普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

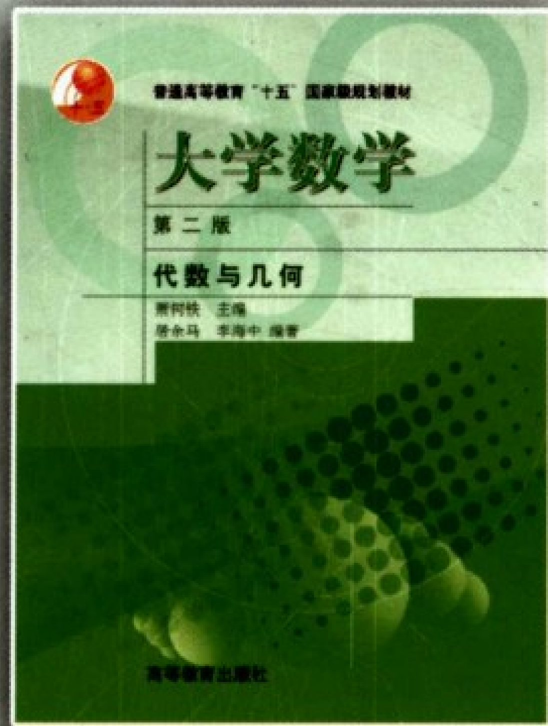
大学数学

代数与几何

学习辅导

林翠琴　居余马　编著

高等教育出版社



ISBN 7-04-016133-8

9 787040 161335 >

定价 26.60 元

普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

大学数学

代数与几何学习辅导

林翠琴　居余马　编著

高等教育出版社

内容简介

本书是与萧树铁主编的《大学数学——代数与几何(第2版)》(居余马,李海中编著)配套的辅导教材和教学参考书。全书以章为单位,每章包含学时安排的建议、基本要求、内容提要、内容综述与分析、例题分析与解答、习题提示与解答、补充题提示与解答等内容。

本书是为工科教师和学生提供的一本参考书,也可为使用其他教材的读者提供有益的借鉴。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学——代数与几何学习辅导/林翠琴,居余马编著.—北京:高等教育出版社,2005.7

ISBN 7-04-016133-8

Ⅰ.大… Ⅱ.①林…②居… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料②线性代数-高等学校-教学参考资料③解析几何-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第049511号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		
印　　刷	北京民族印刷厂		
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2005年7月第1版
印　　张	25.5	**印　　次**	2005年11月第2次印刷
字　　数	470 000	**定　　价**	26.60元

物料号　16133-00

前　　言

《大学数学——代数与几何(第2版)》(居余马,李海中编著)(以下称为“主教材”)是由萧树铁教授主编的普通高等教育“十五”国家级规划教材,本书是与其配套的学习辅导和教学参考书。

本书是编者多年教学经验的积累,是依据主教材对教学体系的安排和课程的基本要求以及学生的认识规律和学习中存在的问题编写而成。本书中各章的编排和习题的标号都与主教材相同。

本书各章包含以下几部分内容(个别章根据内容需要有相应调整):

(1) 学时安排的建议。给出主教材中各部分内容相应的学时安排建议。

(2) 基本要求。基本要求是学生学习的目标,要注意对不同内容有不同程度的要求,如“理解”、“准确理解”、“掌握”、“熟练掌握”和“知道”等。

(3) 内容提要。在第2章中给出“内容提要”是根据基本要求对该章内容做归纳和摘要,其他章的“内容提要”要求学生自己照此做出。

(4) 内容综述与分析。分析该章所研究的主要问题或该章在本书中的地位及其与其他章的关系,提纲挈领地概括该章基本内容,归纳和总结该章所用的基本理论和重要的数学方法,指出重要的解题方法、技巧和证明题的思路,明确该章的重点和难点,并分析学生在学习中容易出现的若干错误等,使学生清晰地了解该章的基本概念、基本理论、基本计算方法,并有深刻的印象。

(5) 例题分析与解答。针对该章的知识点,给出一些有代表性的例题,并给予详细的分析与解答,其中包含部分清华大学试题和研究生入学考试试题。

(6) 习题提示与解答。对主教材中的部分习题做详细的解答或给出必要的提示。

(7) 补充题提示与解答。对主教材中的部分补充题做详细的解答或给出必要的提示。

书后还附有编者近几年在清华大学若干院系讲授“代数与几何”时所出的试题及答案,并附有一些已发表的编者对高等数学教学内容和方法改革的看法。

本书面向的对象是使用《大学数学——代数与几何(第2版)》进行教学的教师和使用此教材进行学习的学生,以及想进一步加深对“代数与几何”课程内容的理解的学生。本书也是非数学专业学生应考硕士研究生的一本辅导书,还是数学专业的学生学习“代数与几何”的一本教学参考书。

近10年来,编者在清华大学使用主教材(及其前身)进行教学。本书是编者

教学经验的小结，其目的是帮助有关师生了解《大学数学——代数与几何(第2版)》对教学体系的安排和教学内容的改革的思考和出发点，了解教学进度和学时安排，正确理解和掌握线性代数和几何(空间解析几何、仿射几何、射影几何和微分几何)的基本概念和基本方法，掌握课程的基本要求，了解课程的重点和难点。本书分析和解答了某些较难习题和部分研究生入学考试试题，给出了计算题解题的基本方法(或技巧)和证明题的分析思路，指出了一些概念和计算中容易出错的地方，有针对性地破解学生学习中的疑难问题，使学生在解题过程中欣赏到数学所闪烁的美学之光。本书的最终目的是让学生在学好“代数与几何”课程的同时，培养学生形象思维、理性思维和逻辑推理的能力，提高学生分析问题、解决问题和创新的能力，以及综合与分析的能力，提高学生学习数学的兴趣，激发学生的创造性思维，提高学生的数学素养。

下面是对阅读本书的学生的几点要求：

(1) 要在认真阅读《大学数学——代数与几何(第2版)》的基础上再阅读本书，不能仅仅查看本书中的“习题提示与解答”。

(2) 先独立思考，再查看本书的“习题提示与解答”，最后再想想有没有别的题解或证明方法。这对培养有创造性思维的人才至关重要。如果你的题解或证明方法比本书更为优越，那要祝贺你了!

(3) 在一章内容全部学完之后，再阅读一次“内容综述与分析”。在全书内容全部学完之后，再阅读一次“篇首语”。这有助于你从整体上提高和深化所学的内容，系统掌握课程基本内容和基本方法，使你的学习能力更上一层楼。

(4) 附录1中的试题应留到相应的内容学完之后再阅读。

阅读本书若只冲着题解而来，就违背了编者的原意。大学数学基础课的作用决不只是应付专业课程以及投考研究生的需要，它还负有提高学生文化素养的重要任务。本书若能在提高学习“代数与几何”的兴趣，培养独立学习的能力，养成分析思考的习惯，逐步培养创新能力等方面对读者有所帮助，编者将会感到十分欣慰。

高斯说：“数学是科学之王。”培根说：“数学是打开科学大门的钥匙。”马克思说：“一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步。”到了20世纪末，又有人说：“很少有人认识到被如此称颂的高技术本质上是一种数学技术。”当代高新技术以六大技术(信息技术、生物技术、新材料技术、新能源技术、海洋技术和空间技术)为主要内容，它们当中很多问题(如高精度、高质量、高自动化、高速度、高安全和高效率)的研究，都要通过建立数学模型和应用数学方法，并借助计算机的计算、模拟、仿真和控制等来实现。高技术中的软技术占有很大的比重，而软技术本质上就是数学技术。

学习“大学数学”，希望学习者能在工具利用、理性思维和审美意识诸方面得

到基本的训练。在“代数与几何”方面，更强调运算、抽象和推理，其中后两方面在我国传统教育中是较为薄弱的。

衷心感谢萧树铁教授对编写本书的尽心指导。高等教育出版社的文小西对本书的编写提出宝贵的意见，本书责任编辑张冰峰对本书编写和出版做了大量的工作，编者对他们表示衷心感谢。由于编者水平所限，错误和不当之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编者

2004 年 7 月

目　　录

篇首语

——兼谈教学体系

数学研究的是现实世界中的数量关系和空间形式,即“数”与“形”.初等数学的主要内容是数量关系和运算,以及简单几何图形的性质.高等数学对“数”与“形”的研究从直观的数量关系和空间形式提高到内涵更深,外延更广的抽象的“数学结构”和“空间概念”.例如,代数结构中的群、环、域已经见不到“数”的样子了;抽象空间中的线性空间、内积空间、拓扑空间、流形等已经见不到“形”的影子了.代数已经从数值和符号计算提升到一般代数结构(如线性空间及线性空间上的线性映射)的运算.

代数以数的运算规律为基础,中心问题是方程论.方程的基本问题是根的存在性问题和求根的方法.1799年高斯提出了著名的代数学基本定理:“一个 n 次复系数代数方程在复数域上至少有一个根”,由此得到“一个 n 次复系数代数方程在复数域上恰有 n 个根”.这就解决了根的存在性问题.关于求根的方法,二次方程有求根公式,三次和四次方程也有求根公式(但比较复杂,一般都不用),那么五次和五次以上是否有求根公式呢?许多数学家对此做了研究.法国数学家伽罗瓦(Galois,1811—1832)在1829年(18岁)用群论方法证明了五次和五次以上代数方程没有求根公式,它宣告了古典代数的终结.伽罗瓦开创了代数的新领域——近世代数.伽罗瓦理论对近代数学的发展有深远的影响.《大学数学——代数与几何(第2版)》只对群、环、域的概念做简单的介绍,只要求知道半群、群、交换群、环、域的定义,简单的性质和例子.目的是让学生了解几个基本的数学结构,并从数学结构(运算)的性质上来区分各种数学问题的异同,这有助于培养学生抽象分析的能力.

《大学数学——代数与几何(第2版)》的第1章是基础知识,包括集合,二元关系(重点是等价关系),映射,各种运算(集的运算,命题的运算,几何向量的运算,求解线性方程组(高斯消元法)中 n 元向量和矩阵的线性运算,由某些“操作”定义的运算),以及基本代数结构——群、环、域的基本概念.这一章所铺垫的数学预备知识,使“微积分”和“代数与几何”的教学言简意赅,事半功倍,使学生初步接触现代数学的观点、语言和符号,增加学生应对数学学习新挑战的兴趣,有助于提高学生的逻辑思维、形象思维、抽象思维和模式思维能力,增强学生推理判断的能力.

"数"与"形"或"数学结构"与"空间概念",以及数学中的"集合"、"关系"和"运算"等都是很抽象的,有时会借助几何术语来表示.例如,函数可看成空间中的一个点.线性空间是满足某些运算规律的元素的集合,因此,"集合"及其"运算"是最基本的内容.对集合,我们要求定义必须明晰,即对任何一个对象,人们可以明确判断它是否属于某一集合.进一步,对集合中的元素,尤其当元素是一些抽象的对象时,往往需要"区别异同",即把什么样的元素看成是"相同"的,并据此来分类;或者需要对元素之间进行排序,总之是从不同的角度来研究集合之间或元素之间的各种关系.各种运算实质上都是各种集合之间的映射.映射还有运算律.这章内容的安排与以解题训练为主的中学数学教育有很大的区别.它为学生展现出大学数学区别于中学数学的崭新的学习内容和随之而来的新的学习方法,这就要求大学生要特别注重提高自学能力.

线性代数主要是研究有限维线性空间的结构和线性映射(变换)的理论.有限维线性空间和线性映射是线性代数的核心内容.现行的(非数学专业)线性代数教材,大多数是从行列式、线性方程组或矩阵开始,线性空间和线性变换的内容较少并且都安排在教材的最后.这种安排极大地削弱了线性代数的核心内容,并且各章节之间也缺乏有机联系.虽然行列式、矩阵、线性方程组、特征值和特征向量都是线性代数的重要内容,也有各自的应用,但它们都和线性映射有密切的关系:矩阵是线性映射在给定基下的数值表示,这是把一些"操作"转化为具体的数值运算的最好的例子之一;解线性方程组就是寻求线性映射的原像或核;线性变换(或矩阵)的特征值则是线性变换的像与原像成比例时的比例系数;行列式的研究始于线性方程组的求解(Leibniz 曾在 17 世纪 90 年代用行列式解二元线性方程组),它在判别向量组的相关性和矩阵可逆,解方程组,求特征值等问题中都是重要的工具.

《大学数学——代数与几何(第 2 版)》以线性空间和线性映射(变换)为纲,将线性代数各章内容贯穿起来,使之成为一个有机的整体.要研究线性空间的线性映射,首先要弄清楚什么是线性空间.线性空间是个重要的代数结构,它是几何空间的一种代数抽象.线性空间(或称向量空间)是一个集合,其中定义了具有八条性质的线性运算(加法和数量乘法,加法的四条运算规律使集合构成交换群).要弄清楚线性空间的结构,就要了解线性空间中的元素(或称向量)在线性运算下具有怎样的关系,这就是向量的线性相关性.掌握了线性相关性的概念和理论就能揭示有限维线性空间的维数、基(底)、元素(向量)关于基(底)的坐标.线性相关性是线性代数中贯穿始终的最重要的概念,很多问题(如矩阵的秩,线性方程组解的结构,线性变换或矩阵的特征子空间的维数等)的研究都要用到它.另外还有一种具有几何度量性的线性空间(其中定义了内积运算),称为内积空间.有限维实内积空间称为欧氏空间.在欧氏空间上做正交变换可以保持向量

的长度和夹角不变.一般二次曲面方程化为标准方程就要做正交变换.对抽象的 n 维线性空间和欧氏空间中的一些问题可在 $\mathbf{R}^2$,$\mathbf{R}^3$ 中形象地加以理解.学好第 2 章(线性空间　内积空间)是学好线性代数的基础.

有限维线性空间上的线性映射(变换)是线性代数的核心内容.n 维线性空间到自身的映射称为线性变换.它是一元线性函数($\mathbf{R}\to\mathbf{R}$)的推广.在 $\mathbf{R}^2$,$\mathbf{R}^3$ 中,向量的比例(放大或缩小)变换、旋转变换、投影变换、镜面反射和错切变换都是线性变换.由 n 个未知数 m 个(实系数)方程构成的线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ (其中 $\boldsymbol{A}$ 是方程组的系数矩阵,$\boldsymbol{b}$ 是 m 维列向量),则是 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 的一个线性映射 σ (即将 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$ 映射为 $\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m$,称 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的像,$\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的原像).方程组的解 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的全体原像;当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 时,齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的解 $\boldsymbol{X}$ 是映射 σ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的核(即零向量的全体原像),它是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间,称为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解空间,记作 $N(\boldsymbol{A})$或 $\mathrm{Ker}\sigma$.它的维数 $\dim N(\boldsymbol{A})$与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩(即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,记作 $r(\boldsymbol{A})$,也就是相应的线性映射 σ 的秩,记作 $r(\sigma)$)满足

$$\dim N(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A})=n(\text{矩阵 } \boldsymbol{A} \text{ 的列数}),$$

即

$$\dim(\mathrm{Ker}\sigma)+r(\sigma)=n(\mathbf{R}^n \text{的维数}).$$

研究齐次线性方程组解的结构就是研究相应的线性映射 σ 的核空间(它是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间),而讨论非齐次方程组是否有解以及解的结构就与相应的线性映射 σ 的值域(它是 $\mathbf{R}^m$ 的子空间)有关.这两个子空间的维数公式是研究它们的基础.学懂第 3 章就能将线性代数各章的内容串成有机的整体,起到提纲挈领的作用.

第 4 章是矩阵.如果把有限维线性空间之间的线性映射看作是一种"操作",那么矩阵的作用就是把这类操作化成一种数值(或某个域上)的运算.当线性空间的基给定后,线性映射与矩阵一一对应.矩阵的运算对应于线性映射的运算且具有相同的运算律.可逆的矩阵对应于可逆的线性映射,矩阵的秩等于对应的线性映射的秩.有限维线性空间的线性映射所研究的问题都有一个矩阵问题与之对应,反之亦然.正确理解和熟练掌握矩阵的运算是学好线性代数的基础.

行列式安排在第 5 章是为了突出线性代数的核心内容——线性空间和线性映射,并以此作为串联各章的纲,使教材具有较强的系统性和连贯性.行列式和线性方程组等内容的处理不宜喧宾夺主.行列式采用公理化定义,是为了和全书协调,这样定义不仅使重要定理的叙述、表达和证明大为简化,从而缩减了教材的篇幅和教学学时,更重要的是加深了读者对公理化思维的认识.行列式是学习线性代数的一个基本工具.在 $\mathbf{R}^3$ 中它有明确的几何意义,它表示三个向量的混合积(其绝对值等于三个向量所张成的六面体的体积),在 $\mathbf{R}^n$ 中,它的绝对值等于 n 个线性无关的向量所张成的"n 维形体"的体积.

第 6 章是线性方程组与线性几何.对于线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$,虽然在第 1 章

中已经会用高斯消元法求解，但总体上对线性方程组问题还缺乏深刻的理性认识．例如，如何通过已知的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 来分析线性方程组在什么条件下有解；如果有解，解是否唯一；如果不唯一，解集合具有怎样的结构．对系数矩阵为 $m\times n$ 实矩阵的线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$（或 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$）的求解问题，实际上是已知 $\boldsymbol{A}$ 所对应的有限维线性空间 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 的线性映射 σ 的像 β（β 在 $\mathbf{R}^m$ 的基下的坐标为 $\boldsymbol{b}$（或 $\boldsymbol{0}$）），求其所有的原像 α（或 σ 的核）．所以，有限维线性空间的线性映射的理论为解决上述问题提供了足够的理论依据．线性方程组的求解问题是有限维线性空间的线性映射理论的一个具体应用．

在三维空间的直角坐标系中，平面和空间直线方程是三元一次方程和方程组，所以把它们称为线性图形．讨论线性图形的位置关系，要用到三元线性方程组的解的理论；讨论线性图形的度量关系，要用到 $\mathbf{R}^3$ 中的内积．

线性代数与几何学是密切相关的，线性空间的概念是几何空间的一种代数抽象．线性变换的理论特别是以后讲的正交变换、仿射变换和射影变换等都有其几何背景．在《大学数学——代数与几何（第 2 版）》的前半部，多是用几何直观来解释线性代数的概念和理论，在第 6 章和第 7 章中开始注意线性代数在几何中的应用了，在第 8 章、第 9 章和第 10 章中就以几何为主了．

第 7 章是特征值和特征向量以及矩阵的标准形．线性变换所对应的矩阵与基的选择有关．如何选择基，才能使线性变换在该基下对应的矩阵具有最简单的形式？线性变换是否存在与基无关的不变量？这就是矩阵的对角化问题和矩阵（或线性变换）的特征值与特征向量的问题．

该章由正交变换和正交矩阵开始．正交变换和正交矩阵当然也可以分别放在“线性变换”和“矩阵”那两章讲，但放在这里讲，目的性就更清楚．因为实对称矩阵可经正交矩阵相合（或合同）于对角矩阵；二次型经正交变换化为纯平方项之和；二次曲线的一般方程化为标准方程（及其分类），以及下面将要讨论的欧氏空间中的二次曲面的正交分类等都要用到正交变换．

特征值和特征向量以及矩阵对角化的问题、二次型的标准形以及二次型的正定性的问题在线性代数中都是非常重要的问题．它们综合应用了前几章的知识：行列式的计算；齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及求其解空间基的方法；向量组的线性相关性，矩阵的初等变换、转置、乘法、求秩、求逆和分块运算，欧氏空间的内积，Schmidt 正交化过程和单位正交基，线性变换的矩阵表示，值域，核和维数公式等．作为线性代数教学的最后一章，它要综合应用以前各章的内容．它们本身也有许多重要的应用．工程技术中的许多问题，如振动问题和稳定性问题，以及数学中求微分方程组的解等问题常常归结为求矩阵的特征值和特征向量的问题．此外，矩阵的正定性也在多元函数的极值等问题中有重要的应用．

从第 8 章开始讨论几何问题：空间解析几何、微分几何、仿射几何、射影几何与非欧几何．“非欧几何简介”中只介绍两个简单的几何模型．

代数是现代数学的重要基础．初等代数着重于数值和符号的运算；线性代数着重于代数结构(线性空间及其上的线性映射)的运算．它不仅是个重要的数学工具，而且在培养学生抽象思维和逻辑推理能力，提高数学素养等方面都起着重要的作用．数学研究的是“数”与“形”的模式结构，但在近四五十年的基础课教学中“形”的教学被人们忽视了．历史上，几何学曾具有重要的地位．线性代数也与几何学密切相关：线性空间的概念是从几何空间抽象出来的；仿射变换、射影变换、正交变换是从几何中产生的；三元线性方程组的求解问题有明显的几何背景．几何是许多代数问题的来源、背景和形象表示；反之，代数研究的结果又应用到几何中去．近来可视化技术的快速发展更引发人们对几何的重视．《大学数学——代数与几何(第 2 版)》偏重于利用代数方法研究几何，学生学习时应尽可能地将代数问题与几何问题联系起来．

第 8 章的内容是 $\mathbf{R}^3$ 中的常见曲面和利用二次型的正交变换对二次曲面进行化简和分类．解析几何是用代数方法来解决几何问题，因此，要将几何图形与代数方程紧密相连．

第 9 章是微分几何的最基本的内容，是微积分的一个重要应用．应该在学完微积分后再讲授．如果教学课时较少，就不讲这一章．

从教学的角度看，《大学数学——代数与几何(第 2 版)》开始的“坡度”较陡，“台阶”较大，内容比较抽象．不少学生不大适应，听课不能一下子就明白，特别是一些比较抽象的概念(定义)的叙述和定理的证明，学生会感到难懂．这与学生在中学里只学习具体的数学问题并着重于计算的学习习惯有关．如何克服这类“开头难”的现象？一方面，明确告诉学生“开头较难”，内容比较抽象，要认真地、反复地阅读教材，一次未读懂的内容，过一些时候再回过头来读，并要求大家不要以“课上全都听懂，课后作业全都会做”来衡量教和学的效果．一种好的教学并不是让学生在课堂上舒舒服服地接受教师灌输给他的一堆知识，而是要启发学生多思考，给学生思考问题留出足够的空间，培养学生的自学能力和钻研精神．这正是使学生改变中学的学习方法以适应大学学习的良好时机，要使学生体会到大学学习是“老师引进门，修行在自身”．另一方面，教师要吃透教材的内容，做到“驾轻就熟，深入浅出”(不是“浅入浅出”)；要遵循“循序渐进”和“宏观上从一般到具体，微观上从具体到一般”的原则，多举一些例子．不要试图以“一听就懂，就会做题”来助长学生学习上的依赖心理，养成懒于思考的不良习惯，阻碍创新意识和能力的培养．

多年来的教学实践都说明：开头难，但越学越容易．学生打比方说：“学习好似登山．爬又高又陡的山会很苦，还有掉下去的危险．但经过一番奋斗终于到达

顶峰时，会发现所置身的天地是多么广阔，这是在山脚下无法欣赏到的．此刻心中会油然升起一种说不出的喜悦．以后再登其他矮一点的山时，会感到轻松自在，如履平地．”

教材上打“*”号（或小字）处可以不讲，也可以简单介绍而不证明，或建议学生自己阅读，或依据不同专业的要求和学生入学水平而采取不同的处理方法．课后布置的习题可以分为三类：一类是作业，必须认真完成交给老师批改或部分批改并登记成绩的；另一类是练习，不要求解题的每一步骤都很齐全，以理解题目内容为主，和作业一齐交但不计成绩；还有一类是打“*”号的题，是提高题，可做可不做的．原则上是平时要求多一点，严一点；考试时少一点，松一点．

第1章　集合　关系　运算　结构

1-1　学时安排的建议

表 1-1

节①	教学内容	复习页数
1	1.1 集合　子集　幂集　直积,1.2 二元关系及其性质,1.3 节中的等价关系	1—5
2	1.3 节中的等价类　商集,*1.4 节中的序关系　数学归纳法原理,1.5 运算与映射	5—13
3	*1.6 命题运算　量词,1.7 节中的几何向量的运算(加法,数乘,内积)	13—21
4	1.7 节中的向量的外积,混合积;空间直角坐标系;向量的坐标表示及其运算	21—28
5	1.8 n 元向量的线性运算　高斯消元法	28—36
6	1.9 平面方程与空间直线方程	36—41
7	1.10 基本代数结构——群、环、域的基本概念，第一章小结.	41—46

1-2　基本要求

1. 理解集合、子集、幂集和直积的概念.掌握集合的交、并、余的运算规律.会证明两个集合相等.

2. 理解二元关系、等价关系.正确理解自反性、对称性、反对称性、传递性、等价类和商集的定义并会举例子.

① 本书学时安排所指每节均为 45×2 分钟.

*3. 知道序关系、偏序集、全序集和数学归纳法原理.会用第一和第二数学归纳法.

4. 理解一元运算(映射)和二元运算,熟悉各种运算的例子.理解单射、满射、双射(一一对应或可逆映射)的定义.理解映射的乘法满足结合律而不满足交换律和消去律.

5. 知道命题的运算(且、或、蕴涵、等价、否定)及其运算规律(对照集合的运算规律).理解逆命题、否命题和逆否命题,会叙述含量词"∀","∃"的命题的否定命题.

6. 理解几何向量的加、减、数乘、内积(点积)、外积(叉积)和混合积的定义及其运算规律(注意仅在3维空间中有叉积运算).会求向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度和 $\boldsymbol{a}$ 方向上的单位向量;会求向量间的夹角;会判别两个向量是否平行或垂直;会判别三个向量是否共面.

7. 熟悉向量的坐标表示式及坐标表示式下向量运算(加、减、数乘、内积、外积和混合积)的计算公式.

8. 熟练掌握高斯消元法求线性方程组解的方法.线性方程组有无穷多个解时,求出全部解.

9. 掌握平面和直线的各种形式的方程及其互换.会根据所给条件写出平面方程或直线方程.知道三元线性联立方程组的几何意义.

10. 知道半群、群、交换群、环和域的定义、例子和简单性质.

1-3 内容综述与分析

1. 本章在全书中的地位及其用意

本章是大学数学的基础知识.它包括集合、关系(重点是等价关系)、映射和各种运算(命题的运算及量词,几何向量的运算,n 元向量的线性运算和高斯消元法),还有空间平面与直线方程,以及基本代数结构——群、环、域的基本概念.把这些知识安排在第1章,主要的用意有以下两方面.

一方面,它们是学习以后各章必须具备的基础知识.例如,集合与映射的概念是贯穿全书的,如何证明两个命题的等价,如何用反证法证明含有量词(∀,∃)的命题是常要用到的.熟悉了几何向量的线性运算和内积的运算以及平面和直线方程,便于用 $\mathbf{R}^3$ 作为背景理解抽象的线性空间、子空间和内积空间的概念、性质和一些重要理论,用高斯消元法求解线性方程组的知识更是讨论很多问题都不可或缺的.

另一方面,用很大篇幅讲集合、映射与命题的运算,以及几何向量、n 元向量的运算与矩阵的初等运算,其用意是要让学生在进入大学数学的领域时,形成一

种强烈的概念，那就是数学中的运算绝不是在初等数学中接触到的仅仅是“数”的运算，在大学数学乃至近代数学中，数学的运算对象是极其广泛的，也正因为如此，近代数学在现代科学技术领域中有着广泛的应用．此外，本章内容能使学生初步接触现代数学的观点、语言和符号，增加学生对大学数学学习的兴趣．

本章内容的叙述很简洁，教学中要放慢进度或安排一次习题辅导．注意培养学生学习大学数学的兴趣和逐步养成自学和独立思考的习惯．

2．直积和幂集（主教材 1.1 节）

在集合 A,B 的笛卡儿乘积（直积）$A\times B$ 中，元素 (a,b) 是有序二元组（序偶）．当 $A=B$ 时，$A\times B$ 记作 A^2．由非空集合 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集．若 $A=\{a,b\}$，则 A 的幂集 $P(A)$ 或 2^A 不等于 $\{\varnothing, a, b, A\}$，正确的是 $2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\}, A\}$．还要注意空集 $\varnothing$ 不要写成 $\{\varnothing\}$．

3．二元关系（主教材 1.2 节）

要正确理解二元关系．如果 R 是集合 A 中的一个二元关系，那么，$\forall a, b\in X$，必有 $a\,R\,b$ 或 $a\,\bar{R}\,b$（即 a,b 不适合关系 R）．$a\,R\,b$ 可以表示为 (a,b)．要注意基本性质（见主教材定义 1.6）中的“均有”和“若有”的区别，这是学生最容易出错的地方．

例如，$\forall a$，“均有”$a\,R\,a$，则称 R 是自反的，这意味着，如果存在 $b\in X$，而 $b\,\bar{R}\,b$，则 R 就没有自反性；$\forall a, b\in X$，若有 $a\,R\,b$，就有 $b\,R\,a$，则称 R 是对称的，这就是说，如果 $\exists c, d\in X$，而 $c\,\bar{R}\,d$ 且 $d\,\bar{R}\,c$，这不影响 R 具有对称性，如果 $c\,\bar{R}\,d$ 且 $d\,R\,c$，则 R 就没有对称性．

又如，集合 $A=\{a,b,c\}$ 中元素间具有关系 R 的只有 $a\,R\,a, b\,R\,b$，即 $R=\{(a, a),(b, b)\}$，则 R 没有自反性（因为没有 $c\,R\,c$），但有对称性、反对称性和传递性；再如补充题 5（见后面的解答）．

4．等价关系（主教材 1.3 节）

等价关系是具有自反性、对称性和传递性的二元关系．等价关系以后经常要用到，如矩阵的相似、相抵、相合关系都是等价关系．

5．归纳法、反证法与穷举法（主教材 1.4 节）

（1）归纳法

第一数学归纳法：若命题 $p(n)$ 对 $n=1$ 成立，假设 p 对 $n=k$ 成立，可以推出 p 对 $n=k+1$ 成立，则 p 对一切正整数成立．或者，已知 $p(m)$ 成立，假设 $p(k)(k\geqslant m)$ 成立，可以推出 $p(k+1)$ 成立，则 $p(n)$ 对大于等于 m 的一切正整数 n 成立．

第二数学归纳法：若命题 $p(n)$ 对 $n=1$ 成立，假设命题 $p(n)$ 对一切 $n<k$ 成立，可以推出 p 对 $n=k$ 成立，则 p 对一切正整数成立．

（2）反证法

用反证法证明命题 p:“若 A,则 B”,就是证明 p 的逆否命题(也就是等价命题):“若非 B,则非 A”,即假设 B 不成立,根据定义、定理或公理推出 A 不成立(即$\neg B\to\neg A$),与已知 A 成立矛盾,所以,若 A 成立,必有 B 成立.当直接证明某命题比较困难时,有时用反证法会开辟命题证明的另一个途径.反证法在后面几章中将经常用到.

(3) 穷举法

命题 p:“若 A,则 B 或 C 或 D 等”,即结论不止一个时,要逐个证明.用反证法证明时,要假设 B 不成立,或 C 不成立,或 D 不成立等,推出 A 不成立,这里用了穷举法(也称枚举法).穷举法一般用于命题的结论有多个的情况,必须逐个加以分析.

6. 一元运算(映射)和二元运算(主教材 1.5 节)

(1) “运算”的广泛性及运算的例子

要了解“运算”的广泛性并熟悉各种运算的例子.中学数学对于数和函数做过各种运算,例如,数的四则运算,平方,开方,对数运算,指数运算,三角函数运算,取整,取最值,取最大公因数,取最小公倍数等.大学数学中的运算对象是极其广泛的,例如,本章中讲述的运算有集合、命题、映射的运算,几何向量的加法、数乘、内积(点积)、外积(叉积)和混合积的运算,n 元向量的线性运算(即加法和数量乘法),矩阵的初等行运算(初等行变换),甚至自动售货机、开关电路也可以视为运算的例子.

(2) 集合运算的运算律

要熟悉集合的交、并、余的定义及其满足的运算律:“交”和“并”运算具有结合律,交换律;“交”对“并”或“并”对“交”都有分配律,即

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

集合的 Demorgan 律是

$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B},\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}.$$

余运算具有否定律,即

$$\overline{\overline{A}}=A.$$

此外,交和并还有恒等律、零律、互补律(见主教材第 9 页).

对两个集合的差 $A-B$(或 $A\setminus B$)和余集 $\bar{A}=X\setminus A$ (或称为 A 在 X 中的余集,$A\subset X$),注意结合律不成立,即$(A+B)-C\neq A+(B-C)$,$(\bar{A}\cap\bar{B})\cup C\neq\bar{A}\cap(\bar{B}\cup C)$.

集合运算没有消去律,即由 $A\cup B=A\cup C$ 不能得到$B=C$;由 $A\cap B=A\cap C$也不能得到$B=C$.但是,由 $A\cup B=A\cup C$ 且$A\cap B=A\cap C$,可以得到$B=C$.

(3) 单射、满射和双射

要理解单射、满射和双射(一一对应或可逆映射)的定义,要掌握映射的运算律.映射的运算和第 4 章的矩阵的运算有相同的运算律.映射的乘法满足结合律,但不满足交换律,即 $f\circ g\neq g\circ f$.一般情况下,消去律也不成立.只有在 g 可逆时,才能由 $f\circ g=h\circ g$ 推出 $f=h$,当 $g\circ f=h\circ g$ 时,即使 g 可逆,也不能得到 $f=h$.

7. 命题、逆命题、否命题和逆否命题(主教材 1.6 节)

(1) 命题是一个陈述句.若原命题 p 为"若 A, 则 B",则 p 的逆命题是"若 B, 则 A"; p 的否命题是"若 $\neg A$,则 $\neg B$"; p 的逆否命题是"若 $\neg B$,则 $\neg A$".

原命题与逆否命题是等价的(在以后各章中经常用到此结论);逆命题与否命题是等价的(因为否命题"若 $\neg A$,则 $\neg B$"是逆命题"若 B, 则 A"的逆否命题).

(2) 集合运算与命题运算有相似的运算律.命题的或、且、蕴涵、否定、等价的运算律可以与集合的运算律相对照.

集合的"并"运算对应命题的"或"运算;集合的"交"运算对应命题的"且"运算;集合的余运算($\overline{A}$ 或 $E\setminus A$)对应命题的"非"运算($\neg p$ 或非 p);集合的相等对应命题的等价.它们都各有相似的运算律:

运算"或"、"且"都具有结合律和交换律;运算"或"对"且"或"且"对"或"都有分配律;运算非有否定律:$\neg(\neg p)=p$;命题运算中有类似集合的 Demorgan 律:

$$\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q \text{ 和} \neg(p\vee q)\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg q.$$

(3) 命题 $p\rightarrow q\Leftrightarrow\neg p\vee q\Leftrightarrow\neg q\rightarrow\neg p$,当 p 为假时, 规定 $p\rightarrow q$ 是真的.这称为"善意的推定".上述三个命题的真值是相同的(因为三个命题为假都是当且仅当 p 真 q 假).

命题"若 p,则 q"成立,称 p 是 q 的充分条件,q 是 p 的必要条件.

命题"$p\Leftrightarrow q$"成立,即"若 p,则 q,且若 q,则 p"成立,称 p 与 q 互为充分必要条件(简称充要条件).

(4) 含量词"$\forall$","$\exists$"的命题的否定命题满足如下规则:

$$\neg(\forall x\in X)p\Leftrightarrow(\exists x\in X)\neg p$$
$$\neg(\exists x\in X)p\Leftrightarrow(\forall x\in X)\neg p$$

8. 几何向量的运算(主教材 1.7 节)

几何向量的加法和数乘运算都满足结合律、交换律.数乘对加运算(数加或向量加)都满足分配律.内积(点积)和外积(叉积)运算都不满足结合律.一般情况下,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$

式子$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 没有意义.

内积运算满足交换律

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

外积运算不满足交换律,因为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}).$$

混合积满足

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}).$$

要注意向量运算的结果有的是数量,有的是向量.加减、数乘和外积的运算结果都是向量;而内积和混合积的运算结果都是数量.

向量用坐标表示法表示时,其加、减、数乘、内积、外积、混合积的计算公式(主教材 26 页 1.7.7 的五个公式)能使计算简单易行.向量的长度、方向余弦和两个向量间的夹角的计算,以及判别两个向量是否平行或垂直,判别三个向量是否共面的方法都很重要.

注意向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 和 $\boldsymbol{a}$ 方向上的单位向量 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的区别.

9. 关于线性方程组的解(主教材 1.8 节)

(1) 用高斯消元法求线性方程组的解是对增广矩阵做初等行运算(初等行变换),将其化为阶梯形矩阵.不能做倍乘和倍加的列运算.因为列的倍乘运算与列的倍加运算所得的方程组都不是原方程组的同解方程组.

(2) 做初等行变换把增广矩阵化为阶梯形矩阵时,要按规范的步骤进行.

对于方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$,增广矩阵为

$$[\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b}]=\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

当 $a_{11}\neq0$(如果 $a_{11}=0$,$a_{i1}\neq0$,先将第 1 行与第 i 行对换)时,做行的倍加运算把第 1 列其余的元素全化为零.此时,第 2 列的元素为 a_{12},a'_{22},$\cdots$,a'_{m2}.如果 $a'_{22}\neq0$,再做行倍加运算将第 2 列中后面的 $m-2$ 个元素全化为零.如果 $a'_{22}=0$,而 $a'_{i2}\neq0$ $(i>2)$,先将第 2 行与第 i 行对换,再做上述变换.如果 $a'_{22}=\cdots=a'_{m2}=0$,则考察第 3 列,用同样的方法把第 3 列后面的 $m-3$ 个元素全化为零.如此继续下去,直到把$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$化为只有 $r(r\leqslant m)$个非“0”行的阶梯形矩阵.每个非零行的第一个非零元所在的列为 $i_1=1$, i_2, $\cdots$,i_r,对应的变量 x_{i_1},$\cdots$,x_{i_r} 为基本未知量(称为主元),其余的 $n-r$ 个变量为自由未知量.当 $r=n$ 时,没有自由未知量,易得方程组有唯一解;当 $r<n$ 时,把 $n-r$ 个自由未知量分别令为 k_1, k_2,$\cdots$,k_{n-r}(任意常数),代入同解方程组,求出 x_{i_1},$\cdots$,x_{i_r}

(它们用 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 表示),从而得方程组的全部解.

(3) 当方程组中含有若干待定常数(如 a, b)时,必须分析常数 a, b 取哪些值时方程组有唯一解,或有无穷多个解.注意做初等行运算时,不能用 $\frac{1}{a}$ 或 $\frac{1}{b}$ 做倍乘运算.若一定要用,必须另外分析 $a=0$ 或 $b=0$ 时解的情况.

