CARPETA DE FÍSICA I

de Franco A. Navarro C.

Sin versión aún

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE CUADROS

Parte I

Primer Parcial

CAPÍTULO 1

CINEMÁTICA DEL PUNTO

Muchas veces nos interesa dar una descripcion del movimiento de un objeto sin entrar en las caracteristicas de este. Un ejemplo, a muy grandes rasgos, es el GPS de nuestro teléfono. Un GPS sencillo no puede distinguir si esta describiendo el movimiento de una persona corriendo, de un auto o de tren, e incluso no le interesa si las ruedas son de cierto material o patinan respecto del piso. Por eso, podemos reducir el cuerpo que estamos tratando de describir a un solo punto y ver como este se traslada en funcion del tiempo.

1. Movimiento Rectilíneo

Para el estudio del movimiento de un cuerpo puntual uno hace la siguiente preposicion y es que este adopta una sola posicion en cada instante. Con esta preposicion estamos diciendo que el movimiento de nuestro cuerpo va a tener las caracteristicas de una funcion pero lo que no se dijo es de que va a depender la funcion posicion.

Al menos yo, cuando leo la palabra cinematica me imagino una serie de fotos sacadas consecutivamente en un intervalo de tiempo corto que si uno las pudiera unir, veria lo que muchos conocemos como un video. Y en si la funcion posicion eso. Son una serie de punto en un determinado tiempo que al unirnos nos dicen como un objeto mueve durante un determinado intervalo de tiempo.

Ahora, la funcion de tiempo $\vec{\mathbf{r}}(t)$ puede tener cualquier aspecto de funcion que uno se imagine (poner imagenes) y no solo eso sino que en los movimientos que uno quiera, por ejemplo uno podria tener una $\vec{\mathbf{r}}(t) = x(t) \cdot \hat{x} + y(t) \cdot \hat{y} + z(t) \cdot \hat{z}$ donde la posicion varia en las tres dimensiones a la vez.

Theorem 1.1: Velocidad y movimiento en un MRU

$$v(t) = cte \tag{1.1}$$

$$x(t) = x_0 + v \cdot (t - t_0) \tag{1.2}$$

Proof for Theorem.

Se parte de la base que la velocidad es constante para todo tiempo y que la velocidad es la derivada de la distancia respecto del tiempo.

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} \tag{1.3}$$

Se puede pasar el diferencia al otro lado e integrar en un intervalo de tiempo determinado.

$$v \cdot \partial t = \partial x \Longrightarrow \int_{t_0}^{t} v \cdot \partial t = \int_{x_0}^{x(t)} \partial x \Longrightarrow v \cdot (t - t_0) = x(t) - x_0 \tag{1.4}$$

■

Theorem 1.2: Velocidad y movimiento en un MRUV

$$a = cte \tag{1.5}$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0) \tag{1.6}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{a}{2} \cdot (t - t_0)^2 \tag{1.7}$$

Proof for Theorem.

Se parte de la base que la velocidad es constante para todo tiempo y que la velocidad es la derivada de la distancia respecto del tiempo.

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} \tag{1.8}$$

Se puede pasar el diferencia al otro lado e integrar en un intervalo de tiempo determinado.

$$v \cdot \partial t = \partial x \Longrightarrow \int_{t_0}^{t} v \cdot \partial t = \int_{x_0}^{x(t)} \partial x \Longrightarrow v(t) \cdot (t - t_0) = x(t) - x_0 \tag{1.9}$$

Parte II

Segundo Parcial

CAPÍTULO 1

TEOREMAS DE CONSERVACIÓN

Voy a tomar como inicio el mismo que menciono mi JTP, Pablo Gaztañaga, cuando empezo esta segunda parte. Si uno le tendria que resumir a un amigo que rindio en la primera parte, osea el primer parcia. Que le dirias? Cuando lo dijo hubo un silencio y es obvio si por clase eramos unos 20, con toda la furia, de los cuales casi menos de la mitad habiamos aprobado el primer parcial. Pero la respuesta que Pablo queria se menciono en una voz al fondo del aula. En esta segunda se basa en lo mismo que la primera y es la ecuacion de Newton. En muchos libros este tema se lo menciona como las primera integrales de la ecuacion de Newton.

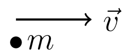


Figura 1.1: Una particula simple y libre.

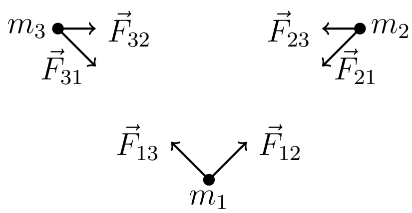


Figura 1.2: Sistema de 3 particulas que interactuan entre si.

1. Impulsó lineal

Supongamos que nosotros querremos describir una particula como en la figura 1.1. Si, es solo una particula que pareciera ser que no se ve afectada por nada. Si nosotros aplicamos lo que vimos en la primera parte de la materia tendriamos que la ecuacion de Newton para la partícula es la siguiente

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F} \ . \tag{1.1}$$

Pero ahora vamos hacer un truco, que en realidad se hace en la primera parte de la materia, y es mirar a la aceleración como la deriva de la velocidad respecto del tiempo

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \ . \tag{1.2}$$

Con esto podemos reemplazar en la ecuacion 1.1. Ademas, una propiedad de cuando uno deriva es que puede sacar las constantes que esten multiplicando a la variable que estemos derivando y como para este caso la masa es una constante voy hacer lo siguiente y es el paso inverso, meter la masa adentro de la derivada.

$$\begin{gathered} m \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \sum \vec{F} \\ \Downarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} (m \cdot \vec{v}) = \sum \vec{F} \ . \end{gathered} \tag{1.3}$$

La expresión que se encuentra dentro de los paréntesis es lo que en fisica se denomina como impulso lineal

$$\vec{P} = m \cdot \vec{v} \tag{1.4}$$

como la velocidad $\vec{v}$ es un vector, el impulso lineal $\vec{P}$ es propiamente un vector.

Este mismo analisis del impulso lineal no se limita al caso de una particula, sino que se puede realizar para un sistemas de N partículas que interactuan entre si. Veamos el caso que se muestra en la figura 1.2, podemos ver un sistema de 3 particulas que interactuan entre si de tal modo que ninguna de ellas mueve a la otra. El primer paso es poner las ecuaciones de Newton para cada una de las particulas.

