Le transport optimal et la physique quantique

Pierre-André Mikem et Nawel Arab
Université Paris-Sud

Plan

Contexte

Partie 1:
Un problème de programmation linéaire
- Problème primal
- Problème dual
- Permutation optimale

Partie 2:
Le problème dual et la fonction log-sum-exp

Contexte

- N Boulangeries et cafés
- $\mu, \nu \in \mathbb{R}_+^N$ variables de production/consommation
- x, y positions des boulangeries et cafés
- $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$ coût de transport
- $\gamma \in \mathbb{R}_+^{N\times N}$ couplage

$$min \left\{ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} C_{i,j}\gamma_{i,j} \mid \gamma \in \Pi(\mu,\nu) \right\} \qquad (\mathcal{MK})$$

où

$$\Pi(\mu,\nu) := \{\gamma \in \mathbb{R}_+^{N\times N} | \sum_{j=1}^{N} \gamma_{i,j} = \mu_i,\ \forall i \in I\ et\ \sum_{i=1}^{N} \gamma_{i,j} = \nu_i,\ \forall i \in J\}$$

Partie 1:
Un problème de programmation linéaire

Problème primal

Le problème de Monge-Kantorovich peut se réécrire sous la forme :

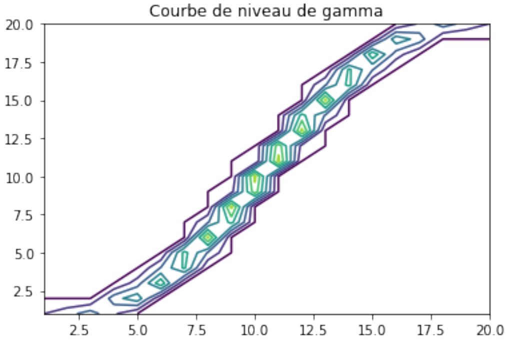
$$min\{< c, x > |Ax = b,\ x \geq 0\}$$

où $c := (C_{1,1}, C_{1,2}, \cdots, C_{1,N}, C_{2,1}, \cdots, C_{N,2N})$
$x := (\gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \cdots, \gamma_{1,N}, \gamma_{2,1}, \cdots, \gamma_{N,2N})$.
$b := (\mu_1, \cdots, \mu_N, \nu_1, \cdots, \nu_N)$

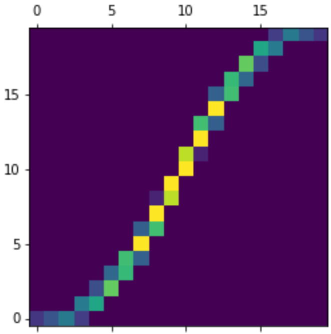
A est une matrice de taille $2N \times N^2$

$$A = \begin{pmatrix}
\overbrace{1\cdots 1}^{N fois} & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 & \cdots & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \\
0\cdots 0 & 1\cdots 1 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \\
0\cdots 0 & 0\cdots 0 & 1\cdots 1 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \\
 & \ddots & 0\cdots 0 & 1\cdots 1 & 0\cdots 0 & \\
 & & \ddots & & & \\
 & & & \ddots & & \\
 & & & & 0\cdots 0 & 1\cdots 1 \\
\mathcal{I}_{dN} & \mathcal{I}_{dN} & \mathcal{I}_{dN} & \cdots & \mathcal{I}_{dN} & \mathcal{I}_{dN}
\end{pmatrix}$$

Résultats d'un cas-test :



Résultats d'un cas-test :



Le lagrangien du problème s'écrit :

$$l(\gamma, u, v) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} C_{i,j}\gamma_{ij} - \sum_{i=1}^{N} u_i \left(\sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij} - \mu_i\right)$$

$$- \sum_{j=1}^{N} v_j \left(\sum_{i=1}^{N} \gamma_{ij} - \nu_j\right)$$

Le dual du problème de Monge-Kantorovich s'écrit alors :