(4) 检查线性方程组的解是否正确.一是代入方程组看是否满足,二是看任意常数的个数是否等于 $n-r$(n 为自变量的个数,r 为增广矩阵化为阶梯形矩阵的非零行行数).

(5) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解和对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解的关系:

若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解,则

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解($r<n$,其中 r,n 如(4)中所述);

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解(没有非零解,$r=n$).

若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 无解,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 可能有非零解,也可能只有零解.因此不能由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 是否有非零解去推定 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 是否有无穷多个解.

齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解的线性组合(解 $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ 分别乘任意常数 k_1, k_2,再相加,即 $k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2$)仍然是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.但非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 的线性组合 $k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2$ 一般不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解,仅当 $k_1+k_2=1$ 时,它才是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解.

10. 平面方程与空间直线方程(主教材 1.9 节)

(1) 平面方程由一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 和法向量 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ 唯一确定,其点法式方程为

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

过不共线的三点 A,B,C 可以唯一确定一个平面,其法向量为

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}.$$

利用一般式

$$ax+by+cz+d=0,$$

将三点的坐标代入,得到 a,b,c,d 的线性方程组,解出 a,b,c,d(其中一个可取任意常数),即得所求的方程.

(2) 过两个平面的交线

$$L:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$$

的所有平面方程为

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0. \qquad (1)$$

其中 λ,μ 是不全为 0 的任意常数. 当 $\lambda=0$(或 $\mu=0$)时就是 L 中的第二(或第一)个平面方程. 求过 L 和一个点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的平面, 只需将点 P_0 的坐标 (x_0,y_0,z_0) 代入方程(1)中, 解出 λ,μ(例如, 得 $3\lambda+4\mu=0$, 可取 $\lambda=4,\mu=-3$), 代入方程(1)中, 即得所求的方程.

(3) 直线方程由一点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 和直线方向向量 $\boldsymbol{s}=(l,m,n)$ 唯一确定. 标准方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

由两个平面 π_1 与 π_2 的交线确定的直线(一般式) 的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2,$$

其中 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 分别为平面 π_1 与 π_2 的法向量. 也可以在直线上任意取两点, 如 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$, 得

$$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

(4) k 个($k\geqslant3$)三元非齐次线性方程组解的几何意义

k 个三元非齐次线性方程组解的几何意义也就是 k 个空间平面的位置关系.

① 若方程组有唯一解, 则 k 个平面交于一点.

② 若方程组有包含一个任意常数的无穷多个解

$$x=x_0+lt,\qquad y=y_0+mt,\qquad z=z_0+nt,$$

其中 t 为任意常数, l,m,n 为固定常数, 则 m 个平面交于一条直线, 前面的解就是该直线的参数方程.

③ 若方程组有包含两个任意常数的无穷多个解, 则 m 个平面重合.

④ 若方程组无解, 则有以下情况:

(a) 所有平面平行, 至少有一个平面与其他平面不重合;

(b) 若干平面(2 至 $k-1$ 个)交于一条直线, 此直线与另一平面平行但不在平面上.

11. 群与交换群(主教材 1.10 节)

(1) 群是一个最基本的代数系统, 其中只有一个代数运算, 运算满足结合律, 运算有单位元, 每个元素对运算都有逆元. 若群的运算又满足交换律, 则称为交换群(Abel 群). 若群 $\langle G:*\rangle$ 的非空子集 H 对运算"$*$"封闭, 则 H 是 G 的子群.

(2) 群的运算可以用表格来表示. 例如, 群 $\langle G:*\rangle$(其中 $G=\{a,b,c,d\}$), 其运算"$*$"如表 1-2 所示.

表 1－2

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

一般说，群的运算用表格表示时，它应有如下性质：

① 表中必有第 k 行和第 k 列元素与表格上方和左方的元素排列完全相同．此时第 k 个元素为单位元．如表 1－2 中第 1 行和第 1 列元素 a,b,c,d 与表格上方和左方的 a,b,c,d 排列完全相同．表中第 1 行表示

$$a*a=a,\qquad a*b=b,\qquad a*c=c,\qquad a*d=d.$$

表中第 1 列表示

$$a*a=a,\qquad b*a=b,\qquad c*a=c,\qquad d*a=d.$$

由此可见第 1 个元素 a 为单位元．

② 群的运算表中每行的各个元素互异，且每列的各个元素也互异．若不满足此条件，则 G 不是群．

③ 若某两个元素运算得到单位元，则这两个元素互为逆元，如 $b*d=a$，$d*b=a$，则 b,d 互为逆元，即 $b^{-1}=d,d^{-1}=b$．

④ 若表中元素关于左上到右下的对角线对称（例如，$a*c=c*a,b*c=c*b$），则群为交换群．

12．本章的重点和难点

（1）重点

集合及其运算律；等价关系；自反性、对称性、反对称性和传递性的定义；一元和二元运算；单射、满射和双射的定义；几何向量的运算定义与运算律及其在坐标表示式下的计算公式；两个向量的平行、垂直和三个向量共面的条件；非齐次线性方程组有解，有唯一解或无穷多解的判别及求解；齐次线性方程组有非零解的判别及求解；平面方程和直线方程（各种形式及其互化）；群、交换群的定义．

（2）难点

自反性、对称性、反对称性和传递性以及等价关系的判别；商集的表达式；命题的运算；含量词“∀”，“∃”的命题的否定命题；唯一确定一个平面或直线的条件；判别高斯消元法消元过程的正确性．

1－4　例题分析与解答

例 1　写出命题“存在不全为 0 的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使得 $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = 0$”的否命题．

（清华大学试题，2000 年）

解　否命题为“对于任意不全为 0 的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，均有 $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n \neq 0$”．其等价命题为“若 $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = 0$，则数 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$”．

例 2　设映射 $f: A \to B, g: B \to A$，若有 $gf = I_A$（A 上的恒等映射），问命题 T：$fg = I_B$（B 上的恒等映射）是否成立？若不成立，试补充一个条件使命题 T 成立．

（清华大学试题，1999 年）

解　T 不成立．例如，$A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$，$f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 1; g(2) = a$，$g(3) = b$，$g(4) = c$，$g(1) = c$．容易验证，$gf = I_A$．但由于 f 不是满射，所以，$fg \neq I_B$，（因为 $fg(4) = 1 \neq 4$）．

如果补充一个条件：f 为满射，则命题 $T: fg = I_B$ 成立．下面证明：若 $gf = I_A$ 且 f 为满射，则 $fg = I_B$．

欲证 $fg = I_B$，只要证明 $\forall y \in B$，均有 $fg(y) = y$．由于 f 为满射，所以 $\forall y \in B, \exists x \in A$，使得 $f(x) = y$．又因为 $gf = I_A$，所以，$\forall x \in A$，均有 $gf(x) = x$．从而就有 $g(y) = g[f(x)] = x$．综上，即有 $fg(y) = f(x) = y$，所以，$fg = I_B$．

***例 3**　证明：

$$\begin{aligned} p \wedge q \to r &\Leftrightarrow \neg r \to \neg(p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow \neg r \to \neg p \vee \neg q. \end{aligned}$$

证　因为　　$p \wedge q \to r \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$，

所以

$$\begin{aligned} &\neg(p \wedge q) \vee r = \neg p \vee \neg q \vee r = \neg(\neg r) \vee (\neg p \vee \neg q) \\ &\Leftrightarrow \neg r \to \neg p \vee \neg q \\ &\Leftrightarrow \neg r \to \neg(p \wedge q). \end{aligned}$$

例 4　在集合 $A = \{a, b, c\}$ 上定义一个自反性、对称性、反对称性和传递性都没有的二元关系．

（清华大学试题，2000 年）

解　如 $R = \{(a, b), (a, c), (c, a)\}$．

例 5 下列命题是否成立：

(1) 如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$；

(2) 如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$；

(3) $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$；　(4) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$；　(5) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$；

(6) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$；　(7) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$；

(8) $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{a}$.

(9) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量是 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}$.

解 (1) 不成立. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影相同.

(2) 不成立. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，且以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形与以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 为边的平行四边形面积相等.

(3) 不对. 等式左边是平行于 $\boldsymbol{a}$ 的向量，右边是向量 $\boldsymbol{a}$ 长度的平方.

(4) 不对. 等式左边是平行于 $\boldsymbol{a}$ 的向量，右边是平行于 $\boldsymbol{b}$ 的向量($\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时成立).

(5) 不对. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\cos^2\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rangle$，当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，此式才成立.

(6) 不对. 等式左边是平行于 $\boldsymbol{c}$ 的向量，右边是平行于 $\boldsymbol{a}$ 的向量($\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$ 时成立).

(7) 不对. 等式左边是与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 都垂直的向量，而右边是与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 都垂直的向量($\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$ 时成立). 例如，$(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{j}\neq\boldsymbol{j}\times(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})=\boldsymbol{0}$.

(8) 对. $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}^2$.

(9) 不对. $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量是 $\frac{1}{|\boldsymbol{b}|}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}^0$($|\boldsymbol{b}|=1$ 时成立).

例 6 设 $A(1,2,3)$，$B(-1,2,0)$，$C(1,1,1)$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$ 和 $\triangle ABC$ 的面积.

(清华大学试题，2002 年)

解
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-7.\quad \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=(-3,-4,2).$$
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}\sqrt{29}.$$

例 7 设
$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1,\\ 2x_1+(a+2)x_2-(b+2)x_3=3,\\ -3ax_2+(a+2b)x_3=-3.\end{cases}$$
问 a,b 取哪些值时，方程组有唯一解和有无穷多解？有无穷多解时求全部解.

(清华大学试题，2001 年)

解
$$\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & a+2 & -b-2 & 3\\ 0 & -3a & a+2b & -3\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & a & -b & 1\\ 0 & 0 & a-b & 0\end{array}\right].$$

当 $a=0$, b 为任何数时,方程组都无解;

当 $a\neq0$, $b\neq0$, $a\neq b$ 时,有唯一解 $X=\left(1-\frac{1}{a},\frac{1}{a},0\right)^{\mathrm{T}}$;

当 $a=b\neq0$ 时有无穷解 $X=k(0,1,1)^{\mathrm{T}}+\left(1-\frac{1}{a},\frac{1}{a},0\right)^{\mathrm{T}}$.

例 8 求过点 $P(2,-1,-1)$ 和直线 $\begin{cases}2x+y-4=0,\\ y+2z=0\end{cases}$ 的平面方程.

(清华大学试题,2002 年)

解 所求平面的法向量垂直于直线和 P 与直线上的点的连线. 直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(2,1,0)\times(0,1,2)=(2,-4,2)//(1,-2,1)=\boldsymbol{s}_1.$$

在直线上取点 $P_1=(2,0,0)$,则平面法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\overrightarrow{PP_1}=(1,-2,1)\times(0,1,1)=(-3,-1,1).$$

由点法式方程,得平面方程为

$$-3(x-2)-(y+1)+(z+1)=0,$$

即

$$3x+y-z-6=0.$$

例 9 求过点 $P(2,-3,3)$,和平面 $x+2y+4z-2=0$ 平行,且与 z 轴相交的直线方程.

(清华大学试题,2001 年)

解 设直线与 z 轴的交点为 $C(0,0,c)$,已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,4)$,则

$$\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}=(-2,3,c-3)\cdot(1,2,4)=0,$$

得

$$c=2.$$

所求直线过点 $P(2,-3,3)$ 和 $C(0,0,2)$,其方程为

$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-3}{-1}\text{或}\frac{x}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}.$$

例 10 直线 $L:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$,平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$,条件 $T:\begin{cases}Al+Bm+Cn=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,\end{cases}$ 则下列成立的是(   ).

(A) T 是 L 与 π 垂直的充分必要条件

(B) T 是 L 与 π 垂直的充分条件

(C) T 是 L 落在 π 上的充分必要条件

(D) T 是 $L//\pi$ 且 $L\notin\pi$ 的充分必要条件

(清华大学试题,2000 年)

解 选(C). 因为 $Al+Bm+Cn=0$ 是 $L//\pi$ 的充要条件,而 Ax_0+By_0+

$Cz_0+D=0$ 表示 L 上点(x_0,y_0,z_0)在 π 上.

***例 11** 全体非零有理数集 $\mathbf{Q}^*=\mathbf{Q}\setminus\{0\}$对数的乘法是否为交换群？若是，找一个子群 $H(\neq\mathbf{Q}^*)$.

解 是交换群.因为数的乘法满足结合律和交换律；单位元为 1；a 的逆元为a^{-1}.

$$H=\{2^p\mid p\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}\}$$

是一个子群.

1-5 习题提示与解答

2. 已知 $A,B,C,\mathbf{Z}^*$ 都是整数集 $\mathbf{Z}$ 的子集，$A=\{n\mid n=3m,m\geqslant4\}$，$B=\{n\mid n=2m,|m|\geqslant1\}$，$C=\{n\mid |n|\leqslant10\}$，$\mathbf{Z}^*=\mathbf{Z}\setminus\{0\}$.试用 $A,B,C,\mathbf{Z}^*$ 的运算，表达下列集合：

(1) $\{n\mid n=6m,m\geqslant2\}$；

(2) 奇整数组成的集合；

(3) $\{-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9\}$.

解 (1) $\{n\mid n=6m,m\geqslant2\}=A\cap B$.

(2) 奇整数组成的集合为 $\mathbf{Z}^*\setminus B$.

(3) $\{-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9\}=(C\cap\mathbf{Z}^*)\setminus B$.

3. 设 $\mathbf{N}^*$ 是正整数集，$M_n=\left\{m\,\middle|\,\dfrac{m}{n}\in\mathbf{N}^*,n \text{ 是某个正整数}\right\}$. 求：

(1) $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}M_n$； (2) $M_n\cap M_k$； (3) $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}M_n$.

解 (1) $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}M_n=\mathbf{N}^*$.

(2) $M_n\cap M_k=\left\{m\,\middle|\,\dfrac{m}{(n,k)}\in\mathbf{N}\right\}$，其中$(n,k)$是 n 与 k 的最小公倍数.例如，

$$M_4\cap M_6=M_{12}.$$

(3) $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}M_n=\varnothing$.

4. 设 $A=\{x\mid x^2-1=0\}$，求：A 的幂集 $P(A)$；$A\times A$.

解
$$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{-1\},\{-1,1\}\},$$
$$A\times A=\{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\}.$$

6. 设 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant4\}$，$B=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$，$C=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant1\}$.在平面直角坐标系上画出下列集合：

(1) $A\cup(B\times C)$； (2) $A\cap(B\times C)$；

(3) $A\setminus(B\times C)$； (4) $(B\times C)\setminus A$.

解 分别如图 1－1，图 1－2，图 1－3 和图 1－4 所示．

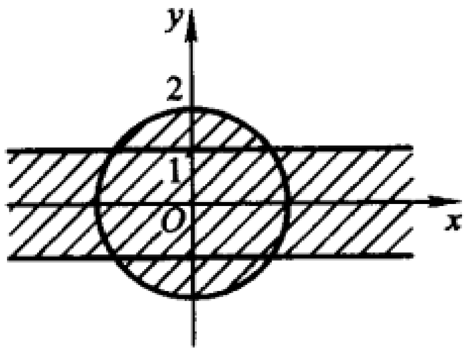


图 1－1

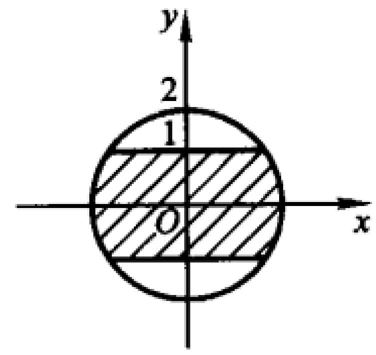


图 1－2

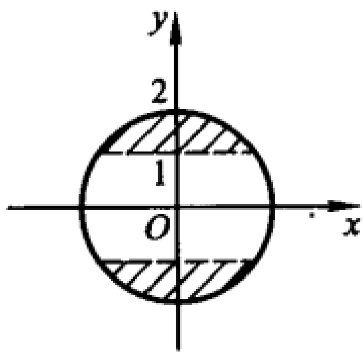


图 1－3

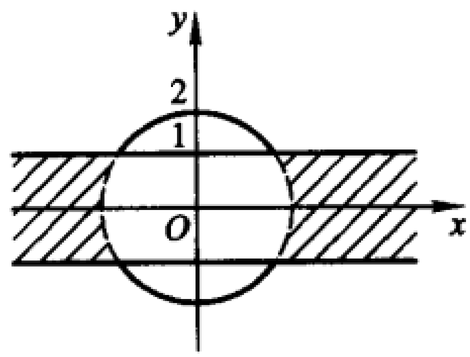


图 1－4

7. 设 A 是含有 n 个元素的有限集，证明 A 的幂集 $P(A)$ 所含元素为 2^n 个．

证 A 的含有 i 个元素的子集有 C_n^i 个，$P(A)$ 中还有一个空集 $\varnothing$，所以，$P(A)$ 中所含元素的个数为

$$1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n.$$

8. 设 A,B 为有限集，以 $|A|,|B|$ 表示 A,B 中元素的个数．

(1) 确定 $|A\cup B|=|A|+|B|$ 成立的条件；

(2) 若 $|A\cap B|\neq 0$，求 $|A\cup B|$；

(3) 画图说明：$|A\cup B|+|A\cap B|=|A|+|B|$；

(4) 已知某班 50 个学生第一次考试有 26 人不及格，第二次考试有 21 人不及格，又已知两次考试都及格的有 17 人．问：两次考试都不及格的有多少人？

*(5) 利用(3)的结论，证明：

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)+|A\cap B\cap C|;$$

*(6) 设某校足球队有队员 22 人，篮球队有队员 10 人，排球队有队员 12 人，但参加三支球队的学生只有 35 人，其中有 2 人同时参加三个队，问：同时只参加两个队的有几人？

*(7) 在 1 到 40 之间的 40 个整数中，能被 2,3,5 任何一个整除的数有几个？

解 (1) $A\cap B=\varnothing$ 时 $|A\cup B|=|A|+|B|$.

(2) $$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$

(3) 如图 1－5 所示，阴影部分为 $|A\cap B|$，由图可知，
$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$

(4) 解法 1　设第一、二次考试不及格的人数分别为 $|A|=26,|B|=21$. 两次考试都及格的为 $A\cup B$ 的余集，即 $|\overline{A\cup B}|=17$. 所以，
$$|A\cup B|=50-17=33.$$
因此，两次考试都不及格的有
$$|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|=26+21-(50-17)=14.$$

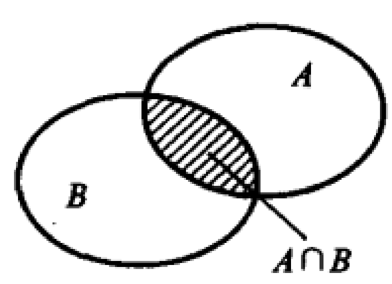


图 1－5

解法 2
$$\begin{aligned}|A\cap B|&=|\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}|=50-|\bar{A}\cup\bar{B}|\\&=50-(|\bar{A}|+|\bar{B}|-|\bar{A}\cap\bar{B}|)\\&=50-(24+29-17)=14.\end{aligned}$$

*(5)
$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C|&=|A|+|B\cup C|-|A\cap(B\cup C)|\\&=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)|\\&=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|-(|A\cap B|+|A\cap C|-\\&\quad|(A\cap B)\cap(A\cap C)|)\\&=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|-|A\cap B|-|A\cap C|+\\&\quad|A\cap B\cap C|.\end{aligned}$$

*(6) 足球队员 $|A|=22$，篮球队员 $|B|=10$，排球队员 $|C|=12$，$|A\cup B\cup C|=35$，$|A\cap B\cap C|=2$，根据
$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|,$$
同时只参加两个队的人数为
$$\begin{aligned}&|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|-3|A\cap B\cap C|\\&=|A|+|B|+|C|-2|A\cap B\cap C|-|A\cup B\cup C|\\&=22+10+12-4-35=5.\end{aligned}$$

*(7) 设 $|A|,|B|,|C|$ 分别表示能被 2,3,5 整除的数的个数，于是，能被 2,3,5 中任一个数整除的个数为 $|A\cup B\cup C|$，则有
$$\begin{aligned}&|A\cup B\cup C|\\&=|A|+|B|+|C|-(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)+|A\cap B\cap C|\\&=([40/2]+[40/3]+[40/5])-([40/2\cdot3]+\\&\quad[40/2\cdot5]+[40/3\cdot5])+[40/2\cdot3\cdot5]\\&=30,\end{aligned}$$
其中 $[40/2\cdot3]$ 表示能同时被 2 与 3 整除（也就是能被 6 整除）的数的个数，它等

于 6，其他意义类同.

9. (1) 已知 $A\cup B=A\cup C$，是否有 $B=C$？

(2) 已知 $A\cap B=A\cap C$，是否有 $B=C$？

*(3) 如果上述两个条件都成立，是否有 $B=C$？

解 (1) 未必有.

(2) 未必有.

(3) 必有.

证法 1

$$\begin{aligned} B&=B\cup(A\cap B)\\ &=B\cup(A\cap C)\\ &=(B\cup A)\cap(B\cup C),\\ C&=C\cup(A\cap C)\\ &=C\cup(A\cap B)\\ &=(C\cup A)\cap(C\cup B). \end{aligned}$$

由于 $B\cup A=C\cup A$，所以，$B=C$.

证法 2 设 $\forall x\in B$，则可分为两种情况：

若 $x\in A\cap B=A\cap C$，所以 $x\in C$；

若 $x\in B\setminus A$，则 $x\in A\cup B=A\cup C$，由于 $x\notin A$，所以 $x\in C$.

因此， $B\subseteq C$.

同理可证， $C\subseteq B$.

综上， $B=C$.

10. (1) 画图说明：$(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$.

(2) 问：$(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$是否成立？

解 (1) 等式两边的集合均为图 1－6 横线阴影部分.

(2) 成立. 等式两边的集合均为图 1－6 斜线阴影部分.

11. 利用图形说明：$(A\cup B)\cap C\neq A\cup(B\cap C)$，并问：在什么条件下此式等号成立？

解 $(A\cup B)\cap C$ 如图 1－7 中横线阴影所示，它显然不等于 $A\cup(B\cap C)$（灰色背景部分）.

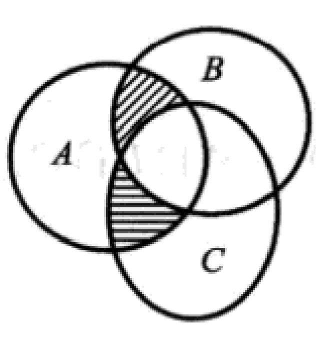


图 1－6

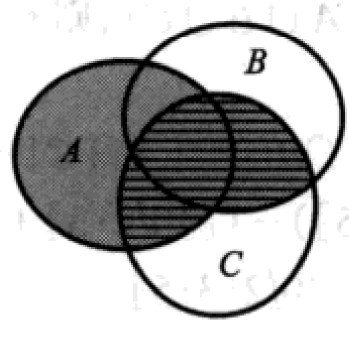


图 1－7

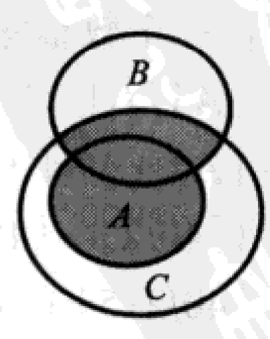


图 1－8

当 $A \subset C$ 时，命题成立. 此时，$(A \cup B) \cap C$ 与 $A \cup (B \cap C)$ 都是图 1-8 中的灰色背景部分.

12. 证明：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

证 $\forall x \in A \cap (B \cup C)$，则 $x \in A$，且 $x \in B$ 或 $x \in C$，所以，$x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$，即

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

因此

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$\forall x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，则 $x \in A$ 且 $x \in B$，或者 $x \in A$ 且 $x \in C$，所以，$x \in A$ 且 $x \in B$ 或 $x \in C$，即

$$x \in A \cap (B \cup C),$$

因此

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C).$$

综上，即有

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

13. 下列集合中的关系 R 是否是等价关系？如果是，说明等价类的意义，并写出集合关于 R 的商集.

(1) 实数集上定义关系：$xRy \Leftrightarrow x - y$ 为无理数或 0；

(4) 平面上所有直线组成的集合 L 上分别定义关系 R_1 和 R_2 为

$$l_1 R_1 l_2 \Leftrightarrow l_1 \perp l_2; \qquad l_1 R_2 l_2 \Leftrightarrow l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 相交};$$

(8) 在集合 $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ 上定义关系

$$(m_1, n_1) R (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 n_2 = m_2 n_1.$$

解 (1) 不是. 例如，$x - y = 2 + \sqrt{2}$，$y - z = 2 - \sqrt{2}$，而 $x - z = 4$ 是有理数，所以传递性不成立.

(4) 都不是. 例如，$l_1 \perp l_2$，而 $l_2 \perp l_3$，但 $l_1 \perp l_3$ 可以不成立；对于相交也如此. 所以关系 R_1 与 R_2 都不具有传递性.

(8) 是. R 具有自反性和对称性是显然的. 如果 $(m_1, n_1) R (m_2, n_2)$，即 $m_1 n_2 = m_2 n_1$，有 $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$；又 $(m_2, n_2) R (m_3, n_3)$，即 $m_2 n_3 = m_3 n_2$，有 $\frac{m_2}{m_3} = \frac{n_2}{n_3}$，则 $\frac{m_1}{m_3} = \frac{n_1}{n_3}$. 所以，$(m_1, n_1) R (m_3, n_3)$，即 R 也具有传递性. 其等价类为

$$\left\{ (m, n) \mid \frac{m}{n} = c \,(c \text{ 为常数}) \right\}.$$

集合 $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ 关于 R 的商集为

$$\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* / R = \{\{(m,n) \mid \frac{m}{n} = c\} \mid c \in \mathbf{Q}\}.$$

* **14.** 证明：若集合 A 中的二元关系 R 满足：(1) $\forall a \in A, aRa$，(2) $\forall a, b, c \in A$，如果有 aRb 和 aRc，就必有 bRc，则 R 是等价关系．

证 由条件(1)可知，R 有自反性，$\forall a \in A, aRa$，由条件(2)可知，若有 aRb 和 aRa（自反性），就必有 bRa，即 R 有对称性．再若有 aRb（由对称性就有 bRa）和 bRc．由条件(2)，就有 aRc，即有传递性．所以，R 是等价关系．

* **15.** 有人说，二元关系 R 如果具有对称性和传递性，就必有自反性，因为有 aRb，就有 bRa，从而有 aRa，这种说法对吗？

解 不对．如果有 aRb，就有 bRa，从而有 aRa，与"$\forall a$，有 aRa"不等价．例如，在整数集 $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 中定义关系 R 为 $aRb \Leftrightarrow \frac{b}{a} = c$（非零实数），则 R 具有对称性和传递性，但数 0 与任何非零整数都没有这种关系，且 0 也无自反性．

17. 设 f, g, h 均是 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的映射：

$$f: x \mapsto 3x;\quad g: x \mapsto 3x+1;\quad h: x \mapsto 3x+2.$$

计算 fg, gf, hg, fgh．

解

$$fg(x) = f(3x+1) = 9x+3;$$
$$gf(x) = g(3x) = 9x+1;$$
$$hg(x) = h(3x+1) = 9x+5;$$
$$fgh(x) = fg(3x+2) = f(9x+7) = 27x+21.$$

18. 设 $S = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$，$X = \{(x,0) \mid x \in \mathbf{R}\}$．定义 S 到 X 的映射 p 为

$$p: (x,y) \mapsto (x,0),$$

即 p 为平面直角坐标系 xOy 中点到 x 轴上的投影，问：p 是否单射？满射？并求 $p^{-1}(p(2,1))$；$p(p^{-1}(2,0))$；$p^{-1}(1,0) \cap p^{-1}(2,0)$．

解 $p: (x,y) \mapsto (x,0)$ 不是单射（因为 (x,y_1)，(x,y_2) 均映射为 $(x,0)$），是满射．

$$p^{-1}(p(2,1)) = p^{-1}(2,0) = \{(2,y) \mid y \in \mathbf{R}\};$$
$$p(p^{-1}(2,0)) = p(2,y) = (2,0);$$
$$p^{-1}(1,0) \cap p^{-1}(2,0) = \{(1,y) \mid y \in \mathbf{R}\} \cap \{(2,y) \mid y \in \mathbf{R}\} = \varnothing.$$

19. 集合 S 如上题，定义 S 到 S 的下列映射：

(1) $r(x,y) = (-y, x)$；　　(2) $p_1(x,y) = (x, 0)$；

(3) $p_2(x,y) = (0, y)$；　　(4) $\varphi_1(x,y) = (x, -y)$；

(5) $\varphi_2(x,y) = (-y, -x)$；　　(6) $I(x,y) = (x, y)$．

问：上叙哪些映射是双射？如是双射，求其逆映射．

计算：$rp_1, p_1r, p_1\varphi_2, \varphi_2p_1, p_1p_2, \varphi_1\varphi_2, Ip_2$，说明它们的几何意义．

解 (1) 容易验证(略去证明过程)，$r(x,y)$既是单射又是满射，所以是双射．

$$r^{-1}r(x,y)=r^{-1}(-y,x)=(x,y).$$

令 $-y=x_1$；$x=y_1$，可得

$$r^{-1}(x_1,y_1)=(y_1,-x_1),$$

即 $r^{-1}(x,y)=(y,-x)$．

(2) p_1不是单射，从而也不是双射，即不是可逆映射．

(3) p_2不是单射，从而也不是双射，即不是可逆映射．

(4) φ_1是双射．由

$$\varphi_1^{-1}\varphi_1(x,y)=\varphi_1^{-1}(x,-y)=(x,y),$$

得
$$\varphi_1^{-1}(x,y)=(x,-y).$$

因此
$$\varphi_1^{-1}=\varphi_1.$$

(5) φ_2是双射．易证：$\varphi_2^{-1}=\varphi_2$．

(6) I 是双射．易证：$I^{-1}=I$．

$$rp_1(x,y)=r(x,0)=(0,x)\quad(\text{投影到 } x \text{ 轴上再对 } y=x \text{ 反射}).$$

$$p_1r(x,y)=p_1(-y,x)=(-y,0)\quad(\text{对 } y=-x \text{ 反射，再投影到 } x \text{ 轴上}).$$

$$p_1\varphi_2(x,y)=p_1(-y,-x)=(-y,0)=p_1r(x,y).$$

$$\varphi_2p_1(x,y)=\varphi_2(x,0)=(0,-x)\quad(\text{投影到 } x \text{ 轴上再对 } y=-x \text{ 反射}).$$

$$p_1p_2(x,y)=p_1(0,y)=(0,0)\quad(\text{投影到 } y \text{ 轴上，再投影到 } x \text{ 轴上}).$$

$$\varphi_1\varphi_2(x,y)=\varphi_1(-y,-x)=(-y,x)\quad(\text{对 } y=-x \text{ 反射，再对 } x \text{ 轴反射}).$$

$$Ip_2(x,y)=(0,y)\ (\text{投影到 } y \text{ 轴上}).$$

20. 设 A,B 是两个集合，$f:A\to B, g:B\to A$．证明：若 gf 是A 到A 的恒等映射，则 f 是单射，g 是满射．

证 已知$\forall\alpha\in A, gf(\alpha)=\alpha$．用反证法证明 f 是单射．设存在 $\alpha_1\neq\alpha_2$，有 $f(\alpha_1)=f(\alpha_2)$，则 $\alpha_1=gf(\alpha_1)=gf(\alpha_2)=\alpha_2$，矛盾，所以 f 是单射．

欲证 g 为满射，只要证明：$\forall\alpha\in A,\exists\beta\in B$，使 $g(\beta)=\alpha$．由于$\forall\alpha\in A$，$gf(\alpha)=\alpha$，记 $\beta=f(\alpha)\in B$，有 $g(\beta)=\alpha$，所以 g 为满射．

***21.** 设 A,B,C 是三个集合，映射 $f:A\to B, g:B\to C$．证明：若 gf 是A 到 C 的双射，则 f 是单射，g 是满射．

证 用反证法证明 f 是单射．设存在 $\alpha_1\neq\alpha_2$，有 $f(\alpha_1)=f(\alpha_2)$，则 $gf(\alpha_1)=gf(\alpha_2)$，与 gf 是单射矛盾，所以 f 是单射．

再证：$\forall \alpha \in C$，$\exists \gamma \in B$，使 $g(\gamma)=\alpha$（即 g 为满射）. gf 是 $A \to C$ 上的满射，所以，$\exists \beta \in A$，使 $gf(\beta)=\alpha$. 记 $f(\beta)=\gamma \in B$，则有 $g(\gamma)=\alpha$，所以 g 为满射.

*22. 设 A,B,C,D 是四个集合，映射 $f:A\to B$，$g:B\to C$，$h:C\to D$. 证明：若 gf 和 hg 都是双射，则 f,g,h 也都是双射.

证 由习题 21 可知，gf 是双射，则 f 是单射，g 是满射；hg 是双射，则 g 是单射，h 是满射，所以 g 是双射. 因此，$g^{-1}(gf)=f$ 是双射，$h=(hg)g^{-1}$ 是双射.

*23. 设 f 是 A 到 B 的映射，g 是 B 到 A 的满射. 证明：如果 $fg=I_B$，则 $gf=I_A$（即 g 是可逆映射，f 是 g 的逆映射）.

证 例 2 中已有证明，下面我们换一种证法. 由习题 20 可知，如果 $fg=I_B$（为双射），则 g 是单射，f 是满射. 又已知 g 是满射，所以 g 是双射. 于是

$$f=fgg^{-1}=I_Bg^{-1}=g^{-1},$$

从而，

$$gf=gg^{-1}=I_A.$$

24. 先用符号表示简单命题，然后用符号运算表示下列语句（复合命题）：

例："今天与明天都下雨". 如果用 p,q 分别表示"今天下雨"和"明天下雨"，则命题可表示为 $p\wedge q$.

(1) 如果他和她都不去，你就去.

(2) 我不能既爬山又划船.

(3) 如果你来了，那么他在会上发不发言就看你请不请他发言.

(4) 占据空间的、有质量的而且不断变化的叫物质.

(5) 占据空间的、有质量的叫物质，而物质是不断变化的.

(6) 除非你努力，否则你将失败.

(7) 某次列车不是 8 点开就是 20 点开.

解 (1) 用 A 表示"他去"，用 B 表示"她去"，用 C 表示"你去"，则命题可表示为

$$(\neg A)\wedge(\neg B)\to C \text{ 或 } \neg(A\vee B)\to C.$$

(2) 用 M 表示"爬山"，用 B 表示"划船"，则命题可表示为

$$\neg(M\wedge B).$$

(3) 用 P 表示"你来"，用 Q 表示"他发言"，用 R 表示"你请他发言"，则命题可表示为

$$P\to(Q\Leftrightarrow R).$$

(4) 用 S 表示"占据空间"，用 M 表示"有质量"，用 X 表示"不断变化"，用 B 表示"叫物质"，则命题可表示为

$$S\wedge M\wedge X\Leftrightarrow B.$$

(5) 命题可表示为

$$(S \wedge M \Leftrightarrow B) \rightarrow X.$$

(6) 用 H 表示“你努力”,用 F 表示“你失败”,则命题可表示为

$$\neg H \rightarrow F.$$

(7) 用 P 表示“列车 8 点开”,用 Q 表示“列车 20 点开”,则命题可表示为

$$\neg P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\text{等价于}) \neg Q \leftrightarrow P$$
$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \vee (\neg Q \vee P)$$
$$\Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow P) \vee (\neg P \rightarrow Q).$$

25. 用量词 $\forall$, $\exists$ 表示下列语句内容:

(1) 数集 S 中任一数 x 都大于 4 而且被 4 整除;

(2) 数集 S 中有的数不大于 4 或不被 4 整除;

(3) 甲班学生都很聪明且很文明或很努力且很文明(以 p,q,r 分别表示学生很聪明、很努力、很文明,以 X 表示甲班学生集);

(4) 上述命题(3)的否命题;

(5) 有些实数是有理数;

(6) 甲班有一个学生叫王强.

解 (1) $(\forall x \in S)[(x>4) \wedge (4 \mid x)]$.

(2) $(\exists x \in S)[(x \leqslant 4) \vee (\neg(4 \mid x))]$.

(3) $(\forall x \in X)[(p \wedge r) \vee (r \wedge q)]$.

(4) $(\exists x \in X)[\neg(p \wedge r) \wedge \neg(r \wedge q)]$.

(5) $(\exists x \in \mathbf{R})(x \in \mathbf{Q})$.

(6) 设 X 表示甲班学生集,y 表示王强,则有 $\exists y \in X$.

26. 设 $x \in X$(甲班学生集),$y \in Y$(乙班学生集),$p(x,y)$表示 x 与 y 同姓,$q(x,y)$表示 x 与 y 同年龄.说明下列命题的含义:

(a) $(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \vee q(x,y))$;

(b) $(\exists x)(\exists y)(p(x,y) \wedge q(x,y))$;

(c) $(\forall x)(\exists y)(p(x,y) \wedge q(x,y))$;

(d) $(\exists x)(\forall y)(p(x,y) \vee q(x,y))$.

解 (a) 甲班每个学生和乙班每个学生同姓或同年龄.

(b) 有甲班学生与乙班的学生既同姓又同年龄.

(c) 甲班的每个学生,都有乙班的学生与其同姓又同年龄.

(d) 乙班的每个学生,都有甲班的学生与其同姓或同年龄.

27. 设有 m 个 n 元有序数组$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$, $i=1,2,\cdots,m$.已知:$\forall i \in \{1,2,\cdots,m\}$, $|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{in}|$,试写出这个已知命题的否命题 .

解 这个命题的否命题为 $\exists\, i\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得 $|a_{ii}|\leqslant|a_{i1}|+\cdots+|a_{i,i-1}|+|a_{i,i+1}|+\cdots+|a_{in}|$.

29. 设 P 是线段 AB 的中点，证明：对任意一点 O，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

证
$$\overrightarrow{OP}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP})=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}).$$
因为 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=\mathbf{0}$，所以，
$$2\,\overrightarrow{OP}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP})=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),$$
$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

30. 设 A,B,C 是任意三点，求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

解
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}.$$

31. 设 M 是三角形 ABC 的重心，证明：对任意一点 O，有
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$
如果点 O 是直角坐标系的原点，A,B,C 的坐标分别(a_1,a_2,a_3)，(b_1,b_2,b_3)，(c_1,c_2,c_3)，试求点 M 的坐标 .