Para la particula 1 tenemos

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \ .$$

Para la particula 2 tenemos

$$m_2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} \ .$$

Para la particula 3 tenemos

$$m_3 \cdot \vec{a}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} \ .$$

Ahora podriamos sumar las ecuaciones de Newton de todas las particulas, obteniendo

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + m_3 \cdot \vec{a}_3 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} \ .$$

Antes de hacer el truco de ver que la aceleracion es la derivada de la velocidad respecto del tiempo, me gustaria hacer un comentario sobre las fuerzas. Mas que nada me intera los pares, por ejemplo la fuerza $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$. Se puede ver que ambas tiene direcciones opuestas por la figura 1.2 pero ademas sabemos que estas son de igual modulo porque es una fuerza de interaccion, por lo que la suma entre $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$. da cero. Y esto mismo podriamos hacer para cada par de fuerza interna asi que voy a reescribir la ecuacion anterior con los pares entre parentesis.

$$m_1 \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + m_2 \cdot \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} + m_3 \cdot \frac{\partial \vec{v}_3}{\partial t} = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{23} + \vec{F}_{32}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31})$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + m_3 \cdot \vec{v}_3) = 0 + 0 + 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 \right) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0 \ . \qquad (1.5)$$

De esta ultima expresion tenemos mucho para hablar. Lo primero es que la suma de cada $\vec{P}_i$ donde i es la cantidad de particulas en el sistema que estemos analizando, nos da como resultado el $\vec{P}$ del sistema. Lo segundo que nos dice la expresion es que derivada del impulso lineal del sistema respecto del tiempo del tiempo es cero. Esto nos indica que para todo t el impulso lineal es constante. En otras palabras, que el impulso lineal se conserva para todo t.

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + m_3 \cdot \vec{v}_3 = cte \ . \qquad (1.6)$$

Ahora podrimos pensar el mismo ejemplo de las 3 particulas pero ahora teniendo en cuenta que tienen una fuerza externa, por ejemplo que todas esten cayendo por lo que se ven afectadas por su peso. Para el caso de las fuerzas internas seguiria valiendo lo mismo solo que ahora si miramos el sistema de las 3 particulas vemos que la fuerza peso de cada una no se cancela.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{P}_3\right)=\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}=m_1\cdot\vec{g}+m_2\cdot\vec{g}+m_3\cdot\vec{g}$$

como podemos ver ahora el impulso lineal no se conserva. Eso quiere decir que si calculamos el $\vec{P}$ para un t_0 no va a ser igual a un $\vec{P}$ para un t futuro o posterior. Pero lo que si podemos calcular es la diferencia del impulso lineal.

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}=m_1\cdot\vec{g}+m_2\cdot\vec{g}+m_3\cdot\vec{g} \tag{1.7}$$

$$\Downarrow$$

$$\partial\vec{P}=(m_1\cdot\vec{g}+m_2\cdot\vec{g}+m_3\cdot\vec{g})\cdot\partial t$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\vec{P}_I}^{\vec{P}_F}\partial\vec{P}=\int_{t_I}^{t_F}m_1\cdot\vec{g}\cdot\partial t+\int_{t_I}^{t_F}m_2\cdot\vec{g}\cdot\partial t+\int_{t_I}^{t_F}m_3\cdot\vec{g}\cdot\partial t$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{P}_F-\vec{P}_I=\Delta\vec{P}=m_1\cdot\vec{g}\cdot(t_F-t_I)+m_2\cdot\vec{g}\cdot(t_F-t_I)+m_3\cdot\vec{g}\cdot(t_F-t_I)$$

Una mencion de este caso y es que uno podria agarrar un interavalo de tiempo tan chico para que todos los terminos que estan a la derecha tiendan a cero. Y si lo pongo asi podria decir que el impulso lineal se conserva pero esto solo me serviria si quiero buscar la velocidad en un instante muy corto de tiempo.

En resumen, el impulso lineal se puede calcular de la siguiente manera

$$\vec{P}=\sum_i m_i\cdot\vec{v}_i$$

$$\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}=\sum\vec{F}^{EXT}$$

2. Centro de masa y Velocidad centro de masa

Voy a seguir con el ejemplo del sistema de 3 masas de la figura 1.2 y voy a partir de la ecuacion 1.6 para seguir desarrollando un poco mas.
El paso siguiente pensar la velocidad como la derivada de la posicion respecto del tiempo. Por lo que obtenes que

$$\vec{P} = m_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial t} + m_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial t} + m_3 \cdot \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial t}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{P} = \frac{\partial}{\partial t}(m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3)$$

ahora si a esta expresion la dividimos por la suma de todas las masas obtenemos

$$\frac{\vec{P}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}\right) = cte \tag{1.8}$$

De esta ecuacion nos interesa lo que parece en el parentesis. Es lo que se denomina como "Centro de Masa".

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{1.9}$$

Este es un vector que apunta a un punto imaginario que mejor representa al sistema de masas que estemos analizando. Digo imaginario porque no es necesario que este punto que mejor representa al sistema este en una de las masas. Existe el caso que eso pase y es cuando una de las es muchisimo mayor a las otras. Por ejemplo, si m_1 tiende a infinito, el centro de masa va a estar en la misma posicion que la particula 1.
Ahora me gustaria hablar sobre la derivada del centro de masa y es la velocidad centro de masa. Al igual que en la primera parte de cinematica, el vector posicion al derivarlo respecto del tiempo se obtiene la velocidad.

$$\frac{\vec{P}}{m_1 + m_2 + m_3} = \vec{v}_{CM} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{r}_{CM}) = cte$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + m_3 \cdot \vec{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{1.10}$$

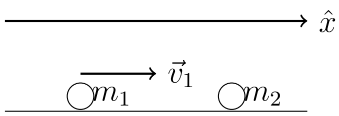


Figura 1.3: Un choque plastico perfecto.

En el caso donde la sumatoria de fuerzas externas de nuestro sistema sea cero. Podremos ver que el Centro de masa se mueve como un MRU. Esto se puede ver claro con el ejemplo de las 3 particulas porque al llegar a la expresión de la velocidad centro de masa mediante podemos ver que esta igualado al impulso lineal divido la suma de las masas, el impulso lineal era constante para todo tiempo, las masas tambien lo son, entonces por tautologia la velocidad centro de masa es constante. En general esto pasa para todo sistema donde la suma de las fuerzas externas sea igual a cero.
Una expresion mas en general del centro de masa y la velocidad centro de masa es la siguiente

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$$

Ejemplo 2.1: Choque plastico perfecto

Supongamos el escanario de dos pelotitas de masa m como se puede ver en la figura 1.3 donde la primera pelota tiene una velocida $\vec{v}_1$ y la segunda pelota tiene una velocidad $\vec{v}_2 = 0$. En un tiempo t estas chochan y se quedan pegadas. Que se puede decir del impulso lineal? Este se conserva o no? Y las velocidades despues del choque?

De primeras podemos ver que al estar apoyada en el piso la normal de cada masa compensa el peso. Por lo si planteamos la conservacion del impulso lineal

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) = \sum F^{EXT} = 0 \ .$$

Obviamente que la justicacion correcta es hacer las ecuaciones de Newton para cada particular y usar como vinculo que en $\hat{y}$, o $\hat{z}$ dependiendo del sistema que uno tenga, no hay aceleracion.
Pero algo que si podemos ver es que el impulso lineal se conserva porque las fuerzas extenernas se compensan. Entonces podriamos calcular el impulso en el momento inicial, momento que tenemos los datos, y despues igualarlo al impulso en el momento despues del choque ya que estos son lo mismo.

