Signale & Systeme
Analyse eines Systems

Name: Dein Name
Matrikelnr.: 123456789
Studiengangsleiter: Professor
Kurs: Ein Kurs

17. November 2023

wir untersuchen das System mit den Parametern T1 Tt Eingabe des Systems in Computer Algebra (syms)

Eingabe des Systems in Matlab

1 Vorgehen in Regelungstechnik

Zur Ermöglichung einer strukturierten Vorgehensweise bedarf es einer Orientierung. Dieser Arbeit liegt die in der Vorlesung behandelte Vorgehensweise in der Regelungstechnik zugrunde, welche nachfolgend erläutert wird.

1. Detaillierungsgrad für das System festlegen
2. Physikalisches Modell einschließlich der Störsignale erstellen
3. Eingangs-, Ausgangs-, Zustands- und Störgrößen des Systems festlegen
4. Physikalische Einheiten festlegen und ggf. Normierung in Prozent
5. Analyse des Modells
   (a) Ruhelagen, Anfangswerte, evtl. Linearisierung nichtlinearer Systeme
   (b) Systemeigenschaften ermitteln
6. Entwurf
   (a) Ziele, Arbeitspunkte und Trajektorien festlegen
   (b) Entwurf: Struktur, Bereich, Verfahren und Kriterien
7. Simulation und Rückinterpretation

2 Das System

2.1 Eigenschaften des Systems

Folgend eine Liste der Eigenschaften des Systems, die sich aus der Übertragungsfunktion $G(s)$ ergibt:

- Nennergrad - Zählergrad = 1, dadruch ist das System nicht sprungfähig, antwortet aber sofort mit einer Steigung. Außerdem ist die $D-Matrix$ (welche einem Sprung am Anfang ensprechen würde) 0.
- Ein PT_3-Glieder
- P-Verhalten mit positiver Verstärkung
- gerade Anzahl nicht-minimalphasige rechtsseitiger Nullstellen: Dadurch antwortet das System erst falsch
- es gibt 3 reelle negative Polstellen, somit ist das System stabil

2.2 Die Übertragungsfunktion

Formel 1 zeigt die Übertragungsfunktion die in diesem Skript analysiert wird. Formel 3 zeigt dann die ausmultiplizierte Formel, sodass die Eigenschaften des Systems leichter zu lesen sind.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} && (1) \\ &= \frac{(1-2s)(1-3s)}{(1+4s)(1+5s)(1+6s)} && (2) \\ &= \frac{6s^2-5s+1}{120s^3+74s^2+15s+1} && (3) \end{aligned}$$

3 Darstellungsformen des Systems

3.1 Explizite Darstellung des Übertragungsoperators

3.2 Eingangs-Ausgang Differentialgleichung

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{6s^2-5s+1}{120s^3+74s^2+15s+1} \\ Y(s)(120s^3+74s^2+15s+1) &= U(s)(6s^2-5s+1) \\ 120\dddot{y}+74\ddot{y}+15\dot{y} &= 6\ddot{u}+5\dot{u}+u \end{aligned}$$

3.3 Zustandsraumdarstellung

Das soll man iwie unter 2b einordnen?

Die allgemeine Form der Zustandsraumdarstellung lautet:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Für unser System sieht dies folgendermaßen aus:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}-1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}2\end{bmatrix} u \tag{4a}$$

$$y = \begin{bmatrix}1.5\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}0\end{bmatrix} u \tag{4b}$$

Man kann auch die Zustandsraumdarstellung direkt eingeben, indem man man die Matrizen A, B, C, D belegt und den Befehl `sys = ss(A, B, C, D)` ausführt. Von hier aus kommt man mit `tf(sys)` wieder zur Übertragungsfunktion.

Die Zustandsraumdarstellung kann aus der Übertragungsfunktion in einfachen Fällen mit dem Substitutionstrick erstellt werden. Für Systeme, bei denen auch $\dot{u}, \ddot{u}, \ldots$ vorkommt, ist das Ganze ein bisschen komplizierter, wird aber in Wikipedia beschrieben und kann entsprechend angewendet werden. Bei sprungfähigen Systemen sieht das noch etwas anders aus und es muss erst eine Polynomdivision gemacht werden, um d zu erhalten. Im Mehrgrößenfall ist es noch komplizierter. (Weiß Hr. Groell auch nicht)

ACHTUNG: Beim Erstellen dieses Dokuments hatte ich zuerst die ANfangswerte vergessen! Das passiert mir in der Klausur nicht, da sonst ein Punkt weg ist !AUSRUFEZEICHEN!11!!1! Die Anfangswerte werden für die Simulation natürlich benötigt, weil die Funktion wissen muss, wo sie startet. Die Anfangswerte müssen mit den Anfangswerten der Ein- Ausgangsdarstellung korrespondieren. Das bedeutet $y(0) = CX(0^-) + D(0^-)$