解 如图 1－9 所示，因为 M 是△ABC 的重心，所以有
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}),$$
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}),$$
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}).$$
由于 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$，所以，
$$3\,\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

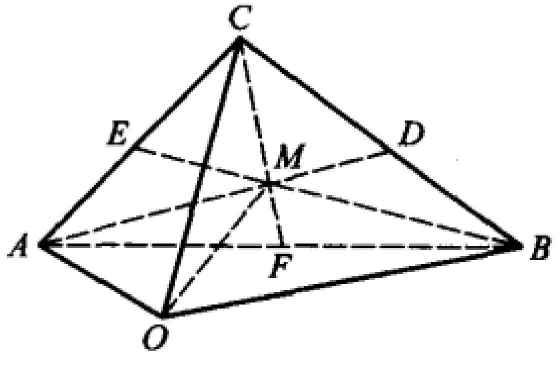


图 1－9

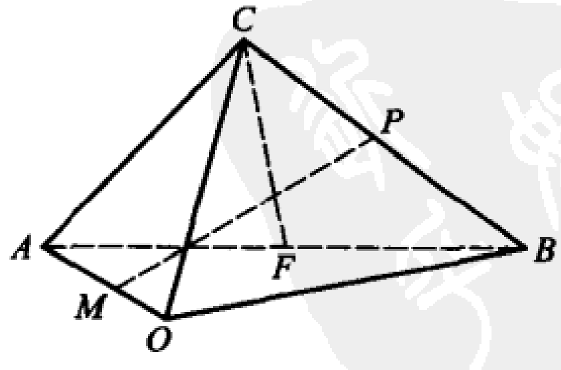


图 1－10

将 A,B,C 的坐标代入上式,可得

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$
$$=\frac{1}{3}[(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)+(c_1,c_2,c_3)]$$
$$=\frac{1}{3}(a_1+b_1+c_1,a_2+b_2+c_2,a_3+b_3+c_3).$$

32. 设四面体的四个顶点为 O,A,B,C,边 OA,BC 的中点分别为 M,P,证明:

$$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AB}).$$

证 如图 1-10 所示,因为 M,P 分别为 OA,BC 的中点,所以有

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AB}).$$

***33.** 设 O 是点 A 和点 B 连线外一点,如图 1-11 所示,证明:三点 A,B,C 共线的充要条件是 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$,其中 $\lambda+\mu=1$.

证 必要性:若 A,B,C 共线,则有

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$
$$=\left(1-\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{OB}$$
$$=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},$$

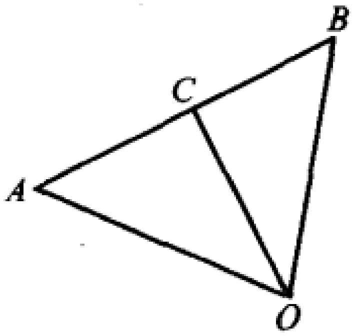


图 1-11

其中 $\lambda+\mu=1$.

充分性:

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$$
$$=\overrightarrow{OB}+\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$$
$$=\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{BA}.$$
$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{BA},$$

即
$$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}.$$

所以，A,B,C 共线.

34. 已知点 $A(1,2,4)$ 和 $B(2,0,-1)$，

(2) 求点 C 的坐标，使 $\overrightarrow{AC}=(0,4,1)$；

(3) 求点 C，使 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

解 设 O 为坐标原点.

(2)
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA},$$
则
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OA}\\&=(0,4,1)+(1,2,4)\\&=(1,6,5),\end{aligned}$$
所以 C 点的坐标为 $(1,6,5)$.

(3)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}&=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC},\\\overrightarrow{CB}&=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC},\\\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.\end{aligned}$$
由
$$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$
得
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\,\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}),$$
整理，得
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}&=\frac{1}{2}(\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+2\,\overrightarrow{OA})\\&=\frac{1}{3}((2,0,-1)+2(1,2,4))=\frac{1}{3}(4,4,7).\end{aligned}$$

36. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=2,\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，试求 $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 的内积及其夹角.

解
$$\begin{aligned}(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})&=6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-10\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-11\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=6\times9-10\times4-11(3\times2\times-\cos\frac{\pi}{3})=-19.\end{aligned}$$

记 $\theta=\langle3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}\rangle$，则
$$\cos\theta=\frac{(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})}{|3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|\cdot|2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}|},$$
其中
$$\begin{aligned}|3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|&=\sqrt{(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})}\\&=\sqrt{9|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2+12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\\&=\sqrt{81+16+36}=\sqrt{133}.\end{aligned}$$

同理，$$|2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}|=\sqrt{76},$$
所以，
$$\cos\theta=\frac{-19}{\sqrt{133}\times\sqrt{76}}=\frac{-1}{\sqrt{28}},$$
于是，$$\theta=\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{28}}.$$

37. 证明下列各对向量互相垂直．

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$($\lambda,\mu$ 为任意常数)．

解 (3)$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]+\mu[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]=0.$

38. 证明:三角形三条中线的长度平方和等于三条边长之平方和的$\frac{3}{4}$.

证 如图 1－12 所示，设三角形 $A(0,0)$，$B(a,b)$，$C(c,0)$的三条边 BC，AC，AB 之中点 $D\left(\frac{1}{2}(a+c),\frac{1}{2}b\right)$，$E\left(\frac{1}{2}c,0\right)$，$F\left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}b\right)$，以 x 表示三条中线AD，BE，CF 长度的平方和，以 y 表示三条边长之平方和，则
$$x=\frac{1}{4}(a+c)^2+\frac{1}{4}b^2+\left(a-\frac{1}{2}c\right)^2+b^2+\left(c-\frac{1}{2}a\right)^2+\frac{1}{4}b^2$$
$$=\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2-ac),$$
$$y=(a-c)^2+b^2+a^2+b^2+c^2$$
$$=2(a^2+b^2+c^2-ac).$$
所以，$$x=\frac{3y}{4}.$$

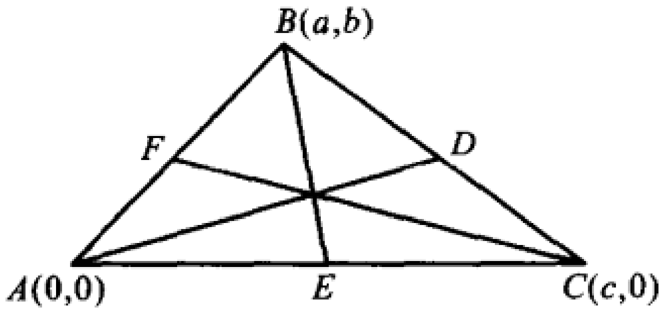


图 1－12

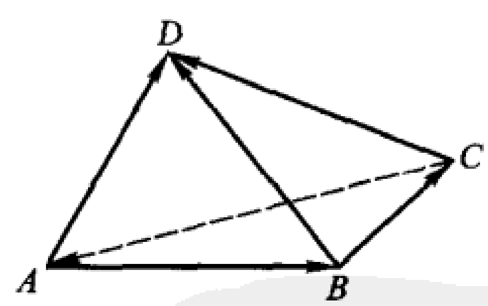


图 1－13

39. 证明:$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0.$

证 证法 1 如图 1－13 所示，
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC},$$
$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD},$$
$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=(-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}.$$

以上三个等式两边分别相加,即得

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0.$$

证法 2　任取一点 O,记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$,$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$,$\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OD}$,则

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}$$
$$=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})=0.$$

41. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,0,-1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-2,0)$,$\boldsymbol{c}=(1,1,1)$,

(1) 求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积;

(2) 求以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体的体积;

(3) 求 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$(向量的外积不满足结合律).

解　(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(-2,-1,-2)$. 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=3$.

(2) 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体的体积为 $V=|\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|=5$.

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(1,0,-1)$,$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(-1,-1,-1)$.

42. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$,

(1) 证明:$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$;

(2) 证明:如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 .

证　(1) 直接计算得

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}).$$

(2)
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0,$$

即

$$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0,$$

即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 .

44. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足下列条件,讨论 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的关系:

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$,其中 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$;

(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 共线;

(3) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 共面 .

解　(1) 由 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\cos^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$ 得 $\cos^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=1$,所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$,或 π,即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线,

(2) 由 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 共线,可得 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线),否则(即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$),$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 不共线.

(3) 由 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$ 且 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,可得 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线),否则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共面.

45. 求下列平面的方程:

(2) 过点 $P_0(1,2,-3)$,且垂直于点 $A(0,0,1)$ 和 $B(1,-3,4)$ 点的连线;

(3) 过 x 轴且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2,-1)$;

(4) 过三点:$A(1,1,1),B(-1,0,2),C(4,-3,1)$;

(5) 过 $2x+y-4=0$ 与 $y+2z=0$ 的交线,且过点 $P_0(2,-1,-1)$;

(6) 在 x,z 轴上的截距依次为 -3 和 2,且过点 $P_0(6,-10,1)$.

解 设所求平面法向量为 $\boldsymbol{n}$.

(2) $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}=(1,-3,3)$,则平面方程为

$$(x-1)-3(y-2)+3(z+3)=0,$$

即

$$x-3y+3z+14=0.$$

(3) $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{a}=(0,1,-2)$,则平面方程为

$$0\cdot(x-0)+1\cdot(y-0)-2\cdot(z-0)=0,$$

即

$$y-2z=0.$$

(4) $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=(4,3,11)$,则平面方程为

$$4(x-1)+3(y-1)+11(z-1)=0,$$

即

$$4x+3y+11z-18=0.$$

(5) 交线上的两个点为 $A(2,0,0),B(3,-2,1)$,则

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{P_0A}\times\overrightarrow{P_0B}=(0,1,1)\times(0,-1,2)=(3,1,-1),$$

于是,平面方程为

$$3(x-2)+1\cdot(y-0)-1\cdot(z-0)=0,$$

即

$$3x+y-z-6=0.$$

(6) 平面的截距式方程为

$$-\frac{x}{3}+\frac{y}{b}+\frac{z}{2}=1,$$

将点 P_0 代入,得 $b=-4$,所求平面方程为

$$-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=1.$$

46. 求下列直线的标准方程和参数方程:

(3) 过点 $A(2,-1,0)$且与 z 轴垂直相交;

(4) 过点 $A(2,-1,0)$且垂直于 $A,B(1,1,1),C(0,1,-2)$所确定的平面;

(5) 平面 $x-y=0$ 与 $x+y+z=1$ 的交线;

(6) 过点$(-1,-4,3)$且与直线 L_1,L_2都垂直,

$$L_1:\begin{cases}2x-4y+z=1,\\x+3y=-5,\end{cases}L_2:\begin{cases}x=2+4t,\\y=-1-t,\\z=-3+2t.\end{cases}$$

解 设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{S}$.

(3) 直线与 z 轴的交点为原点 $O(0,0,0)$,其方向向量为 $\boldsymbol{S}=\overrightarrow{OA}=(2,-1,0)$,

其标准方程为

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{0};$$

参数方程为 $x=2t, y=-t, z=0.$

(4) $\boldsymbol{S}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)\times(-2,2,-2)//(3,2,-1),$

其标准方程为

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1};$$

参数方程为 $x=2+3t, y=-1+2t, z=-t.$

(5) $\boldsymbol{S}=(1,-1,0)\times(1,1,1)=(-1,-1,2),$

其标准方程为

$$\frac{x}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2};$$

参数方程为 $x=-t, y=-t, z=1+2t.$

(6) 直线 L_1 的方向向量为

$$\boldsymbol{S}_1=(2,-4,1)\times(1,3,0)=(-3,1,10).$$

L_2 的方向向量为

$$\boldsymbol{S}_2=(4,-1,2).$$

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2=(12,46,-1).$$

其标准方程为

$$\frac{x+1}{12}=\frac{y+4}{46}=\frac{z-3}{-1}.$$

参数方程为

$$x=-1+12t, y=-4+46t, z=3-t.$$

47. 已知:平面 $\pi:4x+4y-5z+12=0$;直线 $L_1:\frac{x}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{4}$;$L_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{2}.$

(1) 直线 L_1 是否在平面 π 上?

(2) L_1 与 L_2 共面吗?相交吗?如相交,求交点.

解 (1) 直线 L_1 上两个点 $(0,-3,0)$,$(2,0,4)$ 满足平面 π 的方程,所以,L_1 在 π 上.

(2) $\boldsymbol{S}_1=(2,3,4)$,$\boldsymbol{S}_2=(1,1,2)$,$P_1=(0,-3,0)$,$P_2=(1,-2,2)$,以及

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)=(1,1,2)\cdot(2,0,-1)=0,$$

可知 $\overrightarrow{P_1P_2}$,$\boldsymbol{S}_1$,$\boldsymbol{S}_2$ 共面,所以,L_1 与 L_2 共面.

将直线 L_1 上的 $x=2t, y=-3+3t, z=4t$ 代入 L_2，即

$$\frac{2t-1}{1}=\frac{3t-1}{1}=\frac{4t-2}{2},$$

于是，得 $t=0$，所以交点为 $(0,-3,0)$.

48. 用高斯消元法解下列方程：

(1) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3-\frac{1}{2}x_4=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x_1-x_2-x_3=0, \\ -x_1+4x_2-x_4=3, \\ x_1-4x_3+x_4=-3, \\ x_2+x_3-4x_4=0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2-3x_4=1, \\ 7x_2-3x_3-x_4=3; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4=3, \\ x_1+x_2-x_3+x_4=2, \\ x_1-x_2-x_3-x_4=1, \\ 3x_1+2x_2-3x_3+2x_4=5; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0, \\ 3x_1+3x_2-4x_3+6x_4=0, \\ 3x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0. \end{cases}$

解 (1) $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$,

一般解为 $(x_1,x_2,x_3)=(2,1,0)+k(-1,0,1)$，$k$ 为任意常数．

(2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

一般解为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)=k_1(1,0,0,2)+k_2(0,1,1,0)$，$k_1,k_2$ 为任意常数．

(3) $\left[\begin{array}{cccc:c} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 15 & -4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$,

唯一解为

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(\frac{1}{2},1,1,\frac{1}{2}\right).$$

(4) $\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&\vdots&4\\0&1&-1&1&\vdots&-3\\1&3&0&-3&\vdots&1\\0&7&-3&-1&\vdots&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&\vdots&4\\0&1&-1&1&\vdots&-3\\0&0&1&-2&\vdots&6\\0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&\vdots&-8\\0&1&0&-1&\vdots&3\\0&0&1&-2&\vdots&6\\0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix},$$

一般解为$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-8,3,6,0)+k(0,1,2,1)$，$k$ 为任意常数．

(5) $\begin{bmatrix}1&2&-1&2&\vdots&3\\1&1&-1&1&\vdots&2\\1&-1&-1&-1&\vdots&1\\3&2&-3&2&\vdots&5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&-1&1&\vdots&2\\0&1&0&1&\vdots&1\\0&0&0&0&\vdots&-1\\0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix},$

无解．

(6) $\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\2&4&-5&7\\3&3&-4&6\\3&-3&3&-2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&6&-7&9\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$

一般解为$(x_1,x_2,x_3,x_4)=k(1,7,6,0)$，$k$ 为任意常数．

49. 将军点兵，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问兵几何(求在 500 至 1 000 范围内的解)?

解 设三、五、七人的组数分别为 x,y,z，则

$$3x+2=5y+3=7z+2.$$

于是，$3x=7z$．由于 $3\mid z$，可令 $z=3k$，从而得

$$x=7k,y=\frac{1}{5}(21k-1).$$

令 $k=5l+1$，得 $y=21l+4$．所以，兵数为

$$w=5y+3=105l+23.$$

当 $l=5,6,7,8,9$ 时，有

$$w=548,653,758,863,968.$$

50. 百鸡术：母鸡每只 5 元，公鸡每只 3 元，小鸡三只 1 元，百元买百鸡，各买几何?

解 买母鸡 x 只，公鸡 y 只，小鸡 z 只，得

$$\begin{cases}5x+3y+\frac{1}{3}z=100,\\x+y+z=100.\end{cases}$$

由高斯消元法，有$\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 100\\ 5 & 3 & \frac{1}{3} & 100\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -\frac{4}{3} & -100\\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & 200\end{array}\right]$,

可得
$$\begin{cases}x=-100+4k,\\ y=200-7k,\\ z=3k.\end{cases}$$

由于 x,y,z 都是非负数，则 $25<k\leqslant 28$. 当 $k=26,27,28$ 时，分别得
$$(x,y,z)=(4,18,78),(8,11,81),(12,4,84).$$

51. 设"$*$"是正整数集 $\mathbf{N}^*$ 上的一个二元运算，判断下列运算是否满足结合律：

(1) $a*b=\max(a,b)$; (2) $a*b=\min(a,b)$;

(3) $a*b=a+b+1$; (4) $a*b=a+2b$;

(5) $a*b=\begin{cases}\min(a,b), & 当 \min(a,b)<10,\\ \max(a,b), & 当 \min(a,b)\geqslant 10.\end{cases}$

解 (1) 满足结合律.
$$(a*b)*c=a*(b*c)=\max(a,b,c).$$

(2) 满足结合律.
$$(a*b)*c=a*(b*c)=\min(a,b,c).$$

(3) 满足结合律.
$$(a*b)*c=a*(b*c)=a+b+c+2.$$

(4) 不满足结合律.
$$(a*b)*c=a+2b+2c\neq a*(b*c)=a+2(b+2c).$$

(5) 满足结合律.
$$(a*b)*c=a*(b*c)=\begin{cases}\min(a,b,c), & 当 \min(a,b)<10.\\ \max(a,b,c), & 当 \min(a,b)\geqslant 10.\end{cases}$$

52. 集 X 上的一个二元关系"$\oplus$"定义为 $a\oplus b=a$. 讨论运算"$\oplus$"是否可结合和可交换.

解 可结合. $a\oplus(b\oplus c)=a=(a\oplus b)\oplus c=a$. 不可交换. $a\oplus b=a\neq b\oplus a=b$.

54. 在正实数集 $\mathbf{R}^+$ 上定义两个二元运算"$\circ$"和"$*$"为
$$a\circ b=ab,\qquad a*b=a^b.$$
证明："$*$"对"$\circ$"是不可左分配的，"$*$"是不可结合的.

证 $c*(a\circ b)=c*(ab)=c^{ab}\neq(c*a)\circ(c*b)=c^a c^b=c^{a+b}$.
$$c*(a*b)=c^{a^b}\neq(c*a)*b=(c^a)^b=c^{ab}.$$

56. 设 $G=\{e,a,b\}$,试列出三元素群$\langle G:\circ\rangle$的运算表(提示:每行(列)的三个元素互不相同).

解 $a\circ a$ 不能等于a(否则第二行第二列均有两个),也不能等于 e(否则第三列有两个 b),因此 $a\circ a=b$. 同理 $b\circ b=a$,从而 $a\circ b=b\circ a=e$. 其运算如表 1-3 所示.

表 1-3

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

57. 设 $R_\theta=\left\{0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$表示平面几何图形绕形心逆时针旋转角度的 6 种可能情况 . 在 R_θ上定义二元运算"$*$"为:$\forall\alpha,\ \beta\in R_\theta,\alpha*\beta=\alpha+\beta$(表示平面图形连续旋转 α 和β 所得到的总旋转角度),并规定旋转 2π 等于原来的状态,即看作没有旋转 . 验证:$\langle R_\theta:*\rangle$是一个交换群 .

解 (1) 运算"$*$"满足结合律,因为

$$(\alpha*\beta)*\gamma=\alpha*(\beta*\gamma)=\alpha+\beta+\gamma.$$

(2) 运算"$*$"的单位元为"0",因为$\forall\alpha\in R_\theta$,均有

$$0*\alpha=\alpha*0=\alpha+0=\alpha.$$

(3) R_θ中每个元素关于运算"$*$"均有逆元,其逆元为

$$0^{-1}=0;\ \left(\frac{\pi}{3}\right)^{-1}=\frac{5\pi}{3};\ \left(\frac{5\pi}{3}\right)^{-1}=\frac{\pi}{3};$$

$$\pi^{-1}=\pi;\ \left(\frac{2\pi}{3}\right)^{-1}=\frac{4\pi}{3};\ \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-1}=\frac{2\pi}{3}.$$

(4) 运算"$*$"满足交换律,因为

$$(\alpha*\beta)=(\beta*\alpha)=\alpha+\beta.$$

综上,$\langle R_\theta:*\rangle$是一个交换群。

***58**. 写出模 8 剩余类加群$\langle Z_8:\oplus\rangle$的所有子群 .

解 两个真子群:$\{\bar{0},\bar{4}\}$,$\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6}\}$;两个平凡子群:$\{\bar{0}\}$,$Z_8$.

***59**. 在 Z_{15}中,找出方程 $x^2=\bar{1}$的全部根 .

解 $k^2\equiv1(\bmod 15)$ $(k=1,4,11,14)$,所以,$x^2=\bar{1}$的全部根为 $\{\bar{1},\bar{4},\overline{11},\overline{14}\}$.

1－6　补充题提示与解答

1. 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 X 的子集，证明：

(1) $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$；　　　(2) $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

证　(1) $\forall x\in\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}$，$x\notin\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，所以 $x\notin A_i(i=1,2,\cdots,n)$，即 $x\in\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，因此，$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}\subseteq\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$；

$\forall x\in\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，则 $x\notin A_1$，$x\notin A_2$，$\cdots$，$x\notin A_n$，所以，$x\notin\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，即 $\forall x\in\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}$，因此，$\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}\subseteq\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}$.

综上即有(1)中的等号成立.

(2) 可以用类似于(1)的证法，也可利用(1)来证明(2)，由 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}}=\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，得 $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

2. 在复数集 $\mathbf{C}$ 中，能否定义二元关系 R 使 $\mathbf{C}$ 成为全序集？

解　能.　定义 $(a_1+b_1\mathrm{i})R(a_2+b_2\mathrm{i})\Leftrightarrow a_1<a_2$ 或 $a_1=a_2$ 时 $b_1\leqslant b_2$，则 R 是全序关系. 例如，下列复数就是依此排列的：

$$-2,\quad -1+\mathrm{i},\quad -2\mathrm{i},\quad \mathrm{i},\quad 1-3\mathrm{i},\quad 2+5\mathrm{i},\quad 2+7\mathrm{i}.$$

3. 在正有理数集 $\mathbf{Q}^+=\left\{\dfrac{q}{p}\,\middle|\,p,q\in\mathbf{N}^*\right\}$ 中，如何定义一种二元关系 R，使 $(\mathbf{Q}^+,R)$ 为全序集？

解　有理数可以表示为 $\dfrac{q}{p}$，其中 $p,q\in\mathbf{N}^*$，且 p,q 互素. 将 $\dfrac{q}{p}$ 视为数偶 (p,q)，将 $\mathbf{Q}^+$ 中全体数依如下左边顺序排列，并将左边的顺序对应于右边的顺序号 $1,2,3,4,\cdots$，即

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	1	2	4	7	11	16
(2,1)	(2,3)	(2,5)	(2,7)	(2,9)		3	5	8	12	17	
(3,1)	(3,2)	(3,4)	(3,5)			6	9	13	18		
(4,1)	(4,3)	(4,5)				10	14	19			
(5,1)	(5,2)					15	20				
(6,1)						21					

如此，正有理数集和自然数集之间建立了一一对应关系，这个序关系 R 就使 $(\mathbf{Q}^+,R)$ 为全序集 .

读者必须注意：左边第二行不出现$(2,2)=\frac{2}{2}=1$，$(2,6)=\frac{6}{2}=3$. 这是因为它们分别等于第一行中的$(1,1)=1$和$(1,3)=\frac{3}{1}=3$.

5. 我们可以把 $A\times A$ 的一个子集 R 定义为 A 上的一个二元关系，即 $\forall a,b\in A$，如果$(a,b)\in R$，就说 a,b 具有关系 R，即 aRb.

设 $A=\{a,b,c\}$，试判断 A 上的下列二元关系是否具有自反性、对称性、反对称性和传递性：

(1) $R_1=\{(a,a),(a,b),(a,c),(c,c)\}$;

(2) $R_2=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$;

(4) $R_4=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$;

(5) $R_5=\{(a,b),(a,c),(c,a)\}$;

解 (1) 具有反对称性和传递性. 因为没有(b,b)，所以没有自反性；有(a,b)，(a,c)，而没有(b,a)，(c,a)，所以没有对称性；有反对称性；有(a,a)，(a,b)，且有(a,c)，(c,c)，所以有传递性 .

(2) 具有自反性、对称性和传递性. 因为(a,a)，(b,b)，(c,c)都有，所以有自反性；有(a,b)和(b,a)，所以有对称性；没有反对称性；有(a,b)，(b,a)和(a,a)，(b,b)，所以有传递性 .

(4) 自反性、对称性、反对称性、传递性都具有.

(5) 不具有自反性、对称性、反对称性、传递性. 因为有(a,c)，(c,a)，而没有(a,a)，所以没有传递性；也没有自反性和对称性；有(a,b)，而没有(b,a)，所以没有对称性.

7. 举出一个没有自反性、对称性和传递性的关系的例子 .

解 如 $A=\{a,b,c\}$，$R=\{(a,b),(a,c),(c,a)\}$；又如，aRb 定义为：a 为父，b 为子.

***8.** 用真值表证明：

(1) $p\Leftrightarrow q$ 与$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$是等价命题；

(3) $p\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow p\Leftrightarrow p\wedge(p\vee q)$(吸收律)；

(4) $p\rightarrow q$ 与$\neg p\rightarrow\neg q$ 不是等价命题 .

证 (1)表 1－4 为$(p\rightarrow q)$的真值表，表 1－5 为$(q\rightarrow p)$的真值表，而表 1－6

表 1－4

p \ q	0	1
0	1	1
1	0	1

表 1－5

p \ q	0	1
0	1	0
1	1	1

则是 $p\Leftrightarrow q$ 与 $(p\to q)\wedge(q\to p)$ 共同的真值表.

表 1-6

$p\backslash q$	0	1
0	1	0
1	0	1

(3) 表 1-7 为 $p\vee(p\wedge q)$ 与 $p\wedge(p\vee q)$ 共同的真值表. 可见, $p\vee(p\wedge q)$ 与 $p\wedge(p\vee q)$ 的真值表与 p 的真值表相同,因此,它们三者相同.

表 1-7

$p\backslash q$	0	1
0	0	0
1	1	1

(4) 表 1-8 是 $\neg p\to\neg q$ 的真值表,这与 $p\to q$ 的真值表不同,所以,条件命题"若 p 则 q"与其否命题"若非 p 则非 q"不是等价命题.

表 1-8

$p\backslash q$	0	1
0	1	0
1	1	1

*9. 利用 $(p\to q)\Leftrightarrow\neg p\vee q$,证明:

(1) $p\to(q\to r)\Leftrightarrow q\to(p\to r)$;

(2) $p\to(q\to r)\Leftrightarrow\neg r\to(q\to\neg p)$;

(3) $\neg(p\to q)\Leftrightarrow p\wedge\neg q$.

解 (1)

$$p\to(q\to r)\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$$
$$\Leftrightarrow r\vee(\neg q\vee\neg p).$$
$$q\to(p\to r)\Leftrightarrow\neg q\vee(\neg p\vee r)$$
$$\Leftrightarrow r\vee(\neg q\vee\neg p).$$

所以, $p\to(q\to r)\Leftrightarrow q\to(p\to r)$.

(2)

$$\neg r\to(q\to\neg p)\Leftrightarrow\neg\neg r\vee(\neg q\vee\neg p)$$
$$\Leftrightarrow r\vee(\neg q\vee\neg p)$$

$$\Leftrightarrow p\rightarrow(q\rightarrow r).$$

(3)
$$\neg(p\rightarrow q)\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)$$
$$\Leftrightarrow(\neg\neg p)\wedge\neg q$$
$$\Leftrightarrow p\wedge\neg q.$$

*10. 试从逻辑的角度分析下面命题所存在的问题：

(1)"苛政猛于虎".某地有虎，一老妇人的亲人为虎所害，但她不愿意搬走，因为"无苛政"，由此推出："苛政猛于老虎".

(2) 资本主义社会有商品经济.社会主义社会不是资本主义社会，由此推出：社会主义社会没有商品经济.

解 (1)"苛政猛于虎"等价于"为虎所害，不愿意搬走；有苛政，就搬走".而"无苛政，不愿意搬走"与"有苛政，就搬走"是互为否命题，不是等价命题.题中缺后者，所以推不出"苛政猛于虎".

(2)"资本主义社会有商品经济"与"非资本主义社会没有商品经济"是互为否命题，不是等价命题.由 $p\rightarrow q$(即$\neg q\rightarrow\neg p$)，不能推出$\neg p\rightarrow\neg q$.所以，由"资本主义社会有商品经济"不能推出"非资本主义社会的社会主义社会没有商品经济".

11. 在有理数集 **Q** 上定义二元运算"$*$"为 $a*b=a+b-ab$.讨论运算"$*$"是否满足结合律和交换律？**Q** 关于运算"$*$"是否存在单位元？**Q** 中每个元素是否可逆？可逆元的逆元是什么？

解 在 **Q** 上，运算"$*$"是封闭的.

运算"$*$"有结合律：

$$(a*b)*c=(a+b-ab)*c=a+b-ab+c-(a+b-ab)c,$$
$$a*(b*c)=a*(b+c-bc)=a+b+c-bc-a(b+c-bc)=(a*b)*c.$$

运算"$*$"有交换律：

$$a*b=b*a.$$

Q 关于运算"$*$"的单位元为 0，因为 $a*0=0*a=0$.

$$a*b=a+b-ab=0,$$
$$b=a/(a-1).$$

当 $a\neq1$ 时，有逆元 $a^{-1}=a/(a-1)$；

当 $a=1$ 时，$1*b=1+b-b=1\neq0$，所以 1 不可逆.

12. 设 $S=\mathbf{Q}\setminus\{1\}$，$S$ 上的二元运算"$*$"如第 11 题(上题)所定义.

(1) 证明$\langle S:*\rangle$是一个群.

(2) 求方程 $2*x*3=7$ 在 S 中的解.

解 (1) 如第 11 题，满足结合律和交换律，单位元是 0，$a\in S(a\neq1)$时可

逆，$a^{-1}=\dfrac{a}{a-1}$.

(2) $2*x*3=7$，$(2+x-2x)*3=7$，$(2-x)+3-3(2-x)=7$，所以，$x=4$.

13. 求有理数加群$\langle \mathbf{Q}:+\rangle$的一个子群 H，使 $H\neq\mathbf{Z}$ 且 $H\neq\mathbf{Q}$.

解 $H=\{\frac{q}{p}\mid q\in\mathbf{Z}, p$ 为固定的非 1 正整数$\}$. 如 $H=\{\frac{q}{3}\mid q\in\mathbf{Z}\}$.

第 2 章　线性空间　内积空间

2-1　学时安排的建议

表 2-1

节	教学内容	复习页数
8	2.1 线性空间的定义及其简单性质,2.2 线性子空间	58—63
9	2.2 线性子空间,2.3 线性相关性	63—69
10	2.4 有限维线性空间的基和维数　向量组的秩,2.5 向量的坐标	69—73
11	*2.6 子空间的交与和　直和,2.7 内积空间	74—79
12	2.7 内积空间,2.8 欧氏空间的单位正交基	79—82
13	*2.9 正交子空间　正交补,附录,第二章小结,习题	82—85

2-2　基本要求

1. 理解线性空间的定义和性质,会判断所给集合 V 是否是数域 F 上的线性空间,会判断 V 的子集合 W 是否是 V 的子空间. 理解 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 的线性扩张 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 是 V 的一个子空间(也称 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 的生成子空间).

2. 准确理解向量组线性相关性的定义,熟悉向量组线性相关(或无关)的充分必要条件,会判别或证明所给向量组的线性相关性,会正确叙述所给线性相关性命题的逆否命题. 会用反证法证明一些命题.

3. 理解有限维线性空间的基和维数的定义,会将 V 的子空间的基扩充为 V 的基,会求所给线性空间或子空间的基和维数. 理解两个向量组等价及向量组的秩的概念,会求向量组的秩,会求向量组的极大线性无关组.

4. 熟悉 $\mathbf{R}^n$ 和 $F[x]_n$ 的自然基. 能熟练地求出向量在给定基下的坐标.

*5. 知道两个子空间的交、和与直和的定义及直和的等价命题. 知道如何求两个子空间的交子空间及和子空间的基和维数,能熟练应用维数公式. 知道如何求子空间的补空间.

6. 理解实线性空间上的内积的定义和性质(柯西不等式和三角不等式等). 会求欧氏空间中的向量的长度(模)和两个向量间的夹角,能熟练地判别两个向量(或两个子空间)是否正交. 会证明非零正交向量组必线性无关.

7. 会熟练地用 Schmidt 正交化过程由欧氏空间的一组基构造出它的单位正交基. 会求欧氏空间的子空间的正交补.

2-3 内容提要

1. 线性空间(或称向量空间)的定义及其四条简单性质

见主教材 59—61 页.

2. 线性子空间

线性空间 $V(F)$的子空间 W 是 V 的一个非空子集,且 W 关于 $V(F)$中的线性运算也构成域 F 上的线性空间.

$V(F)$的非空子集 W 是 $V(F)$的子空间的充分必要条件是 W 关于 $V(F)$中的线性运算封闭,即 $\forall\ \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W,\lambda\in F$,均有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in W,\lambda\boldsymbol{\alpha}\in W$.

线性空间 $V(F)$的非空子集 S 的线性扩张

$$L(S)=\{\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k\in F;\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\in S;k\in\mathbf{N}^*\}$$

是 V 中包含 S 的最小子空间.

3. 线性相关性

(1) 定义:线性空间 $V(F)$中的元素(向量)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,指的是存在不全为零的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in F$,使

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k=\mathbf{0} \tag{1}$$

成立. 否则,就称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,即"不存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使(1)式成立",也就是对任意不全为零的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in F$,(1)式不成立. 其等价命题是"如果(1)式成立,必须 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 全为零",即"仅当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 全为零时,(1)式才成立".

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant2)$线性相关的充分必要条件是其中有一个向量可由其余向量线性表示. 其等价命题是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是其中任一个向量都不能由其余向量线性表示.

单个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关(无关)的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}(\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0})$.

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}),\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2}),\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s=(a_{1s},a_{2s},\cdots,a_{ns})$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant2)$线性相关的充分必要条件是向量方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

存在非零解,即对应的 s 元 n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ns}x_s = 0 \end{cases} \tag{2}$$

有非零解.

当 $s > n$ 时,方程组(2)必有非零解.所以,$\mathbf{R}^n$ 中任何 $n+1$ 个向量都线性相关.

若方程组(2)只有零解,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.据此可知,$\mathbf{R}^n$ 中存在很多组由 n 个线性无关的向量组成的向量组.最简单的情况是 n 个单位向量 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)$ 是线性无关的.

(4) 两个定理

定理 2.4　若向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性无关,而向量组 $\{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性表示,且表示法唯一.

由此可见 $\mathbf{R}^n$ 中任一个向量 $\boldsymbol{\beta}$ 均可由 $\mathbf{R}^n$ 中某 n 个线性无关的向量线性表示.

定理 2.5　设 $V(F)$ 中的向量组 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 的每个向量可由另一向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 线性表示,且 $s > r$,则 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 线性相关.其等价命题是,如果 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 线性无关,则 $s \leqslant r$.

4. 基、维数和向量的坐标

(1) 定义:如果 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\} \subset V(F)$,且线性无关,又有 B 的线性扩张 $L(B)=V$,则称 B 为 V 的一组基,并称 V 的维数 $\dim V=n$(或说 V 是 n 维空间).

由于 V 中任意一个向量 $\boldsymbol{\xi} \in V=L(B)$,所以,$\boldsymbol{\xi}$ 可由 V 的基 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性表示,即

$$\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

其中的系数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 叫做 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 B 下的坐标,记作 $\boldsymbol{\xi}_B=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.由定理 2.4 可知,$\boldsymbol{\xi}_B$ 是唯一的.又如果 $\boldsymbol{\eta}_B=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,则

$$(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta})_B=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)=(\boldsymbol{\xi}_B+\boldsymbol{\eta}_B),$$

$$(\lambda\boldsymbol{\xi})_B=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)=\lambda\boldsymbol{\xi}_B.$$

n 维线性空间 V 中的基不是唯一的,V 中任何 n 个线性无关的向量都是 V 的基.

(2) V 的基与其子空间 W 的基的关系:设 W 是 n 维线性空间 $V(F)$ 的子空间,W 的基 $B_W=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\}(0<k<n)$ 可以扩充为 V 的基,即存在 $\boldsymbol{\beta}_1$,

$\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-k}$,使得 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-k}\}$为 V 的基.

5. 向量组的秩

向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\}$(或线性空间 V 的子集S)的秩为 r,指的是其中有 r 个线性无关的向量$\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}\}$,且向量组(或 S)中任一个向量均可由其线性表示.称$\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}\}$为向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\}$的一个极大线性无关组.

一个向量组的秩是个定数,但其极大线性无关组一般不是唯一的,而任意一个极大线性无关组所含向量的个数是相同的,它就是向量组的秩.

由$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\}$线性扩张成的子空间的维数等于$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$的秩,即

$$\dim L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)=r\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\}$$

6. 子空间的交、和与直和

(1) 定义:设 W_1与 W_2是线性空间 $V(F)$的两个子空间,则

$$W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}\in W_1\text{且 }\boldsymbol{\alpha}\in W_2\},$$

$$W_1+W_2=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\text{其中 }\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2\},$$

分别称为 W_1与 W_2的交与和.

如果 $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$,则 W_1+W_2叫做 W_1与 W_2的直和,记作 $W_1\oplus W_2$.

(2) $W_1\cap W_2$与 W_1+W_2仍然是 $V(F)$的子空间.

(3) 维数公式为

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1\cap W_2)+\dim(W_1+W_2).$$

如果 W_1+W_2为直和,则

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2.$$

如果 $W_1\oplus W_2=V(F)$,则 W_1与 W_2互为补空间.

求子空间的交与和及互为补空间的方法见本书2-4节.

7. 内积与内积空间　欧氏空间

(1) 向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$与内积空间及欧氏空间的定义见主教材定义2.12.