Impulso lineal en el instante inicial

$$\vec{P}_I = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_1$$

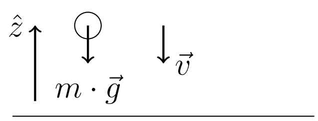


Figura 1.4: Una pelota cayendo.

Impulso lineal en el instante final

$$\vec{P}_F = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_{1-2}$$

Ahora igualamos los impulsos

$$\vec{P}_I = \vec{P}_F$$

$$\Downarrow$$

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_{1-2} \ .$$

Ahora usemos el dato de que tienen masas iguales

$$m \cdot \vec{v}_1 = (m + m) \cdot \vec{v}_{1-2}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_{1-2} = \frac{\vec{v}_1}{2}$$

vemos que la velocidad final es la mitad de la velocidad incial de pelotita 1.

Ejemplo 2.2: Otro Ejemplo

Ahora supongamos el caso de una pelota de masa $m = 0,2kg$ como se puede ver en la figura 1.4 que cae con una velocidad $\vec{v} = 8\frac{m}{s}$. Cuando llega al piso rebota y vuelve con el mismo $|v|$. Ademas, supongamos que el contacto con el piso dura $10^{-3}s$. Que se puede decir del impulso lineal?

Calculemos primero el impulso lineal en el instante inicial con los datos que tenemos

$$\vec{P}_I = 0,2kg \cdot 8\frac{m}{s} \ (-\hat{z}) = -1,6kg \cdot \frac{m}{s} \ \hat{z} \ .$$

Ahora calculemos el impulso lineal pero en el instante donde vuelve. Vamos a decir que es el instante final de nuestro analisis

$$\vec{P}_F = 0,2kg \cdot 8\frac{m}{s} \ \hat{z} \ = 1,6kg \cdot \frac{m}{s} \ \hat{z} \ .$$

Es bastante claro que en este caso el impulso lineal no se conserva. Vemos que para el instante inicial el impulso lineal es negativo pero en el instante final este es positivo.

Lo siguiente es preguntarnos cual es la diferencia que existe entre los impulsos A priori sabemos que ese cambio de velocidad se debe a la interaccion con el piso. Tratemos de escribir esto con las ecuaciones de Newton

$$m_p \cdot \vec{a}_p = \vec{F}^{PISO} + m \cdot \vec{g}$$

Si aplicamos el mismo procedimiento que realice anteriormente en la ecuacion 1.7, llegamos a lo siguiente

$$\Delta P = \int_{t_I}^{t_F} \partial \vec{P} = \int_{t_I}^{t_F} \vec{F}^{PISO}\ \partial t + \int_{t_I}^{t_F} m \cdot \vec{g}\ \partial t$$

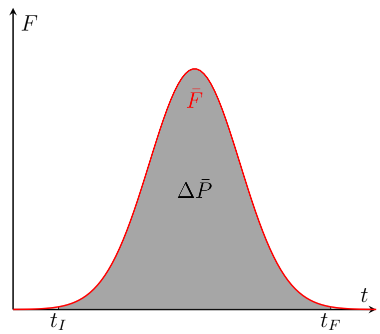


Figura 1.5: Grafico de delta $\vec{P}$.

los terminos de la izquierda ya los calculamos asi que vamos hablar sobre los terminos de la derecha. El termino que esta multiplicando la masa por la gravedad va a dar un resultado muy chico, osea que va a ser un par de decimales, porque la masa es muy chica y el intervalo de tiempo es de un milisegundo, por lo que para los siguientes calculos yo lo voy a despreciar. Por ultimo, t_F lo podemos definir como $t_I + 1ms$ porque nos dice que el tiempo que esta en el piso.

$$\Delta\vec{P} = 1,6kg \cdot \frac{m}{s}\ \hat{z} - \left(-1,6kg \cdot \frac{m}{s}\ \hat{z}\right) = \int_{t_I}^{t_F} \vec{F}^{PISO}\ \partial t + (Algo\ chico)$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\vec{P} = 3,2kg \cdot \frac{m}{s}\ \hat{z} = \int_{t_I}^{t_I+1ms} \vec{F}^{PISO}\ \partial t\ .$$

Una forma grafica de ver este resultado es el grafico 1.5 donde se puede ver que el area debajo de la curva es el $\Delta\vec{P}$. Ademas, un comentario sobre la fuerza y es que si nosotros divimos el termino de la derecha por el intevalo de tiempo, obtenemos el valor de la fuerza promedio en ese tiempo

$$\frac{\int_{t_I}^{t_F} \vec{F}^{PISO}\ \partial t}{t_F - t_I} = Valor\ promedio\ .$$

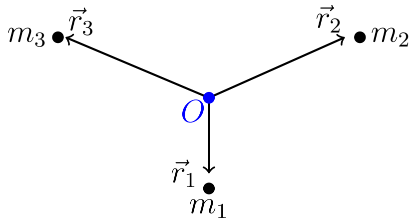


Figura 1.6: Sistema de 3 particulas que interactuan entre si pero ahora con un punto de referencia.

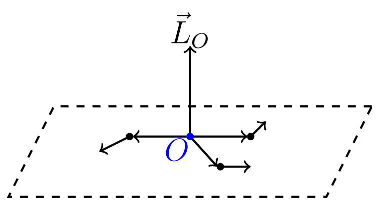


Figura 1.7: Vista del sistema 3 particulas. Se puede ver como hay un plano que las une.

3. Impulso Angular

Para esta parte me gustaria basarme nuevamente en el ejercicio de las 3 particulas. En si lo que quiero demostrar ahora como el movimiento de estas tres pariculas quedan establecidos por un plano. Para ello, es necesario que establezca un punto donde me voy a parar para ver a las particulas. Tal como se puede ver en la figura 1.6, voy a pararme en el punto O. Este punto en si no tiene nada que ver con el origen de mi sistema de referencia ni nada por el estilo, por ahora solo voy a pedir que sea un punto arbitrario.
Entonces, si partimos de la ecuacion de Newton del sistema de 3 particulas y ya teniendo en cuenta que las fuerzas internas se cancelan podemos ver que es necesario establecer lo siguiente

$$\vec{r}_1 \times m_1\vec{a}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{a}_2 + \vec{r}_3 \times m_3\vec{a}_3 = 0$$

esta condicion del producto escalar se lo conoce como el *momento de una fuerza* y representa el hecho experimental de que las fuerzas de interaccion. Quiero mencionar que para llegar a esta ecuacion se plantea la ecuacion de newton de cada particula, luego el producto escalar del vector posicion respecto del punto O. Por ultimo se suman las tres ecuaciones de Newton. Aunque aun no termine con esta expresion, ahora tenemos que volver a ver la aceleracion como la derivada de la velocidad respecto del tiempo

$$\vec{r}_1 \times m_1\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \vec{r}_2 \times m_2\frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} + \vec{r}_3 \times m_3\frac{\partial \vec{v}_3}{\partial t} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2 + \vec{r}_3 \times m_3\vec{v}_3\right) = 0\ . \quad (1.11)$$

Lo del parentesis es la nueva expresion que se presenta en esta seccion y es el impulso angular

$$\vec{L}_O = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2 + \vec{r}_3 \times m_3\vec{v}_3 \qquad (1.12)$$

como mencione anteriormente, este impulso angular es solo valido para el punto O, por eso la anotacion del subíndice.