$\dot{y}(0^-) = CAx(0^-) + CBu(0^-) + D\dot{u}(0^-)$

3.3.1 Originale Zustandsraumdarstellung

Dabei ist eine Möglichkeit Variante in der Zustandsraumdarstellung das zu behandelnde System zu beschreiben die Folgende:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} -0.6167 & -0.25 & -0.1333 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\
y &= \begin{pmatrix} 0.1 & -0.1667 & 0.2667 \end{pmatrix} x
\end{aligned}$$

3.3.2 Ähnlichkeitstransformation

Durch eine Ähnlichkeitstransformation können mit der Hilfmatrix T in 3.3.2 folgenden Matrizen in der Zustandsraumdarstellung erzeugt werden.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0.1771 & -0.2292 & 0.02292 \\ 0.3795 & -0.3839 & 0.01339 \\ -1.862 & 1.598 & -0.4098 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 4.5 \end{pmatrix} u \\
y &= \begin{pmatrix} -0.2429 & 0.319 & 0.0381 \end{pmatrix} x
\end{aligned}$$

4 Simulation des Systems

4.1 Sprungantwort

In Abbildung 4.1 ist die Reaktion des Systems auf den Heaviside-Funktion zu sehen. Diese ist wie folgt definiert:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für t} < 0 \\ 1 & \text{für t} > 0 \end{cases}$$

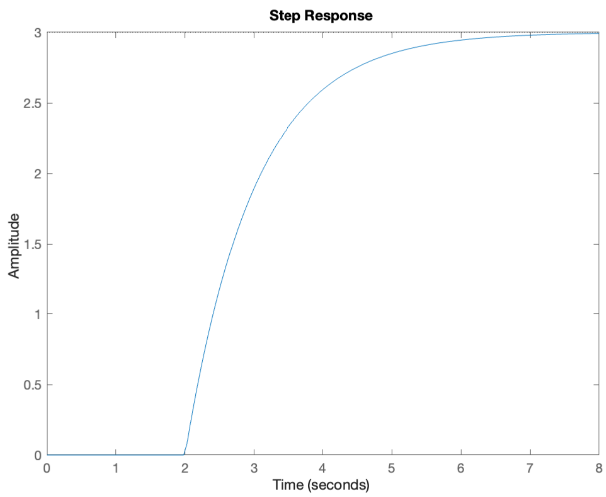

Abbildung 1: Sprungantwort

4.2 Impulsantwort

In Abbildung 4.2 ist die Reaktion des Systems auf den Dirac-Funktion zu sehen. Die Dirac-Funktion ist die Ableitung der Heaviside-Funktion und definiert durch:

$$\delta(t) \overset{D'}{=} \frac{d}{dt}\sigma(t)$$

Die wichtigste Eigenschaft der Dirac-Funktion ist, dass die Fläche unter dem Impuls exakt 1 ist. Daraus folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dx = 1$$

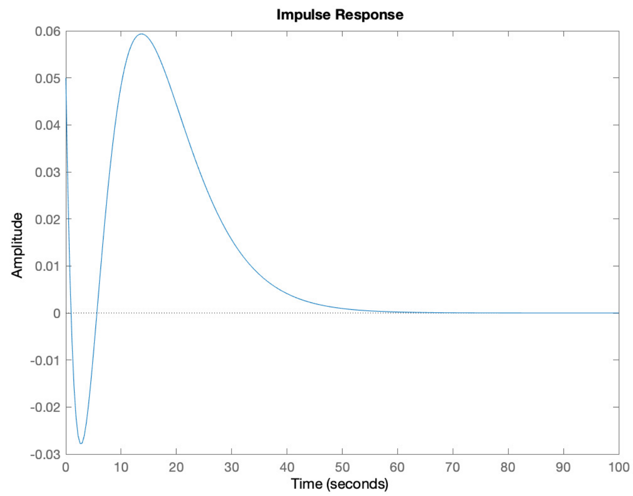

Abbildung 2: Impulsantwort

4.3 explizite Lösung

Durch die inverse Laplacetransformation lässt sich die explizite Lösung des Systems für die Impulsfunktion als Eingangssignal ermitteln.

$$L^{-1}\{\frac{6s^2 - 5s + 1}{120s^3 + 74s^2 + 15s + 1}\} = \frac{21\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}}{4} - \frac{56\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}}{5} + 6\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{6}}$$

4.4 statischer Verstärkungsfaktor

Wie in Abbildung 4.1 zu sehen pendelt sich der Ausgang des System bei 1 ein. Das passiert, weil $k = 1$ ist. Ein Graph des Verstärkungsfaktor, wobei auf der $x - Achse$ die konstanten Eingänge und auf der $y - Achse$ die Ausgänge des Systems für $t \to \infty$.