$\mathbf{R}^n$中向量$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$的(标准)内积为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

(2) 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$,且满足

$$|\lambda\boldsymbol{\alpha}|=|\lambda||\boldsymbol{\alpha}|\quad(\lambda\text{ 是个数}),$$

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|(\text{Cauchy - Schwarz 不等式}),$$

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|(\text{三角不等式}).$$

(3) 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$ 的夹角为

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}| |\boldsymbol{\beta}|}.$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交(垂直)当且仅当$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$.零向量与任何向量正交.

当 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交时,就有内积空间中的勾股定理

$$|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}|^2 = |\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2.$$

(4) 在内积空间 $V(F)$中两两正交的非零向量组线性无关.

8. 欧氏空间中的单位正交基(标准正交基)

(1) 定义:$B = \{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$为 n 维欧氏空间 $V(\mathbf{R})$的单位正交基,指的是 B 中向量两两正交,即$(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j) = 0 (i \neq j)$,且每个向量长度为 1.

(2) 欧氏空间的一组基 $B = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$,可以按 Schmidt 正交化过程构造出一组标准正交基,其过程为先正交化,再单位化,详见主教材 81—82 页及本书 2-5 节中的有关例题.

*9. 正交子空间与正交补

(1) 欧氏空间中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与子空间 W 正交,指的是$\forall \boldsymbol{\gamma} \in W$,均有内积$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$.

(2) 两个子空间 W_1 与 W_2正交(记作 $W_1 \perp W_2$),指的是$\forall \boldsymbol{\alpha} \in W_1$, $\forall \boldsymbol{\beta} \in W_2$,均有内积$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$.由此可知,如果 $W_1 \perp W_2$,则 $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$,从而 $W_1 + W_2$为直和.

(3) 欧氏空间 $V(\mathbf{R})$中,子空间 W_2为 W_1的正交补(记作 $W_2 = W_1^{\perp}$),指的是 $W_1 \perp W_2$且 $W_1 + W_2 = V(\mathbf{R})$.

在 $V(\mathbf{R})$中,所有与子空间 W_1正交的向量组成的集合是 $V(\mathbf{R})$的一个子空间 W_2,且 $W_2 = W_1^{\perp}$.这就是求 W_1的正交补的方法,具体见本书 2-4 节.

2-4 内容综述与分析

1. 本章在线性代数中的地位

线性代数的内容大致可以分为两部分:一部分是以算法为主的求解线性方程组和矩阵的运算(包括特征值、特征向量,矩阵的三种标准型及二次型的标准形);另一部分主要是研究线性空间和内积空间的结构,以及有限维线性空间上的线性映射(变换).后者是前者的理论框架,是线性代数的核心内容.主教材直接从讨论线性空间的结构和研究线性映射入手,去展开线性代数的内容,这就突出了这一核心内容.线性映射是在线性空间上施行的.线性空间就像线性代数"世界"中的一个"舞台",对舞台情景和性能的熟悉是至关重要的.

在主教材的第 2 章到第 8 章中,线性空间和线性相关性的概念是贯穿始终

的.例如,线性空间 $V_1(F)\to V_2(F)$ 的全体线性映射的集合 $L(V_1,V_2)$ 关于线性映射的加法和数乘构成数域 F 上的线性空间;全体 $m\times n$ 实矩阵 $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ 关于矩阵的加法和数乘构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间,且其维数 $\dim M_{m\times n}(\mathbf{R})=m\times n$;$n$ 个未知数的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解集合是线性空间 F^n 的一个子空间(称为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解空间);n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$(或线性变换 σ)的特征值 λ 所对应的全体特征向量添加零向量后,对向量的加法和数乘构成线性空间 C^n 子空间(称为特征子空间).再如线性映射 $\sigma\in L(V_1,V_2)$ 的维数公式为

$$\dim(\mathrm{Ker}\boldsymbol{\sigma})+r(\boldsymbol{\sigma})=n=\dim V_1,$$

齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解空间的维数公式为

$$\dim N(\boldsymbol{A})+=n-r(\boldsymbol{A}).$$

所有涉及线性空间及其维数的问题,都要用到线性相关性的概念.真可以说,在线性代数中线性相关性是无所不在的.总之,学好这一章是学好线性代数的基础.

2. 正确理解线性空间的概念(主教材 2.1 节)

主教材中线性空间 $V(F)$ 的定义(定义 2.1),可以归纳为"1-1-2-8":1 个非空集合 V;1 个数域 F;2 种(线性)运算(定义在 V 上的"加法"和定义在 $F\times V$ 上的"数乘"),且 V 对这两种运算是封闭的;满足 8 条运算规律("加法"有 4 条,使 V 构成交换群,也称加法群;"数乘"有 4 条).若用"$\oplus$"和"$\circ$"分别表示定义在 V 上的"加法"和定义在 $F\times V$ 上的"数乘",则"数乘"的 4 条运算律可以写成:

$$1\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha};$$
$$\lambda\circ(\mu\circ\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\circ\boldsymbol{\alpha};$$
$$(\lambda+\mu)\circ\boldsymbol{\alpha}=\lambda\circ\boldsymbol{\alpha}\oplus\mu\circ\boldsymbol{\alpha};$$
$$\lambda\circ(\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta})=(\lambda\circ\boldsymbol{\alpha})\oplus(\lambda\circ\boldsymbol{\beta}).$$

其中数 λ,μ 在 F 中任意取,元素 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 在 V 中任意取(同理可以写出"加法"的 4 条运算规律).$\lambda\mu,\lambda+\mu$ 是数域 F 上的数的乘法和加法,与"$\circ$"和"$\oplus$"是不同的(特殊例子中 V 可以等于 F),这是学生常常出错误的地方.

当 V 不是 F 上的线性空间时,学生往往从头开始检查,直到最后才发现有一条不满足.其实只须指出以下之一即可:V 对"加法"或"数乘"运算不封闭,或 8 条运算规律之中的某一条不满足,或 V 中不存在零元.V 在数域 F 上构成线性空间时,记作 $V(F)$.同一个集合在不同的数域上可以构成不同的线性空间.例如,复数集 $\mathbf{C}$ 在实数域 $\mathbf{R}$ 上构成的线性空间 $\mathbf{C}(\mathbf{R})$ 是二维线性空间,而复数集 $\mathbf{C}$ 在复数域 $\mathbf{C}$ 上构成的 $\mathbf{C}(\mathbf{C})$ 则是一维线性空间.一个集合 V 在数域 F 上构成线性空间,而在另一个数域 F_1 上又可能不构成线性空间.例如,$\mathbf{R}(\mathbf{R})$ 是线性空

间,而实数集 $\mathbf{R}$ 在复数域 $\mathbf{C}$ 上不构成线性空间.

3. 线性子空间的定义和生成子空间(主教材 2.2 节)

在线性空间 $V(F)$中,有的子集 W 对 $V(F)$中的加法和数乘构成线性空间(称 W 为 V 的子空间);而有的子集对 $V(F)$中的加法和数乘不构成线性空间.判别 W 是否是 V 的子空间只须检查 W 是否非空,并且 W 对 $V(F)$中的加法和数乘运算是否都封闭.若 W 不含 $V(F)$的零元,则 W 一定不是 V 的子空间.例如,$\mathbf{R}^3$ 中平面 $ax+by+cz+d=0$ 上的所有的向量(x,y,z)的集合,当 $d\neq0$(平面不过原点)时不是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间;当 $d=0$(平面过原点)时是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间.

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中过原点的不平行的两个向量,则 $L(\boldsymbol{\alpha})$表示过原点的平行于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的直线上的点的集合;$L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$表示 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 所张成的过原点的平面上的全体向量的集合.若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 平行,则 $L(\boldsymbol{\alpha})=L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=L(\boldsymbol{\beta})$.

4. 线性相关性(主教材 2.3 节)

线性相关性是一个非常重要的概念.学生对线性相关性的证明题经常摸不到头绪.问题大都出于对逻辑的不熟悉,特别是对定义 2.6 中的"不全为 0"(注意:不是"全不为 0",而是至少有一个不等于 0)和"否则"不能正确理解.对原命题的等价命题(逆否命题)不熟悉,不善于应用反证法.

学生必须理解和记住重要的线性相关性的定理,熟悉向量组线性相关(或无关)的充分必要条件(见本书 2-3 节中的第 3 部分).两个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 成比例,即 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\beta}$($k$ 为常数);$\mathbf{R}^3$ 中三个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 共面.含零向量的任何向量组$\{\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$都线性相关.

除了本书 2-3 节中第 3 部分线性相关性的重要结论外,还须知道下列线性相关性的重要结论:

(1) 如果向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$中有一部分向量线性相关,则整个向量组也线性相关.其等价命题为:线性无关向量组的任一部分向量组都线性无关.

(2) 若向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$($\boldsymbol{\alpha}_i\in F^m$)线性无关,在每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$($i=1,2,\cdots,s$)的后面任意添加 $n-m$ 个分量使之成为 n 维向量组$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$,则$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$也线性无关(它的证明方法是:由

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

对应的齐次线性方程组只有零解,可以推出

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\beta}_s=\mathbf{0}$$

对应的齐次线性方程组也只有零解).其等价命题为:线性相关的 n 维向量组$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$,任意去掉每个向量后面的 $n-m$ 个分量所成的 m 维向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$也线性相关.

(3) 若$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$的秩为 r,则向量组中存在 r 个向量线性无关,且任一个向量都可由这 r 个线性无关的向量线性表示(或任意 $r+1$ 个向量都线性相关).如果 $r<m$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

(4) n 个 n 维向量$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}(\boldsymbol{\alpha}_i\in F^n)$线性无关的充分必要条件是 n 个向量按列排成的 n 阶行列式(见第 5 章)

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\neq 0.$$

5. 求向量组的极大线性无关组和秩的方法(主教材 2.4 节)

(1) 向量组与其极大线性无关组是等价向量组,且其秩相等(秩为极大线性无关组所含向量的个数).等价的向量组等秩,但等秩的向量组可以不等价.如$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$与$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3\}$的秩相等,但不是等价的向量组.

(2) 一个向量组的极大线性无关组不是唯一的(而其中任意两个极大线性无关组都等价),但任意一个极大线性无关组所含向量的个数都等于向量组的秩(秩是唯一的).

(3) 求 $\mathbf{R}^n$ 中向量组$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$的极大线性无关组的方法是:

将$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$按列排成(不管原题给出的向量是行向量还是列向量,都按列排)矩阵 $\boldsymbol{A}$,用初等行变换化 $\boldsymbol{A}$ 为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{U}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{U}$ 对应的列向量组有相同的线性相关性,即

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s]\overset{\text{初等行变换}}{\Rightarrow}[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s]=\boldsymbol{U},$$

其中以$[\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}]$与$[\boldsymbol{\gamma}_{j_1},\boldsymbol{\gamma}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{j_r}]$作为系数矩阵的齐次线性方程组是同解方程组,所以它们有相同的线性相关性.因此,如果$\{\boldsymbol{\gamma}_{j_1},\boldsymbol{\gamma}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{j_r}\}$是 $\boldsymbol{U}$ 的列向量组的极大线性无关组,则对应的列向量组$\{\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}\}$就是$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$的极大线性无关组,$\boldsymbol{U}$ 中非零行的行数 r 就是向量组的秩,而且 $\boldsymbol{U}$ 中各非零行第一个非零元所在列的列向量组就是 $\boldsymbol{U}$ 的列向量组的一个极大线性无关组,与其对应的 $\boldsymbol{A}$ 中的列向量组就是$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$的一个极大线性无关组.

在一个向量组中任一向量可以用向量组的极大线性无关组线性表示,且表示法唯一.

(4) 向量用极大线性无关组线性表示的方法.例如,求$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_5\}$的极大线性无关组,并将其余向量用极大线性无关组线性表示,其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,0,0)$,$\boldsymbol{\beta}_2=(-1,2,1,-1)$,$\boldsymbol{\beta}_3=(0,1,1,-1)$,$\boldsymbol{\beta}_4=(-1,3,2,1)$,$\boldsymbol{\beta}_5=(-2,6,4,-1)$.

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5]=\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&-2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{U},$$

则与 $\boldsymbol{U}$ 中每个非零行第一个非零元所在的第 1,2,4 列对应的向量组 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 为 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_5\}$ 的一个极大线性无关组.

将 $\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_5$ 用极大线性无关组 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 线性表示的做法如下:

设 $\boldsymbol{\beta}_3=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_4\boldsymbol{\beta}_4$(这个非齐次方程组的增广矩阵为 $[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4\mid\boldsymbol{\beta}_3]$),用高斯消元法(即初等行变换)可以化为矩阵 $\boldsymbol{U}$ 中的前四列,即

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4\mid\boldsymbol{\beta}_3]\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

其同解方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_4=0,\\x_2+2x_4=1,\\x_4=0.\end{cases}$$

解得 $$x_1=1,x_2=1,x_4=0.$$

所以, $$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2.$$

再设 $$\boldsymbol{\beta}_5=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_4\boldsymbol{\beta}_4,$$

由矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的第 1,2,4,5 列得上述向量方程对应的线性方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_4=-2,\\x_2+2x_4=4,\\x_4=1.\end{cases}$$

解得 $$x_1=1,x_2=2,x_4=1.$$

所以, $$\boldsymbol{\beta}_5=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_4.$$

(5) 如何判别向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是否能用向量组$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$线性表示及表示法是否唯一这个问题就是向量方程

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\beta}_s$$

对应的非齐次线性方程组是否有解及解是否唯一的问题. 若有解,当$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$线性无关时,其解唯一;当$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$线性相关时,其解不唯一.

子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$的一组基就是向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$的一个极大线性无关组,极大线性无关组所含向量的个数(向量组的秩)就是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$的维数.

6. 判别向量组是否为线性空间的基并求向量在给定基下的坐标的方法(主教材 2.5 节)

向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$是线性空间 V 的一组基$\Leftrightarrow n=\dim V$,且$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$线性无关(或$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$线性无关,且 V 中任一个向量可由其线性表示).

注意:基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$中向量是有序的,如 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$下的坐标一般不同于在基$\{\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1\}$下的坐标.

在 $\mathbf{R}^n$ 中,求向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在给定基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$下的坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,也就是求向量方程

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

(其中 $\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})^{\mathrm{T}},j=1,2,\cdots,n;\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$)对应的非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的解.

*7. 子空间的交与和(主教材 2.6 节)

(1) 子空间的交与和的概念

线性空间的一个子空间是个集合,两个子空间的"交"与一般集合的"交"的含义是一致的,但子空间的"和"与一般集合的"并"的概念不相同. $V(F)$的子空间 V_1与 V_2的和为 $V_1+V_2=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V_2\}$. 当 V_1不含 V_2,或 V_2不含 V_1时,V_1+V_2中有很多向量既不属于 V_1,也不属于 V_2. 由于 V 的子集 V_1+V_2和 $V_1\cap V_2$对于线性空间 $V(F)$的线性运算封闭,所以它们也是 V 的子空间,但 $V_1\cup V_2$不是 V 的子空间. 例如,$\mathbf{R}^3$中过原点的斜率不同

的两条直线 L_1 和 L_2 上的全体向量的并集，即 $L_1 \cup L_2$ 上的全体向量对向量的加法运算不封闭，所以它不是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间，仅仅是 $\mathbf{R}^3$ 的一个子集合；而 L_1+L_2 上的全体向量，是两条直线张成的过原点的平面上的全体向量，它是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间.

(2) 求两个子空间的和及交的基和维数的方法

① 已知的子空间以生成子空间的形式给出. 设 $W_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$，$W_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$（其中 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 与 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$ 分别是 W_1 与 W_2 的基），则两个子空间的和为

$$W_1+W_2=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t),$$

所以，$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$ 的一组极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 为 W_1+W_2 的一组基，且

$$\dim(W_1+W_2)=s+r.$$

$$\begin{aligned}\dim(W_1\cap W_2)&=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1+W_2)\\&=s+t-(s+r)=t-r.\end{aligned}$$

求两个子空间 W_1 与 W_2 的交用下面的方法：

$\forall\,\boldsymbol{\gamma}\in W_1\cap W_2$，有

$$\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\beta}_t,$$

解向量方程

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+k_{s+1}\boldsymbol{\beta}_{s+1}+k_{s+2}\boldsymbol{\beta}_{s+2}+\cdots+k_{s+t}\boldsymbol{\beta}_{s+t}=\mathbf{0}$$

（其中 $k_{s+j}=-l_j,j=1,\cdots,t$）对应的齐次线性方程组，得 μ 个线性无关的解（基础解系参阅主教材 6.1 节）$K_1,K_2,\cdots,K_\mu$，其中

$$K_i=(k_1^{(i)},k_2^{(i)},\cdots,k_{s+t}^{(i)})^{\mathrm{T}}\qquad(i=1,2,\cdots,\mu),$$

于是

$$\boldsymbol{\gamma}_i=k_1^{(i)}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2^{(i)}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s^{(i)}\boldsymbol{\alpha}_s\in W_1\cap W_2\qquad(i=1,2,\cdots,\mu)$$

或

$$\boldsymbol{\gamma}_i=-[k_{s+1}^{(i)}\boldsymbol{\beta}_1+k_{s+2}^{(i)}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{s+t}^{(i)}\boldsymbol{\beta}_t]\in W_1\cap W_2\qquad(i=1,2,\cdots,\mu),$$

而且 $\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_\mu\}$ 为 $W_1\cap W_2$ 的基.

② 已知的子空间以齐次线性方程组的解空间的形式给出时，求两个子空间的和及交的基和维数的方法见主教材 77 页例 3.

8. 求子空间的补空间和正交补的方法

(1) 求子空间的补空间的方法

已知 W 是线性空间 F^n（或内积空间 $\mathbf{R}^n$）的 k 维子空间（$0<k<n$），求 W 的补空间.

① 已知的子空间以生成子空间的形式给出.设 $W=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)$,其中$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\}$为 W 的基,将其扩充为 F^n的基

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-k}\}.$$

令 $V=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-k})$,则

$$W\cap V=\{\mathbf{0}\},\ F^n=V\oplus W.$$

所以,$F^n=V\oplus W$ 为直和,V 为 W 的补空间.W 的补空间不唯一.

② 已知的子空间以齐次线性方程组的解空间的形式给出时,求子空间的补空间的方法见主教材 77 页例 3.

(2) 求子空间的正交补的方法

已知 W 是内积空间 $\mathbf{R}^n$的k 维子空间$(0<k<n)$,求 W 的正交补 $W^{\perp}$.

① 已知的子空间以生成子空间的形式给出.设 $W=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)$,其中$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\}$为 W 的单位正交基,将其扩展为 $\mathbf{R}^n$ 的单位正交基

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-k}\}.$$

令 $V=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-k})$,则

$$W\perp V \text{ 且 } V=W^{\perp}.$$

但要注意,W 的正交补是唯一的,而正交补的基不是唯一的.

② 已知的子空间 S 以齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

的解空间的形式给出时,求 S 的正交补 $S^{\perp}$有如下两个方法:

方法 1: 先求方程组的解空间 S 的基,再用①中方法求 S 的正交补 $S^{\perp}$.

方法 2: 设方程组的行向量组为$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$,其中

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

$\forall\,\boldsymbol{\xi}\in S$($S$ 为方程组的解空间),均有$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\xi})=0\ (i=1,\cdots,m)$.所以,

$$\boldsymbol{\xi}\perp L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m),$$

从而

$$S\perp L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m).$$

在第 6 章中还将证明

$$\dim S+\dim L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=n,$$

因此,$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$的极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 就是 $S^{\perp}$ 的基(此时,$\dim S=k,k+r=n$),即

$$S^{\perp}=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=L(\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}),$$

且 $$\dim S^{\perp}=r.$$

9．F^n的子空间 W 的基扩充为 F^n 的基的方法

设 W 是线性空间F^n的k 维子空间$(0<k<n)$，$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\}$为 W 的基，只需添加 $n-k$ 个向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-k}$，使$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-k}\}$，线性无关，这就是 F^n的一组基.

添加 $n-k$ 个向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-k}$有如下两种方法：

(1) 用 7(2)中方法求 W 的正交补 $W^{\perp}$的基$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-k}\}$.

(2) 从自然基中选取 $n-k$ 个向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-k}$，利用第 4 章矩阵的秩与第 5 章行列式的有关知识，使$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-k}\}$线性无关.

例如，将 $W=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$的基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-2)^{\mathrm{T}},$$

扩充为 $\mathbf{R}^4$的基的做法如下：将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$按列排成四阶行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2|=\begin{vmatrix}1&1&*&*\\1&1&*&*\\1&-1&*&*\\2&-2&*&*\end{vmatrix}.$$

由于第 1,2 列中第 1,3 行构成的 2 阶行列式$\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2\neq0$，因此，取 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{e}_4$，因为行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{e}_2\quad\boldsymbol{e}_4|=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&-1&0&0\\2&-2&0&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\1&1&1&0\\2&-2&0&1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=2\neq0,$$

于是$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_4\}$就是由 W 的基扩充的 $\mathbf{R}^4$ 的一组基(这里有关行列式的运算和行列式不等于零时，其 4 个列向量线性无关的性质，以后都会细讲).

10．本章的重点和难点

(1) 重点

线性空间和子空间的定义和判别；向量组线性相关性的定义、判别和证明；向量组的极大线性无关组和向量组的秩；生成子空间的基和维数；向量在给定基下的坐标；内积的定义和性质；向量的长度；欧氏空间的单位正交基.

(2) 难点

线性子空间的判别；线性相关(无关)的证明；子空间的交与和的基和维数；

维数公式;子空间的正交补.

2-5 例题分析与解答

例 1 $\mathbf{R}^2$ 对向量加法和如下定义的数量乘法是否构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间?

(1) $\lambda\circ(x,y)=(0,\lambda y),\lambda\in\mathbf{R}$;

(2) $\lambda\circ(x,y)=(\lambda x,1),\lambda\in\mathbf{R}$.

解 都不是.因为

(1) $1\circ(x,y)=(0,y)\neq(x,y),\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

(2) $0\circ(x,y)=(0,1)\neq(0,0),\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

例 2 a 取何值时,$\boldsymbol{\beta}_1=(1,3,6,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,2,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(1,-1,a,-2)^{\mathrm{T}}$线性无关?

解 设 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$,其对应的齐次线性方程组的系数矩阵为

$$\mathbf{A}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&1&-1\\6&2&a\\2&-1&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-5&-4\\0&-10&a-6\\0&-5&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-5&-4\\0&0&a+2\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

当 $a\neq-2$ 时,以 $\mathbf{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程只有零解:

$$x_1=x_2=x_3=0,$$

所以,当 $a\neq-2$ 时,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

例 3 已知 $\mathbf{R}^3$ 中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,2,10)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,5)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,4)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(1,b,c)^{\mathrm{T}}$.试问 a,b,c 满足什么条件时,

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表示法唯一?

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表示不唯一?求出一般表达式.

(研究生入学考试试题,2000 年)

解 设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$,其对应的非齐次线性方程组的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} a & -2 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & b \\ 10 & 5 & 4 & \vdots & c \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & b \\ a & -2 & -1 & \vdots & 1 \\ 10 & 5 & 4 & \vdots & c \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & b \\ 0 & -2-\frac{a}{2} & -1-\frac{a}{2} & \vdots & 1-\frac{ab}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & c-5b \end{bmatrix}.$$

(1) 当 $-2-\frac{a}{2}\neq 0$,即 $a\neq -4$ 时,得唯一解,即 $\boldsymbol{\beta}$ 可经 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表示法唯一.

(2) 当 $a=-4$ 时,此时增广矩阵经初等行变换将变换为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & b \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1+2b \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & c-5b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \vdots & -1-b \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1-3b+c \end{bmatrix}.$$

此时,当 $1-3b+c\neq 0$ 时,$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(3) 当 $a=-4,1-3b+c=0$ 时,方程组有无穷多组解,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表示不唯一.此时,$x_3=1+2b$,再取 $x_1=k$(任意常数),则 $x_2=-1-b-2k$,于是,其一般表达式为

$$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}_1-(1+b+2k)\boldsymbol{\alpha}_2+(1+2b)\boldsymbol{\alpha}_3.$$

例 4 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则下列向量组中线性无关的是(   ).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3$

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+22\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3$

(研究生入学考试试题,1997 年)

解 选(C).将各小问中的三个向量依次记为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$.用观察法排除(A),(B),因为:

(A)中 $\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1=(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$.即 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1$,所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性样关.

(B)中 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_1$,所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

对于(C),令

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0},$$

即
$$(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(2x_1+2x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(3x_2+3x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,所以,它的系数必须全部为 0,即

$$x_1+x_3=0,2x_1+2x_2=0,3x_2+3x_3=0.$$

此齐次线性方程组只有零解，即仅当 $x_1=x_2=x_3=0$ 时，才有

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0},$$

所以，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.

对(D)做同样的分析，相应的齐次线性方程组有非零解，所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性相关，排除(D).

例 5 设有任意两个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$，若存在两组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$$

成立，则(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性相关

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 都线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关

(研究生入学考试试题，1996 年)

解 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都不全为零，则

$$\lambda_1+k_1,\cdots,\lambda_m+k_m,\lambda_1-k_1,\cdots,\lambda_m-k_m$$

也不全为零，所以，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关，但得不出(A)或(B)成立.

由 $(\lambda_1+k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$，得 $\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1)+\cdots+\lambda_m(\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m)+\cdots+k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1)+\cdots+k_m(\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m)=\mathbf{0}$.

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都不全为零，所以

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$$

线性相关，则(D)成立，(C)不成立.

例 6 若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 必可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示　　(B) $\boldsymbol{\beta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示

(C) $\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示　　(D) $\boldsymbol{\delta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

(研究生入学考试试题，1998 年)

解 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，所以部分组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关. 又 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示($\boldsymbol{\gamma}$ 的系数取 0). 所以，(C)成立 .

注意： $\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示，不能推出 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示，如 $\boldsymbol{\delta}=k_1\boldsymbol{\beta}+k_2\boldsymbol{\gamma}+0\boldsymbol{\alpha}$.

例 7 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(9,6,-7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(a,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(b,1,0)^{\mathrm{T}}$，且$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$的秩等于$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$的秩. $\boldsymbol{\beta}_3$可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示. 求 a,b 的值.

解 看得出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关(不成比例). 设 $\boldsymbol{\alpha}_3=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，则

$$k_1(1,2,-3)^{\mathrm{T}}+k_2(3,0,1)^{\mathrm{T}}=(9,6,-7)^{\mathrm{T}},$$

从第 2 个分量看得出 $2k_1+0=6,k_1=3$. 再从第一个分量看得出 $3+3k_2=9$，$k_2=2$. 所以，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$. 则$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$与$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$的秩都是 2.

由 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(a,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(b,1,0)^{\mathrm{T}}$，看出 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关(不成比例)，而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性相关，所以，$\boldsymbol{\beta}_3=k_3\boldsymbol{\beta}_1+k_4\boldsymbol{\beta}_2$，即

$$(b,1,0)^{\mathrm{T}}=k_3(0,1,-1)^{\mathrm{T}}+k_4(a,2,1)^{\mathrm{T}},$$

得

$$\begin{cases}b=k_4a,\\k_3+2k_4=1,\\-k_3+k_4=0,\end{cases}$$

于是，

$$k_3=k_4=\frac{1}{3},b=\frac{a}{3}.$$

$\boldsymbol{\beta}_3$可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，从而 $\boldsymbol{\beta}_3$也可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示. 令

$$(b,1,0)^{\mathrm{T}}=k_5(1,2,-3)^{\mathrm{T}}+k_6(3,0,1)^{\mathrm{T}},$$

可解得

$$k_5=\frac{1}{2}k_6=\frac{3}{2},b=5,$$

所以，

$$a=3b=15.$$

例 8 已知向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$，(Ⅲ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$. 各向量组的秩分别为 r(Ⅰ)$=r$(Ⅱ)$=3$，r(Ⅲ)$=4$. 证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$的秩为 4.

证 由 r(Ⅰ)$=r$(Ⅱ)$=3$ 知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_4$可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

由 r(Ⅲ)$=4$ 知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$线性无关. 欲证明 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=4$，只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示. 用反证法. 若 $\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$能以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，令

$$\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4=a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_2+c\boldsymbol{\alpha}_3,$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_4+a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_2+c\boldsymbol{\alpha}_3,$$

$\boldsymbol{\alpha}_4$可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，所以 $\boldsymbol{\alpha}_5$能以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，从而，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)=3<4$. 与 r(Ⅲ)$=4$ 矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示. 因此，

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.

例 9 n 维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3<s<n)$线性无关的充要条件是(　　).

(A) 存在一组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$,使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$$

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意两个向量都线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$存在一个向量,它不能用其余向量的线性表示

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意一个向量都不能用其余向量线性表示.

(研究生入学考试试题,1988 年)

解 选(D).这里(A),(B),(C)都是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关的必要条件,而非充分条件.就(A)而言,线性相关的向量组也存在不全为零的数,使其线性组合为非零向量.例如,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,\cdots,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,\cdots,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,\cdots,0)$而 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(4,2,\cdots,0)$.

例 10 求$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_5\}$的极大线性无关组,并将其余向量用极大线性无关组线性表示,其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,0,0)$,$\boldsymbol{\beta}_2=(-1,2,1,-1)$,$\boldsymbol{\beta}_3=(0,1,1,-1)$,$\boldsymbol{\beta}_4=(-1,3,2,1)$,$\boldsymbol{\beta}_5=(-2,6,4,-1)$.

解

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5]=\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&-2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{U},$$

则与 $\boldsymbol{U}$ 中每个非零行第一个非零元所在的第 1,2,4 列对应的向量组$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4\}$为$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5\}$的一个极大线性无关组.

将 $\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_5$用极大线性无关组$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4\}$线性表示.

设 $\boldsymbol{\beta}_3=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_4\boldsymbol{\beta}_4$(这个非齐次方程组的增广矩阵$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_3]$用高斯消元法(即初等行变换)可以化为 $\boldsymbol{U}$ 中的前四列),其同解方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_4=0,\\x_2+2x_4=1,\end{cases}$$

解得 $$x_1=1,x_2=1,x_4=0,$$

所以, $$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2.$$

再设

$$\boldsymbol{\beta}_5=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_4\boldsymbol{\beta}_4,$$

其同解方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_4=-2,\\x_2+2x_4=4,\\x_4=1,\end{cases}$$

解得 $$x_1=1,x_2=2,x_4=1,$$

所以, $$\boldsymbol{\beta}_5=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_4.$$

* **例 11** 设 $\mathbf{R}^4$空间的子集

$$W_1=\{(x_1,\cdots,x_4)\mid x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0\text{ 且 }x_2-x_3+x_4=0\},$$

$$W_2=\{(x_1,\cdots,x_4)\mid x_1+3x_2-3x_4=0\text{ 且 }7x_2-3x_3-x_4=0\}.$$

(1) 求 W_1+W_2的基和维数,以及 W_1+W_2的单位正交基;

(2) 求 $W_1\cap W_2$的基和维数;

(3) 求 $W_1\cap W_2$的正交补 .

(清华大学试题)

解 (1) 齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0,\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$$

的解空间为

$$W_1=L((-1,1,1,0)^{\mathrm T},(2,-1,0,1)^{\mathrm T}).$$

齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_2-3x_4=0,\\7x_2-3x_3-x_4=0\end{cases}$$

的解空间为

$$W_2=L((-9,3,7,0)^{\mathrm T},(18,1,0,7)^{\mathrm T}).$$

$$\begin{aligned}W_1+W_2&=L((-1,1,1,0)^{\mathrm T},(2,-1,0,1)^{\mathrm T},(-9,3,7,0)^{\mathrm T},(18,1,0,7)^{\mathrm T})\\&=L((-1,1,1,0)^{\mathrm T},(2,-1,0,1)^{\mathrm T},(-9,3,7,0)^{\mathrm T}).\end{aligned}$$

用 Schmidt 正交化方法(先正交化再单位化)得 W_1+W_2的单位正交基.

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt3}(-1,1,1,0)^{\mathrm T},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt3}(1,0,1,1)^{\mathrm T};\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{39}}(3,5,-2,-1)^{\mathrm T}.$$

$$\dim(W_1+W_2)=3.$$

(2) 方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0,\\ x_2-x_3+x_4=0,\\ x_1+3x_2-3x_4=0,\\ 7x_2-3x_3-x_4=0\end{cases}\tag{1}$$

的解空间就是 $W_1\cap W_2$,所以,

$$W_1\cap W_2=L((0,1,2,1)^{\mathrm T}),\dim(W_1\cap W_2)=1.$$

(3) 方程组(1)的行向量组为

$$(1,-2,3,-4)^{\mathrm T},(0,1,-1,1)^{\mathrm T},(1,3,0,-3)^{\mathrm T},(0,7,-3,-1)^{\mathrm T},$$

它们都和方程组(1)的任一个解正交.前三个向量为其极大线性无关组,所以,

$$(W_1\cap W_2)^{\perp}=L((1,-2,3,-4)^{\mathrm T},(0,1,-1,1)^{\mathrm T},(1,3,0,-3)^{\mathrm T}),$$

$$\dim((W_1\cap W_2)^{\perp})=3.$$

例 12 已知 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\eta}$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关,问 $\boldsymbol{\delta}$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\eta}$ 线性表示?证明你的论断.

解 $\boldsymbol{\delta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\eta}$ 线性表示.由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\eta}$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 也线性无关.又因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关,所以 $\boldsymbol{\delta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示,从而 $\boldsymbol{\delta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\eta}$ 线性表示.

例 13 已知欧氏空间 $V(R)$中向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关,且 $\boldsymbol{\alpha}_i\neq\mathbf{0}$,内积

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_2)=0,i=1,2,\cdots,m.$$

证明:$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$线性无关的充分必要条件是$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$线性无关.

(清华大学试题)

证 必要性:$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$线性无关,其部分组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$必线性无关.

充分性:已知$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$线性无关.

证法 1 设

$$\boldsymbol{\gamma}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0},\tag{1}$$

则内积$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}_1)=0,(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}_2)=0$,由$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=0$ $(i=1,\cdots,m;j=1,2)$得

$$\begin{cases}k_1(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)=0,\\ k_1(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)+k_2(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)=0.\end{cases}\tag{2}$$

由于

$$\Delta=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)-(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)^2\neq0(\text{由柯西不等式知 }\Delta<0),$$

方程组(2)只有零解：$k_1=k_2=0$，代入(1)，得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=0,$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，所以 $\lambda_1=\cdots=\lambda_m=0$，即 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 线性无关.

证法 2　设

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=0. \tag{3}$$

内积

$$\begin{aligned}((k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2),(k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2))&=(-(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m),(k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2))\\&=(-\sum_{i=1}^m\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,(k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2))\\&=(-\sum_{i=1}^m\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,k_1\boldsymbol{\beta}_1)+(-\sum_{i=1}^m\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,k_2\boldsymbol{\beta}_2)=0+0=0,\end{aligned}$$

所以，$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=0$. 又 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，所以 $k_1=k_2=0$，代入(3)，得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$，又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，所以 $\lambda_1=\cdots=\lambda_m=0$. 即 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 线性无关.

证法 3　设 $W_1=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，$W_2=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$. 由于内积 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_2)=0$，$i=1,2,\cdots,m$. 所以 $W_1\perp W_2$，$W_1\cap W_2=\{0\}$. W_1+W_2 为直和，由维数公式知

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2=m+2,$$

所以 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 线性无关.

补充证明：

若 $W_1\perp W_2$，则 $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$.

证明：$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in W_1\cap W_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}\in W_1$，$\boldsymbol{\alpha}\in W_2$，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$，所以，$\boldsymbol{\alpha}=0$.

2－6　习题提示与解答

1. 检验下列集合对指定的加法和数量乘法，是否构成实数域上的线性空间.

(1) $\mathbf{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$ 对通常的向量加法和如下定义的数量乘法：

$$\lambda\circ(x,y)=(\lambda x,y);$$

(2) 集合 $\mathbf{R}^2$，对通常的向量加法和如下定义的数量乘法：

$$\lambda\circ(x,y)=(x,y),\ \forall\,\lambda\in\mathbf{R};$$

(3) 集合 $\mathbf{R}^2$，对通常的向量加法和如下定义的数量乘法：

$$\lambda\circ(x,y)=\begin{cases}(0,0), & \lambda=0,\\(\lambda x,\lambda^{-1}y), & \lambda\neq0;\end{cases}$$

(4) 平面上不平行于某一向量 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 的所有起点在原点的向量,对通常的向量加法和数量乘法;

(5) 有理数集 $\mathbf{Q}$ 对普通的数的加法和乘法;

(6) 复数集 $\mathbf{C}$ 对普通的数的加法和乘法;

*(7) 正实数集 $\mathbf{R}^+$ 对如下定义的加法和数量乘法:

$$a \oplus b = ab, \lambda \circ a = a^{\lambda};$$

*(8) $\mathbf{R}_+^n = \{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_i \in \mathbf{R}^+$,即 $a_i > 0\}$,对如下定义的向量加法和数量乘法:

$$(a_1, \cdots, a_n) \oplus (b_1, \cdots, b_n) = (a_1 b_1, \cdots, a_n b_n),$$
$$\lambda \circ (a_1, \cdots, a_n) = (a_1^{\lambda}, \cdots, a_n^{\lambda});$$

*(9) 集合 V 为区间$[a,b]$上所有函数值大于等于 0 的实变量函数,即

$$V = \{f \mid f(x) \geqslant 0, \forall x \in [a,b]\},$$

对通常的函数加法和数与函数的乘法,即

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\lambda \circ f)(x) = \lambda f(x);$$

(10) $$V_1 = \{f \mid x \in \mathbf{R}, f(x) \in \mathbf{R}, \text{且 } f(-x) = -f(x)\},$$
$$V_2 = \{f \mid x \in \mathbf{R}, f(x) \in \mathbf{R}, f(0) = 1, \text{且 } f(-x) = f(x)\},$$

对题(9)所定义的加法和数量乘法;

*(11) $V = \{f \mid x \in \mathbf{R}, f(x) \in \mathbf{C}$(即 f 为实变量复值函数),且 $f(-x) = \overline{f(x)}$(后者为 $f(x)$ 的共轭复数)$\}$,对题(9)所定义的加法和数量乘法.