Para este caso, y todos los casos que suceda esto mismo, el impulso cuando la derivada del impulso lineal se conserve, como pasa en la ecuacion 1.11, cuando la derivada del impulso angular respecto del tiempo es igual a cero, quiere decir que el plano que se puede ver como linea punteada en la figura 1.7 es constante.
En cambio si existiera una fuerza externa como por ejemplo si estas particualas estan cayendo aparece la fuerza peso, se puede ver que la derivada no va a ser cero

$$\frac{\partial \vec{L}_O}{\partial t} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2\vec{g} + \vec{r}_3 \times m_3\vec{g}$$

como lo es este caso. Obviamente, ahora el plano no se conserva.
Los terminos sumando se lo conoce como torques y se escribe de la siguiente manera

$$\frac{\partial \vec{L}_O}{\partial t} = \vec{M}_O = \vec{M}_O^{m_1\vec{g}} + \vec{M}_O^{m_2\vec{g}} + \vec{M}_O^{m_3\vec{g}} \ .$$

Ahora me gustaria mostrar una relacion que existe si medimos el impulso angular desde un punto O y un punto O'. Partiendo de la relacion del impulso angular para una masa tenemos que

$$\vec{L}_O = \vec{r}_O \times m\vec{v} = \vec{r}_O \times \vec{P}$$

y sabiendo que $\vec{r}_O$ es la suma de los vectores $\vec{r}_{OO'}$ y $\vec{r}_{O'}$

$$\vec{L}_O = (\vec{r}_{O'} + \vec{r}_{OO'}) \times \vec{P}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{O'} \times \vec{P} + \vec{r}_{OO'} \times \vec{P}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{O'} + \vec{r}_{OO'} \times \vec{P} \ .$$

Existe un caso especial pero analogo a esto y es que pasa si es un ahora tenemos en cuenta un sistema de particulas y usamos el centro de masa. Para eso vamos a seguir midiendo desde el punto O

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{P}_i$$

Ahora podemos usar y restar el $\vec{R}_{CM}$

$$\vec{L}_O = \sum_i \left(\vec{r}_i - \vec{R}_{CM} + \vec{R}_{CM}\right) \times \vec{P}_i$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{L}_O = \sum_i \left(\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}\right) \times \vec{P}_i + \sum_i \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_i$$

el termino $\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}$ que medir la distancia desde el centro de masa a la particula i

$$\vec{L}_O = \sum_i (\vec{r}_{i-CM}) \times \vec{P}_i + \sum_i \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_i$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times \vec{P}$$

entonces tenemos que el primer termino es el impulso angular del centro de masa y el segundo se lo conoce como el *Movimiento angular rotantate* medido desde el punto O.

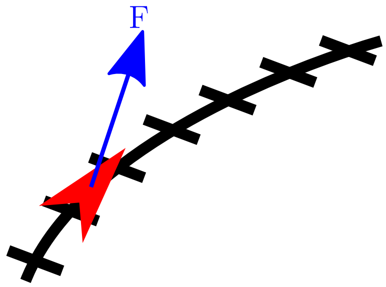


Figura 1.8: Recorrido de una particula.

4. Trabajo de una fuerza

Supongamos que queremos mover una caja, como la que aparece en la figura 1.8, una distancia $\Delta\vec{r}$. Uno podria ejercerle una fuerza $\vec{F}$ y notaria que para mover la caja depende de una serie de condiciones

- la distancia que uno quiere mover la caja;
- la magnitud de la fuerza;
- el angulo entre la fuerza y la distancia que uno quiere mover.

El ejemplo tipico que se utiliza para explicar el trabajo de una fuerza es pensar en una particula que realiza un recorrido gracias a una fuerza(ver figura ()) . Entonces sabemos que el trabajo de la fuerza se puede escribir de la siguiente manera

$$\partial W = \vec{F} \cdot \partial \vec{r} \tag{1.13}$$

donde

$$\partial \vec{r} = \partial r \cdot \hat{r} + r \cdot \theta \hat{\theta}$$

pero es solo para este caso porque me conviene verlo en polares.
Si uno quisiera calcular el trabajo de una fuerza que realiza a lo largo de un desplazamiento, se hace de la siguiente forma

$$W_{a \to b} = \int_a^b \vec{F} \cdot \partial \vec{r} \; .$$

Presentalo asi me deja insertar una duda y es lo siguiente

$$\int_a^b \vec{F} \cdot \partial \vec{r} \; ? =? \; \int_b^a \vec{F} \cdot \partial \vec{r} \; .$$

Respuesta corta, depende. Ese "depende" obvimente depende de la fuerza que estemos hablando.
Con esta pregunta me permite introducir las fuerzas conservativas y las no conservativas.
Las conservaticas son aquellas que su trabajo no depende del camnino recorrido para unir a y b sino de propiamente los puntos.

Agregar figura donde hacen un circulo cerrado de a $\Rightarrow$ b

Ahora pensemos que pasa si una particula parte del punto a, avanza hasta el punto b y vuelve al punto a. Para ese caso especial se cumple lo siguiente

$$W = W_{a\to b} + W_{b\to a}$$

$$\Downarrow$$

$$W = \int_{a_{C1}}^{b} \vec{F}\cdot\partial\vec{r} + \int_{b_{C2}}^{a} \vec{F}\cdot\partial\vec{r}$$

podemos usar un truco que se ve en el cbc y dar vuelta la integral del segundo termino

$$W = \int_{a_{C1}}^{b} \vec{F}\cdot\partial\vec{r} - \int_{b_{C2}}^{b} \vec{F}\cdot\partial\vec{r}$$

$$\Downarrow$$

$$W = 0$$

ya que no importa el camino sino los puntos. Otra forma de escribir esto es

$$\oint \vec{F}\cdot\partial\vec{r} = 0$$

El caso donde el trabajo varia dependiendo del camino se les dice fuerzas no conservativa, un ejemplo de estas es el rozamiento o viscosa.
En general si la fuerza es una funcion de la distancia, esta sera conservativa. Caso contrario, no lo es.

