<u>עבודה 2 קבלת החלטות סמסטר 2 2025</u>

הוראות הגשה: הגשת העבודה **בזוגות**. מכל זוג, רק אחד מהסטודנטים מגיש קובץ בשם ת.ז. של חברי הקבוצה עם מקף תחתון באמצע. לדוג' 111111111_222222222.pdf

1.א. נתון ועד בגודל n=3. האם יכול להיות כלל החלטה קבוצתי שהוא מונוטוני אך לא ניטרלי? אם כן, תן דוגמא לכלל זה. אחרת, הסבר מדוע לא קיים.

ב. נתון ועד בגודל n=3. האם יכול להיות כלל החלטה קבוצתי שהוא ניטרלי אך לא מונוטוני? אם כן, תן דוגמא לכלל זה. אחרת, הסבר מדוע לא קיים.

ג. נתון ועד בגודל n=4. האם קיים כלל החלטה שלא מקיים ניטרליות וגם לא מקיים מונוטוניות, אך בשינוי ההחלטה בפרופיל הצבעה יחיד מתקבל כלל המקיים את שניהם? אם קיים, הראה דוגמא לכלל זה. אחרת, הסבר מדוע לא קיים.

2. מריצים 3 אלגוריתמים לזיהוי אובייקט. האלגוריתמים הינם בלתי-תלויים בעלי אותה ההסתברות $p \in [0.56,0.68]$ לקבלת תשובה נכונה. נתבונן בשני אלגוריתמי שילוב:
-אלגוריתם השילוב A מקבל את ההחלטה לפי כלל הרוב הפשוט.
-אלגוריתם השילוב B מקבל את ההחלטה לפי כלל המומחה.
נסמן ב$M_A(p)$ את ההסתברות של אלגוריתם A לקבלת תשובה נכונה ,וב$M_B(p)$ את ההסתברות של אלגוריתם B לקבלת תשובה נכונה.
נסמן ב $f(p) = \frac{M_A(p)}{M_B(p)}$
מצא את הערך של p הממקסם את$f(p)$.

3. הוכח כי עבור Poissonial trials, לכל $0<\delta<1$ מתקיים:

$$P(x < (1-\delta)\mu) \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu}$$

4. ישנו אלגוריתם זיהוי שמזהה נכון אובייקטים בהסתברות P (לא ידועה) כאשר $0.4 \leq P \leq 0.6$. אנו רוצים לבחון את האלגוריתם על קבוצה של n תצפיות עם תשובות ידועות ולנסות לאמוד את P ע"י מדגם מקרי $X_1, X_2, \dots, X_n$ של תצפיות כאשר כל $X_i \sim Ber(P)$ ב"ת. נגדיר מ"מ $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ממוצע המדגם.

מצא מהו גודל המדגם המינימלי המקיים: $P\left(\frac{|\overline{X_n} - P|}{P} > \frac{1}{100}\right) \leq 0.05$

א. ע"י אי שיוויון הופדינג 2
ב. ע"י אי שיוויון צ'בישב

ג. ע"י אי שיוויוני צ'רנוף (3 ו4)

5. בהינתן ועד בגודל $n\geq3$ של מומחים בלתי תלויים, נגדיר *כלל החלטה מרתק* ככלל החלטה קבוצתי שבו נקבעו הבחירות עבור הפרופילים הבאים:

-עבור (1-,...,1-,1-) הכלל בוחר ב1+.

-עבור (1-,...,1-,1+) הכלל בוחר ב1+.

-עבור (1+...,1+,1-) הכלל בוחר ב1-.

כמה כללי החלטה מרתקים אך **לא נייטרלים** קיימים עבור ועד בעל n מומחים?

1.א. נתון ועד בגודל n=3. האם יכול להיות כלל החלטה קבוצתי שהוא מונוטוני אך לא ניטרלי? אם כן, תן דוגמא לכלל זה. אחרת, הסבר מדוע לא קיים.

ב. ניטרליות $X_i = \{+1, -1\}$ $\quad \hat{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ $\quad -\hat{X} = (-X_1, \ldots, -X_n)$

כלל החלטה ניטרלי $\iff$ לכל $\hat{X}$ מתקיים $f(-\hat{X}) = -f(\hat{X})$

מונוטוניות אם עבור דיון בעד מסוים, בו קבוצת המומחים תומכת בהחלטה המוצעת ושאר המומחים בעד המנגדים והכלל החלטה בחר

אז אם המעברים של נציגים מהמנגדים לתומכים - הכלל חייב להמשיך לבחור בהחלטה +1.