解 (1) 不是.因为

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \circ (x, y) &= ((\lambda + \mu)x, y) \\ &\neq \lambda \circ (x, y) + \mu \circ (x, y) \\ &= (\lambda x, y) + (\mu x, y) \\ &= ((\lambda + \mu)x, 2y).\end{aligned}$$

(2) 不是.因为

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \circ (x, y) &= (x, y) \\ &\neq \lambda \circ (x, y) + \mu \circ (x, y) \\ &= (2x, 2y).\end{aligned}$$

(3) 不是.因为

$$\begin{aligned}(1+2) \circ (x, y) &= \left(3x, \frac{1}{3}y\right) \\ &\neq 1 \circ (x, y) + 2 \circ (x, y) \\ &= (x, y) + \left(2x, \frac{1}{2}y\right)\end{aligned}$$

$$=\left(3x,\frac{3}{2}y\right).$$

(4) 不是.平面上不平行于向量 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 的两个向量之和可能平行于 $\boldsymbol{\alpha}_0$,所以,加法不封闭.

(5) 不是.因为实数乘有理数一般不是有理数,所以,数量乘法不封闭.

(6) 是.因为这里的加法和数量乘法都封闭,并且分别满足定义中规定的四条运算性质.

(7) 是.因为这里的加法和数量乘法都封闭,并且分别满足定义中规定的四条运算性质.例如,加法的单位元为 1,即

$$1\oplus a=a\oplus 1=a;$$

每个正实数 a 的逆元为 $\frac{1}{a}$,即

$$1\oplus\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\oplus 1=1.$$

再如,

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\circ a&=a^{\lambda+\mu}=a^{\lambda}a^{\mu}\\&=a^{\lambda}\oplus a^{\mu}=\lambda\circ a\oplus\mu\circ a.\end{aligned}$$

注意:$\lambda+\mu$ 中的"+"是实数域中数的加法,而后者的 $\oplus$ 为正实数集 $\mathbf{R}^+$ 定义的加法 .

(8) 是.这是把第(7)题推广到 $\mathbf{R}^+$ 中的 n 元向量的集合.

(9) 不是 . 当 $\lambda\in\mathbf{R}$,且 $\lambda<0$ 时,$(\lambda\circ f)(x)=\lambda f(x)\leqslant 0$.此时,$\lambda f(x)\notin V$,数乘不封闭.

(10) V_1 是.奇函数对通常的函数加法和数与函数的乘法封闭.

V_2 不是.因为 $\forall f(x),g(x)\in V_2$,$f(0)=1$,$g(0)=1$,则

$$(f\oplus g)(0)=f(0)+g(0)=2\neq 1.$$

$$(f\oplus g)\notin V_2.$$

(11) 是.首先,V 是非空集合,因为 $f(x)=0$ 时,$\overline{f(x)}=\bar{0}=0$,即 $f(x)=0\in V$.其次,加法和数量乘法都封闭,因为 $\forall f(x),g(x)\in V$,有

$$\begin{aligned}(f\oplus g)(-x)&=f(-x)+g(-x)=\overline{f(x)}+\overline{g(x)}\\&=\overline{f(x)+g(x)}=\overline{(f\oplus g)(x)}\in V,\end{aligned}$$

加法封闭;

$$\begin{aligned}(\lambda\circ f)(-x)&=\lambda f(-x)=\lambda\,\overline{f(x)}\\&=\overline{\lambda f(x)}=\overline{(\lambda\circ f)(x)}\in V,\end{aligned}$$

数乘封闭(因为 $\lambda\in\mathbf{R},\lambda=\bar{\lambda}$).而且,加法和数量乘法也分别满足定义的四条性质(检验略去).

3. 判断下列子集是否为给定线性空间的子空间(并对 $\mathbf{R}^3$ 中的子集说明其几何意义):

(1) $W=\{(x_1,\cdots,x_n)\in F^n \mid a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$,其中 $a_1,\cdots,a_n$ 为域 F 中的固定数量$\}$;

(2) $W_1=\{(x,1,0)\in\mathbf{R}^3\}$, $W_2=\{(x,y,0)\in\mathbf{R}^3\}$;

(3) $W_1=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x-3y+z=0\}$, $W_2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x-3y+z=1\}$;

(4) $W_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid \frac{x}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-1}{-3}\right\}$; $W_2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x-y=0$ 且 $x+y+z=0\}$;

(5) $W_1=\{p(x)\in R[x] \mid p(1)=0\}$, $W_2=\{p(x)\in R[x]_n \mid p(1)=p(0)\}$;

(6) $W=\{f\in F(-\infty,+\infty) \mid f(-x)=f(x), \forall x\in\mathbf{R}\}$,其中 $F(-\infty,+\infty)$是所有定义在$(-\infty,+\infty)$上的实值函数对通常的函数加法及数与函数的乘法在实数域上构成的线性空间.

解 (1) 是. W 是 n 元一次方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$ 的解向量的集合(向量 $0\in W, W\neq\varnothing$),满足方程的解向量的和及数乘解向量还是方程的解向量,所以, W 对加法和数乘封闭.

几何意义: $n=3$ 时 W 是 $\mathbf{R}^3$ 上与向量(a_1,a_2,a_3)正交的过原点的平面上的全体向量.

(2) W_1 不是. 对加法不封闭.

W_2 是. W_2 是 xOy 平面上过原点的全体向量(对加法和数乘封闭).

(3) W_1 是. W_1 是过原点的平面 $x-3y+z=0$ 上的全体向量(满足方程的两个解向量的和及数乘解向量还是方程的解向量).

W_2 不是. W_2 是不过原点的该平面上的全体向量(满足方程的解向量的和及数乘解向量不是方程的解向量).

(4) W_1 不是. W_1 是不过原点的该直线上的全体向量(满足方程的两个解向量的和不再满足方程).

W_2 是. W_2 是过原点的该直线上的全体向量(满足方程组的两个解向量的和及数乘解向量还是满足方程组).

(5) W_1 是. 因为 W_1 对全体多项式构成的线性空间 $R[x]$ 的"加法"和"数量乘法"是封闭的,即 $\forall p,q\in W_1, \forall k\in R$,有

$$(p+q)(1)=p(1)+q(1)=0.$$
$$(kp)(1)=k[p(1)]=0.$$

所以，$(p+q)\in W_1, kp\in W_1$.

W_2是. 因为 W_2对全体多项式构成的线性空间 $R[x]_n$的“加法”和“数量乘法”是封闭的，即 $\forall p,q\in W_2, \forall k\in R$,

$$(p+q)(1)=p(1)+q(1)=p(0)+q(0)=(p+q)(0),$$
$$(kp)(1)=k(p(1))=k(p(0))=(kp)(0).$$

所以，$(p+q)\in W_2, kp\in W_2$.

(6) 是. 因为 W 是全体偶函数构成的集合，而偶函数的和及数乘偶函数还都是偶函数，即 W 对线性空间 $F(-\infty,+\infty)$中的“加法”和“数量乘法”是封闭的.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\in\mathbf{R}^n$，$c_1,c_2,c_3\in\mathbf{R}$，如果 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+c_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，且 $c_1c_3\neq0$. 证明：$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=L(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$.

证
$$\boldsymbol{\alpha}_2=0\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3=-\frac{1}{c_3}(c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2).$$

又
$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{1}{c_1}(c_2\boldsymbol{\alpha}_2+c_3\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3.$$

$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，并且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$可以由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示；所以$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$与$\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$为等价向量组，因此，$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=L(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$.

5. 设 W 是线性空间 V 的一个非平凡子空间，给定非零向量 $\boldsymbol{\beta}\in V\setminus W$，证明：$W_1=\{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}\in W\}$不是 V 的一个子空间.

证 用反证法. 假设 W_1是 V 的子空间.

证法 1 对 $\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2\in W_1$，有

$$\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2\in W_1,$$

即
$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2\in W,$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\in W$，则 $\boldsymbol{\beta}\in W$，矛盾. 所以，W_1不是 V 的子空间.

证法 2 零元 $\mathbf{0}\in W_1$，即 $\exists\boldsymbol{\alpha}\in W$，有 $\mathbf{0}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\in W_1$，即 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}\in W$，矛盾. 所以，$W_1$不是 V 的子空间.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,2)$，问下列 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$属于 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$吗？如属于，它们由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示唯一吗？为什么？

(1) $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,-1)$；　　(2) $\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,-1)$.

解 $\boldsymbol{\beta}_1=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$无解，$\boldsymbol{\beta}_1\notin L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$；$\boldsymbol{\beta}_2=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$有解，且解不唯一，$\boldsymbol{\beta}_2\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$. 例如，$\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_3$；$\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$. 表示法不唯一.

7. 判别下列向量组的线性相关性：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,5)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,6)$;

(2) $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,2,4)$, $\boldsymbol{\beta}_2=(0,3,1,2)$, $\boldsymbol{\beta}_3=(3,0,7,14)$;

(3) $R[x]_3$中:$p_1(x)=1$, $p_2(x)=x-x_0$, $p_3(x)=(x-x_0)^2$,其中常数 $x_0\in\mathbf{R}$.

解 (1) 设
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$
得
$$x_1=x_2=-1, x_3=1,$$
所以,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关.

(2) 设
$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0},$$
得
$$x_1=3, x_2=1, x_3=-1,$$
所以,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性相关.

(3) 设 $k_1+k_2(x-x_0)+k_3(x-x_0)^2=0$(零多项式),得

$k_1=k_2=k_3=0$,所以,$p_1(x)$,$p_2(x)$,$p_3(x)$线性无关.

8. 证明:如果向量组有一个部分组线性相关,则整个向量组也线性相关.

提示 若存在不全为零的 $x_1,x_2,\cdots,x_s$,使得
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$
则存在不全为零的 $x_1,x_2,\cdots,x_s,0,\cdots,0$,使得
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}.$$

9. 设向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\subset\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$是分别在$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的第 n 个分量后任意加一个分量 $b_1,b_2,\cdots,b_s$而形成的 $n+1$ 元向量组,证明:若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关,则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$也线性无关.叙述这个命题的等价命题.

证 设
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}, \tag{1}$$
$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\beta}_s=\mathbf{0}, \tag{2}$$
则(1)对应的齐次线性方程组有 n 个方程,再添加 1 个方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_sx_s=0$,即为(2)对应的齐次线性方程组.所以,若(1)对应的齐次线性方程组只有零解,则(2)对应的齐次线性方程组也只有零解.因此,由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关,可以推出 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$也线性无关.

其等价命题(逆否命题)是:若 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性相关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$也线性相关,即线性相关的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$,每个向量去第 i 个分量后的向量组仍然线性相关.

10. 下列命题是否正确?如正确,证明之;如不正确,举反例.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $(m>2)$线性相关,则其中每一向量都是其余向量的线性组合.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,则其中每一向量都不是其余向量的线性组合.这个命题的等价命题应如何叙述?

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m>2)$线性无关的充要条件是任意两个向量都线性无关.

(4) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性相关,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性相关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2$也线性相关.

(5) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$也线性无关.

(6) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$也线性相关.

*(7) 设 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$是 $\mathbf{R}^3$的一组基,非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_0\in\mathbf{R}^3$,则$\{\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}_3\}$(其中三个向量都是非零向量)也是 $\mathbf{R}^3$的一组基.

(8) 设 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$是 $\mathbf{R}^2$的一组基,则$\{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\}$也是 $\mathbf{R}^2$的一组基.

(9) 一个有限维线性空间只含有有限个子空间.

(10) 如果 W_1,W_2是 $\mathbf{R}^n$的两个子空间,B_1,B_2分别是 W_1,W_2的基,则存在 $\mathbf{R}^n$的一组基B,使得 $B\supset\{B_1\cup B_2\}$.

解 (1) 不正确.例如,$\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1$线性相关.当 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关时,$\boldsymbol{\alpha}_2$不是其余向量的线性组合.

(2) 正确.其等价命题为:若存在一个向量是其余向量的线性组合,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.

(3) 不正确.是必要条件而非充要条件.例如,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2$,其中任意两个向量都线性无关,但 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2$线性相关.

(4) 不正确.例如,$\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1$线性无关),而 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1$与 $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1$是线性无关的.

(5) 不正确.正确的结论是:n 为偶数时线性相关;n 为奇数时线性无关.因为,设

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+k_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n)+k_n(\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0},$$

即

$$(k_1+k_n)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_{n-1}+k_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

得

$$\begin{cases} k_1+k_n=0, \\ k_1+k_2=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{n-1}+k_n=0. \end{cases}$$

当 n 为偶数时,方程组有非零解

$$k_1=1,k_2=-1,\cdots,k_{n-1}=1,k_n=-1,$$

从而向量组线性相关;

当 n 为奇数时,方程组只有零解,于是,向量组线性无关.

(6) 正确.不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_3$可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示,则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 都可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示,所以,$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$线性相关.

(7) 不正确.因为取 $\boldsymbol{\alpha}_0=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,则有

$$\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}_1=(\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}_3),$$

所以,$\{\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}_3\}$线性相关,从而不是 $\mathbf{R}^3$ 的基.当然,如果取 $\boldsymbol{\alpha}_0=\boldsymbol{\alpha}_1$,则$\{\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}_3\}$是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基.

(8) 正确.因为若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$也线性无关.

(9) 不正确.例如,$\mathbf{R}^3$ 中过原点的平面 W,与过原点的直线 W_1,都是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间.

(10) 不正确.例如,$\mathbf{R}^3$ 中 $W_1=L(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$,$W_2=L(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3)$,而 $\mathbf{R}^3$ 中的任一组基不可能包含 4 个向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$.

11. 在函数空间中,判断下列向量组的线性相关性,并证明之:

(1) $1,\sin^2 x,\cos 2x$;

*(2) $1,2^x,2^{-x}$.

解 (1) $\cos 2x=1-2\sin^2 x$,所以 $1,\sin^2 x,\cos 2x$ 线性相关.

(2) 设 $k_1+k_2 2^x+k_3 2^{-x}=0$(对任意 x 成立),当 $x=0,1,-1$ 时,所得 k_1,k_2,k_3的齐次线性方程组只有零解,所以,$1,2^x,2^{-x}$线性无关.

12. 设在线性空间 $V(F)$中,向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$的线性组合,但不是$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}\}$的线性组合,证明:

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\alpha}_r)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}).$$

证 设
$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$$
$k_r\neq 0$(否则,与已知矛盾),

则
$$\boldsymbol{\alpha}_r=k_r^{-1}(\boldsymbol{\beta}-k_1\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}),$$
即 $\boldsymbol{\alpha}_r$可用$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}$线性表示,因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为等价向量组,所以,

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}).$$

13. 证明:若$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$线性相关,但其中任意三个向量线性无关,则存在一组全不为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$,使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0},$$

证 用反证法.$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关,则存在一组不全为零的数 λ_1,λ_2,λ_3,λ_4,使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}.$$

如果 $\lambda_1=0$,则存在一组不全为零的数 $\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$,使得

$$\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0},$$

则$\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$线性相关,与题设矛盾,所以 $\lambda_1\neq 0$.

同理可证

$$\lambda_2\neq 0,\lambda_3\neq 0,\lambda_4\neq 0.$$

所以,$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$全不为零.

14. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关,证明:$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关的充要条件是$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示.

证 必要性是显然的.因为线性无关的向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$中任一个向量都不能用其余向量线性表示.

充分性:用反证法.假设 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关,则存在一组不全为零的数 $k,k_1,\cdots,k_r$,使得

$$k\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

其中 $k\neq 0$(否则,$k=0$,再由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关,又得 $k_1=\cdots=k_r=0$,与 $k,k_1,\cdots,k_r$不全为 0 矛盾).于是,

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{1}{k}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r),$$

即$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示,与条件矛盾.所以,$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示,就必有$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关.

***15.** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in F^n$,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关的充要条件是$F^n$中任一向量都可由它们线性表示.(提示:证明充分性时,利用 F^n的自然基可被$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示.)

证 必要性:$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关,任取 $\boldsymbol{\beta}\in F^n$,则 $n+1$ 个 n 维向量$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性相关,于是,$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示,且表示法唯一.

充分性:自然基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示,$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$也可由$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$线性表示,所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$为等价向量组,它们的秩相等,故$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关.

***16.** 证明:若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可经向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$线性表示,则表示法唯一的充要条件是$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$线性无关.

证 必要性见定理 2.4.充分性:用反证法.设有两种表示法

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha},$$

于是

$$(k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(k_r-l_r)\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

其中 $k_1-l_1,\cdots,k_r-l_r$ 不全为零，所以，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，与题设矛盾.因此，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关时，$\boldsymbol{\alpha}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 表示的表示法唯一.

17. 线性空间 $V(F)$ 中，对于给定的一个向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，如何判断它是否是 $V(F)$ 的一组基向量？如果已知 $\dim V=n$，又如何判断 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是否是 $V(F)$ 的一组基向量？什么是有限维线性空间的维数？

解 (1) 判断 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $V(F)$ 的一组基向量的方法是：先判断 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是线性无关的；再 $\forall\,\boldsymbol{\beta}\in V$，证明 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

(2) 若 $\dim V=n$，只要证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关即可.

(3) 有限维线性空间的维数等于基向量的个数.

18. 求下列线性空间的维数及其一组基(向量)：

(1) 第 1 题中的(6),(7),(8)；

(2) 全体二元复数向量在复数域上构成的线性空间；

*(3) 全体二元复数向量在实数域上构成的线性空间.

解 (1) 第 1 题(6)中的维数是 2，基是 $\{1,\mathrm{i}\}$；第 1 题(7)中的维数是 1，基是 $\{a\mid a>0,a\neq1\}$；第 1 题(8)中的维数是 n，基是 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\mid\boldsymbol{\alpha}_i=(1,\cdots,1,a_i,1,\cdots,1),a_i>0,a_i\neq1,i=1,2,\cdots,n\}$.

(2) $\mathbf{C}^2(\mathbf{C})$ 的维数是 2，基是 $\{(1,0),(0,1)\}$.

(3) $\mathbf{C}^2(\mathbf{R})$ 的维数是 4，基是 $\{(1,0),(0,1),(\mathrm{i},0),(0,\mathrm{i})\}$.

19. 求下列子空间的一组基及其维数：

(1) $W_1=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3\mid x_1+x_2+x_3=0,x_1-x_2+x_3=0\}$；

(2) $W_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{R}^4\mid x_1+x_2-x_3-x_4=0\}$；

(3) $W_3=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{R}^4\mid x_1-x_2-x_3+x_4=0\}$；

(4) $W_4=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,3)$；

(5) $W_5=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,3,-1),\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,2),\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-3)$.

解 (1) W_1 为齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$$

的解空间 $L((-1,1,0))$，$(-1,1,0)$ 为一组基，$\dim W_1=1$.

(2) $$W_2=L((-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)),$$

$(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)$ 为一组基，$\dim W_2=3$.

(3) $$W_3=L((0,1,0,1),(1,0,1,0),(1,1,0,0)),$$

$(0,1,0,1),(1,0,1,0),(1,1,0,0)$为一组基，$\dim W_3=3$.

(4) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，所以，$W_4=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为一组基（$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$或$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$也都是 W_4的一组基），$\dim W_4=2$.

(5) 因为 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$，所以，$W_5=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$为一组基（$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3$或 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$也都是 W_5的一组基），$\dim W_5=2$.

20. 设

$$W_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{R}^4\mid x_3=x_2,x_4=x_1\},$$
$$W_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{R}^4\mid x_3=-x_2,x_4=-x_1\}.$$

证明：

(1) $\{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\}$是 W_1的基，$\{\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3\}$是 W_2的基，其中$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$是 $\mathbf{R}^4$的自然基.

*(2) $\mathbf{R}^4=W_1\oplus W_2$，即 $\mathbf{R}^4$是 W_1与 W_2的直和.

证 (1) 因为

$$\begin{cases}x_2-x_3=0,\\x_1-x_4=0\end{cases}$$

的所有解为

$$k_1(1,0,0,1)+k_2(0,1,1,0)=k_1(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_4)+k_2(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\quad(k_1,k_2\text{为任意常数}),$$

又 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_4$与 $\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$不成比例而线性无关，所以它们是 W_1的基.

因为

$$\begin{cases}x_2+x_3=0,\\x_1+x_4=0\end{cases}$$

的所有解为

$$k_1(1,0,0,-1)+k_2(0,1,-1,0)=k_1(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_4)+k_2(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)\quad(k_1,k_2\text{为任意常数}),$$

又 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_4$与 $\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$不成比例而线性无关，所以它们是 W_2的基.

(2) 因为$(1,0,0,1),(0,1,1,0),(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)$是线性无关解，所以，

$$W_1+W_2=L(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)=\mathbf{R}^4.$$

又因为

$$\begin{aligned}\dim(W_1\cap W_2)&=\dim(W_1+W_2)-\dim W_1-\dim W_2\\&=4-2-2\\&=0,\end{aligned}$$

即

$$W_1\cap W_2=\{0\}\quad(\text{零子空间}).$$

所以，W_1+W_2为直和.

21. 已知$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$是线性空间 $V(F)$的一组基向量，如何求 $V(F)$中任

一向量关于这一组基的坐标？

解 设 $\boldsymbol{\beta}\in V(F)$，则方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$$

的解 $\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的坐标(向量).

22. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，并求 $\boldsymbol{\beta}=(1,-2,4)$ 关于这组基的坐标.

解 设
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$
得
$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2+x_3=0,\\x_1+x_3=0.\end{cases}$$
由于此方程组只有零解，所以，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，从而它是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基.

设
$$\boldsymbol{\beta}=x_4\boldsymbol{\alpha}_1+x_5\boldsymbol{\alpha}_2+x_6\boldsymbol{\alpha}_3,$$
得
$$\begin{cases}x_4+x_5=1,\\x_5+x_6=-2,\\x_4+x_6=4.\end{cases}$$
此方程组的解 $\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{7}{2}\\-\dfrac{5}{2}\\\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$ 就是 $\boldsymbol{\beta}$ 关于基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 的坐标.

23. 已知 $\mathbf{R}^2$ 的两组基为 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ 和 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(5,-4)$，$\boldsymbol{e}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$. 试求一个非零向量 $\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^2$，使 $\boldsymbol{\beta}$ 关于这两组基有相同的坐标，并求这个 $\boldsymbol{\beta}$ 关于基 $\{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\}$ 的坐标，其中 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1)$，$\boldsymbol{\xi}_2=(1,1)$.

解 由于
$$\beta=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2,$$
即
$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{e}_1)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{e}_2)=\mathbf{0},$$
由此得
$$\begin{cases}x_1+5x_2=0,\\-x_1-5x_2=0,\end{cases}$$
其解为
$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix},$$
于是，
$$\boldsymbol{\beta}=k(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2)=k\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix},$$

取 $k=1$,得一个 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}$.再设 $\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\xi}_1+y_2\boldsymbol{\xi}_2$,得

$$\begin{cases}-y_1+y_2=5,\\ y_1+y_2=-1,\end{cases}$$

其解 $\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}=(-3,2)^{\mathrm{T}}$为 $\boldsymbol{\beta}$ 关于基$\{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\}$的坐标.

24. 证明:$\{1,x-2,(x-2)^2\}$是 $R[x]_3$ 的一组基,并求 $f(x)=a+bx+cx^2$关于这组基的坐标.

解 设
$$k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3=0,$$
即
$$k_1+k_2(x-2)+k_3(x-2)^2=0(\text{零多项式}),$$
得

$$\begin{cases}k_1-2k_2+4k_3=0,\\ k_2-4k_3=0,\\ k_3=0.\end{cases}$$

此方程组只有零解,所以,$1,(x-2),(x-2)^2$线性无关.又因为 $\dim R[x]_3=3$,故$\{1,(x-2),(x-2)^2\}$是 $R[x]_3$的一组基.

设
$$f(x)=k_4f_1+k_5f_2+k_6f_3,$$
即

$$\begin{cases}k_4-2k_5+4k_6=a,\\ k_5-4k_6=b,\\ k_6=c.\end{cases}$$

该方程组的解
$$\begin{bmatrix}k_4\\k_5\\k_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+2b+4c\\b+4c\\c\end{bmatrix}$$
就是 $f(x)$关于基$\{1,(x-2),(x-2)^2\}$的坐标.

25. 已知 $B=\{1,x-a,(x-a)^2\}(a\neq0)$是 $R[x]_3$的一组基,求 $R[x]_3$的自然基$\{1,x,x^2\}$中每个向量关于基 B 的坐标.

解 记 $f_1=1,f_2=x-a,f_3=(x-a)^2$,设
$$k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3=1,$$
即
$$k_1+k_2(x-a)+k_3(x-a)^2=1.$$
与 24 题同理,得“1”关于基 B 的坐标是
$$(k_1,k_2,k_3)^{\mathrm{T}}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

再设
$$k_4f_1+k_5f_2+k_6f_3=x,$$
即
$$k_4+k_5(x-a)+k_6(x-a)^2=x,$$

得“x”关于基 B 的坐标是

$$(k_4,k_5,k_6)^{\mathrm{T}}=(a,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

又设 $$k_7f_1+k_8f_2+k_9f_3=x^2,$$

即 $$k_7+k_8(x-a)+k_9(x-a)^2=x^2,$$

得“x^2”关于基 B 的坐标是

$$(k_7,k_8,k_9)^{\mathrm{T}}=(a^2,2a,1)^{\mathrm{T}}.$$

* **26.** 下列子空间的交与和的维数及其一组基：

(1) 19 题中的 W_4 与 W_5；

解 (1) $W_4=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为一组基，$\dim W_4=2$.

$W_5=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为一组基，$\dim W_5=2$.

$W_4+W_5=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的一组极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 为 W_4+W_5 的一组基，$\dim(W_4+W_5)=3$.

$\forall\ \boldsymbol{\gamma}\in W_4\cap W_5$，有

$$\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2,$$

解方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_1+k_4\boldsymbol{\beta}_2=0\quad(k_3=-l_1,k_4=-l_2)$，

得 $$(k_1,k_2,k_3,k_4)=k(2,1,-1,-1)(k\text{ 为任意常数}),$$

所以，$$\boldsymbol{\gamma}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=(3,5,1).$$

$$\begin{aligned}W_4\cap W_5&=L(\boldsymbol{\gamma})=L(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)\\&=L(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\{k(3,5,1)\mid k\in\mathbf{R}\},\end{aligned}$$

$$\dim(W_4\cap W_5)=1.$$

27. (1) 把 19 题中 W_4 的基扩充为 $\mathbf{R}^3$ 的基；

(2) 把 19 题中 W_2 的基扩充为 $\mathbf{R}^4$ 的基.（提示：利用第 14 题的结论.）

解 (1) 在 W_4 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ 中添加 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$（或 $\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$），易证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{e}_1$ 线性无关，故 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{e}_1\}$，就是 $\mathbf{R}^3$ 的基.

(2) $W_2=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 在 W_2 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 中添加 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$（或 $\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$），易证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{e}_1$ 线性无关，故 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{e}_1\}$ 就是 $\mathbf{R}^4$ 的基.

* **28.** 设 W_1,W_2 是线性空间 V 的两个子空间，$\dim W_1=m$，$\dim W_2=n$，$m\leqslant n$. 证明：

(1) $\dim(W_1\cap W_2)\leqslant m$；　　(2) $\dim(W_1+W_2)\leqslant m+n$.

证 (1) $W_1\cap W_2$ 是 W_1 的子空间，所以，$\dim(W_1\cap W_2)\leqslant\dim W_1$.

(2) $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)\leqslant m+n$.

* **29.** (1) 对 19 题中的 W_1，求 V_1，使 $\mathbf{R}^3=W_1\oplus V_1$，并问这样的 V_1 是否唯

一?

(2) 对 19 题中的 W_5,求其补空间 V_5.

(3) 设 W 是 $\mathbf{R}^n$ 的 k 维子空间($0<k<n$),如何求 W 的补空间 V?

解 (1) $W_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1)$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$,在 W_1 的基中添加 $e_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$,$e_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$(或 e_2,e_3),则 $\boldsymbol{\alpha}_1,e_1,e_3$ 线性无关,于是 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,e_1,e_3\}$ 就是 $\mathbf{R}^3$ 的基.

令 $V_1=L(e_1,e_3)$,$V_1\cap W_1=\{\mathbf{0}\}$,则 $\mathbf{R}^3=V_1\oplus W_1$(直和).这样的 V_1 不是唯一的,只要 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关,取 $V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,就有 $\mathbf{R}^3=V_1\oplus W_1$.

(2) $W_5=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$,在 W_5 的基中添加 $e_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$,则 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,e_1\}$ 线性无关,这就是 $\mathbf{R}^3$ 的基.令 $V_5=L(e_1)$,则 $\mathbf{R}^3=V_5\oplus W_5$,$V_5$ 为 W_5 的补空间.

(3) 设 $W=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k)$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 为 W 的基,将其扩充为 $\mathbf{R}^n$ 的基:

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-k}\},$$

则 $V=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-k})$ 为 W 的补空间.

*30. 证明:每个 n 维线性空间都可以表示成 n 个一维子空间的直和.

证 设 $V=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的基.令 $V_i=L(\boldsymbol{\alpha}_i)(i=1,2,\cdots,n)$,则 $V=V_1+V_2+\cdots+V_n$ 的和为直和.因为,零向量的分解式唯一,即

$$\mathbf{0}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_n \quad (\boldsymbol{\beta}_i\in V_i,i=1,\cdots,n),$$

仅当 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2=\cdots=\boldsymbol{\beta}_n=\mathbf{0}$ 时才成立.或由

$$\dim(V_1+\cdots+V_n)=\sum_{i=1}^{n}\dim V_i=n,$$

可知 $V_1+\cdots+V_n$ 为直和.

31. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,-1,1)$,$\boldsymbol{\beta}=(2,3,1,-1)$,$\boldsymbol{\gamma}=(-1,-1,-2,2)$.

(1) 求 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 的长度及夹角 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$ 与 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle$;

(2) 求与 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都正交的所有向量.

解 (1)

$$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{7},\quad |\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})}=\sqrt{15},\quad |\boldsymbol{\gamma}|=\sqrt{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})}=\sqrt{10}.$$

$$\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}=\frac{6}{\sqrt{105}},$$

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\arccos\frac{6}{\sqrt{105}}.$$

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle=\arccos\frac{1}{\sqrt{70}}.$$

(2) 解法与32题类似(略去). 答案为 $k_1(-5,3,1,0)+k_2(5,-3,0,1)$($k_1$, k_2为任意常数).

32. 求与向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,-1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,3)$都正交的单位向量.

解 设所求向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,\cdots,x_4)^{\mathrm{T}}$, 由$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i)=0(i=1,2,3,4)$得方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=0,\\x_1-x_2-x_3+x_4=0,\\2x_1+x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}$$

的基解向量为$(-4,0,-1,3)^{\mathrm{T}}$, 单位化得 $\boldsymbol{\alpha}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{26}}(-4,0,-1,3)^{\mathrm{T}}$, 就是与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$都正交的单位向量.

***33.** $W=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间, 已知 $\boldsymbol{\beta}$ 与向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$中每个向量都正交, 证明: $\boldsymbol{\beta}\perp W$.

证 任取 $\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m\in W$, 由$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_i)=0(i=1,2,\cdots,m)$, 得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})&=(\boldsymbol{\beta},x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m)\\&=x_1(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+x_m(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_m)=0,\end{aligned}$$

所以,
$$\boldsymbol{\beta}\perp W.$$

***34.** $W=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$是内积空间 V 的一个子空间, 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k\in V$, 证明: 如果$(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=0$, $i=1,\cdots,k$, $j=1,\cdots,m$, 则 $L(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k)\perp W$.

证
$$\forall\,\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m\in W,$$
$$\forall\,\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_k\boldsymbol{\beta}_k\in L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k),$$

由$(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=0(i=1,2,\cdots,k;j=1,2,\cdots,m)$, 得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})&=(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m,y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_k\boldsymbol{\beta}_k),\\&=\Big(\sum_{j=1}^{m}x_j\boldsymbol{\alpha}_j,\sum_{i=1}^{k}y_i\boldsymbol{\beta}_i\Big)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}x_jy_i(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\beta}_i)=0,\end{aligned}$$

所以, $L(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k)\perp W$.

35. $\forall\,\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2)$, $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2$, 定义:

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=ax_1y_1+bx_1y_2+cx_2y_1+dx_2y_2$$

(其中 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$), 问: a,b,c,d 满足什么条件时, $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个内积?

解 由$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$, 得 $b=c$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$ 时,

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=ax_1^2+2bx_1x_2+dx_2^2>0,$$

于是，对 x_1 的二次三项式，得 $a>0$，且判别式

$$\Delta=4b^2x_2^2-4adx_2^2<0 \quad (x_2\neq 0),$$

即

$$b^2<ad.$$

综上，所求的条件为 $a>0$ 且 $ad>b^2$.

36. 用 Schmidt 正交化过程，由下列向量组关于 $\mathbf{R}^n$ 的标准内积分别构造一组单位正交向量组：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)$;

(2) $(1,2,2,-1),(1,1,-5,3),(3,2,8,-7)$;

(3) $(1,1,-1,2),(5,8,-2,-3),(3,9,3,8)$;

(4) $(2,1,3,-1),(7,4,3,-3),(1,1,-6,0),(5,7,7,8)$.

提示 用公式

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1, \qquad \boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}};$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1, \qquad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}};$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2, \qquad \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\sqrt{(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_3)}}.$$

$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 即为所求的一组单位正交向量组.

37. 设 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_5\}$ 是欧氏空间 V 的一组单位正交基，$W=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_5,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$. 试求 W 的一组单位正交基.

提示 设 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 关于单位正交基 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_5\}$ 的坐标为 $\boldsymbol{X}_i$，则

$$\boldsymbol{X}_1=(1,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{X}_2=(1,-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{X}_3=(2,1,1,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

用 36 题的方法将 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 正交化，单位化，得

$$\boldsymbol{Y}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{Y}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,-2,0,2,-1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{Y}_3=\frac{1}{2}(1,1,1,0,-1)^{\mathrm{T}}.$$

则得 W 的一组单位正交基为

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_5),$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_4-\boldsymbol{\varepsilon}_5),$$

$$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3-\boldsymbol{\varepsilon}_5).$$

***38.** 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-x_4=0,\\3x_1+2x_2-2x_4=0,\\3x_1+x_2+9x_3-x_4=0\end{cases}$$

的解空间 S 的正交补 $S^{\perp}$.

解 解法 1 提示:先求解空间 $S=L(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2)$,其中 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 为基.

任取 $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in S^{\perp}$,由 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_i)=0(i=1,2)$ 得到关于 y_1,y_2,y_3,y_4 的齐次线性方程组,其解空间为 $L(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2)=S^{\perp}$.

解法 2 设方程组行向量组为 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3,-1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(3,2,0,-2)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,9,-1)^{\mathrm{T}},$$

则对 $\forall\, \boldsymbol{X}\in S$,因为 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{X})=0$.所以,解空间 $S\perp L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$(称为方程组系数矩阵的行空间),秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$,解空间 S 的维数 $\dim S=4-r=2$, $\dim S^{\perp}=2$.于是,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为方程组行向量组的一个极大线性无关组,

$$S^{\perp}=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2).$$

* **39.** 设 W 是 $\mathbf{R}^n$ 的非平凡子空间,$\boldsymbol{\alpha}\notin W$,证明:$\exists\, \boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^n$,使 $\boldsymbol{\beta}\in W^{\perp}$,且 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\neq 0$.

证 证法 1

$$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n=W\oplus W^{\perp}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\in W,0\neq\boldsymbol{\alpha}_2\in W^{\perp}$,若 $\boldsymbol{\alpha}_2=0$,则 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_2\in W$,与题设矛盾.取 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_2$,则

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)\neq 0.$$

证法 2 设 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_k\}(0<k<n)$ 是 W 的一组单位正交基,将其扩充为 $\mathbf{R}^n$ 的一组单位正交基 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_k,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$,则有 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$ ($\exists\, x_j\neq 0,j\in\{k+1,\cdots,n\}$,否则,与 $\boldsymbol{\alpha}\notin W$ 矛盾).取 $\boldsymbol{\beta}=x_j\boldsymbol{\varepsilon}_j$,则 $\boldsymbol{\beta}\in W^{\perp}$,且 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=x_j\neq 0$.

40. 设 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组单位正交基,证明:

(1) 如果 $\boldsymbol{\beta}\in V$,且 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon}_i)=0(i=1,\cdots,n)$,则 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$;

(2) 如果 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\in V$,且 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V$,均有 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha})$,则 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2$.

证 (1) 由 $\boldsymbol{\beta}\in V$,设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$,由 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon}_i)=k_i=0(i=1,\cdots,n)$,即得 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

(2) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,有 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha})$,即 $(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha})=0$ 均成立.根据(1),即得 $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$,所以,$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2$.

41. 设 $\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维欧氏空间中的一个固定的非零向量,证明:

(1) $W=\{\boldsymbol{\alpha}\mid(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\xi})=0,\boldsymbol{\alpha}\in V\}$ 是 V 的一个子空间;

(2) $\dim W=n-1$.

证 (1) 由于 $\forall \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in W$,有 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\xi})=0$,所以,$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2 \in W$.

$\forall k \in \mathbf{R}, \boldsymbol{\alpha}_1 \in W$,有 $(k\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\xi})=0$,因此,$k\boldsymbol{\alpha} \in W$.所以,$W$ 对 V 中的加法和数量乘法封闭,因此 W 是 V 的一个子空间.

(2) 由 $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \neq 0$,得 $\boldsymbol{\xi} \notin W$.将 $\boldsymbol{\xi}$ 扩充为 V 的正交基:$\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}$,由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1} \in W$,所以,$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1})=W$.因此,$\dim W=n-1$.

2-7 补充题提示与解答

*1. 设 E 是域 F 的一个子域.

(1) 证明:F 关于自身的加法和乘法构成一个 E 上的向量空间,并举一例;

(2) 举例说明,E 不必是 F 上的向量空间;

(3) 证明:若 V 是 F 上的一个向量空间,则 V 也是 E 上的一个向量空间.

证 (1) 因为 $F(E)$ 对加法和数量乘法封闭,又 $\langle F, +\rangle$ 是交换群,且数量乘法满足 4 条运算性质,因此 F 是 E 上的向量空间.例如,取 $F=\mathbf{R}$(实数域),$E=\mathbf{Q}$(有理数域)(或 $F=\mathbf{C}, E=\mathbf{R}$).

(2) 取 $E=\mathbf{Q}$(有理数域),$F=\mathbf{R}$,则 E 不是 F 上的向量空间,因为此时数量乘法不封闭.例如,$\sqrt{2} \in F=\mathbf{R}, a \in E=\mathbf{Q}$,则 $\sqrt{2}a \notin \mathbf{Q}$.

(3) 因为 $V(F)$ 是向量空间,则 $V(E)$ 关于加法和域 E 与 V 的数乘封闭.又 $\langle V, +\rangle$ 为交换群,且数量乘法满足 4 条运算性质,所以 V 也是 E 上的一个向量空间.例如,若 $V(\mathbf{R})$ 是向量空间,则 $V(\mathbf{Q})$ 也是向量空间.