Hacer un dibujo, diria que el mismo que el anterior

5. Energia Cinetica

Supongamos un movil de masa m que se ve afectada por una fuerza $\vec{F}$. Sabemos que su desplazamiento sera

$$\partial \vec{r} = \vec{v} \cdot \partial t$$

entonces si pensamos en el la ecuacion 1.13 y tenemos en cuenta la segunda ley de newton $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$$\partial W = \vec{F} \cdot \partial \vec{r} = m \cdot \vec{a} \cdot \vec{v} \cdot \partial t = m \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{v} \cdot \partial t$$

obvimente se puede simplicar los diferenciales y se puede reescribir la derivada de la velocidad

$$\partial W = m \cdot \frac{1}{2} \cdot \partial \left(v^2\right)$$

ahora podemos integrar en un punto a y un punto b

$$W_{a \to b} = \int_a^b m \cdot \frac{1}{2} \cdot \partial \left(v^2\right) = \frac{1}{2} m \left(v_b^2 - v_a^2\right) \ . \tag{1.14}$$

Ahora podemos plantear el caso de que la fuerza esta trando de frenar al movil, entonces nos quedaria que $v_b^2 = 0$, la cuenta nos quederia

$$W_{a \to b} = -\frac{1}{2} m \cdot v_a^2 \tag{1.15}$$

y se puede ver que la fueza le esta sacando energia al movil.
A esto se lo conoce como *Energia cinetica* y es la medida del trabajo que se puede extraer de un cuerpo en movimiento. A veces se lo escribe asi

$$T = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \tag{1.16}$$

siendo

$$W_{a \to b} = T_b - T_a$$

A esto tambien se lo conoce como *Teorema de las fuerzas vivas* ?
Una ultima cosa y es que a $\vec{F}$ no le pedi nada en especial, osea que puede ser tanto conservativa o no.

6. Energia potencial

Ahora si vamos a considerar que la fuerza es una conservativa. Existe una razon de eso y es porque si recordamos que las fuerzas conservativas son funciones de la posicion, osea que depende de la posicion, podemos decir lo siguiente

$$W_{x_0 \to x} = \int_{x_0}^{x} \vec{F} \cdot \partial \vec{r} = -\left[V(x) - V(x_0)\right]$$

el $V(x)$ es lo que se conoce como potencial y es una parte de la energia mecanica. Una forma mejor de ver la expresion como funcion de la posicion es la siguiente

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} \vec{F} \cdot \partial \vec{r} + V(x_0)$$

$V(x_0)$ es una constante y en general se lo conoce como nivel de energia. En si no es importante pero si es importante establecer un nivel de energia para poder comparar. En muchas ocasiones se arreglan los terminos para que el nivel de energia sea cero u otra espresicion que simplifique el resultado de la integral.

7. Una forma general de la energia mecanica

Voy a dar una forma general que a mi me gusta porque mezcla todo y ademas es util, al menos para mi, a la hora de resolver ejercicios. Partamos de una particula que se ve afectada por un una fuerza y tienen una velocidad $\vec{v}$. Lo primero que uno siempre hacer es presentar la segunda ley de newton

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}$$

ahora, la sumatorio de fuerzas sabes que se puede dividir en dos grupos, que sea la suma de las fuerzas conservativas y la sumatoria de las fuerzas no conserva tivas. Ademas, voy a ver a reemplazar la aceleracion con lo siguiente

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} = \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \partial \left(v^2\right)$$

Ahora si, podemos reemplazar en la ecuacion de newton

$$m \cdot \frac{1}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \partial \left(v^2\right) = \vec{F}^C + \vec{F}^{NC}$$

$$\Downarrow$$

$$m \cdot \frac{1}{2} \cdot \partial \left(v^2\right) = \vec{F}^C \cdot \partial \vec{r} + \vec{F}^{NC} \cdot \partial \vec{r}$$

integramos en ambos lados

$$\int_{v_0^2}^{v^2} m \cdot \frac{1}{2} \cdot \partial \left(v^2\right) = \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} \vec{F}^C \cdot \partial \vec{r} + \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} \vec{F}^{NC} \cdot \partial \vec{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = E_c - E_{c_0} = -\left[V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)\right] + W^{NC}_{x_0 \to x}$$

$$\Downarrow$$

$$E_c - E_{c_0} + V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) = W^{NC}_{x_0 \to x}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[E_c + V(\vec{r})\right] - \left[E_{c_0} + V(\vec{r}_0)\right] = W^{NC}_{x_0 \to x} \tag{1.17}$$

el primer parentesis es la energia mecanica para un instante generico y el segundo parentesis es la energia mecanica en un instante inicial. Lo bueno de esta ultima exprecion es la facilidad que brinda para reconcer cuando la energia mecanica se conserva y es cuando el trabajo de las fuerzas no conservativas sea cero. El hecho que sea sea cero quiere decir que tanto la cinetica como la potencial se van a equilibrar. Una forma de ver la energia mecanica para un instante dado es la siguiente

$$H = E_c + V(\vec{r})$$

8. Un par de ejericios

Ejemplo 8.1: Caida libre

Supongamos una pelota de masa m parte de reposo y se deja cae una altura h. Cual es la velocidad final?

Primero se plantea la segunda ecuacion de Newton para este cuerpo

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F} = m \cdot \vec{g} \ .$$

En este caso es bastante sencilla porque solo esta la fuerza peso y no hay otra involucrada. Voy hacer los mismos pasos que hice para llegar a la expresion 1.17 y no voy a simplificar las masas para que me quede la expresion generica de la energia

$$m \cdot \frac{1}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \partial\left(v^2\right) = m \cdot \vec{g}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \partial\left(v^2\right) = m \cdot \vec{g} \cdot \partial \vec{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{v_0^2}^{v^2} \frac{1}{2} \cdot m \cdot \partial\left(v^2\right) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} m \cdot \vec{g} \cdot \partial \vec{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = m \cdot \vec{g} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \ .$$

Ahora nos toca reemplzar con los datos que tenemos. Si ponemos nuestros ejes de refercia en el momento que la masa parte tenemos que $\vec{r}_0 = 0 \cdot \hat{z}$ y como queremos saber a que velocidad llega en h podemos poner $\vec{r} = h \cdot \hat{z}$. Ademas sabemos que parte de reposo por lo que $v_0^2 = 0$ y que la gravadad $\vec{g} = +|g| \cdot \hat{z}$ por nuestros ejes. Ahora si, reemplzamos

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot 0^2 = m \cdot |g| \cdot \hat{z} \cdot (h \cdot \hat{z} - 0 \cdot \hat{z})$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 = m \cdot |g| \cdot h$$

$$\Downarrow$$

$$\cdot v_f^2 = 2 \cdot |g| \cdot h \Rightarrow |v_f| = \sqrt{2 \cdot |g| \cdot h} \ .$$

Para el caso de un tiro vertical es analogo el resultado.

Ejemplo 8.2: Masa con resorte

Supongamos una masa que esta atada a un resorte de una constante elastica k y con una longitud natural l_0. Describa y grafique el potencial de la fuerza elastica.