א. דוגמא: כלל החלטה תמיד בעד, לא משנה מה המומחים בחרו בהחלטה תהיה +1.

מקיים מונוטוניות כי ההחלטה של המתנגדים לא משפיע בכלל על ההחלטה בסופו.

	מומחה I	מומחה II	מומחה III	
$\hat{X}$:	+1	+1	−1	כלל +1
	תומכים A		תומרים B	

(הבוחר III משנה את דעתו)

+1	+1	+1	כלל +1
תומכים A			

ולא מקיים ניטרליות עבור $\hat{X}: (+1, +1, +1)$

$$f(-\hat{X}) = f(-1,-1,-1) = +1$$

$$-f(\hat{X}) = -f(1,1,1) = -1$$

$$\Rightarrow \quad f(-X) \neq -f(X)$$

ב. נתון ועד בגודל n=3. האם יכול להיות כלל החלטה קבוצתי שהוא ניטרלי אך לא מונוטוני? אם כן, תן דוגמא לכלל זה. אחרת, הסבר מדוע לא קיים.

כלל המיעוט קובע.

אם שוהב מספיקים, תתקבל החלטה מנוגדת.

נראה כי ניטרליות מתקיימת

	I	II	III	החלטה
x_1	+1	+1	+1	-1
x_2	-1	-1	-1	+1
x_3	+1	+1	-1	-1
x_4	-1	-1	+1	+1
x_5	+1	-1	+1	-1
x_6	-1	+1	-1	+1
x_7	-1	+1	+1	-1
x_8	+1	-1	-1	+1

$f(-x_1) = f(-1,-1,-1) = +1 = -f(x_1) = -f(1,1,1)$
$f(-x_2) = f(1,1,1) = -1 = -f(x_2) = -f(-1,-1,-1)$
$f(-x_3) = f(-1,-1,1) = 1 = -f(x_3) = -f(1,1,-1)$
$f(-x_4) = f(1,1,-1) = -1 = -f(x_4) = -f(-1,-1,1)$
$f(-x_5) = f(-1,1,-1) = 1 = -f(x_5) = -f(1,-1,1)$
$f(-x_6) = f(1,-1,1) = -1 = -f(x_6) = -f(-1,1,-1)$
$f(-x_7) = f(1,-1,-1) = 1 = -f(x_7) = -f(-1,1,1)$
$f(-x_8) = f(-1,1,1) = -1 = -f(x_8) = -f(1,-1,-1)$

המונוטוניות לא מתקיימת עבור ועד מהמהת $\begin{array}{ccc} I & II & III \\ \end{array}$ $(\underbrace{+1,+1}_{\text{תומכים}},\underbrace{-1}_{\text{מתנגדת}})$

לפי כלל החלטה המיעוט קובע - המומחים I ו- II נחשבים מתנגדים. הדרגה של אחד מעומדת המתנגדים

אם שנייה לקבוצת התומכים תגדיר מיעוט חדש. וככה ההחלטה הסופית גם תשתנה.

החלטת המיעוט

1	2	3	
+1	+1	-1	-1
+1	-1	-1	+1

שינוי דעה של מומחה 2

ג. נתון ועד בגודל n=4. האם קיים כלל החלטה שלא מקיים ניטרליות וגם לא מקיים מונוטוניות, אך בשינוי ההחלטה בפרופיל הצבעה יחיד מתקבל כלל המקיים את שניהם? אם קיים, הראה דוגמא לכלל זה. אחרת, הסבר מדוע לא קיים.

כלל החלטה: כלל המומחה עם שינוי, שמקרה שבו המומחה הראשון והאחרון בוחרים שניהם ב(-1) ההחלטה בסופו תהיה 1. (אין השפעה של מומחה השני והשלישי על ההחלטה).

נטרליות: עבור ועד $X=(-1,-1,1,-1)$

$$f(-\hat{x}) = f(1,1,-1,1) = 1 \neq -1 = -\underbrace{f(-1,-1,1,-1)}$$

לפי הכלל הראשון והאחרון מסכימים

על -1 ולכן ההחלטה היא 1,

⇐ לא מתקיימת נטרליות.