$$\max_{u,v} \min_{\gamma \in \mathbb{R}_+^N} l(\gamma, u, v)$$

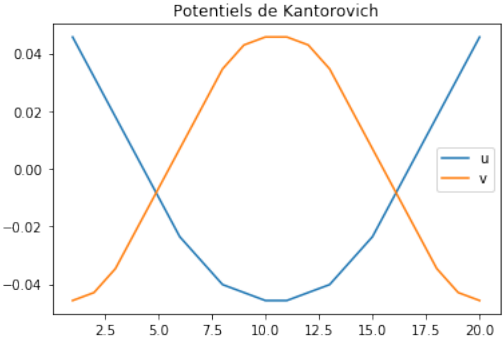
Ce qui équivaut à :

$$max \left\{ \sum_{i=1}^{N} u_i \mu_i + \sum_{i=j}^{N} v_j \nu_j \ \mid \ u_i + v_j \leq C_{ij} \right\}$$

$u, v \in \mathbb{R}^N \ et \ i, j \in \{1, \cdots, N\}$
Enfin on peut le mettre sous la forme standard du dual d'un PL:

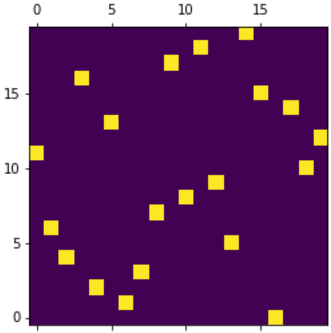
$$max \left\{ < u, \mu > + < v, \nu > \ \mid A^T y \leq c, \ y = (u, v)^T \right\}$$

En reprenant les données du test précédent on obtient les solutions duales suivantes :



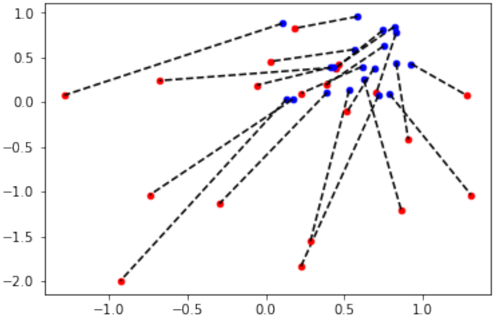
En prenant deux distributions égales à la distribution uniforme, on peut montrer qu'on obtient une matrice de permutation

En prenant deux distributions égales à la distribution uniforme, on peut montrer qu'on obtient une matrice de permutation



Permutation optimale

Chaque boulangerie est reliée à un unique café



Partie 2:
Le problème dual et la fonction log-sum-exp

On rappelle le dual du problème

$$min \left\{ \sum_i u_i \mu_i + \sum_j v_j \nu_j \mid u, v \in \mathbb{R}^N \ u_i + v_j \leq C_{ij} \ \forall (i,j) \in I \times J \right\}$$

On rappelle le dual du problème

$$min \left\{ \sum_i u_i \mu_i + \sum_j v_j \nu_j \mid u, v \in \mathbb{R}^N \ u_i + v_j \leq C_{ij} \ \forall (i,j) \in I \times J \right\}$$

On remarque

$$v_j \leq \min_i \quad C_{i,j} - u_i, \quad \forall j \in \{1, \cdots, N\}$$

On rappelle le dual du problème

$$min\left\{\sum_i u_i\mu_i + \sum_j v_j\nu_j \mid u, v \in \mathbb{R}^N \; u_i + v_j \leq C_{ij} \; \forall (i,j) \in I \times J\right\}$$

On remarque

$$v_j \leq \min_i \quad C_{i,j} - u_i, \quad \forall j \in \{1, \cdots, N\}$$

Problème sans contraintes de u:

$$min\left\{\sum_i u_i\mu_i + \sum_j \nu_j \; \min_i \; (C_{ij} - u_i) \; \mid u \in \mathbb{R}_+^N\right\} \qquad (\mathcal{MK}_d)$$

On introduit

$$f(x) = log\left(\sum_{i=1}^{N} \exp x_i\right)$$

On introduit

$$f(x) = log\left(\sum_{i=1}^{N} \exp x_i\right)$$

Convexité de la fonction f

- Inégalité de Holder

On introduit

$$f(x) = log\left(\sum_{i=1}^{N} \exp x_i\right)$$

Convexité de la fonction f

- Inégalité de Holder

$$\max_i x_i \ \leq log\left(\sum_{i=1}^{N} \exp x_i\right) \leq \ \max_i x_i + \ log(N)$$