Para este tipo de ejercicios lo que uno hace es simplemente tratar con las fuerzas conservaticas, no vamos a tener en cuenta la parte de cinetica. Como la una fuerza conservativa que permanece en el sistema es el resorte, vamos a describir ese potencial.

$$\vec{F_k}(x) = -k\,(x - l_0)\,\hat{x}$$

sabemos que el trabajo de la fuerza se puede escribir como

$$\partial W = \vec{F_k}(x) \cdot \partial \vec{r}$$

como solo se puede mover en $\hat{x}$ se puede decir que

$$\vec{r} = x \cdot \hat{x} \Rightarrow \partial \vec{r} = \partial x \cdot \hat{x}$$

entonces si reemplazamos en el trabajo

$$\partial W = \vec{F_k}(x) \cdot \partial \vec{r} = -k\,(x - l_0)\,\hat{x} \cdot \partial x \cdot \hat{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\partial W = -k \cdot x \cdot \partial x + k \cdot l_0 \cdot \partial x$$

ahora podemos integrar en ambos lados solo que en la izquierda de la igualdad vamos a poner el potencial

$$\int_{W_0}^{W} \partial W = \int_{x_0}^{x} -k \cdot x \cdot \partial x + \int_{x_0}^{x} k \cdot l_0 \cdot \partial x$$

$$\Downarrow$$

$$-\left[V(x) - V(x_0)\right] = -k \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x^2\big|_{x_0}^{x}\right) + k \cdot l_0 \cdot \left(x\big|_{x_0}^{x}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$-\left[V(x) - V(x_0)\right] = -k \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - x_0^2\right) + k \cdot l_0 \cdot (x - x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$V(x) - V(x_0) = k \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - x_0^2\right) - k \cdot l_0 \cdot (x - x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$V(x) = k \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - x_0^2\right) - k \cdot l_0 \cdot (x - x_0) + V(x_0)$$

de aca se puede ver si yo tomo $x_0 = l_0$ y $V(x_0) = 0$ se me simplifica la cuenta, ademas voy llevar la expresion para que la x me quede aparte

$$V(x) = k\left[\frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - l_0^2\right) - l_0 \cdot (x - l_0)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$V(x) = k\left[\frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot l_0^2 - l_0 \cdot x + l_0^2\right]$$

$$V(x) = k\left[\frac{1}{2}\cdot x^2 - l_0\cdot x + \frac{1}{2}l_0^2\right]$$

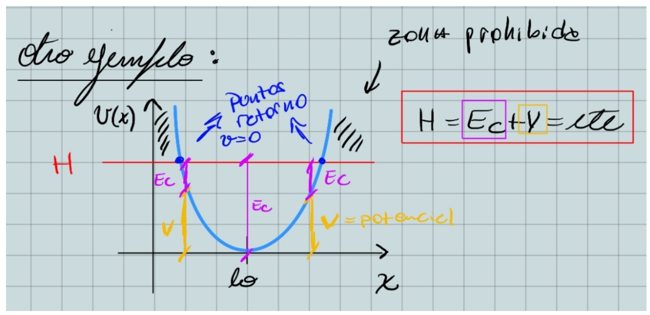
esto se puede ver como un binomio al cuadrado

$$V(x) = k\cdot\frac{1}{2}\left[x^2 - 2\cdot l_0\cdot x + l_0^2\right]$$

$$\Downarrow$$

$$V(x) = \frac{k}{2}\left(x - l_0\right)^2$$

Si uno graficara esto obtendria lo siguiente



Ejemplo 8.3: El problema de kepler

En si lo pongo porque es un problema que al menos en el final de capuzzi suele aparecer entonces lo voy a desarrollar. Este empieza asi, Estudie el problema de Kepler para el sistema Sol (de masa M) - Tierra (de masa $m << M$)

- Exprese el impulso lineal, el momento angular y la energia mecanica
- Encontrar que magnitudes se conservan
- Encontrar y graficar el potencial efectivo

Empecemos describiendo las fuerzas que sienten cada uno. Para la masa M tengo que siente la fuerza de atraccion de la masa m

$$\vec{F}_{Mm} = G\cdot\frac{m\cdot M}{\vec{r}^{\,2}}\cdot\hat{r}_{Mm}$$

donde $\hat{r}_{Mm}$ es un vector unitario que me invente pero que parte de la masa M y apunta a la masa m y $\vec{r}$ es la distancia entre ellas.

Para el caso de la masa de la masa m le pasa algo similar

$$\vec{F}_{mM} = G \cdot \frac{M \cdot m}{\vec{r}^{\,2}} \cdot \hat{r}_{mM}$$

donde $\hat{r}_{mM}$ es un vector unitario que parte de la masa m y apunta a la masa M y $\vec{r}$ es la distancia entre ellas. Una relacion que sale de forma inmediata es es la siguiente

$$\hat{r}_{Mm} = -\hat{r}_{mM}$$

esto es valido para todo el movimiento ya que siempre vas a estar apuntandose de forma contraria. Ahora voy a escribir las ecuaciones de Newton y voy a quedarme con esa relacion de los versores que me invente para reemplazarlo.
Para la masa M tengo que

$$M \cdot \vec{a}_M = \vec{F}_{Mm} = G \cdot \frac{m \cdot M}{\vec{r}^{\,2}} \cdot \hat{r}_{Mm}$$

$$\Downarrow$$

$$M \cdot \vec{a}_M = G \cdot \frac{m \cdot M}{\vec{r}^{\,2}} \cdot (-\hat{r}_{mM}) \ .$$

Y para la masa m tengo

$$m \cdot \vec{a}_m = G \cdot \frac{M \cdot m}{\vec{r}^{\,2}} \cdot \hat{r}_{mM} \ .$$

Una vez establecidas ambas ecuaciones voy a sumarlas

$$m \cdot \vec{a}_m + M \cdot \vec{a}_M = G \cdot \frac{M \cdot m}{\vec{r}^{\,2}} \cdot \hat{r}_{mM} - G \cdot \frac{m \cdot M}{\vec{r}^{\,2}} \cdot \hat{r}_{mM}$$

$$\Downarrow$$

$$m \cdot \vec{a}_m + M \cdot \vec{a}_M = 0$$

$$\Downarrow$$

$$m \cdot \frac{\partial \vec{v}_m}{\partial t} + M \cdot \frac{\partial \vec{v}_M}{\partial t} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m \cdot \vec{v}_m + M \cdot \vec{v}_M\right) = 0 = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

de aca concluyo que que el impulso lineal se conserva por la falta de fuerzas externas.
No solo eso, sino que tambien puedo decir que el centro de masa se mueve como un MRU porque a esta expresion puedo multiplicar las masas y obtengo la derivada de la velocidad centro de masa respecto del tiempo

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m \cdot \vec{v}_m + M \cdot \vec{v}_M}{m + M}\right) = \frac{\partial V_{CM}}{\partial t} = 0 \ .$$

Ahora tendria que ver el impulso angular y para eso vamos a pensar para eso necesito un punto de donde medirlo. Para eso voy a usar el centro de masa

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m \cdot \vec{r}_m + M \cdot \vec{r}_M}{m + M}$$

Ademas tenemos que la distancia relativa entre ellos es

CAPÍTULO 2

CUERPO RIGIDO

A

1. Cinematica de un cuerpo rigido

Una condicion especial que tiene un cuerpo rigido es que al agarrar una particula i y una particula j se cumple que su distancia relativa es constante para todo momento.

$$|r_{ij}| = |r_i - r_j| = cte \tag{2.1}$$

a esto se lo conoce como *Condicion de Rigidez*.
Ademas, un cuerpo rigido puede realizar dos tipos de movimieno diferentes.

- **Traslacion Pura:** Solo se traslada de posicion;
- **Rotacion Pura:** Existen un campo de velocidades y gira.