2. 设 V 是一个线性空间,W 是 V 的子集.证明:W 是 V 的子空间 $\Leftrightarrow$ $L(W)=W$.

证 必要性:已知 W 是 V 的子空间,证明 $L(W)=W$.

因为 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in L(W)$,存在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \in W$,使得

$$\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{s} k_i \boldsymbol{\alpha}_i,$$

从而,$\boldsymbol{\alpha} \in W$,所以,$L(W) \subseteq W$.由定义又可知 $W \subseteq L(W)$.因此,$W=L(W)$.

充分性:已知 $L(W)=W$ 是一个线性空间,又 W 是 V 的子集(子空间),所以,W 是 V 的子空间.

3. 设 S_1, S_2 是线性空间 V 的两个子集,证明:

$$L(S_1 \cap S_2) \subseteq L(S_1) \cap L(S_2),$$

并在 $\mathbf{R}^3$ 中分别举出两个例子,使得上式中等号成立和等号不成立.

证 由 $L(S_1 \cap S_2) \subseteq L(S_1)$ 和 $L(S_1 \cap S_2) \subseteq L(S_2)$,可得

$$L(S_1 \cap S_2) \subseteq L(S_1) \cap L(S_2).$$

例如，$S_1=\{e_1,e_3\}$，$S_2=\{e_1,e_2\}$，则

$$L(S_1\cap S_2)=L(e_1)=L(S_1)\cap L(S_2)=L(e_1,e_3)\cap L(e_1,e_2).$$

又如，$S_1=\{e_1,e_2+e_1\}$，$S_2=\{e_1,e_2\}$，则

$$L(S_1\cap S_2)=L(e_1)\subset L(S_1)\cap L(S_2)=L(e_1,e_2).$$

因为

$$L(S_1)=L(S_2)=L(e_1,e_2).$$

4. 证明：若 $\mathbf{R}^2$ 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2)$满足

$$a_1b_1+a_2b_2=0,\quad a_1^2+a_2^2=b_1^2+b_2^2=1,$$

则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一组单位正交基.

证 非零正交向量组一定线性无关，并且

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2=0,$$

$$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}=\sqrt{b_1^2+b_2^2}=|\boldsymbol{\beta}|=1,$$

所以，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一组单位正交基.

5. 设$\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\}$是 $\mathbf{R}^2$ 的一组基，又

$$\boldsymbol{\alpha}'=c_{11}\boldsymbol{\alpha}+c_{12}\boldsymbol{\beta},\quad \boldsymbol{\beta}'=c_{21}\boldsymbol{\alpha}+c_{22}\boldsymbol{\beta}.$$

证明：$\{\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}'\}$是 $\mathbf{R}^2$ 的基$\Leftrightarrow c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}\neq 0$.

证 充分性：已知的向量方程组为

$$\begin{cases}c_{11}\boldsymbol{\alpha}+c_{12}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}', & (1)\\ c_{21}\boldsymbol{\alpha}+c_{22}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}'. & (2)\end{cases}$$

当 $k=c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}\neq 0$ 时，解此方程组得

$$\boldsymbol{\alpha}=k^{-1}(c_{22}\boldsymbol{\alpha}'-c_{12}\boldsymbol{\beta}'),\quad \boldsymbol{\beta}=k^{-1}(c_{21}\boldsymbol{\alpha}'-c_{11}\boldsymbol{\beta}'),$$

所以，$\{\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}'\}$与$\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\}$是等价的向量组，故$\{\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}'\}$也是基.

必要性：用反证法. 设 $k=c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}=0$，在方程组中由(1)式乘以 c_{22} 并减去(2)式乘以 c_{12}，得

$$c_{22}\boldsymbol{\alpha}'-c_{12}\boldsymbol{\beta}'=\mathbf{0},$$

当 c_{12},c_{22}不全为 0 时，$\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}'$线性相关；当 $c_{12}=c_{22}=0$ 时，由题设得 $\boldsymbol{\alpha}'=c_{11}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}'=c_{21}\boldsymbol{\alpha}$，也得 $\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}'$线性相关，与题设矛盾，因此，$\{\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}'\}$是 $\mathbf{R}^2$ 的基时，必有 $k\neq 0$.

***6.** 设向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$线性无关，证明：在向量组$\{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$中至多有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(1\leqslant i\leqslant r)$可被其前面的 i 个向量$\{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}\}$线性表示.

证 (1) 若 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，没有 $\boldsymbol{\alpha}_i$可被前面的 i 个向量线性表示.

(2) 若 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i$ 线性相关，当 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$ 时，结论同(1)；当 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$ 时，不妨设 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}(1\leqslant i\leqslant r)$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i$ 线性相关，于是 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可经 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示. 再证明 $k>i$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_k$ 不可能被其前面的 k 个向量线性表示，因为若存在 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 可经 $\{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k-1}\}$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_k=a_0\boldsymbol{\beta}+a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{k-1}\boldsymbol{\alpha}_{k-1},\tag{1}$$

此时，$a_0\neq0$，否则，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性相关，将与题设矛盾. 又已知

$$\boldsymbol{\alpha}_i=b_0\boldsymbol{\beta}+b_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\tag{2}$$

此时，$b_0\neq0$，否则，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i$ 线性相关，也将与题设矛盾. 由式(2)解出 $\boldsymbol{\beta}$，代入式(1)得

$$\boldsymbol{\alpha}_k=\left(a_1-\frac{a_0}{b_0}b_1\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\left(a_{i-1}-\frac{a_0}{b_0}b_{i-1}\right)\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+a_i\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+a_{k-1}\boldsymbol{\alpha}_{k-1},$$

如此，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k-1},\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性相关，与 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 线性无关矛盾. 因此，不可能有两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 可被其前面的 i 个向量 $\{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}\}$ 线性表示.

***7. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$（其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$）线性相关⇔存在一个 $\boldsymbol{\alpha}_i(1<i\leqslant r)$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示，且表示法唯一.**

证 充分性显然，下面证明必要性.

证法 1 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关可知，存在不全为 0 的 $k_1,\cdots,k_r$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}.$$

若 $k_1,\cdots,k_r$ 中从后往前看第一个不等于 0 的是 $k_i(r\geqslant i>1)$，即

$$k_r=k_{r-1}=\cdots=k_{i+1}=0,\quad k_i\neq0$$

$(i>1$，否则，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1=0$，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq0$，得 $k_1=0$，与 $k_1,\cdots,k_r$ 不全为 0 矛盾)，于是得

$$\boldsymbol{\alpha}_i=-\frac{1}{k_i}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}).$$

在满足要求的条件下，取一个最小标号的 i，此时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性无关，于是 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的表示法唯一. 因为，如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性相关，即存在不全为 0 的 $k_1,\cdots,k_{i-1}$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}=\mathbf{0}.$$

也从后往前看，设第一个不等于 0 的是 $k_j(j<i\leqslant r)$，则 k_j 可经 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j-1},\cdots$ 线性表示，与最小标号的 i 矛盾. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 用其表示的表示法唯一.

证法 2 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq0$，线性无关. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性表示，且表示法唯一. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表

示，且表示法唯一．若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i(i\leqslant r)$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示，且表示法唯一．因此，必存在 $\boldsymbol{\alpha}_i(1<i\leqslant r)$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示，且表示法唯一．

*8．设 V_1,V_2 是线性空间 V 的两个非平凡子空间，证明：$\exists\,\boldsymbol{\alpha}\in V$，使 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_2$ 同时成立，并在 $\mathbf{R}^3$ 中举一例．

证　因为 V_1,V_2 是非平凡子空间，因此，$\exists\,\boldsymbol{\alpha}_1\notin V_1$，如果 $\boldsymbol{\alpha}_1\notin V_2$，则命题成立，所以，一般不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1\in V_2$，同理设 $\boldsymbol{\alpha}_2\notin V_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1$，取

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

则 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_1$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_2$．因为，若 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1$，由 $\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1$，得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1,$$

矛盾．同理，若 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\in V_2$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1\in V_2$，得

$$\boldsymbol{\alpha}_2=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-\boldsymbol{\alpha}_1\in V_2,\text{矛盾}.$$

例如，$\mathbf{R}^3$ 中子空间 $V_1=\{(x,y,0)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，$V_2=\{(0,0,z)\mid z\in\mathbf{R}\}$，$\exists\,\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)\notin V_1$，且 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_2$．

*9．设 $V_1,\cdots,V_m(m>2)$ 是线性空间 V 的 m 个非平凡子空间，证明：V 中存在同时不属于 $V_1,\cdots,V_m$ 的向量，并在 $\mathbf{R}^3$ 中举一例．

证　用数学归纳法．$m=2$ 成立（上题），假设命题对 $m-1$ 成立，对 m 个子空间，由假设，$\exists\,\boldsymbol{\alpha}\notin V_i(i=1,2,\cdots,m-1)$，若 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_m$，则命题成立，所以，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}\in V_m$．取 $\boldsymbol{\beta}\notin V_m$，若 $\boldsymbol{\beta}\notin V_i(i=1,2,\cdots,m-1)$，则命题成立，所以，不妨设 $\boldsymbol{\beta}\in V_1$．由于 $\boldsymbol{\alpha}\in V_m$，$\boldsymbol{\beta}\notin V_m$，$\boldsymbol{\alpha}\notin V_1$，$\boldsymbol{\beta}\in V_1$，根据上题，有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin V_m\text{且}\notin V_1.$$

若 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin V_i(i=2,\cdots,m-1)$，则命题成立，所以不妨设 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_2$，则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin V_m,V_1,V_2$$

（因为 $2\boldsymbol{\alpha}\in V_m$，$\boldsymbol{\beta}\notin V_m$；$2\boldsymbol{\alpha}\notin V_1$，$\boldsymbol{\beta}\in V_1$；$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_2$，$\boldsymbol{\alpha}\notin V_2$），如此继续下去，至多经过 k 次（$k\leqslant m-1$），即得

$$k\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin V_i\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

例如，在 $\mathbf{R}^3$ 中，m 个子空间为

$$V_i=\{(x,y,z)\mid k_ix+y=0,k_i>0,i\neq j\text{ 时},k_i\neq k_j\}\quad(i=1,2,\cdots,m),$$

这是 m 个平行于 z 轴的平面上的全体起点在原点的向量（或说点）构成的 m 个子空间．这些平面上的点，当 $x=1$ 时，

$$y=-k_i\neq0,$$

因此，向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0)\notin V_i\quad(i=1,2,\cdots,m)$．

*10. 设 $S_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$和 $S_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$是向量空间 V 的两个线性无关的子集,证明:

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\text{线性无关}\Leftrightarrow L(S_1)\cap L(S_2)=\{\mathbf{0}\}.$$

证 证法 1 必要性:$\forall\boldsymbol{\gamma}\in L(S_1)\cap L(S_2)$,有 $\boldsymbol{\gamma}=\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\sum\limits_{j=1}^{t}l_j\boldsymbol{\beta}_j$,因此,

$$\sum_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\alpha}_i-\sum_{j=1}^{t}l_j\boldsymbol{\beta}_j=\mathbf{0},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性无关,所以 $k_i=l_j=0(i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,t)$,于是,$\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$,从而,$L(S_1)\cap L(S_2)=\{\mathbf{0}\}$.

充分性:已知 $L(S_1)\cap L(S_2)=\{\mathbf{0}\}$,设

$$\sum_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\alpha}_i+\sum_{j=1}^{t}l_j\boldsymbol{\beta}_j=0,$$

即
$$\sum_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=-\sum_{j=1}^{t}l_j\boldsymbol{\beta}_j\in L(S_1)\cap L(S_2)=\{\mathbf{0}\},$$

因为等式左边属于 $L(S_1)$,等式右边属于 $L(S_2)$,所以 $\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}$,从而,$k_i=0$ $(i=1,\cdots,s)$,且 $\sum\limits_{j=1}^{t}l_j\boldsymbol{\beta}_j=0$,则 $l_j=0(j=1,\cdots,t)$,因此,$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性无关.

证法 2 必要性:已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性无关,所以,$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关,$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性无关.令 $W_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$,$W_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$,则

$$W_1+W_2=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t),$$

由维数公式得

$$\begin{aligned}\dim(W_1\cap W_2)&=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1+W_2)\\&=s+t-(s+t)=0,\end{aligned}$$

所以,
$$W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}.$$

充分性:已知 $L(S_1)\cap L(S_2)=\{\mathbf{0}\}$,即 $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$,由维数公式得

$$\begin{aligned}\dim(W_1+W_2)&=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)\\&=s+t-0=s+t,\end{aligned}$$

于是,
$$\dim L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=s+t,$$

因此,$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性无关.

11. 设 W_1,W_2,W_3,W_4都是 $\mathbf{R}^3$的子空间,如果 $W_1\subseteq W_2=W_3+W_4$,是否必有

$$W_1=W_1\cap W_2=(W_1\cap W_3)+(W_1\cap W_4).$$

解 $W_1=W_1\cap W_2$成立，但 $W_1\cap W_2=(W_1\cap W_3)+(W_1\cap W_4)$不一定成立.例如，$W_2$是 $\mathbf{R}^3$中过原点的平面 π 上的全体向量，W_3,W_1,W_4是平面 π 上过原点的三条互异直线上的全体向量，此时，

$$W_1\subset W_2,\quad W_1=W_1\cap W_2,\quad W_2=W_3+W_4,$$

而

$$W_1\cap W_3=\{\mathbf{0}\};\quad W_1\cap W_4=\{\mathbf{0}\},$$

所以，

$$W_1\cap W_2\neq(W_1\cap W_3)+(W_1\cap W_4)=\{\mathbf{0}\}.$$

12. 在三维复向量空间 $\mathbf{C}^3$中，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)$和 $\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,y_3)$定义：

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+x_3\bar{y}_3.$$

(1) 验证$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$是 $\mathbf{C}^3$上的一个内积(称为 $\mathbf{C}^3$上的标准内积).

*(2) 已知 $W=L(\boldsymbol{\xi})$(其中 $\boldsymbol{\xi}=(\mathrm{i},0,1)$)，求 W 及 $W^{\perp}$关于 $\mathbf{C}^3$的标准内积的单位正交基.

解 (1) 根据定义，只要验证$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$运算满足下列 4 条性质：

① 由

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\bar{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+x_3\bar{y}_3$$

与

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=y_1\bar{x}_1+y_2\bar{x}_2+y_3\bar{x}_3,$$

得

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=\overline{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}.$$

② $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=(\overline{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\bar{\boldsymbol{\beta}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+\bar{\boldsymbol{\beta}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1)+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_2).$

③ $$(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\bar{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}k\boldsymbol{\alpha}=k\bar{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).$$

④ $$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\bar{x}_1x_1+\bar{x}_2x_2+\bar{x}_3x_3\geqslant 0,$$

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=0.$$

(2) $W=L(\boldsymbol{\xi})$的单位基为

$$\boldsymbol{\xi}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{i}\cdot\bar{\mathrm{i}}+0+1\cdot\bar{1}}}\cdot(\mathrm{i},0,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i},0,1).$$

令 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)$，由$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\xi})=0$，解 $\bar{\mathrm{i}}x_1+0\cdot x_2+x_3=0$，得

$$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,\mathrm{i}),\quad\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,0).$$

此时 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$已经正交，它们是 $W^{\perp}$的正交基，再单位化后得 $W^{\perp}$的单位正交基：

$$\boldsymbol{\alpha}_2^0=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,\mathrm{i}),\quad\boldsymbol{\alpha}_3^0=(0,1,0).$$

***13**. 设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$ 上的内积空间，证明：

(1) $||\boldsymbol{\alpha}|-|\boldsymbol{\beta}||\leqslant|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$；

(2) $|\boldsymbol{\alpha}\pm\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2\pm 2\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+|\boldsymbol{\beta}|^2$，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，其中 $\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$表示复数$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$的实部；

(3) $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V(\mathbf{R}), (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{4}|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2 - \frac{1}{4}|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2$.

证 (1) 利用 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 有 $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|$, 得

$$|(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}| + |\boldsymbol{\beta}|,$$

与
$$|(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+(-\boldsymbol{\alpha})| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}| + |-\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}| + |\boldsymbol{\alpha}|,$$

于是,
$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}| \geqslant |\boldsymbol{\alpha}| - |\boldsymbol{\beta}|,$$

且
$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}| \geqslant |\boldsymbol{\beta}| - |\boldsymbol{\alpha}|,$$

所以,
$$||\boldsymbol{\alpha}| - |\boldsymbol{\beta}|| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|.$$

(2) $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V(\mathbf{C})$, 有

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2 &= (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\
&= \overline{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})} + \overline{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})} \\
&= \overline{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})} + \overline{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})} + \overline{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})} + \overline{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})} \\
&= |\boldsymbol{\alpha}|^2 + \overline{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})} + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + |\boldsymbol{\beta}|^2 \\
&= |\boldsymbol{\alpha}|^2 + 2\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + |\boldsymbol{\beta}|^2.
\end{aligned}$$

同理,
$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2 = |\boldsymbol{\alpha}|^2 - 2\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + |\boldsymbol{\beta}|^2.$$

(3) 利用(2)的结果, $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V(\mathbf{R})$, 有

$$\begin{aligned}
&|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2 - |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2 \\
&= (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) + 2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) - [(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) - 2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})] \\
&= 4(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}),
\end{aligned}$$

所以,

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{4}|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2 - \frac{1}{4}|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2.$$

第3章 线性映射

3-1 学时安排的建议

表3-1

节	教学内容	复习页数
14	3.1 线性映射的定义及例	95—101
15	3.2 线性映射的像和核,3.3 线性映射的运算 *空间 $L(V_1,V_2)$,3.4 有限维线性空间的线性映射 线性映射的秩	101—106
16	3.4 线性映射的秩,3.5 线性映射的同构,习题	107—113

3-2 基本要求

1. 熟练掌握线性映射的定义,熟悉线性映射的一些例子:比例、旋转、投影、错切变换,镜面反射和 n 元线性函数等.会证明线性相关的向量组的像也线性相关,* 知道 $\mathbf{R}^3$ 中的线性变换把直线变换为直线.

2. 理解线性映射 $\sigma\in L(V_1,V_2)$的核 Ker σ(或 $\sigma^{-1}(\mathbf{0}_2)$)、像 Im σ(或值域 $\sigma(V_1)$)和秩的定义以及线性映射为单射的充分必要条件是核空间 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})=\{\mathbf{0}\}$.会求核空间和像空间的基和维数 $\dim(\mathrm{Im}\,\sigma)=r(\sigma)$, $\dim(\mathrm{Ker}\,\sigma)=n-r(\sigma)$.熟悉维数公式 $r(\sigma)+\dim(\mathrm{Ker}\,\sigma)=n=\dim V_1$.

3. 理解线性映射 $\sigma: V_1\to V_2$是由 σ 关于 V_1的基的像唯一确定的.

4. 了解线性映射的运算(加法、数乘、乘法、可逆映射的逆映射)的定义及其运算律.* 知道线性空间 $V_1(F)\to V_2(F)$上的全体线性映射对映射的加法和数乘运算构成域 F 上的一个线性空间 $L(V_1,V_2)$,其维数 $\dim L(V_1,V_2)=\dim(V_1)\cdot\dim(V_2)$.

5. 知道 V_1,V_2都是 n 维线性空间时,线性映射 $\sigma\in L(V_1,V_2)$有以下等价的命题:

$$r(\sigma)=n(\text{或说}\ \sigma\ \text{满秩})\ \Leftrightarrow\ \sigma\ \text{为单射}\ \Leftrightarrow\ \sigma\ \text{为满射}\ \Leftrightarrow\ \sigma\ \text{可逆}.$$

6. 会证明秩的公式：

$$r(\sigma\tau)\leqslant\min(r(\sigma),r(\tau));\quad r(\sigma+\tau)\leqslant r(\sigma)+r(\tau).$$

当 τ 可逆时，

$$r(\sigma\tau)=r(\sigma)=r(\tau\sigma).$$

7. 知道线性空间同构的定义和两个线性空间同构的充分必要条件是它们的维数相等. 知道对任何 n 维线性空间 $V(F)$ 的研究都可转化为对向量空间 F^n 的研究.

3-3 内容综述与分析

1. 本章在线性代数中的地位

有限维线性空间上的线性映射(或线性变换)是线性代数的核心内容，也是现代数学的重要基础. n 维线性空间 $V_1(F)$ 到 m 维线性空间 $V_2(F)$ 的线性映射的概念是一元线性函数概念的推广. 从几何上看，$\mathbf{R}^2$，$\mathbf{R}^3$ 中向量的旋转变换、镜面反射、比例变换、投影变换、错切变换等都是线性变换. 在 $\mathbf{R}^2$(或 $\mathbf{R}^3$)中线性变换总是把直线变为直线. 有限维空间给定了基后，向量及其在线性映射下的像都可以用坐标来表示(也称数值表示). 而 $V_1(F)$ 到 $V_2(F)$ 的线性映射 σ 又由其关于 V_1 的基 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的像 $\{\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)\}$ 所唯一确定，因此，$\sigma\in L(V_1,V_2)$ 也可以用数值表示，它就是第 4 章中所研究的矩阵.

在线性代数的发展史上，最先研究的是线性方程组的求解. m 个方程 n 个未知数的线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$(其中 $\boldsymbol{A}$ 是方程组的 $m\times n$ 系数矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 m 维列向量)中的 $\boldsymbol{A}$ 实际上对应于 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 的一个线性映射 σ(即将 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$ 映射为 $\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m$，称 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的像，$\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的原像). 求解线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，可以看成是已知像 $\boldsymbol{b}$，求原像 $\boldsymbol{X}$；而求齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，也就是求线性映射的核.

研究齐次线性方程组的解的结构就是研究相应的线性映射 σ 的核空间(它是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间). 而讨论非齐次方程组是否有解以及解的结构就与相应的线性映射 σ 的值域(它是 $\mathbf{R}^m$ 的子空间)有关. 这两个子空间的维数公式是研究它们的基础. 学懂这一章就能将线性代数各章的内容串成有机的整体，起到提纲挈领的作用.

2. 线性映射概念(主教材 3.1 节)

(1) 关于线性映射的定义

在线性映射 $\sigma\in L(V_1,V_2)$ 的定义

$$\sigma(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\mu\sigma(\boldsymbol{\beta})$$

中要注意：等号左端括号内的“加法”和“数乘”是 V_1 上的，而等号右端的“加法”

和“数乘”是 V_2 上的. 当 $V_1=V_2$ 时,称线性映射为线性变换.

(2) 判别映射 σ 是不是线性映射的方法

判别映射 $\sigma: V_1(F)\to V_2(F)$ 是线性映射,有两种方法:

方法 1 $\forall\, \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_1$ 和 $\forall\, \lambda,\mu\in F$,都有

$$\sigma(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\mu\sigma(\boldsymbol{\beta}).$$

方法 2(与方法 1 等价) $\forall\, \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_1$ 和 $\forall\, \lambda\in F$,都有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta}),$$
$$\sigma(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\sigma(\boldsymbol{\alpha}).$$

判别映射 $\sigma: V_1(F)\to V_2(F)$ 不是线性映射除了上面的等式至少一个不成立外,有时还可用

$$\sigma(\mathbf{0}_1)\neq\mathbf{0}_2 \quad 或 \quad \sigma(-\boldsymbol{\alpha})\neq-\sigma(\boldsymbol{\alpha}),$$

其中 $\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2$ 分别是 V_1,V_2 中的零向量.

(3) 常见的线性映射的例子

一些常见的线性映射的例子,如比例变换、旋转变换、投影变换、错切变换和镜面反射等(主教材 3.1 节中例 1—例 6)以其几何意义的直观性能帮助我们理解线性映射的概念和理论,以及值域和核的概念和理论,对此应予以重视.

(4) 两点注意(容易出错的地方)

① $\mathbf{R}^3$ 中的线性变换把直线变换为直线,反之不成立,即把直线变换为直线的变换不见得是线性的. 例如,$\mathbf{R}^3$ 中的平移变换 $t(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha}$(其中 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 是常向量,且 $\boldsymbol{\alpha}_0\neq\mathbf{0}$)也把直线变换为直线,但它不是线性的.

② 线性相关的向量组在线性映射下的像向量组也线性相关;但线性无关的向量组在线性映射下的像向量组不一定线性无关. 例如,$\mathbf{R}^3$ 中的投影变换可以把不共线的向量组映射为共线的向量组.

(5) 线性映射由其对基的像唯一确定

线性映射 $\sigma: V_1\to V_2$ 由 σ 关于 V_1 的基的像唯一确定(见主教材 107 页),即给定了线性映射关于 V_1 的基的像 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$,就能求出 σ 关于 V_1 中的任意向量

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$$

的像

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=x_1\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+x_2\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)+\cdots+x_n\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n),$$

而且两个不同的线性映射 $\sigma,\tau\in L(V_1,V_2)$ 关于 V_1 的基 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ 的像不可能完全相同. 这意味着 σ 由其对 V_1 的基的像唯一确定.

3. 线性映射的值域和核(主教材 3.2 节)

(1) 线性映射的像(值域)和核都是子空间

线性映射 $\sigma\in L(V_1,V_2)$的像 $\mathrm{Im}\ \sigma$(或称 σ 的值域$\sigma(V_1)$)和 σ 的核 $\mathrm{Ker}\ \sigma$ 为

$$\mathrm{Im}\ \sigma=\sigma(V_1)=\{\boldsymbol{\beta}\mid\boldsymbol{\beta}=\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha}\in V_1\},$$

$$\mathrm{Ker}\ \sigma=\sigma^{-1}\{\boldsymbol{0}\}=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}_2,\boldsymbol{\alpha}\in V_1\}.$$

$\mathrm{Im}\ \sigma$ 和 $\mathrm{Ker}\ \sigma$ 分别是 V_2和 V_1的子空间. σ 的秩为

$$r(\sigma)=\dim(\mathrm{Im}\ \sigma).$$

其维数公式(见主教材 3.4 节中定理 3.2)为

$$r(\sigma)+\dim(\mathrm{Ker}\ \sigma)=\dim\ V_1=n.$$

注意:

① $\sigma\in L(V_1,V_1)$时,不能由此得出 $\mathrm{Im}\ \sigma+\mathrm{Ker}\ \sigma=V_1$(理由见本书 3-4 节例 3).

② $\delta_1,\delta_2\in L(V,V)$时,不能由$(\delta_1+\delta_2)(\alpha)=\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)$得出$(\delta_1+\delta_2)(V)=\sigma(V_1)+\sigma(V_2)$(理由见本书 3-4 节例 4).

③ 维数公式很重要,要熟记.

(2) 像空间 $\mathrm{Im}\ \sigma$ 的基和维数

若$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$为 V_1的基,则

$$\mathrm{Im}\ \sigma=L(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n)).$$

$\{\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\}$的极大线性无关组(不妨设)$\{\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_k)\}$是 $\mathrm{Im}\ \sigma$ 的基,所以 $\mathrm{Im}\ \sigma$ 的维数等于σ 的秩,即

$$\dim(\mathrm{Im}\ \sigma)=r(\sigma)=k.$$

(3) 核空间 $\mathrm{Ker}\ \sigma$ 的基和维数

若已知 σ 关于 V_1的基$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$的像

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=a_{1i}\boldsymbol{e}_1+a_{2i}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{mi}\boldsymbol{e}_m\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

其中$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m\}$为 V_2的一组基,又已知

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n\in V_1,$$

则用矩阵乘法(见第 7 章)可将 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$表示为

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{e}_2\\\vdots\\\boldsymbol{e}_m\end{bmatrix},$$

于是,$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$ 对应于齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0.\end{cases}$$

所以,它的解空间 S 的维数 k 等于核空间 $\operatorname{Ker}\sigma$ 的维数,即

$$k=\dim(\operatorname{Ker}\sigma).$$

解空间 S 中 k 个线性无关的解向量

$$\boldsymbol{X}_i=(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_n^{(i)})\quad(i=1,2,\cdots,k)$$

所对应的 V_1 中的 k 个向量 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\}$ 就是核空间 $\operatorname{Ker}\sigma$ 的基.

4. 线性空间 $L(V_1,V_2)$(主教材 3.3 节)

$V_1(F)\to V_2(F)$ 的全体线性映射对线性映射的加法和数乘运算构成 F 上的一个线性空间,记做 $L(V_1,V_2)$,它的维数

$$\dim(L(V_1,V_2))=\dim(V_1)\cdot\dim(V_2).$$

(* 证明见主教材 3.5 节定理 3.7). 建议留到第 4 章 4.3 节后讲解,因为了解了 $L(V_1,V_2)$ 与全体 $m\times n$ 矩阵构成的线性空间(矩阵空间 $M_{m\times n}(F)$)同构后,就容易得到这个公式. 同构的线性空间有相同的维数,而 $M_{m\times n}(F)$ 的维数为 $m\cdot n$ 是很容易证明的.

线性映射的乘积不可交换设 $\sigma:V_1(F)\to V_2(F)$, $\tau:V_2(F)\to V_3(F)$ 是线性映射(或 σ,τ 都是 $V(F)$ 上的线性变换),则乘积 $\tau\sigma:V_1(F)\to V_3(F)$ 也是线性映射. 注意:$\sigma\tau$ 不一定可乘,即使乘积存在,也不一定有 $\sigma\tau=\tau\sigma$.

5. 线性变换的秩的公式的证明及一些应用(主教材 3.4 节)

(1) 关于线性变换的秩,有下面两个重要的公式:

$$r(\sigma\tau)\leqslant\min\{r(\sigma),r(\tau)\},\quad r(\sigma+\tau)\leqslant r(\sigma)+r(\tau).$$

证明过程见主教材 3.4 节中定理 3.4 和定理 3.5.

(2) 应用的例子

见本书 3－4 节例 7(设 σ 是 V 上的线性变换,$\dim V=n$,I 为 V 上的恒等变换. 若 $\sigma^2=\sigma$,证 $r(I-\sigma)+r(\sigma)=n$),例 8 等.

6. 有关线性映射的核与值域的一些命题的证明方法

(1) 如何证明 $\sigma\in L(V,V)$ 在某个条件下有 $\operatorname{Im}\sigma=\operatorname{Ker}\sigma$? 要用证明两个集合相等的方法,证明 $\operatorname{Im}\sigma$ 和 $\operatorname{Ker}\sigma$ 互相包含,即 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Im}\sigma$,要根据条件推出 $\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Ker}\sigma$,从而得 $\operatorname{Im}\sigma\subset\operatorname{Ker}\sigma$. 反之,$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Ker}\sigma$,要根据条件推出 $\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Im}\sigma$,从而又得 $\operatorname{Ker}\sigma\subset\operatorname{Im}\sigma$. 于是,$\operatorname{Im}\sigma=\operatorname{Ker}\sigma$.

(2) 如何证明 $\sigma\in L(V,V)$ 在某个条件下有 $\operatorname{Im}\sigma+\operatorname{Ker}\sigma=V$? $\operatorname{Ker}\sigma+\operatorname{Im}\sigma\subset V$ 是显然的(因为两者都是 V 的子空间,两者之和还是 V 的子空间). 所以只要证明 $V\subset\operatorname{Im}\sigma+\operatorname{Ker}\sigma$. 因此,要根据条件证明,$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V$,$\exists\,\boldsymbol{\alpha}_1\in\operatorname{Im}\sigma$,$\boldsymbol{\alpha}_2\in\operatorname{Ker}\sigma$,使得

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\in\operatorname{Im}\sigma+\operatorname{Ker}\sigma.$$

具体例子见本书 3－6 节补充题 3(2)的必要性的证明.

(3) 设 $\sigma \in L(V,V)$，如何证明"若 $\sigma^2=\sigma$，则 $V=\text{Ker }\sigma+\text{Im }\sigma$"？有些同学可能会采用下面的证法．由 $\sigma^2=\sigma$，即 $\sigma(I-\sigma)=\theta$（零变换），得

$$\sigma(I-\sigma)(V)=\{\mathbf{0}\},$$

即
$$(I-\sigma)(V)=I(V)-\sigma(V)=\text{Ker }\sigma,$$

则
$$V=\text{Ker }\sigma+\sigma(V).$$

这样的证明方法是不正确的（这是学生容易出错的地方）．因为等式

$$(I-\sigma)(V)=I(V)-\sigma(V)$$

右边的运算是没有意义的．

命题的正确证明方法如下：

$\text{Ker }\sigma+\text{Im }\sigma \subset V$ 是显然的（因为两者都是 V 的子空间，两者之和还是 V 的子空间）．下面证明 $V\subset \text{Ker }\sigma+\text{Im }\sigma$．

$\forall \boldsymbol{\alpha}\in V$，由 $\sigma^2=\sigma$ 得 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma^2(\boldsymbol{\alpha})$，即

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})-\sigma^2(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(I-\sigma)(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},$$

所以，
$$\boldsymbol{\beta}=(I-\sigma)(\boldsymbol{\alpha})\in \text{Ker }\sigma,$$

由此又得

$$\boldsymbol{\beta}=I(\boldsymbol{\alpha})-\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-\sigma(\boldsymbol{\alpha}),$$

即
$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\sigma(\boldsymbol{\alpha}),$$

其中 $\boldsymbol{\beta}\in \text{Ker }\sigma$，$\sigma(\boldsymbol{\alpha})\in \text{Im }\sigma$．因此，

$$\boldsymbol{\alpha}\in \text{Ker }\sigma+\text{Im }\sigma,$$

所以
$$V\subset \text{Ker }\sigma+\text{Im }\sigma.$$

综上，
$$V=\text{Ker }\sigma+\text{Im }\sigma.$$

7．关于线性变换的几个等价命题

线性空间 $V(F)$ 上的线性变换 σ，有下列几个等价命题：

$$\begin{aligned}\text{Ker }\sigma=\{\mathbf{0}\} &\iff \sigma\text{ 为单射} \iff \sigma\text{ 为满射}\\ &\iff \sigma\text{ 为双射} \iff \sigma\text{ 为可逆映射} \iff \text{Im }\sigma=V.\end{aligned}$$

这是因为有维数公式

$$\dim(\text{Im }\sigma)+\dim(\text{Ker }\sigma)=\dim V,$$

以及

$$\sigma\text{ 为单射} \iff \text{Ker }\sigma=\{\mathbf{0}\}.$$

8．两个线性空间同构的充分必要条件

线性空间 $V_1(F)$ 与 $V_2(F)$ 同构的充分必要条件是

$$\dim V_1(F)=\dim V_2(F).$$

若 $\dim V_1(F)=n$，我们把 $V_1(F)$ 的元素映射（用 φ 表示）为它在给定基下的坐标 $\boldsymbol{X}$，即 $\forall \boldsymbol{\alpha}\in V_1(F)$，$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{X}\in F^n$，则 φ 为 $V_1(F)$ 到 F^n 的同构映射．

如此就可以把对 $V_1(F)$ 中所有问题的研究转化为对 F^n 中对应问题的研究；根据在 F^n 中研究的问题的结论，利用逆映射 $\varphi^{-1}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{\alpha}\in V_1(F)$，就可得到在 $V_1(F)$ 中的相应的结论. 因此，向量空间 F^n 中研究的问题掌握好了，一般有限维线性空间(如多项式空间 $F[x]_n$，以后要讲到的矩阵空间 $M_{n\times n}$ 等)的问题就容易解决了.

9. 本章的重点和难点

(1) 重点

线性映射的定义和例子；线性映射的核和像(值域)的定义及其维数公式；线性变换的秩的定义及求秩的计算方法；关于秩的重要的不等式.

(2) 难点

σ 是否是线性映射的判别；如何求线性映射 σ 关于 V_1 的基的像(这是下一章求 σ 在 V_1 和 V_2 基下对应的矩阵的基础)；关于线性映射的核和值域的证明题；关于线性映射秩的计算和证明题.

3-4 例题分析与解答

例 1 设 $\sigma(p(x))=p'(x)$(导数)，$\forall\, p(x)\in R[x]_n$.

(1) 证明 σ 是 $R[x]_n$ 上的线性变换.

(2) 求 σ 的值域和 $r(\sigma)$. 说明 σ 是否可逆.

(3) 求 σ 的核和维数 $\dim(\mathrm{Ker}\,\sigma)$.

(4) 求 $r(\sigma)+\dim(\mathrm{Ker}\,\sigma)$，问：$\mathrm{Im}\,\sigma+\mathrm{Ker}\,\sigma=R[x]_n$ 对吗？

证 (1) $\forall\, p_1(x),p_2(x)\in R[x]_n$，$\forall\,\lambda\in\mathbf{R}$，有

$$\sigma(p_1+p_2)=[p_1(x)+p_2(x)]'=p'_1(x)+p'_2(x)=\sigma(p_1)+\sigma(p_2),$$

$$\sigma(\lambda p_1)=[\lambda p_1(x)]'=\lambda p'_1(x)=\lambda\sigma(p_1),$$

所以，σ 是 $R[x]_n$ 上的线性变换.

(2)
$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\sigma&=L(\sigma(1),\sigma(x),\sigma(x^2),\cdots,\sigma(x^{n-1}))\\&=L(1,2x,\cdots,(n-1)x^{n-2})\\&=L(1,x,\cdots,x^{n-2}).\end{aligned}$$

$\mathrm{Im}\,\sigma$ 的基为 $1,x,\cdots,x^{n-2}$，$r(\sigma)=n-1$. 由于 $\mathrm{Im}\,\sigma$ 是 $R[x]_n$ 的非平凡子空间，σ 不是满射，所以，σ 不可逆.

(3) 由 $\sigma(p(x))=0$，得 $p(x)=c$(常数)，所以，

$$\mathrm{Ker}\,\sigma=L(1),\dim(\mathrm{Ker}\,\sigma)=1.$$

(4)
$$r(\sigma)+\dim(\mathrm{Ker}\,\sigma)=(n-1)+1=n;$$

$$\mathrm{Im}\,\sigma+\mathrm{Ker}\,\sigma=L(1,x,\cdots,x^{n-2})=\mathrm{Im}\,\sigma\neq R[x]_n.$$

例 2 求线性变换 $\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3,-x_1-2x_3,x_2-x_3)$的值域和核,以及 σ 的秩.