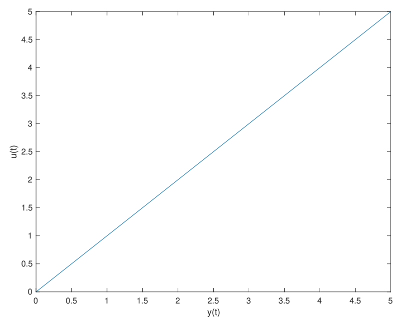

Abbildung 3: statischer Verstärkungsfaktor

5 Verhalten bei Schwingungseingängen

5.1 Nullstellen und Pole

Abbildung 5.1 zeigt einen Pole-Zero-Plot zu dem System, welcher als **x** markiert die Nullstellen des Systems und mit **o** markiert die Polstellen des System zeigt.

Das System hat 3 Polstellen auf der reellen Achse in der linken Halbebene, was ebenfalls die Stabilität des Systems zeigt, und 2 nicht-minimalphasige Nullstellen auf der reellen Achse, also in der rechten Halbebene.

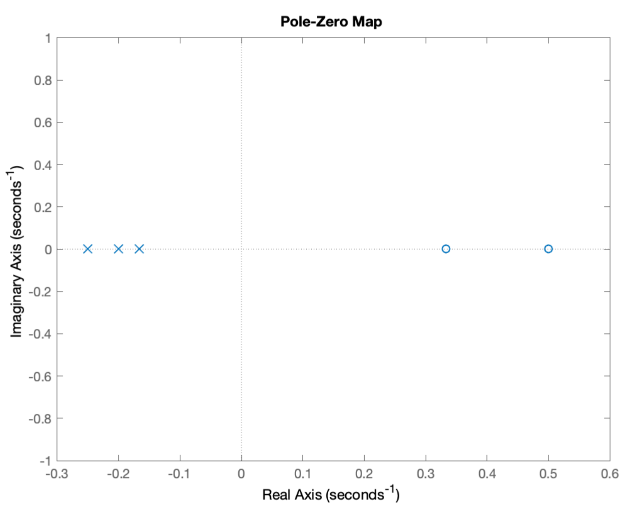

Abbildung 4: Pole-Zero-Plot

5.2 Bode-Plot

In Abbildung 5.2 ist die Amplitude und die Phase des Systemausgangs in Abhängigkeit zur Frequenz (logarithmisch skaliert).

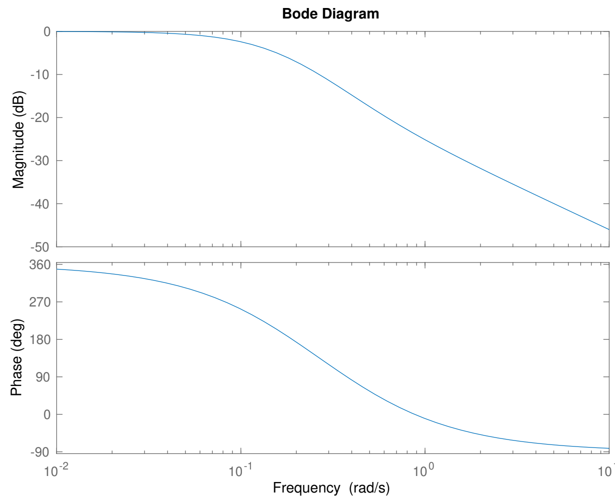

Abbildung 5: Bode-Plot

5.3 Nyquist-Plot

Die Ortskurve oder auch Nyquist-Plot in 5.3 ist ein Graph der die Amplitude und Phase des Systems für Schwingungen mit allen Frequenzen darstellt.

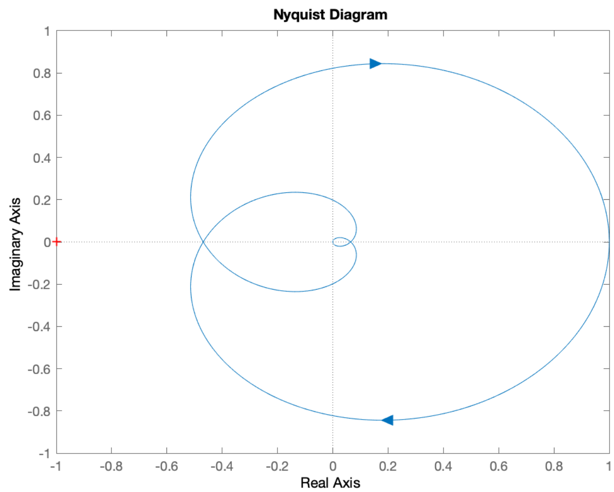

Abbildung 6: Ortskurve / Nyquist-Plot