Y, obviamente, puede realizar una combinación de las dos, osea una **Roto transalacion**.
Si tenemos en cuanta la ecuacion 2.1, podemos decir que

$$\vec{r_{ij}} = \vec{r_i} - \vec{r_j} \to \vec{v_{ij}} = \vec{v_i} - \vec{v_j} \tag{2.2}$$

pero si lo vemos desde la velocidad

$$\vec{v_{ij}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{r_{ij}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(r_{ij} \cdot \hat{r}_{ij}\right)$$

si tenemos en cuenta la regla de la cadena de una derivada

$$\vec{v_{ij}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(r_{ij}\right) \cdot \hat{r}_{ij} + r_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{r}_{ij}\right)$$

sabemos que la distancia entre los puntos no puede variar durante el tiempo ya que romperia con la condicion de rigidez, asi que solo nos queda el segundo termino

$$\vec{v_{ij}} = r_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{r}_{ij}\right) = r_{ij} \cdot \vec{\Omega} \times \hat{r}_{ij}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v_{ij}} = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{ij}$$

entonces si unimos con lo que habiamos conseguido en 2.2

$$\vec{v_{ij}} = \vec{v_i} - \vec{v_j} = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{ij}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v_i} = \vec{v_j} + \vec{\Omega} \times (\vec{r_i} - \vec{r_j}) \ . \tag{2.3}$$

Partiendo de esta relacion podemos ver una condicion de las velocidades

$$\vec{v_i} = \vec{v_j} + \vec{\Omega} \times (\vec{r_i} - \vec{r_j})$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v_i} - \vec{v_j} = \vec{\Omega} \times (\vec{r_i} - \vec{r_j})$$

$$\Downarrow$$

$$(\vec{v_i} - \vec{v_j}) \cdot (\vec{r_i} - \vec{r_j}) = \vec{\Omega} \times (\vec{r_i} - \vec{r_j}) \cdot (\vec{r_i} - \vec{r_j})$$

la igualdad de la derecha es cero porque cuando uno hace el producto cruz consigue un ortogal de los vectores, si ademas hacemos el producto interno de los factores eso va a dar como resultado cero ya que son ortogonales

$$(\vec{v_i} - \vec{v_j}) \cdot (\vec{r_i} - \vec{r_j}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v_i} \cdot (\vec{r_i} - \vec{r_j}) - \vec{v_j} \cdot (\vec{r_i} - \vec{r_j}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v_i} \cdot (\vec{r_i} - \vec{r_j}) = \vec{v_j} \cdot (\vec{r_i} - \vec{r_j})$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v_i} \cdot \hat{r}_{ij} = \vec{v_j} \cdot \hat{r}_{ij}$$

Ahora me gustaria mostrar si el omega del rigido es valido para todo el cuerpo rigido. Para eso voy a describir la velocidad desde tres puntos distintos

$$\vec{v_i} = \vec{v_p} + \vec{\Omega} \times (\vec{r_i} - \vec{r_p})$$

$$\vec{v_i} = \vec{v_q} + \vec{\Omega}' \times (\vec{r_i} - \vec{r_q})$$

$$\vec{v_q} = \vec{v_p} + \vec{\Omega} \times (\vec{r_q} - \vec{r_p})$$

donde $\vec{\Omega}'$ es otro omega del rigido que en principio no se si es igual al omega del rigido medido desde el punto p. El proximo paso es remplazar la ultima ecuacion en la segunda

$$\vec{v_i} = \vec{v_p} + \vec{\Omega} \times (\vec{r_q} - \vec{r_p}) + \vec{\Omega}' \times (\vec{r_i} - \vec{r_q})$$

ahora igualamos con la primera ecuacion

$$\vec{v_p} + \vec{\Omega} \times (\vec{r_i} - \vec{r_p}) = \vec{v_p} + \vec{\Omega} \times (\vec{r_q} - \vec{r_p}) + \vec{\Omega}' \times (\vec{r_i} - \vec{r_q})$$

$$\vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_p) = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_q - \vec{r}_p) + \vec{\Omega}' \times (\vec{r}_i - \vec{r}_q)$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_p) - \vec{\Omega} \times (\vec{r}_q - \vec{r}_p) = \vec{\Omega}' \times (\vec{r}_i - \vec{r}_q)$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{\Omega} \times ((\vec{r}_i - \vec{r}_p) - (\vec{r}_q - \vec{r}_p)) = \vec{\Omega}' \times (\vec{r}_i - \vec{r}_q)$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_q) = \vec{\Omega}' \times (\vec{r}_i - \vec{r}_q)$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_q) - \vec{\Omega}' \times (\vec{r}_i - \vec{r}_q) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}'\right) \times (\vec{r}_i - \vec{r}_q) = 0$$

para que esto se cumpla, quiere decir que

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}'$$

2. Eje instanteo de rotacion

Son los punto $\vec{r}_j$ que tienen $\vec{v}_j = 0$ en un dado instante. Si partimos de

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_O)$$

y pedimos que $\vec{v}_0 = 0$ ya que el punto O pertenece al eje de rotacion, tenemos que

$$\vec{v}_i = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \ .$$

Pero si ahora elegimos un punto O' que tambien pertence al eje de rotacion, tenemos lo siguiente

$$\vec{v}_{O'} = 0 = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_{O'} - \vec{r}_O) \ .$$

esto quiere decir que el omega del rigido es paralelo al eje instantáneo de rotacion.

Ejemplo 2.1: Varilla en un plano

Dada una varilla que rueda sin deslizar, decir si existe un EIR.

Escribamos la condicion de rigidez

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}) \ .$$

Ahora, en que gire haciendo rodadura quiere decir que la velicdad relativa entre la velocidad del piso y de la varilla es cero, por lo que ese punto tiene como velocidad cero, ya esto nos dice que existe un EIR.
Ahora que sabemos que existe, me gustaria demostrar que existe una relacion entre la velocidad centro de masa y el omega del rigido

$$\vec{v}_i = 0 = v_{CM} \cdot \hat{x} + (-\Omega \cdot \hat{z}) \times (0 - r \cdot \hat{y})$$
$$\Downarrow$$
$$0 = v_{CM} \cdot \hat{x} + \Omega \cdot r \cdot \hat{z} \times \hat{y}$$
$$\Downarrow$$
$$0 = v_{CM} \cdot \hat{x} + \Omega \cdot r \cdot (-\hat{x})$$
$$\Downarrow$$
$$v_{CM} \cdot \hat{x} = \Omega \cdot r \cdot \hat{x}$$

Ahora que tenemos esta relacion, puedo demostrar una cosa interesante que aparece en las velocidades para estos casos

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_O)$$

si O pertenece al EIR y tenemos nuestro origen en 0

$$\vec{v}_i = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - 0)$$

ademas, tenemos una relacion que une el omega

$$\vec{v}_i = \frac{v_{cm}}{r} \times \vec{r}_i$$

con esta relacion podemos sacar un campo de velocidades y vemos que a medida que subimos, la velocidad es mayor.
Agregar imagen de campos de velocidad