解 求值域:

方法 1
$$\begin{aligned}\sigma(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+x_2+x_3,-x_1-2x_3,x_2-x_3)\\&=x_1(1,-1,0)+x_2(1,0,1)+x_3(1,-2,-1),\end{aligned}$$
所以,
$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\sigma&=L((1,-1,0),(1,0,1),(1,-2,-1))\\&=L((1,-1,0),(1,0,1)),\end{aligned}$$
$$r(\sigma)=2.$$

方法 2
$$\sigma(\boldsymbol{e}_1)=\sigma((1,0,0))=((1,-1,0)),$$
$$\sigma(\boldsymbol{e}_2)=\sigma((0,1,0))=((1,0,1)),$$
$$\sigma(\boldsymbol{e}_3)=\sigma((0,0,1))=((1,-2,-1)).$$

由于 σ 对于任意向量
$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3\in\mathbf{R}^3$$
的像
$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=x_1\sigma(\boldsymbol{e}_1)+x_2\sigma(\boldsymbol{e}_2)+x_3\sigma(\boldsymbol{e}_3),$$
所以,$\operatorname{Im}\sigma$ 为$\sigma(\boldsymbol{e}_1),\sigma(\boldsymbol{e}_2),\sigma(\boldsymbol{e}_3)$的全体线性组合构成的子空间,因此
$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\sigma&=L(\sigma(\boldsymbol{e}_1),\sigma(\boldsymbol{e}_2),\sigma(\boldsymbol{e}_3))\\&=L((1,-1,0),(1,0,1),(1,-2,-1))\\&=L((1,-1,0),(1,0,1)).\end{aligned}$$

求核:使 $\sigma(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$的全体向量$(x_1,x_2,x_3)$构成的 $\mathbf{R}^3$ 的子空间是 σ 的核,所以,齐次线性方程组
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\-x_1-2x_3=0,\\x_2-x_3=0\end{cases}$$
的解空间
$$L(-2,1,1)=\operatorname{Ker}\sigma.$$

例 3 设 $\sigma\in L(V,V)$.

(1)"由于 $r(\sigma)+\dim(\operatorname{Ker}\sigma)=\dim V$,所以 $\operatorname{Im}\sigma+\operatorname{Ker}\sigma=V$",此说法对否?

(2)"若有 $\operatorname{Im}\sigma\cap\operatorname{Ker}\sigma=\{\boldsymbol{0}\}$,则 $\operatorname{Im}\sigma+\operatorname{Ker}\sigma=V$",此说法对否?

解 (1) 不对.如例 1,再如 $\sigma(x_1,x_2)=(x_1-x_2,x_1-x_2)$,
$$\operatorname{Im}\sigma=L((1,1))=\operatorname{Ker}\sigma,$$
$$\operatorname{Im}\sigma+\operatorname{Ker}\sigma=L((1,1))\neq\mathbf{R}^2=V.$$

(2) 对.由于 $\operatorname{Im}\sigma+\operatorname{Ker}\sigma$ 是 V 的两个子空间的和,仍然是 V 的子空间,即
$$\operatorname{Im}\sigma+\operatorname{Ker}\sigma\subseteq V.\tag{1}$$

再由子空间的维数公式及线性映射的维数公式：

$$\dim(\mathrm{Im}\ \sigma+\mathrm{Ker}\ \sigma)+\dim(\mathrm{Im}\ \sigma\cap\mathrm{Ker}\ \sigma)=\dim(\mathrm{Im}\ \sigma)+\dim(\mathrm{Ker}\ \sigma),$$

$$\dim(\mathrm{Im}\ \sigma)+\dim(\mathrm{Ker}\ \sigma)=r(\sigma)+\dim(\mathrm{Ker}\ \sigma)=\dim\ V,$$

以及 $\mathrm{Im}\ \sigma\cap\mathrm{Ker}\ \sigma=\{\mathbf{0}\}$，得

$$\dim(\mathrm{Im}\ \sigma+\mathrm{Ker}\ \sigma)=\dim\ V. \tag{2}$$

由(1)和(2)得

$$\mathrm{Im}\ \sigma+\mathrm{Ker}\ \sigma=V.$$

例 4 设 $\sigma_1,\sigma_2\in L(V,V)$，以下说法是否成立？

(1) 因为 $\forall\ \boldsymbol{\alpha}\in V$，有

$$(\sigma_1+\sigma_2)(\boldsymbol{\alpha})=\sigma_1(\boldsymbol{\alpha})+\sigma_2(\boldsymbol{\alpha}),$$

所以，
$$(\sigma_1+\sigma_2)(V)=\sigma_1(V)+\sigma_2(V);$$

(2) $(I-\sigma)(V)+\sigma(V)=V$.

解 (1) 不对. $\forall\ \boldsymbol{\alpha}\in V$，有

$$(\sigma_1+\sigma_2)(\boldsymbol{\alpha})=\sigma_1(\boldsymbol{\alpha})+\sigma_2(\boldsymbol{\alpha})\in\sigma_1(V)+\sigma_2(V),$$

所以，

$$(\sigma_1+\sigma_2)(V)\subseteq\sigma_1(V)+\sigma_2(V).$$

但上式的等号可以不成立. 例如，$V=\mathbf{R}^3$ 的线性变换 σ_1,σ_2 关于 $\mathbf{R}^3$ 的基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 的像分别为

$$\sigma_1(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1,\qquad \sigma_1(\boldsymbol{e}_2)=\sigma_1(\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{e}_2,$$

$$\sigma_2(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1,\qquad \sigma_2(\boldsymbol{e}_2)=\sigma_2(\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{e}_3.$$

$$\sigma_1(V)=L(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2),\qquad \sigma_2(V)=L(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3).$$

$$\sigma_1(V)+\sigma_2(V)=L(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\mathbf{R}^3.$$

$$(\sigma_1+\sigma_2)(\boldsymbol{e}_1)=(2\boldsymbol{e}_1),$$

$$(\sigma_1+\sigma_2)(\boldsymbol{e}_2)=(\sigma_1+\sigma_2)(\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3).$$

所以，
$$(\sigma_1+\sigma_2)(V)=L(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\neq\mathbf{R}^3=\sigma_1(V)+\sigma_2(V).$$

(2) 不对. $(I-\sigma)(V)+\sigma(V)\subseteq V$，等号可以不成立，理由同(1). 此时，只需将 $I-\sigma$ 视为 σ_1，将 σ 视为 σ_2.

例 5 线性映射 $\sigma:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^4$ 定义为

$$\sigma\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2-x_3\\x_1-x_2+2x_3\\-x_2+x_3\end{bmatrix}.$$

(1) 求值域 $\mathrm{Im}\ \sigma$ 的一组基.

(2) 求核 Ker σ 的一组基.

（清华大学试题,2002 年）

解 $\sigma\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2-x_3\\x_1-x_2+2x_3\\-x_2+x_3\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\-1\\2\\1\end{bmatrix}$

$$\xlongequal{\text{记做}}x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(1) 值域 Im $\sigma=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,因为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$,所以,Im σ 的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$,或 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.

(2) 由 $\sigma(x)=\mathbf{0}$(4 维零向量)得齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_3=0,\\x_1-x_2+2x_3=0,\\-x_2+x_3=0.\end{cases}$$

它与
$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_3=0\end{cases}$$
同解,其解空间为 $L((-1,1,1)^{\mathrm{T}})$,所以,$(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$为核 Ker σ 的一组基.

例 6 已知 $\sigma\in L(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$,把$\triangle ABC$ 变换为$\triangle A'B'C'$,其中

$$A(1,0,0),B(0,2,0),C(0,0,\sqrt{2});$$
$$A'(1,1,0),B'(-2,2,0),C'(0,0,-2).$$

(1) 求 $\sigma(x_1,x_2,x_3)$;

(2) 证明 σ 可逆,并求 $\sigma^{-1}(x_1,x_2,x_3)$

（清华大学试题,2002 年）

解 (1) 由
$$\sigma(1,0,0)=(1,1,0),$$
得
$$\sigma(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2.$$
由
$$\sigma(0,2,0)=\sigma(2\boldsymbol{e}_2)=2\sigma(\boldsymbol{e}_2)=(-2,2,0),$$
得
$$\sigma(\boldsymbol{e}_2)=(-1,1,0)=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2.$$
由
$$\sigma(0,0,\sqrt{2})=\sigma(\sqrt{2}\boldsymbol{e}_3)=\sqrt{2}\sigma(\boldsymbol{e}_3)=(0,0,-2),$$
得
$$\sigma(\boldsymbol{e}_3)=(0,0,-\sqrt{2})=-\sqrt{2}\boldsymbol{e}_3.$$
所以,
$$\begin{aligned}\sigma(x_1,x_2,x_3)&=\sigma(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3)=x_1\sigma(\boldsymbol{e}_1)+x_2\sigma(\boldsymbol{e}_2)+x_3\sigma(\boldsymbol{e}_3)\\&=x_1(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)+x_2(-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)+x_3(-\sqrt{2}\boldsymbol{e}_3)\\&=(x_1-x_2,x_1+x_2,-\sqrt{2}x_3).\end{aligned}$$

(2) 若存在线性映射 τ,使得 $\tau\sigma=\sigma\tau=I$($\mathbf{R}^3$ 上的恒等映射),即 $\forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$,均有

$$\tau\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3),\tag{1}$$

如此,也就有 $\sigma\tau(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)$,则 σ 可逆,且 $\sigma^{-1}=\tau$. 由(1)式及(1)的结论,得

$$\tau\sigma(x_1,x_2,x_3)=\tau(x_1-x_2,x_1+x_2,-\sqrt{2}x_3)=(x_1,x_2,x_3).\tag{2}$$

在(2)式中令

$$\begin{cases}y_1=x_1-x_2,\\y_2=x_1+x_2,\\y_3=-\sqrt{2}x_3,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2),\\x_2=\dfrac{1}{2}(y_2-y_1),\\x_3=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_3.\end{cases}\tag{3}$$

将(3)式代入(2)式,得

$$\tau(y_1,y_2,y_3)=\left(\frac{1}{2}(y_1+y_2),\frac{1}{2}(y_2-y_1),-\frac{1}{\sqrt{2}}y_3\right),$$

即

$$\tau(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2),\frac{1}{2}(x_2-x_1),-\frac{1}{\sqrt{2}}x_3\right),$$

则有

$$\tau\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3),$$

且也有

$$\sigma\tau(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3).$$

所以,σ 可逆,且 $\sigma^{-1}=\tau$.

例 7 设 $\sigma\in L(V,V)$,$\dim V=n$,且 $\sigma^2=\sigma$,I 是 V 上的恒等变换,证明:

(1) $(I-\sigma)(V)\subset\operatorname{Ker}\sigma$;

(2) $r(I-\sigma)+r(\sigma)=n$.

(清华大学试题,2002 年)

证 (1) $\forall\sigma\in L(V,V)$,则 $I-\sigma\in L(V,V)$. $\forall\boldsymbol{\alpha}\in(I-\sigma)(V)$,$\exists\boldsymbol{\beta}\in V$,有

$$\boldsymbol{\alpha}=(I-\sigma)(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta}-\sigma(\boldsymbol{\beta}),$$

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\boldsymbol{\beta}-\sigma(\boldsymbol{\beta}))=\sigma(\boldsymbol{\beta})-\sigma^2(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}(\text{因为 }\sigma^2=\sigma).$$

于是,$\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Ker}\sigma$,所以,

$$(I-\sigma)(V)\subset\operatorname{Ker}\sigma.$$

(2) 利用 $r(\sigma+\tau)\leqslant r(\sigma)+r(\tau)$ 和 $r(\sigma)+\dim\operatorname{Ker}\sigma=n$,由题(1)得,

$$\dim(I-\sigma)(V)=r(I-\sigma)\leqslant \dim \operatorname{Ker}\sigma=n-r(\sigma),$$

所以，
$$r(I-\sigma)+r(\sigma)\leqslant n. \tag{1}$$

又
$$r(I-\sigma)+r(\sigma)\geqslant r((I-\sigma)+\sigma)=r(I)=n. \tag{2}$$

于是由(1)式和(2)式即得

$$r(I-\sigma)+r(\sigma)=n.$$

例 8 设 $\sigma\in L(V,V)$，证明：$\operatorname{Im}\sigma\subset\operatorname{Im}\sigma^2$ 的充分必要条件是 $V=\operatorname{Ker}\sigma+\operatorname{Im}\sigma$.

(清华大学试题，2002 年)

证 先证必要性，后证充分性.

必要性：$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V$，均有 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})\in\operatorname{Im}\sigma\subset\operatorname{Im}\sigma^2$，所以 $\exists\,\boldsymbol{\beta}\in V$，使得 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma^2(\boldsymbol{\beta})$，即 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}-\sigma(\boldsymbol{\beta}))=\mathbf{0}$，于是，$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}-\sigma(\boldsymbol{\beta})\in\operatorname{Ker}\sigma$，即 $\sigma(\boldsymbol{\gamma})=\mathbf{0}$，从而就有

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\gamma}+\sigma(\boldsymbol{\beta})\in\operatorname{Ker}\sigma+\operatorname{Im}\sigma,$$

所以，$V\subset\operatorname{Ker}\sigma+\operatorname{Im}\sigma$.

$\operatorname{Ker}\sigma$ 和 $\operatorname{Im}\sigma$ 都是 V 的子空间，它们的和也是 V 的子空间，所以，

$$\operatorname{Ker}\sigma+\operatorname{Im}\sigma\subset V.$$

综上，
$$V=\operatorname{Ker}\sigma+\operatorname{Im}\sigma.$$

充分性：欲证 $\operatorname{Im}\sigma\subset\operatorname{Im}\sigma^2$，就要证明：$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Im}\sigma$(即 $\exists\,\boldsymbol{\beta}\in V$，使得 $\sigma(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}$)，均有 $\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Im}\sigma^2$(即 $\exists\,\boldsymbol{\gamma}\in V$，使 $\sigma^2(\boldsymbol{\gamma})=\sigma(\sigma(\boldsymbol{\gamma}))=\boldsymbol{\alpha}$). 下面证明：

$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Im}\sigma$，则 $\exists\,\boldsymbol{\beta}\in V$，使得 $\sigma(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}$.

由于

$$\boldsymbol{\beta}\in V=\operatorname{Ker}\sigma+\operatorname{Im}\sigma,$$

所以，$\exists\,\boldsymbol{\alpha}_1\in\operatorname{Ker}\sigma$(即 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$)和 $\exists\,\boldsymbol{\alpha}_2\in\operatorname{Im}\sigma$(即 $\exists\,\boldsymbol{\gamma}\in V$，使 $\boldsymbol{\alpha}_2=\sigma(\boldsymbol{\gamma})$)，使得

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

于是，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&=\sigma(\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)\\&=\mathbf{0}+\sigma(\sigma(\boldsymbol{\gamma}))=\sigma^2(\boldsymbol{\gamma})\quad(\text{其中 }\boldsymbol{\gamma}\in V),\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Im}\sigma^2$，因此，$\operatorname{Im}\sigma\subset\operatorname{Im}\sigma^2$.

例 9 $\sigma\in L(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$，$\sigma(\boldsymbol{\alpha})$是 $\boldsymbol{\alpha}$ 对平面 $x_1+x_2-x_3=0$ 的镜面反射.

(1) 求 $\sigma(\boldsymbol{e}_1),\sigma(\boldsymbol{e}_2),\sigma(\boldsymbol{e}_3)$，其中$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$为 $\mathbf{R}^3$的自然基；

(2) 给出基 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3\}$，使 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\lambda_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$($\lambda_i$为常数，$i=1,2,3$).

(清华大学试题，2002 年)

解 平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$，由图 3-1 可见

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-2\,\overrightarrow{CA}$$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{\alpha} - 2|\boldsymbol{\alpha}|\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{n}\rangle\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\\
&= \boldsymbol{\alpha} - 2\,\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.
\end{aligned}
$$

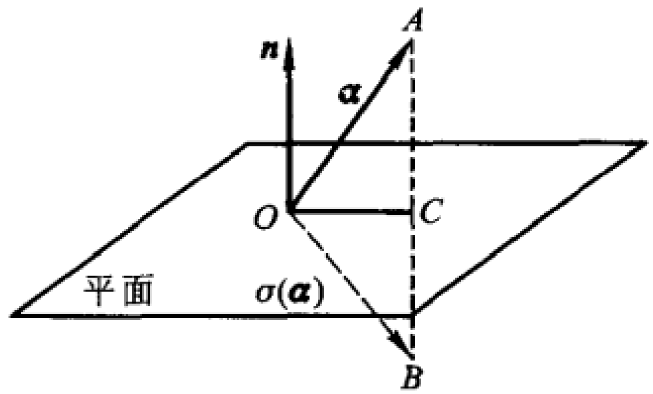


图 3-1

(1) $\sigma(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1-2\,\dfrac{(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}=(1,0,0)-\dfrac{2}{3}(1,1,-1)=\dfrac{1}{3}(1,-2,2)$;

$$\sigma(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_2-2\,\frac{(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}=(0,1,0)-\frac{2}{3}(1,1,-1)=\frac{1}{3}(-2,1,2);$$

$$\sigma(\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{e}_3-2\,\frac{(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}=(0,0,1)+\frac{2}{3}(1,1,-1)=\frac{1}{3}(2,2,1);$$

(2) 若取基 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3\}$,其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$,是平面的法向量.在平面上任取两个点 $P_2=(1,-1,0)$,$P_3=(1,1,2)$,再取 $\boldsymbol{\varepsilon}_2=\overrightarrow{OP_2}=(1,-1,0)$,$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\overrightarrow{OP_3}=(1,1,2)$,则由镜面反射的定义即得

$$
\begin{aligned}
&\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\sigma(\boldsymbol{n})=-\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{\varepsilon}_1,\\
&\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\boldsymbol{\varepsilon}_2,\\
&\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=\boldsymbol{\varepsilon}_3.
\end{aligned}
$$

同时,可以看出这里取的基向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是两两正交的.

3-5 习题提示与解答

1. 判别下列映射哪些是线性的(并指出它们是从哪个空间到哪个空间的线性映射),哪些不是线性的:

(1) $\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,x_1-x_3,x_2)$, $\forall\,(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$;

(2) $\sigma(x_1,x_2)=(x_1-x_2,x_1,x_1+x_2)$, $\forall\,(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$;

(3) $\sigma(x_1,x_2)=(x_1^2,x_1+x_2)$, $\forall\,(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$;

(4) $\sigma(\boldsymbol{\xi})=2\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}_0$, $\forall\,\boldsymbol{\xi}\in V$(线性空间),$\boldsymbol{\xi}_0$ 是 V 中的一个固定向量;

(5) $\sigma(p(x))=p(x+1)-p(x), \forall\, p(x)\in R[x]_n$;

(6) $\sigma(p(x))=p(a), \forall\, p(x)\in R[x]$, a 是一个常数.

解 (1) 是 $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 的线性变换. $\forall\,(x_1,x_2,x_3),(x_1',x_2',x_3')\in\mathbf{R}^3$, k_1, $k_2\in\mathbf{R}$,有

$$\begin{aligned}&\sigma(k_1(x_1,x_2,x_3)+k_2(x_1',x_2',x_3'))\\=&((k_1x_1+k_2x'_1)+(k_1x_2+k_2x'_2),(k_1x_1+k_2x'_1)-(k_1x_3+k_2x'_3),(k_1x_2+k_2x'_2))\\=&(k_1(x_1+x_2),k_1(x_1-x_3),k_1x_2)+(k_2(x_1'+x_2'),k_2(x_1'-x_3'),k_2x_2')\\=&k_1\sigma(x_1,x_2,x_3)+k_2\sigma(x_1',x_2',x_3').\end{aligned}$$

(2) 是 $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ 的线性映射(证明过程类似(1)).

(3) 不是线性变换.因为 $\forall\,(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2$,有

$$\begin{aligned}&\sigma((x_1,x_2)+(y_1,y_2))\\=&\sigma(x_1+y_1,x_2+y_2)\\=&((x_1+y_1)^2,x_1+y_1+x_2+y_2)\\=&(x_1^2,x_1+x_2)+(y_1^2,y_1+y_2)+(2x_1y_1,0)\\=&\sigma(x_1,x_2)+\sigma(y_1,y_2)+(2x_1y_1,0)\\\neq&\sigma(x_1,x_2)+\sigma(y_1,y_2).\end{aligned}$$

(4) $\boldsymbol{\xi}_0=\mathbf{0}$, $\sigma(\boldsymbol{\xi})=2\boldsymbol{\xi}$ 时,是 $V\to V$ 的线性变换;$\boldsymbol{\xi}_0\neq0$ 时,不是线性变换.因为

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)&=2(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)+\boldsymbol{\xi}_0\\&\neq\sigma(\boldsymbol{\xi}_1)+\sigma(\boldsymbol{\xi}_2)\\&=2(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)+2\boldsymbol{\xi}_0.\end{aligned}$$

(5) 是 $R[x]_n$ 线性变换. $\forall\,p_1(x),p_2(x)\in R[x]_n$, $\forall\,k_1,k_2\in\mathbf{R}$,有

$$\begin{aligned}&\sigma(k_1p_1(x)+k_2p_2(x))\\=&(k_1p_1+k_2p_2)(x+1)-(k_1p_1+k_2p_2)(x)\\=&k_1[p_1(x+1)-p_1(x)]+k_2[p_2(x+1)-p_2(x)]\\=&k_1\sigma(p_1(x))+k_2\sigma(p_2(x)).\end{aligned}$$

(6) 是 $R[x]$的线性变换. $\forall\,p_1(x),p_2(x)\in R[x]$, $k_1,k_2\in\mathbf{R}$,有

$$\begin{aligned}&\sigma(k_1p_1(x)+k_2p_2(x))\\=&k_1p_1(a)+k_2p_2(a)\\=&k_1\sigma(p_1(x))+k_2\sigma(p_2(x)).\end{aligned}$$

2. 求 $\mathbf{R}^2$ 的线性变换 σ,使得正方形 $ABCD$(其中 $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$)变换为下列四边形 $A'B'C'D'$(如图 3-2 所示).

解 (1) 此变换是向逆时针方向旋转 90°的旋转变换,则

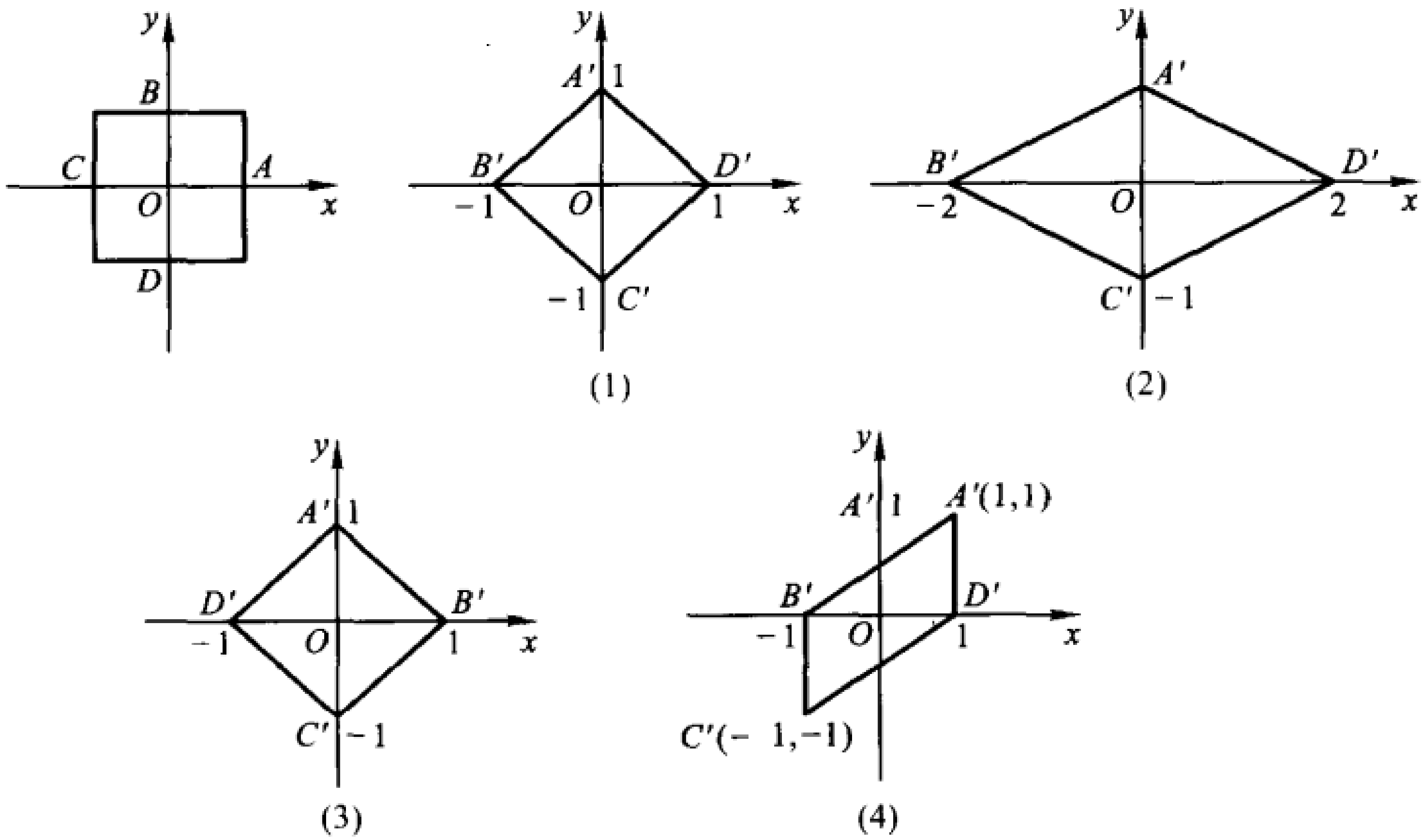


图 3－2

$$\sigma(e_1)=\sigma(1,0)=(0,1),$$
$$\sigma(e_2)=\sigma(0,1)=(-1,0),$$

于是，$$\sigma(x,y)=\sigma(xe_1+ye_2)=x\sigma(e_1)+y\sigma(e_2)=(-y,x).$$

(2) 将(1)中的线性变换在 Ox 方向放大一倍，所以 $\sigma(x,y)=(-2y,x)$.

(3) 此变换是(1)中的线性变换关于 y 轴的镜面反射(或说对称变换)，即将二元变量(x,y)的 x 反号. 所以，

$$\sigma(x,y)=(y,x).$$

(4) $$\sigma(e_1)=\sigma(1,0)=(1,1)=e_1+e_2,$$
$$\sigma(e_2)=\sigma(0,1)=(-1,0)=-e_1,$$

因此，
$$\begin{aligned}\sigma(x,y)&=\sigma(xe_1+ye_2)=x\sigma(e_1)+y\sigma(e_2)\\&=x(e_1+e_2)+y(-e_1)\\&=(x-y)e_1+xe_2=(x-y,x).\end{aligned}$$

3. 设 $\mathbf{R}^3$ 的一个二维子空间 W 为

$$W=\{\boldsymbol{\xi}\mid(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\omega})=0,\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^3\},$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是一个固定的单位向量，$(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\omega})$表示 $\boldsymbol{\xi}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 的内积.

(1) 求 $\mathbf{R}^3$ 到 W 上的投影变换 p，并证明 $p^2=p$；

(2) 求 $\mathbf{R}^3$ 关于镜面 W(W 是过原点的一个平面)的镜像变换 φ.

解 (1) 取 $\mathbf{R}^3$ 的基$\{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\}$，其中单位向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\in W$ 且 $\boldsymbol{\xi}_1\perp\boldsymbol{\xi}_2$. 根据投影变换的定义易知

$$p(\boldsymbol{\omega})=\mathbf{0},\quad p(\boldsymbol{\xi}_1)=\boldsymbol{\xi}_1,\quad p(\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{\xi}_2; \tag{1}$$

$$p^2(\boldsymbol{\omega})=p(p(\boldsymbol{\omega}))=\mathbf{0},\quad p^2(\boldsymbol{\xi}_1)=\boldsymbol{\xi}_1,\quad p^2(\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{\xi}_2.$$

由于投影变换 p 与 p^2 关于基$\{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\}$的像完全相同,所以,

$$p=p^2.$$

下面求投影变换的表示式.

方法 1
$$\begin{aligned}\forall\,\boldsymbol{\alpha}&=c_1\boldsymbol{\omega}+c_2\boldsymbol{\xi}_1+c_3\boldsymbol{\xi}_2\\&=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\xi}_1)\boldsymbol{\xi}_1+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\xi}_2)\boldsymbol{\xi}_2\in\mathbf{R}^3,\end{aligned}\tag{2}$$

由 p 的基像(1)得

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{\alpha})&=c_1p(\boldsymbol{\omega})+c_2p(\boldsymbol{\xi}_1)+c_3p(\boldsymbol{\xi}_2)\\&=\mathbf{0}+c_2\boldsymbol{\xi}_1+c_3\boldsymbol{\xi}_2\quad(\text{由(2)式})\\&=\boldsymbol{\alpha}-c_1\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\alpha}-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}.\end{aligned}$$

方法 2　W 是 $\mathbf{R}^3$中过原点的平面上的全体向量,由图 3-1 可见

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{\alpha})&=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CA}\\&=\boldsymbol{\alpha}-|\boldsymbol{\alpha}|(\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\omega}\rangle)\boldsymbol{\omega}\quad(\text{此处}|\boldsymbol{\omega}|=1)\\&=\boldsymbol{\alpha}-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}.\end{aligned}$$

(2) $\forall\,\boldsymbol{\alpha}=c_1\boldsymbol{\omega}+c_2\boldsymbol{\xi}_1+c_3\boldsymbol{\xi}_2\in\mathbf{R}^3$,$\boldsymbol{\alpha}$ 关于 W 的镜像变换 φ 的像为

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{\alpha})&=c_1\varphi(\boldsymbol{\omega})+c_2\varphi(\boldsymbol{\xi}_1)+c_3\varphi(\boldsymbol{\xi}_2)\\&=-c_1\boldsymbol{\omega}+c_2\boldsymbol{\xi}_1+c_3\boldsymbol{\xi}_2\quad(\text{由(2)式})\\&=\boldsymbol{\alpha}-2c_1\boldsymbol{\omega}\\&=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}.\end{aligned}$$

另一种方法:按 3.4 节例 9 的方法也可得上述结果(注意此处$(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})=1$).

4. 设$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$是线性空间 $V(F)$的一组基,$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2\in V$,定义

$$T(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2)=r_1x_1\boldsymbol{\alpha}_1+r_2x_2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

其中 r_1,r_2是域 F 中的两个常数.证明:T 是 V 上的一个线性变换,当 $V(F)=\mathbf{R}^2$时,说明线性变换 T 的几何意义.

证　T 是 V 上的一个线性变换(类似题 1(1)的证法,证明过程略去).

线性变换 T 的几何意义:将 $\mathbf{R}^2$空间中的向量沿 x 轴正方向放大 r_1倍;沿 y 轴正方向放大 r_2倍(如果 r_1,r_2为负数,则沿轴的负方向放大;如果 r_1,r_2为小于 1 的正数,则沿轴正方向缩小 r_1,r_2倍).

5. 求下列线性变换 σ 的像(值域)和核以及 σ 的秩:

(1) $\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3,-x_1-2x_3,x_2-x_3)$;

(2) $\sigma(x_1,x_2)=(x_2,x_1,x_2-x_1)$;

(4) σ 是 n 维线性空间 V 的零变换;

(5) σ 是 n 维线性空间 V 的恒等变换;

(6) $\sigma:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,且 $\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,0,\cdots,0)$.

解 (1) $\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3,-x_1-2x_3,x_2-x_3)$

$$=x_1(1,-1,0)+x_2(1,0,1)+x_3(1,-2,-1),$$

值域为 $\qquad\sigma(V)=L((1,-1,0),(1,0,1),(1,-2,-1)),$

因为 $\qquad(1,-2,-1)=2(1,-1,0)-(1,0,1),$

所以, $\qquad r(\sigma)=2.$

$$\sigma(V)=L((1,-1,0),(1,0,1)),$$

由于 $\qquad\mathrm{Ker}\ \sigma=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}\},$

所以,齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\-x_1-2x_3=0,\\x_2-x_3=0\end{cases}$$

的解空间为 $\qquad S=L\{(-2,1,1)\}=\mathrm{Ker}\ \sigma.$

(2) $\qquad\sigma(V)=L((0,1,-1),(1,0,1)),r(\sigma)=2,$

$$\mathrm{Ker}\ \sigma=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\sigma(\boldsymbol{\alpha})=0\}=\{\mathbf{0}\}.$$

(4) $\forall\ \boldsymbol{\alpha}$,均有 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$,所以 $\sigma(V)=\{0\},r(\sigma)=0,\mathrm{Ker}\ \sigma=V$.

(5) $\forall\ \boldsymbol{\alpha}$,均有 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$,所以 $\sigma(V)=V,r(\sigma)=n,\mathrm{Ker}\ \sigma=\{\mathbf{0}\}$.

(6) $\qquad\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1(1,0,\cdots,0),$

所以,

$$\sigma(V)=L(\boldsymbol{e}_1),r(\sigma)=1.$$

由于 $\sigma(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1,\sigma(\boldsymbol{e}_2)=\cdots=\sigma(\boldsymbol{e}_n)=\mathbf{0}$,所以,

$$\mathrm{Ker}\ \sigma=L(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\cdots,\boldsymbol{e}_n),\text{为 } n-1 \text{ 维子空间}.$$

6. 求 $\mathbf{R}^3$ 的一个线性变换 σ,使得 σ 的像(值域)为 $\sigma(\mathbf{R}^3)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,2)$.

解 由于 $\forall\ \boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$,均有 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$,即 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合,所以,

$$\begin{aligned}\sigma(x_1,x_2,x_3)&=x_1(1,0,-1)+x_2(1,2,2)\\&=(x_1+x_2,2x_2,-x_1+2x_3).\end{aligned}$$

但要注意,此时 $\sigma(x_1,x_2,x_3)$ 的表达式不唯一,例如,它也可以为

$$\begin{aligned}\sigma(x_1,x_2,x_3)&=x_2(1,0,-1)-x_3(1,2,2)\\&=(x_2-x_3,-2x_3,-x_2-2x_3).\end{aligned}$$

7. 已知 $\mathbf{R}^2$ 的线性变换 $\sigma(x_1,x_2)=(x_1-x_2,x_1+x_2)$.

(1) 求 $\sigma^2(x_1,x_2)$.

(2) σ 是否可逆？如可逆，求 $\sigma^{-1}(x_1,x_2)$.

解 (1) $\sigma^2(x_1,x_2)=\sigma(\sigma(x_1,x_2))=\sigma(x_1-x_2,x_1+x_2)$

$$=(x_1-x_2-(x_1+x_2),x_1-x_2+x_1+x_2)$$
$$=(-2x_2,2x_1).$$

(2) σ 可逆的充分必要条件是存在线性变换 τ，使得

$$\tau\sigma=I(\text{恒等变换}).$$

于是，$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^2$，令 $\tau\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$，即

$$\tau\sigma(x_1,x_2)=\tau(x_1-x_2,x_1+x_2)=(x_1,x_2).$$

令上式中的 $x_1-x_2=y_1,x_1+x_2=y_2$，则

$$x_1=\frac{y_1+y_2}{2},\quad x_2=\frac{-y_1+y_2}{2}.$$

于是

$$\tau(y_1,y_2)=\left(\frac{y_1+y_2}{2},\frac{y_2-y_1}{2}\right),$$

则 $$\tau(x_1,x_2)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_2-x_1}{2}\right)=\sigma^{-1}(x_1,x_2).$$

8. 已知 $\mathbf{R}^2$ 的线性变换 $\sigma(x_1,x_2)=(x_1-x_2,x_2-x_1)$.

(1) 求 σ 的秩和 $\operatorname{Ker}\sigma$；

(2) 求 $\tau\in L(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^2)$，使 $\tau\sigma=\theta$(零变换).

解 (1) $\sigma(x_1,x_2)=(x_1-x_2,x_2-x_1)=x_1(1,-1),+x_2(-1,1)$,

所以， $$\sigma(V)=L((1,-1)),\quad r(\sigma)=1.$$

齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=0,\\x_2-x_1=0\end{cases}$$

的解空间 $$L((1,1))=\operatorname{Ker}\sigma.$$

(2) $$\tau\sigma(x_1,x_2)=\tau(x_1-x_2,x_2-x_1)=(0,0),$$

令上式中 $x_1-x_2=y_1,x_2-x_1=y_2$，由于，$y_1+y_2=0$，所以

$$\tau(y_1,y_2)=(y_1+y_2,y_1+y_2),$$

即当 $\tau(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_1+x_2)$时，有 $\tau\sigma=\theta$(零变换).

当然，如果 $\tau(x_1,x_2)=(0,0)$时，即 τ 为零变换时，显然 $\tau\sigma=\theta$.

9. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个线性变换 σ,τ 为

$$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_3,0,0),$$
$$\tau(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3,x_1-x_2,0).$$

(1) 求 $r(\sigma),r(\tau),\operatorname{Im}\sigma,\operatorname{Ker}\sigma$；

(2) 求 $r(\sigma\tau),r(\tau\sigma)$;

(3) 求 $r(\sigma+\tau)$;

*(4) 求 $\mathrm{Im}\ \tau+\mathrm{Ker}\ \tau$.

解 (1) $\mathrm{Im}\ \sigma=L(\boldsymbol{e}_1),r(\sigma)=1,\mathrm{Ker}\ \sigma=L(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2),r(\tau)=2$.

(2) $$\sigma\tau(x_1,x_2,x_3)=\sigma(x_1+x_2+x_3,x_1-x_2,0)=(0,0,0),$$
$$r(\sigma\tau)=0;$$
$$\tau\sigma(x_1,x_2,x_3)=\tau(x_3,0,0)=(x_3,x_3,0),$$
$$\tau\sigma\neq\theta=\sigma\tau.$$

求 $r(\tau\sigma)$,方法 1
$$\tau\sigma(V)=L((1,1,0)),$$
$$r(\tau\sigma)=1.$$

方法 2 由 $\tau\sigma\neq\theta$,知
$$1\leqslant r(\tau\sigma)\leqslant\min\{r(\tau),r(\sigma)\}=1,$$
所以,
$$r(\tau\sigma)=1.$$

(3) $$\begin{aligned}(\sigma+\tau)(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+x_2+2x_3,x_1-x_2,0)\\&=x_1(1,1,0)+x_2(1,-1,0)+x_3(2,0,0),\end{aligned}$$
$$r(\sigma+\tau)=r\{(1,1,0),(1,-1,0),(2,0,0)\}=2.$$

(4) 由 $$\begin{aligned}\mathrm{Im}\ \tau&=L((1,1,0),(1,-1,0),(1,0,0))\\&=L((1,1,0),(1,-1,0)),\end{aligned}$$
$$\mathrm{Ker}\ \tau=L((1,1,-2)),$$
可得 $$\mathrm{Im}\ \tau+\mathrm{Ker}\ \tau=L((1,1,0),(1,-1,0),(1,1,-2))=\mathbf{R}^3.$$

10. 已知
$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1),\boldsymbol{\alpha}_3=(-3,2);$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0),\boldsymbol{\beta}_2=(0,1),\boldsymbol{\beta}_3=(1,1).$$
问:是否存在 $\sigma\in L(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^2)$,使得 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}_i,i=1,2,3$.

