenga, no hay aceleracion.
Pero algo que si podemos ver es que el impulso lineal se conserva porque las fuerzas extenernas se compensan. Entonces podriamos calcular el impulso en el momento inicial, momento que tenemos los datos, y despues igualarlo al impulso en el momento despues del choque ya que estos son lo mismo.
Impulso lineal en el instante inicial

$$\vec{P}_I = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_1$$

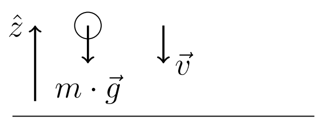

Figura 1.4: Una pelota cayendo.

Impulso lineal en el instante final

$$\vec{P}_F = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_{1-2}$$

Ahora igualamos los impulsos

$$\vec{P}_I = \vec{P}_F$$

$$\Downarrow$$

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_{1-2} \ .$$

Ahora usemos el dato de que tienen masas iguales

$$m \cdot \vec{v}_1 = (m + m) \cdot \vec{v}_{1-2}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_{1-2} = \frac{\vec{v}_1}{2}$$

vemos que la velocidad final es la mitad de la velocidad incial de pelotita 1.

Ejemplo 2.2: Otro Ejemplo

Ahora supongamos el caso de una pelota de masa $m = 0,2kg$ como se puede ver en la figura que cae con una velocidad $\vec{v} = 8\frac{m}{s}$. Cuando llega al piso rebota y vuelve con el mismo $|v|$. Ademas, supongamos que el contacto con el piso dura $10^{-3}s$. Que se puede decir del impulso lineal?

Calculemos primero el impulso lineal en el instante inicial con los datos que tenemos

$$\vec{P}_I = 0,2kg \cdot 8\frac{m}{s}\ (-\hat{z}) = -1,6kg \cdot \frac{m}{s}\ \hat{z} \ .$$

Ahora calculemos el impulso lineal pero en el instante donde vuelve. Vamos a decir que es el instante final de nuestro analisis

$$\vec{P}_F = 0,2kg \cdot 8\frac{m}{s}\ \hat{z}\ = 1,6kg \cdot \frac{m}{s}\ \hat{z} \ .$$

Es bastante claro que en este caso el impulso lineal no se conserva. Vemos que para el instante inicial el impulso lineal es negativo pero en el instante final este es positivo.

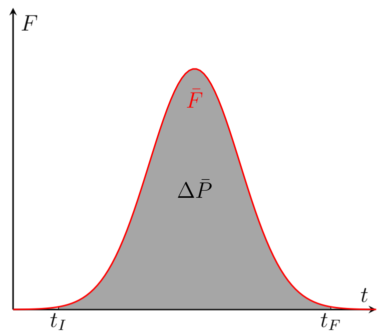

Figura 1.5: Grafico de delta $\vec{P}$.

Lo siguiente es preguntarnos cual es la diferencia que existe entre los impulsos A priori sabemos que ese cambio de velocidad se debe a la interaccion con el piso. Tratemos de escribir esto con las ecuaciones de Newton

$$m_p \cdot \vec{a}_p = \vec{F}^{PISO} + m \cdot \vec{g}$$

Si aplicamos el mismo procedimiento que realice anteriormente en la ecuacion 1.7, llegamos a lo siguiente

$$\Delta P = \int_{t_I}^{t_F} \partial \vec{P} = \int_{t_I}^{t_F} \vec{F}^{PISO}\ \partial t + \int_{t_I}^{t_F} m \cdot \vec{g}\ \partial t$$

los terminos de la izquierda ya los calculamos asi que vamos hablar sobre los terminos de la derecha. El termino que esta multiplicando la masa por la gravedad va a dar un resultado muy chico, osea que va a ser un par de decimales, porque la masa es muy chica y el intervalo de tiempo es de un milisegundo, por lo que para los siguientes calculos yo lo voy a despreciar. Por ultimo, t_F lo podemos definir como $t_I + 1ms$ porque nos dice que el tiempo que esta en el piso.

$$\Delta\vec{P} = 1,6kg \cdot \frac{m}{s}\ \hat{z} - \left(-1,6kg \cdot \frac{m}{s}\ \hat{z}\right) = \int_{t_I}^{t_F} \vec{F}^{PISO}\ \partial t + (Algo\ chico)$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\vec{P} = 3,2kg \cdot \frac{m}{s}\ \hat{z} = \int_{t_I}^{t_I+1ms} \vec{F}^{PISO}\ \partial t\ .$$

Una forma grafica de ver este resultado es el grafico 1.5 donde se puede ver que el area debajo de la curva es el $\Delta\vec{P}$. Ademas, un comentario sobre la fuerza y es que si nosotros divimos el termino de la derecha por el intevalo de tiempo, obtenemos el valor de la fuerza promedio en ese tiempo

$$\frac{\int_{t_I}^{t_F} \vec{F}^{PISO}\ \partial t}{t_F - t_I} = Valor\ promedio\ .$$

3. Impulso Angular

BIBLIOGRAFÍA

Roederer: Mecánica Elemental **Roederer**

Juan G. Roederer. *Mecánica Elemental*. 5.ª ed. Eudeba, 2017.