3. Dinamica del cuerpo rigido

Para esta parte un sigue valiendo todo lo que se aprendio de dinamica de la primera parte e incluso siguen valiendo los teoremas de conservacion.
Lo unico que cambia ahora es el hecho de obtener el centro de masa de un cuerpo rigido. Por definición, el centro de masa se calcula como

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

pero ademas se puede ver como una integral que esta definida donde siempre hay masa, digo esto porque voy a escribir una integral que a priori pareciera que no esta definida pero si lo esta solo que no escribo los limites

$$\vec{r}_{CM} = \int \frac{\partial m \cdot \vec{r}}{M}$$

M es la suma de todas las masas. Ademas, el ∂m lo podemos ver como

$$\partial m = \delta \cdot \partial V$$

donde δ es la densidad de masa y ∂V es el diferencial volumen, osea en todas las direcciones donde el cuerpo rigido tenga volumen

$$\vec{r}_{CM} = \int \frac{\delta\left(\vec{r}\right) \cdot \partial V \cdot \vec{r}}{M}$$

Ejemplo 3.1: Cilindro Uniforme

Dado un cilindro de radio R y de altura h. Buscar el centro de masa.

Despues lo hago

4. Impulso total de un cuerpo rigido

Ahora uno se podria preguntar si cambia calcular el impulso total desde otro punto en un cuerpo rigido.

$$M \cdot \vec{v}_{CM} = \vec{P} = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{P} = \sum_i m_i \cdot \left(\vec{v}_O + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{P} = M \cdot \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times (M \cdot \vec{r}_{CM} - M \cdot \vec{r}_O)$$

Ahora nos podrimos preguntar que pasa con la rotacion. Si vemos el impulso angular medido desde el centro de masa tenemos

$$\vec{L}_{CM} = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \int \partial m \cdot \vec{r} \times \vec{v}\,(\vec{r})$$

donde $\vec{r}$ debe de estar medida desde el centro de masa. Ademas, por condicion de rigidez tenemos que

$$\vec{v}\,(\ \vec{r}\ ) = \vec{v}_{CM} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

ahora podemos reemplazar en la ecuacion del impulso angular

$$\vec{L}_{CM} = \int \partial m \cdot \vec{r} \times \left(\vec{v}_{CM} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{L}_{CM} = \int \partial m \cdot \vec{r} \times \vec{v}_{CM} + \int \partial m \cdot \vec{r} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r} \right)$$

a esto lo vamos a resolver de forma separada para que se entienda. Empezando por

$$\int \partial m \cdot \vec{r} \times \vec{v}_{CM} = M \cdot \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} = 0$$

esto es igual a cero porque estamos midiendo la distancia que hay del centro de masa respecto del centro de masa.

Despues tenemos

$$\int \partial m \cdot \vec{r} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right)$$

el gran problema con este es el doble producto cruz. Para eso podemos pensarlo de la siguiente manera siguiendo la regla BACA-CABALLO que dice

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B} \cdot \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C} \cdot \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$$

entonces hagamos el doble producto cruz aparte y ademas tenemos en cuenta que el producto cruz de adentro, solo importa la parte que es ortgonal de $\vec{r}$

$$\vec{r} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) = \vec{\Omega} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}_\perp) - \vec{r}_\perp \cdot \left(\vec{r} \cdot \vec{\Omega}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{r} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) = \vec{\Omega} \cdot r_\perp^2 - \vec{r}_\perp \cdot r_{//} \cdot \Omega$$

entonces reemplzamos los que sabemos

$$\vec{L}_{CM} = 0 + \int \partial m \left(\vec{\Omega} \cdot r_\perp^2 - \vec{r}_\perp \cdot r_{//} \cdot \vec{\Omega}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{L}_{CM} = \int \vec{\Omega} \cdot r_\perp^2 \cdot \partial m - \int \vec{r}_\perp \cdot r_{//} \cdot \Omega \cdot \partial m$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{L}_{CM} = \vec{\Omega} \int \cdot r_\perp^2 \cdot \partial m - \int \vec{r}_\perp \cdot r_{//} \cdot \Omega \cdot \partial m$$

en particular a

$$I_{CM} = \int r_\perp^2 \cdot \partial m$$

se lo conoce como *Momento de inercia* medido desde el centro de masa

$$\vec{L}_{CM} = \vec{\Omega} \cdot I_{CM} - \vec{L}_{\perp,CM} \ ,$$

Ahora nos quedaria preguntar cuando el $\vec{L}_{\perp,CM} = 0$. Si $\vec{\Omega}$ es paralelo al eje de simetria se cumple que

$$\partial\vec{L}_{\perp,1} + \partial\vec{L}_{\perp,2} = 0$$

donde

$$\partial\vec{L}_{\perp,1} = \partial m \cdot \vec{r}_{\perp,1} \cdot r_{//,1}$$

$$\partial\vec{L}_{\perp,2} = \partial m \cdot \vec{r}_{\perp,2} \cdot r_{//,2}$$

para este caso se cumple que

$$r_{//,1} = r_{//,2}$$

y que

$$|\vec{r}_{\perp,1}| = |\vec{r}_{\perp,2}|$$

pero son de sentidos contrarios

$$\vec{r}_{\perp,1} = -\vec{r}_{\perp,2}$$

por eso se anulan.
El otro caso es cuando existe un plano de simetria, en este caso pasa al revez, la parte ortogonal es igual pero la parte paralela es contraria.

5. Teorema de Steiner

Ahora me gustaria demostrar la relacion que existe entre el I_z con un $I_{z'}$. Si partimos de la expresión que encontramos en la anterior seccion

$$I_{z'} = \int r_\perp^2 \cdot \partial m$$

$$\Downarrow$$

$$I_{z'} = \int \left[x'^2 + y'^2\right] \partial m$$

Ademas podemos decir que solo se mueve en el eje y por lo que su valor en x se mantedra pero su valor en y tendra una diferencia

$$\Downarrow$$

$$I_{z'} = \int \left[x^2 + (y-\alpha)^2\right] \partial m$$

$$\Downarrow$$

$$I_{z'} = \int \left[x^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot \alpha + \alpha^2\right] \partial m$$

$$\Downarrow$$

$$I_{z'} = \int \left(x^2 + y^2\right) \partial m + \int \left(-2 \cdot y \cdot \alpha\right) \partial m + \int \left(\alpha^2\right) \partial m$$

$$I_{z'} = I_z + -2 \cdot \alpha \int (y)\, \partial m + M \cdot \alpha^2$$

donde

$$-2 \cdot \alpha \int (y)\, \partial m = M \cdot y_{cm} = 0$$

ya que mis sistema de referncia esta parado en el centro de masa. Entonces nos que da que

$$I_{z'} = I_z + M \cdot \alpha^2$$

donde α es la distancia entre los ejes.

BIBLIOGRAFÍA

Roederer: Mecánica Elemental **Roederer**

Juan G. Roederer. *Mecánica Elemental*. 5.ª ed. Eudeba, 2017.