מונוטוניות: $X=(-1,-1,1,-1)$ לפי הכלל ההחלטה היא 1. כלומר במומחה הראשון והאחרון הם קובעים המנוגדים. אם המומחה האחרון ישנה את דעתו ויצטרף למומחה שבחרו 1, אז לא יתקיים התנאי שהראשון והאחרון מסכימים על -1 ולכן לא יתקיים המקרה שהראשון והאחרון מסכימים על -1 ולכן נחליט לפי כלל המומחה הקלאסי.

כלומר, לפי החלטה של המומחה, ההחלטה תהיה -1.

⇐ לא מתקיימת מונוטוניות.

עבור ועד שפרופיל ההחלטה שלו המומחה הראשון והאחרון בחרו שניהם ב(-1) ישנה פרופיל החלטה יחיד של המומחה הראשון וכך בהחלטה שהתקבלה מקודם (1) תהיה בדומה למומחה הראשון.

עבור 2 המקרים קיבלנו את כלל המומחה בתוספת שינוי פרופיל החלטה יחיד.

הוכחנו דוגמה שבכלל ההחלטה מונוטוני וניטרלי.

2. מריצים 3 אלגוריתמים לזיהוי אובייקט. האלגוריתמים הינם בלתי-תלויים בעלי אותה ההסתברות $p \in [0.56, 0.68]$ לקבלת תשובה נכונה. נתבונן בשני אלגוריתמי שילוב:

-אלגוריתם השילוב A מקבל את ההחלטה לפי כלל הרוב הפשוט.

-אלגוריתם השילוב B מקבל את ההחלטה לפי כלל המומחה.

נסמן ב$M_A(p)$ את ההסתברות של אלגוריתם A לקבלת תשובה נכונה, וב$M_B(p)$ את ההסתברות של אלגוריתם B לקבלת תשובה נכונה.

נסמן ב $f(p) = \frac{M_A(p)}{M_B(p)}$

מצא את הערך של p הממקסם את $f(p)$.

מריצים 3 אלגוריתמים ולכן $n=3$. נגדיר X_i מ"מ ב"ת כך ש

$$X_i = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases} \qquad X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

p ההסתברות לקבל את השילוב המנצח.

$$P(\text{כלל הרוב הפשוט נכון}) = P\left(X > \frac{n}{2}\right) = M_A(p) = \underbrace{\binom{3}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)}_{\text{2 מתוך 3 נכון}} + \underbrace{\binom{3}{3} \cdot p^3}_{\text{3 נכון}} = 3p^2(1-p) + p^3$$

$$P(\text{כלל מומחה}) = P(X_1 = 1) = M_B(p) = p$$

$$f(p) = \frac{M_A(p)}{M_B(p)} = \frac{3p^2(1-p) + p^3}{p} = \frac{3p^2 - 3p^3 + 3p^3}{p} = \frac{3p^2 - 2p^3}{p} = 3p - 2p^2$$

נגזור ונשווה ל-0 את $f(p)$ כדי למקסם.

$$f'(p) = (3p - 2p^2)' = 3 - 4p = 0$$

$$3 = 4p$$

$$\underline{\underline{p = 0.75}}$$

3. הוכח כי עבור Poissonial trials, לכל 0<δ<1 מתקיים:

$$P(x < (1-\delta)\mu) \le \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu}$$

נוכיח כי: $P(X<(1-\delta)\mu) \le \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu}$ באמצעות חסם צ'רנוף II.

$$P(X<a) \le \min_{t<0} \frac{E(e^{tx})}{e^{ta}} = \min_{t<0} \frac{M_x(t)}{e^{ta}} \quad \forall t<0$$

נסמן $a=(1-\delta)\mu$

$$P(X<(1-\delta)\mu) \le \frac{M_x(t)}{e^{t(1-\delta)\mu}} \le \frac{e^{\mu(e^t-1)}}{e^{t(1-\delta)\mu}} = \left(\frac{e^{e^t-1}}{e^{t(1-\delta)}}\right)^{\mu} = \left(\frac{e^{1-\delta-1}}{(1-\delta)^{(1-\delta)}}\right)^{\mu} = \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{(1-\delta)}}\right)^{\mu}$$

חסם צ'רנוף II

$M_x(t)=E[e^{tx}] \le e^{\mu(e^t-1)}$

עבור $t<0$

נבחר $t=\ln(1-\delta)$

$e^t=1-\delta$