On en déduit

$$\max_i x_i \leq \varepsilon \ log \left(\sum_{i=1}^{N} \exp \frac{x_i}{\varepsilon} \right) \leq \max_i x_i + \varepsilon \ log(N)$$

On en déduit

$$\max_i x_i \leq \varepsilon \; log\left(\sum_{i=1}^{N} \exp \frac{x_i}{\varepsilon}\right) \leq \max_i x_i + \varepsilon \; log(N)$$

En faisant tendre $\varepsilon \; vers \; 0$, on obtient

$$f_\varepsilon(x) \to \max_i x_i \text{ quand } \varepsilon \to 0$$

On utilise

$$\lim_{\varepsilon \to 0} -f_\epsilon(u - C_j) = \min_i \ (u_i - C_{ij})$$

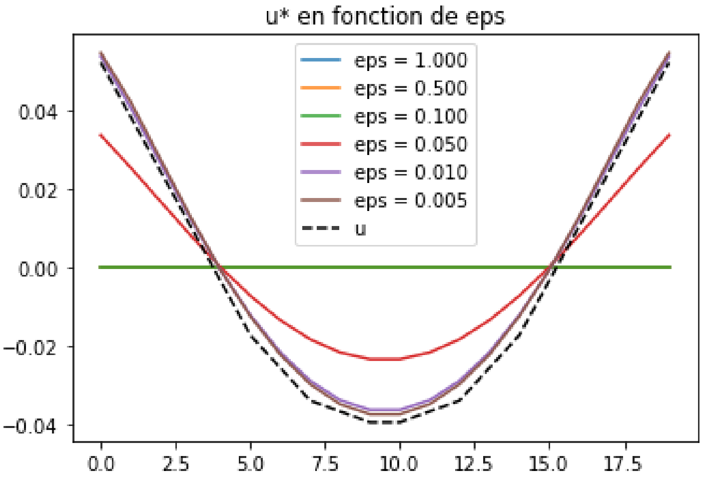
On utilise

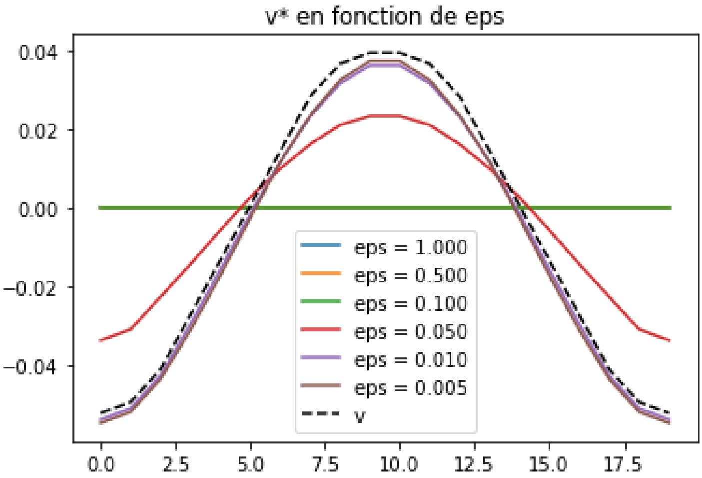
$$\lim_{\varepsilon \to 0} -f_\epsilon(u - C_j) = \min_i \ (u_i - C_{ij})$$

Le problème se réécrit alors comme limite d'un problème sans

contraintes dont la seule variable est u:

$$min \left\{ \sum_i u_i \mu_i - \sum_j \nu_j \ f_\epsilon(u - C_j) \ \ | \ u \in \mathbb{R}_+^N \right\}$$


u* en fonction de eps
eps = 1.000
eps = 0.500
eps = 0.100
eps = 0.050
eps = 0.010
eps = 0.005
u
0.04
0.02
0.00
−0.02
−0.04
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5


v* en fonction de eps
0.04
0.02
0.00
−0.02
−0.04
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
eps = 1.000
eps = 0.500
eps = 0.100
eps = 0.050
eps = 0.010
eps = 0.005
v