解 不存在.若存在,则由 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,得
$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{0})&=\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)+\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0},\end{aligned}$$
与 $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3=(2,2)$矛盾.

11. 设 $\sigma\in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$, $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$是 $\mathbf{R}^n$ 的基,当 $m<n$ 时,$\{\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)\}$是否线性无关?为什么?

解 否.因为 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)\in\mathbf{R}^m(i=1,2,\cdots,n)$,$n$ 个 m 维($m<n$)向量必然线性相关.例如,$\mathbf{R}^3$到 $\mathbf{R}^2$的映射 $\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2)$,其基像

$$\sigma(e_1)=(1,0),\quad \sigma(e_2)=(0,1),\quad \sigma(e_3)=(0,0).$$

12. 已知 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换,且 σ 的像(值域)等于 σ 的核,证明:n 必为偶数,并在 $\mathbf{R}^2$ 中举出一个这种线性变换的例子.

证 因为
$$\dim(\mathrm{Im}\ \sigma)+\dim(\mathrm{Ker}\ \sigma)=n,$$
又
$$\dim(\mathrm{Im}\ \sigma)=\dim(\mathrm{Ker}\ \sigma),$$
所以 n 必为偶数.

例如,
$$\sigma(x,y)=(x-y,x-y),$$
$$\mathrm{Im}\ \sigma=L((1,1))=\mathrm{Ker}\ \sigma.$$

* **13.** 已知 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间 $W_1=\{(x,0,0)\mid x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 求 $\mathbf{R}^3$ 的另一子空间 W_2,使 $\mathbf{R}^3=W_1\oplus W_2$.这样的 W_2 是否唯一?如果 W_2 是 W_1 的正交补,W_2 是否唯一?

(2) 求 $\mathbf{R}^3$ 上的一个投影变换 p,使 $\mathrm{Im}\ p=W_1$,并问:$\mathrm{Im}\ p+\mathrm{Ker}\ p=\mathbf{R}^3$ 是否成立?

解 (1) 任取两个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$,使 $\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},(1,0,0)\}$ 线性无关,并取 $W_2=L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$,则
$$W_1\oplus W_2=\mathbf{R}^3.$$
显然,W_2 不唯一.

如果 W_2 是 W_1 的正交补,则 W_2 是唯一的.因为:如果 W_{21},W_{22} 都是 W_1 的正交补,则 $\forall\,\boldsymbol{\xi}\in W_{21}$,均有$(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{e}_1)=0$,从而,$\boldsymbol{\xi}\in W_{22}$,故 $W_{21}\subseteq W_{22}$;同理,$W_{22}\subseteq W_{21}$,因此,$W_{21}=W_{22}$.

(2) 当 $p(x,y,z)=(x,0,0)$时,
$$\mathrm{Im}\ p=W_1=L((1,0,0))=L(\boldsymbol{e}_1).$$
由于 $p(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1$,$p(\boldsymbol{e}_2)=\mathbf{0}$,$p(\boldsymbol{e}_3)=\mathbf{0}$,所以,$\mathrm{Ker}\ p=L(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$.此时,
$$\mathrm{Im}\ p+\mathrm{Ker}\ p=L(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\mathbf{R}^3.$$

* **14.** 已知 $\sigma\in L(V,V)$,$\dim V=n$,有人认为"由 $r(\sigma)+\dim(\mathrm{Ker}\ \sigma)=n$ 可得 $\mathrm{Im}\ \sigma+\mathrm{Ker}\ \sigma=V$",这个说法正确吗?

解 不正确.见 12 题的例子.此时,
$$\mathrm{Im}\ \sigma+\mathrm{Ker}\ \sigma=L(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\neq V=\mathbf{R}^3.$$

* **15.** 已知 V 是一个线性空间,$\sigma\in L(V,V)$,证明:

(1) $\mathrm{Im}\ \sigma\subset\mathrm{Ker}\ \sigma\Leftrightarrow\sigma^2=\theta$(零变换);

(2) $\mathrm{Ker}\ \sigma^k\subset\mathrm{Ker}\ \sigma^{k+1}$,$k=1,2,\cdots$;

(3) $\mathrm{Im}\ \sigma^k\supset\mathrm{Im}\ \sigma^{k+1}$,$k=1,2,\cdots$.

证 (1) 必要性:$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V$,由 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{Im}\ \sigma\subset\mathrm{Ker}\ \sigma$,可知 $\sigma(\sigma(\boldsymbol{\alpha}))=\mathbf{0}$,所以,$\sigma^2=\theta$.

充分性：$\forall \boldsymbol{\alpha}\in \mathrm{Im}\ \sigma$，$\exists \boldsymbol{\beta}\in V$，使 $\sigma(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}$，于是

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\sigma(\boldsymbol{\beta}))=\sigma^2(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}\quad (\text{因为 } \sigma^2=\theta),$$

所以，$\boldsymbol{\alpha}\in \mathrm{Ker}\ \sigma$，因此，$\mathrm{Im}\ \sigma\subset \mathrm{Ker}\ \sigma$.

(2) $$\forall \boldsymbol{\alpha}\in \mathrm{Ker}\ \sigma^k \Rightarrow \sigma^k(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}\Rightarrow \sigma^{k+1}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},$$

所以，$\boldsymbol{\alpha}\in \mathrm{Ker}\ \sigma^{k+1}$，因此，$\mathrm{Ker}\ \sigma^k\subset \mathrm{Ker}\ \sigma^{k+1}$.

(3) $\forall \boldsymbol{\alpha}\in \mathrm{Im}\ \sigma^{k+1}$，$\exists \boldsymbol{\beta}\in V$，使得 $\sigma^{k+1}(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}$，即

$$\sigma^k(\sigma(\boldsymbol{\beta}))=\boldsymbol{\alpha},$$

记 $\boldsymbol{\gamma}=\sigma(\boldsymbol{\beta})\in V$，则

$$\sigma^k(\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\alpha}\in \mathrm{Im}\ \sigma^k,$$

所以，
$$\mathrm{Im}\ \sigma^k\supset \mathrm{Im}\ \sigma^{k+1}.$$

16. 设 $\sigma\in L(V,V)$，$\boldsymbol{\xi}\in V$. 证明：若 $\sigma^{k-1}(\boldsymbol{\xi})\neq\mathbf{0}$，$\sigma^k(\boldsymbol{\xi})=0$，则 $\{\boldsymbol{\xi},\sigma(\boldsymbol{\xi}),\cdots,\sigma^{k-1}(\boldsymbol{\xi})\}$ 是线性无关的($k>0$).

证 设
$$x_1\boldsymbol{\xi}+x_2\sigma(\boldsymbol{\xi})+x_3\sigma^2(\boldsymbol{\xi})+\cdots+x_k\sigma^{k-1}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}. \tag{1}$$

以 σ^{k-1} 作用于等式(1)两边，有

$$\sigma^{k-1}(x_1\boldsymbol{\xi}+x_2\sigma(\boldsymbol{\xi})+x_3\sigma^2(\boldsymbol{\xi})+\cdots+x_k\sigma^{k-1}(\boldsymbol{\xi}))=\sigma^{k-1}(\mathbf{0})=\mathbf{0}.$$

由于 $\sigma^{k-1}(\boldsymbol{\xi})\neq\mathbf{0}$，则 $\sigma^k(\boldsymbol{\xi})=\cdots=\sigma^{2k-2}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$，所以 $x_1\sigma^{k-1}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$，从而得 $x_1=0$.

将 $x_1=0$ 代回(1)式，再以 σ^{k-2} 作用于(1)式两边，同理得 $x_2=0$. 如此，继续依次用 $\sigma^{k-3},\cdots,\sigma^2,\sigma$ 作用于(1)式，又可得

$$x_3=\cdots=x_{k-1}=x_k=0.$$

所以，$\boldsymbol{\xi},\sigma(\boldsymbol{\xi}),\sigma^2(\boldsymbol{\xi}),\cdots,\sigma^{k-1}(\boldsymbol{\xi})$ 线性无关.

17. 下列线性空间 V_1 与 V_2 是否同构？如果同构，给出 V_1 到 V_2 的一个同构映射.

(1) $V_1=\mathbf{C}(\mathbf{R})$（全体复数 $\mathbf{C}$ 在实数域 $\mathbf{R}$ 上构成的线性空间），$V_2=\mathbf{R}^2$；

(2) $V_1=\mathbf{C}^2(\mathbf{R})$（全体二元复向量 $\mathbf{C}^2$ 在实数域 $\mathbf{R}$ 上构成的线性空间），$V_2=R[x]_4$；

(3) $V_1=\mathbf{C}^2(\mathbf{R})$，$V_2=R[x]_2$；

* (4) $V_1=\mathbf{R}^2$，$V_2=L(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^1)$.

解 (1) $\mathbf{C}(\mathbf{R})\cong\mathbf{R}^2$. 同构映射

$$\sigma(a+\mathrm{i}b)=(a,b).$$

(2) $\mathbf{C}^2(\mathbf{R})\cong R[x]_4$. 同构映射把 $\mathbf{C}^2(\mathbf{R})$ 的基 $\{(1,0),(0,1),(\mathrm{i},0),(0,\mathrm{i})\}$ 中向量分别映射为 $R[x]_4$ 的基向量$(1,x,x^2,x^3)$.

(3) $V_1=\mathbf{C}^2(\mathbf{R})$ 与 $V_2=R[x]_2$ 不同构. 因为

$$\dim \mathbf{C}^2(\mathbf{R})=4\neq\dim R[x]_2=2.$$

(4) $\mathbf{R}^2 \cong L(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^1)$. $\forall \boldsymbol{\alpha}=(a,b)\in \mathbf{R}^2$,映射

$$\sigma(a,b)=f(x,y)=ax+by\in L(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$$

是同构映射.此时,$\mathbf{R}^2$中的向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b)$与 $L(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$中的二元函数 $f(x,y)=ax+by$ 是一一对应的.

18. 设 $V(\mathbf{R})$是线性空间,σ 是 $V(\mathbf{R})$到 $\mathbf{R}^3$的同构映射,且 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=(1,0,1)$,$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=(-2,1,0)$,$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3)=(-3,2,1)$,$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_4)=(1,1,2)$.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$在 V 的子空间$L(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$中吗?

*(2) 设 $W_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$,$W_2=L(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,求 $W_1\cap W_2$.

解 (1) 在.因为

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=-2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)+\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3)=\sigma(-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3),$$

同构映射 σ 可逆,所以,

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\in L(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3).$$

(2) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,所以,$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$与$\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$等价,即

$$W_1=L(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=L(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4),$$

因此,
$$W_1\cap W_2=L(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\cap L(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=L(\boldsymbol{\alpha}_3).$$

3-6 补充题提示与解答

1. 是否存在 $\mathbf{R}^3$到 $\mathbf{R}^2$的一个线性映射 σ,使得 $\sigma(1,-1,1)=(1,0)$,$\sigma(1,1,1)=(0,1)$?

解 存在.设

$$\begin{aligned}\sigma(1,-1,1)&=\sigma(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\\&=\sigma(\boldsymbol{e}_1)-\sigma(\boldsymbol{e}_2)+\sigma(\boldsymbol{e}_3)\\&=(1,0)=\boldsymbol{\varepsilon}_1,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\sigma(1,1,1)&=\sigma(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\\&=\sigma(\boldsymbol{e}_1)+\sigma(\boldsymbol{e}_2)+\sigma(\boldsymbol{e}_3)\\&=(0,1)=\boldsymbol{\varepsilon}_2.\end{aligned}\tag{2}$$

欲使(1)式和(2)式成立,可取 $\sigma(\boldsymbol{e}_3)=(0,0)=\mathbf{0}$,
再由(1)式和(2)式解得

$$\sigma(\boldsymbol{e}_1)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2),$$

$$\sigma(\boldsymbol{e}_2)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2).$$

所以,存在线性映射 $\sigma:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$,它关于 $\mathbf{R}^3$ 基的像是

$$\sigma(\boldsymbol{e}_1)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{e}_2)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2),\sigma(\boldsymbol{e}_3)=\mathbf{0},$$

使得
$$\sigma(1,-1,1)=(1,0),\sigma(1,1,1)=(0,1).$$

*2. 设 V 是有限维线性空间,$T\in L(V,V)$且 T 不是恒等变换也不是零变换.问:下列情况是否可能发生(在 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$ 中举例)?

(1) $\operatorname{Im} T\cap\operatorname{Ker} T=\{\mathbf{0}\}$; (2) $\operatorname{Im} T\subset\operatorname{Ker} T$;

(3) $\operatorname{Im} T=\operatorname{Ker} T$; (4) $\operatorname{Ker} T\subset\operatorname{Im} T$.

又问:当 T 为投影变换时,上述哪些情况发生?

解 (1) 可能.例如,

$$T(x,y)=(x+y,x+y),$$
$$\operatorname{Im} T=L(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2),$$
$$\operatorname{Ker} T=L(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2),$$
$$\operatorname{Im} T\cap\operatorname{Ker} T=\{\mathbf{0}\}.$$

(2) 可能.例如,

$$T(x,y,z)=(x-y,x-y,x-y),$$
$$\operatorname{Im} T=L((1,1,1)),$$
$$\operatorname{Ker} T=L((1,1,1),(1,1,0)),$$
$$\operatorname{Im} T\subset\operatorname{Ker} T.$$

(3) 可能.例如,

$$T(x,y)=(x-y,x-y),$$
$$\operatorname{Im} T=L((1,1))=\operatorname{Ker} T.$$

(4) 可能.例如,

$$T(x,y)=(x,x-y),$$
$$\operatorname{Im} T=\mathbf{R}^2,$$
$$\operatorname{Ker} T=\{0\},$$
$$\operatorname{Ker} T\subset\operatorname{Im} T.$$

当 T 为投影变换时,上述(1)可能发生.例如,

$$T(x,y,z)=(x,y,0),$$
$$\operatorname{Im} T=L((1,0,0),(0,1,0)),$$
$$\operatorname{Ker} T=L((0,0,1)),$$
$$\operatorname{Im} T\cap\operatorname{Ker} T=\{0\}.$$

*3. 已知 V 是一个线性空间,$\sigma\in L(V,V)$ 证明:

(1) $\operatorname{Ker}\sigma=\operatorname{Ker}\sigma^2\Leftrightarrow\operatorname{Ker}\sigma\cap\operatorname{Im}\sigma=\{\mathbf{0}\}$(零子空间);

(2) $\operatorname{Im}\sigma^2=\operatorname{Im}\sigma\Leftrightarrow V=\operatorname{Ker}\sigma+\operatorname{Im}\sigma$.

证 (1) 充分性:欲证 $\operatorname{Ker}\sigma=\operatorname{Ker}\sigma^2$,只须证明这两个核(是一个集合)互相包含. $\operatorname{Ker}\sigma\subset\operatorname{Ker}\sigma^2$ 是显然的,因为 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$,

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}\Rightarrow\sigma^2(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}.$$

下面证 $\operatorname{Ker}\sigma^2\subset\operatorname{Ker}\sigma$. $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Ker}\sigma^2$, $\sigma^2(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\sigma(\boldsymbol{\alpha}))=0$,所以, $\sigma(\boldsymbol{\alpha})\in\operatorname{Ker}\sigma$,且 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})\in\operatorname{Im}\sigma$. 由已知条件 $\operatorname{Ker}\sigma\cap\operatorname{Im}\sigma=\{\mathbf{0}\}$,得 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$,即 $\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Ker}\sigma$,所以, $\operatorname{Ker}\sigma^2\subset\operatorname{Ker}\sigma$.

综上,
$$\operatorname{Ker}\sigma=\operatorname{Ker}\sigma^2.$$

必要性: $\forall\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Ker}\sigma\cap\operatorname{Im}\sigma$, $\exists\boldsymbol{\beta}\in V$,有 $\sigma(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}$,且 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$,于是得 $\sigma(\sigma(\boldsymbol{\beta}))=\mathbf{0}$,即 $\boldsymbol{\beta}\in\operatorname{Ker}\sigma^2=\operatorname{Ker}\sigma$(已知条件),因此, $\boldsymbol{\alpha}=\sigma(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}$,故 $\operatorname{Ker}\sigma\cap\operatorname{Im}\sigma=\{\mathbf{0}\}$.

(2) 充分性:先证 $\operatorname{Im}\sigma^2\subset\operatorname{Im}\sigma$. $\forall\boldsymbol{\beta}\in\operatorname{Im}\sigma^2$, $\exists\boldsymbol{\alpha}\in V$,使得

$$\boldsymbol{\beta}=\sigma^2(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\sigma(\boldsymbol{\alpha})).$$

因为 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})\in V$,所以, $\boldsymbol{\beta}\in\operatorname{Im}\sigma$,因此, $\operatorname{Im}\sigma^2\subset\operatorname{Im}\sigma$.

再证 $\operatorname{Im}\sigma\subset\operatorname{Im}\sigma^2$. $\forall\boldsymbol{\beta}\in\operatorname{Im}\sigma$, $\exists\boldsymbol{\alpha}\in V$,使得 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}$. 根据已知条件,对于 $\boldsymbol{\alpha}$, $\exists\boldsymbol{\alpha}_1\in\operatorname{Ker}\sigma$, $\boldsymbol{\alpha}_2\in\operatorname{Im}\sigma$,使得 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,其中 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$,且 $\exists\boldsymbol{\gamma}\in V$,使得 $\boldsymbol{\alpha}_2=\sigma(\boldsymbol{\gamma})$,于是,

$$\boldsymbol{\beta}=\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathbf{0}+\sigma(\sigma(\boldsymbol{\gamma}))=\sigma^2(\boldsymbol{\gamma})\in\operatorname{Im}\sigma^2,$$

所以, $\operatorname{Im}\sigma\subset\operatorname{Im}\sigma^2$. 故 $\operatorname{Im}\sigma=\operatorname{Im}\sigma^2$.

必要性:先证 $V\subset\operatorname{Ker}\sigma+\operatorname{Im}\sigma$. $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$, $\sigma(\boldsymbol{\alpha})\in\operatorname{Im}\sigma=\operatorname{Im}\sigma^2$(已知条件). 于是, $\exists\boldsymbol{\beta}\in V$,使得 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma^2(\boldsymbol{\beta})$,即 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})-\sigma^2(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}$. 由 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}-\sigma(\boldsymbol{\beta}))=\mathbf{0}$,得 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}-\sigma(\boldsymbol{\beta})\in\operatorname{Ker}\sigma$,即 $\sigma(\boldsymbol{\gamma})=\mathbf{0}$,所以

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\gamma}+\sigma(\boldsymbol{\beta})\in\operatorname{Ker}\sigma+\operatorname{Im}\sigma.$$

因此,
$$V\subset\operatorname{Ker}\sigma+\operatorname{Im}\sigma.$$

$\operatorname{Ker}\sigma$ 和 $\operatorname{Im}\sigma$ 都是 V 的子空间,它们的和也是 V 的子空间,所以

$$\operatorname{Ker}\sigma+\operatorname{Im}\sigma\subset V,$$

故
$$V=\operatorname{Ker}\sigma+\operatorname{Im}\sigma.$$

*4. 设 V 是一个 n 维线性空间, $V=W_1\oplus W_2$, $\sigma\in L(V,V)$,证明:

$$\sigma\text{ 可逆}\Leftrightarrow V=\sigma(W_1)+\sigma(W_2).$$

证 必要性: $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$,由 σ 可逆可知,存在唯一的 $\boldsymbol{\beta}\in V$,使得 $\boldsymbol{\alpha}=\sigma(\boldsymbol{\beta})$,且 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$,其中 $\boldsymbol{\beta}_1\in W_1$, $\boldsymbol{\beta}_2\in W_2$,于是,

$$\boldsymbol{\alpha}=\sigma(\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\beta}_1)+\sigma(\boldsymbol{\beta}_2)\in\sigma(W_1)+\sigma(W_2),$$

所以,
$$V\subset\sigma(W_1)+\sigma(W_2).$$

$\sigma(W_1)$ 和 $\sigma(W_2)$ 都是 V 的子空间,它们的和也是 V 的子空间,所以

$$\sigma(W_1)+\sigma(W_2)\subset V,$$

故 $$V=\sigma(W_1)+\sigma(W_2).$$

充分性：$\forall \boldsymbol{\alpha}\in V=\sigma(W_1)+\sigma(W_2)$，$\exists \boldsymbol{\alpha}_i\in\sigma(W_i)$，且 $\exists \boldsymbol{\beta}_i\in W_i$，使 $\boldsymbol{\alpha}_i=\sigma(\boldsymbol{\beta}_i)(i=1,2)$，使得

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\sigma(\boldsymbol{\beta}_1)+\sigma(\boldsymbol{\beta}_2)=\sigma(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=\sigma(\boldsymbol{\beta}),$$

其中 $$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2\in W_1+W_2=V,$$

所以，σ 为满射.

由于 n 维线性空间上的线性变换为满射时，也必为单射，从而必是双射，所以 σ 可逆.

5. 设 $\sigma,\tau\in L(V,V)$，$\sigma^2=\sigma$，$\tau^2=\tau$，证明：

(1) $\sigma^k=\sigma(k\geqslant 2$，即 σ 是幂等变换)；

(2) 若 $(\sigma+\tau)^2=\sigma+\tau$，则 $\sigma\tau=\theta$(零变换)；

(3) 若 $\sigma\tau=\tau\sigma$，则 $(\sigma+\tau-\sigma\tau)^2=\sigma+\tau-\sigma\tau$.

证 (1) 归纳法：$\sigma^2=\sigma$. 设 $\sigma^{k-1}=\sigma$，则

$$\sigma^k=\sigma\sigma^{k-1}=\sigma\sigma=\sigma^2=\sigma(对\ \forall\ k>2)$$

成立.

(2) 由 $(\sigma+\tau)^2=\sigma+\tau$，即

$$\sigma^2+\tau^2+\tau\sigma+\sigma\tau=\sigma+\tau+\tau\sigma+\sigma\tau=\sigma+\tau,$$

得 $$\tau\sigma+\sigma\tau=\theta. \tag{1}$$

(1)式两端左乘 σ，得

$$\sigma(\tau\sigma+\sigma\tau)=\sigma\tau\sigma+\sigma^2\tau=\theta,$$

即 $$\sigma\tau\sigma+\sigma\tau=\theta. \tag{2}$$

(1)式两端右乘 σ，得

$$(\tau\sigma+\sigma\tau)\sigma=\tau\sigma^2+\sigma\tau\sigma=\theta,$$

即 $$\tau\sigma+\sigma\tau\sigma=\theta. \tag{3}$$

(3)式减去(2)式，得

$$\tau\sigma-\sigma\tau=\theta. \tag{4}$$

由(1)式和(4)式得

$$\sigma\tau=\theta.$$

(3) 若 $\sigma\tau=\tau\sigma$，则

$$\begin{aligned}&(\sigma+\tau-\sigma\tau)^2\\&=(\sigma+\tau)^2-\sigma\tau(\sigma+\tau)-(\sigma+\tau)\sigma\tau+\sigma\tau\sigma\tau\\&=\sigma^2+\tau^2+2\sigma\tau-\sigma\tau\sigma-\sigma\tau^2-\sigma^2\tau-\tau\sigma\tau+\sigma\sigma\tau\tau\\&=\sigma+\tau+2\sigma\tau-\sigma\tau-\sigma\tau-\sigma\tau-\tau\sigma+\sigma\tau\\&=\sigma+\tau-\sigma\tau.\end{aligned}$$

*6. 设 $V(F)$是一个 n 维线性空间,$\sigma\in L(V,V)$,证明:

(1) 在 $F[x]$中有一个次数小于或等于 n^2 的多项式 $p(x)$使 $p(\sigma)=\theta$(零变换);

(2) σ 可逆⇔有一常数项不为零的多项式 $p(x)$使 $p(\sigma)=\theta$.

解 (1) $L(V,V)$是 n^2维线性空间,其中 n^2+1 个元素:$I,\sigma,\sigma^2,\cdots,\sigma^{n^2}$ 线性相关,即 $\exists\, a_i\,(i=1,2,\cdots,n^2)$使

$$a_0I+a_1\sigma+a_2\sigma^2+\cdots+a_{n^2}\sigma^{n^2}=\theta,$$

于是,$\exists\, p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n^2}x^{n^2}\in F[x]$,使

$$p(\sigma)=\theta.$$

(2) 必要性:设有一常数项不为零的多项式

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k\ (a_0\neq 0),$$

使
$$p(\sigma)=a_0I+a_1\sigma+a_2\sigma^2+\cdots+a_k\sigma^k=\theta\quad(\text{零变换}),$$

所以
$$\sigma(a_1I+a_2\sigma+\cdots+a_k\sigma^{k-1})=-a_0I,$$

因此,
$$\sigma^{-1}=-a_0^{-1}(a_1I+a_2\sigma+\cdots+a_k\sigma^{k-1}).$$

充分性:由(1)题可知,存在一个次数 $k\leqslant n^2$的多项式

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k,$$

使
$$p(\sigma)=a_0I+a_1\sigma+a_2\sigma^2+\cdots+a_k\sigma^k=\theta\ (\text{零变换}).$$

若 $a_0\neq 0$,则 $p(x)$为所求的.

若 $a_0=a_1=\cdots=a_{i-1}=0,a_i\neq 0$,即

$$a_i\sigma^i+a_{i+1}\sigma^{i+1}+\cdots+a_k\sigma^k=\theta,$$

由于 σ 可逆,将$(\sigma^{-1})^i=\sigma^{-i}$乘上式两端,得

$$a_iI+a_{i+1}\sigma+\cdots+a_k\sigma^{k-i}=\theta,$$

于是,
$$P(x)=a_i+a_{i+1}x+\cdots+a_kx^{k-i}\quad(a_i\neq 0)$$

为所求的多项式.

*7. 设 $c_1,c_2,\cdots,c_n$是 n 个互异的实常数,证明:$R[x]_n$到 $\mathbf{R}^n$ 的一个映射 σ:

$$\sigma(p(x))=(p(c_1),p(c_2),\cdots,p(c_n))$$

是 $R[x]_n$到 $\mathbf{R}^n$ 的一个同构映射.这里要求读者对 $n=3$ 的情形给予证明.对一般的 n,其证明要用到第 5 章中的 Vandermonde 行列式的性质.

证 先证 σ 是线性的.$\forall\, p(x),q(x)\in R[x]_3,\forall\, k_1,k_2\in\mathbf{R}$,有

$$\begin{aligned}&\sigma(k_1p(x)+k_2q(x))\\&=(k_1p(c_1)+k_2q(c_1),k_1p(c_2)+k_2q(c_2),k_1p(c_3)+k_2q(c_3))\\&=k_1(p(c_1),p(c_2),p(c_3))+k_2(q(c_1),q(c_2),q(c_3))\\&=k_1\sigma(p(x))+k_2\sigma(q(x)).\end{aligned}$$

所以，σ 是 $R[x]_3 \to \mathbf{R}^3$ 的线性映射.

再证 σ 是双射，即证明 $\forall (d_1, d_2, d_3) \in \mathbf{R}^3$，存在唯一的

$$p(x) = a + bx + cx^2 \in R[x]_3,$$

使

$$\sigma(p(x)) = (d_1, d_2, d_3).$$

根据

$$\sigma(p(x)) = (p(c_1), p(c_2), p(c_3)),$$

以及 $\sigma(p(x)) = (d_1, d_2, d_3)$，得

$$\begin{cases} a + bc_1 + cc_1^2 = d_1, \\ a + bc_2 + cc_2^2 = d_2, \\ a + bc_3 + cc_3^2 = d_3. \end{cases} \tag{1}$$

方程组(1)是关于未知元 a, b, c 的三元线性非齐次方程组(其中 c_1, c_2, c_3 是互异的实常数). 用高斯消元法，易将(1)的增广矩阵变换为下列阶梯形矩阵，即

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & c_1 & c_1^2 & d_1 \\ 1 & c_2 & c_2^2 & d_2 \\ 1 & c_3 & c_3^2 & d_3 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & c_1 & c_1^2 & d_1 \\ 0 & 1 & c_2 + c_1 & \dfrac{d_1 - d_2}{c_1 - c_2} \\ 0 & 0 & c_3 - c_2 & \dfrac{d_3 - d_1}{c_3 - c_1} - \dfrac{d_2 - d_1}{c_2 - c_1} \end{array}\right] \tag{2}$$

阶梯形矩阵(2)(其中 $c_3 - c_2, c_3 - c_1, c_2 - c_1$ 均为非零常数)对应的方程组有唯一解 a, b, c，即存在唯一的

$$p(x) = a + bx + cx^2 \in R[x]_3,$$

使得 $\sigma(p(x)) = (d_1, d_2, d_3)$ 成立. 所以 σ 是线性双射，也就是 $R[x]_3$ 到 $\mathbf{R}^3$ 的同构映射.

第4章 矩 阵

4－1 学时安排的建议

表4－1

节	教 学 内 容	复习页数
17	4.1 矩阵的定义，4.2 线性映射的矩阵表示，4.3 矩阵的加法与数量乘法，4.4 矩阵乘法	119—127
18	4.4 矩阵乘法，4.5 可逆矩阵，4.6 矩阵的转置	127—135
19	4.7 矩阵的初等变换和初等矩阵，4.8 节中的矩阵的秩	135—143
20	4.8 节中的相抵标准形，4.9 分块矩阵	143—149
21	4.10 基变换矩阵与坐标变换，5.1 n 阶行列式的定义	150—153 167—170

4－2 基本要求

1. 能正确写出线性映射在基下对应的矩阵. 理解矩阵的运算与线性映射的运算相对应，矩阵的秩等于线性映射的秩.

2. 熟悉特殊矩阵(单位矩阵，数量矩阵，对角矩阵，上、下三角矩阵，实对称矩阵和实反对称矩阵)的运算及其性质.

3. 熟练掌握矩阵的加法和数乘、乘法、转置、逆运算及各自的运算规律. 特别要注意矩阵乘法不满足交换律和消去律，以及矩阵乘法存在非零矩阵的零因子.

4. 熟悉三类初等矩阵：对换初等矩阵、倍乘初等矩阵和倍加初等矩阵. 理解初等矩阵左(右)乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对 $\boldsymbol{A}$ 做相应的初等行(列)变换.

5. 理解矩阵的秩的定义和"矩阵的行秩等于列秩等于矩阵的秩(也等于矩阵的行列式秩，见第5章)". 能熟练地求矩阵的秩. 理解"初等变换不改变矩阵的秩"，熟悉有关秩的重要不等式(主教材143页定理4.9).

知道矩阵的相抵关系是等价关系. 会求矩阵的相抵(也称等价)标准形.

6. 熟练掌握方阵可逆的条件和各种求逆矩阵的方法. 熟悉 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=n$，或 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列(或行)向量组线性无关，或 $\boldsymbol{A}$ 的

行列式不等于零(见第 5 章).

7. 掌握分块矩阵的加法,数乘,乘法,转置和求逆的运算及其应用.

8. 掌握线性空间的基变换公式和向量在不同基下的坐标变换公式.

4-3 内容综述与分析

1. 本章在线性代数中的地位

矩阵是线性映射的一种数值表示.当线性空间的基给定后,线性映射与矩阵一一对应,两者具有相同的运算律.矩阵的秩等于对应的线性映射的秩.有限维线性空间的线性映射中的各种问题都有一个矩阵问题与之对应,反之亦然.

线性代数所要研究的很多问题,例如,线性方程组求解及解的理论,线性空间中向量在不同基下的坐标,有限维线性空间的线性变换的特征值与特征向量及其相似标准形,n 元二次形(即二次齐次多项式)化为标准形(即二次型化为纯平方项之和)等,都要用到矩阵的运算和理论.因此,可以说矩阵是线性代数中最重要的运算对象,熟练掌握矩阵的加法、数乘、乘法、转置、求逆和初等变换等运算,是学好线性代数的基础.

2. 矩阵的概念及其运算(主教材 4.1—4.4 节)

矩阵仅仅是个数表,如果不定义其运算,并得到各种运算律,它无异于普通表格.矩阵作为线性映射的数值表示,自然也要定义与线性映射相应的矩阵的加法、数乘和乘法的运算.如此,线性方程组可以用矩阵等式表示为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$,研究它有解的条件和解的结构,就可以用矩阵和向量的有关理论和运算来表述.这里需要搞清楚,定义矩阵的加法、数乘和乘法(特别奇特的是乘法的定义)的依据是什么.它的依据就是:矩阵是线性映射的数值表示,矩阵的运算与是线性映射的运算相对应.

设 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$和 $B_2=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m\}$分别为 $V_1(F)$和 $V_2(F)$的基.线性映射 $\sigma:V_1\to V_2$是由 V_1的基的像 $\sigma(B_1)=\{\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\}\subset V_2$,

$$\begin{cases}\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{21}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{m1}\boldsymbol{e}_m,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n)=a_{1n}\boldsymbol{e}_1+a_{2n}\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{e}_m\end{cases}\tag{1}$$

唯一确定的.也就是说 σ 是由(1)式中的 $m\times n$ 个系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$所唯一确定的.把(1)式中 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$在基 B_2下的坐标

$$(a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1}),\cdots,(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{mn})$$

依次按列排成 $m\times n$ 矩阵 $M(\sigma)=\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,这就是 σ 关于基 B_1 和 B_2 对应

的矩阵(注意:(1) 式中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m$ 的系数矩阵是前述的 n 个行向量按行排列成的 $n\times m$ 矩阵,它等于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$).

明确了矩阵是线性映射的数值表示后,由线性映射的加法、数量乘法和乘法定义,就可以相应得到矩阵的加法、数量乘法和乘法定义,而且矩阵与线性映射相对应的运算(加法、数乘和乘法)有相同的运算律(详见主教材 122—125 页).利用矩阵的乘法,(1)式可以形式地表示为

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},$$

其中 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n))$ 与 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m)$ 可以形式地分别视为 $1\times n$ 和 $1\times m$"矩阵".右边的 $m\times n$ 矩阵 $(a_{ij})_{m\times n}=\boldsymbol{A}$ 是 σ 在基 B_1 和 B_2 下对应的矩阵.但要注意 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 与 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m)$ 本身不是矩阵,因为它们的元素都是线性空间中的元素,而矩阵中的元素是数域 F 中的元素,所以只能说形式地视为矩阵,以便借用矩阵的乘法运算.

3. 矩阵运算与初等代数运算的差别(主教材 4.4 节)

初等代数运算有以下几条规律:

(1) $ab=ba$(交换律).由交换律可得

$$(ab)^n=a^nb^n,\quad a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$(a+b)^n=a^n+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\mathrm{C}_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n.$$

(2) 设 $ab=0$,若 $a\neq0$,则必有 $b=0$,即若 $ab=0$,则必有 $a=0$ 或 $b=0$,这等价于若 $a\neq0,b\neq0$,则必有 $ab\neq0$.因此,$(x-a)(x-b)=0$,当且仅当 $x=a$ 或 $x=b$.

(3) 设 $ab=ac$,若 $a\neq0$,则 $b=c$(消去律).

由矩阵乘法定义可知,仅当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足可乘的条件($\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数)时,乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义.矩阵的乘法不满足交换律,即一般情况下 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.因此,(1)中的运算对矩阵都不成立.若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 乘积可交换(即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$),则(1)中的运算对矩阵也成立,于是 $(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})^n$ 也可以按二项式定理展开,因为 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$(或记为 $\boldsymbol{I}$)和数量矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}$ 与任何 n 阶矩阵都可交换.

运算(2)对矩阵也不成立.因为在 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可乘时,由 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 不能确定 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$.例如,当齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=0$(其中 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$)有非零解时,若 $\boldsymbol{B}$ 的每一列 $\boldsymbol{B}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都是 $\boldsymbol{AX}=0$ 的非零解,即有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_s)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0})=\boldsymbol{O}.$$

上式中 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 而 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,此时称非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的右零因子,而非零

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的左零因子.

由 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 不能推出 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$,其等价命题为:由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

运算(3)对矩阵也不成立.因为,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,可得 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{O}$,但此时即使 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 也不能推出 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$(即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$),因为 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{O}$ 时有可能使 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=\boldsymbol{O}$.所以,$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,不能消去 $\boldsymbol{A}$ 而得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$,故消去律不成立.

但要注意:当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,

① 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.因为由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 即得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$.

② 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,则必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.因为在 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 两端左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$,即得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

矩阵的线性运算比较简单,但乘法的定义却很复杂,这是因为矩阵乘法与映射的乘法相对应.两个矩阵要满足可乘的条件(这是由两个线性映射可乘所确定的)才可以相乘.

4. 关于可逆矩阵(主教材 4.5 节)

(1) 逆矩阵的定义

设 $\boldsymbol{A}\in M_n(F)$,若存在 $\boldsymbol{B}\in M_n(F)$,使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 可逆,并称 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

可以证明:若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.从而 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆,且互为逆矩阵.

(2) 求方阵的逆矩阵的常用方法

① 用定义,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$,得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$(例如,求对角矩阵和副对角矩阵的逆矩阵就可用此法,即

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} & & & b_1 \\ & & b_2 & \\ & \iddots & & \\ b_n & & & \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} & & & b_n^{-1} \\ & & \iddots & \\ & b_2^{-1} & & \\ b_1^{-1} & & & \end{bmatrix}.$$

又如由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,可得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$).

② 用公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$(见第 5 章).

③ 用初等变换法

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1}) \tag{1}$$

或
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{A}^{-1}\end{bmatrix}. \tag{2}$$

④ 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足某个等式时，由 $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}$，得 $(f(\boldsymbol{A}))^{-1}=g(\boldsymbol{A})$. 例如，设

$$2\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}.$$

由
$$2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E},$$

得
$$\boldsymbol{A}^{-1}=2(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\text{且}\quad(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=2\boldsymbol{A}.$$

又如，若
$$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O},$$

即
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})=-2\boldsymbol{E}\quad\text{或}\quad(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=4\boldsymbol{E},$$

则
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\text{或}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}).$$

(3) 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积

因为对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$，可以作若干次初等行变换（或列变换）使其化为单位矩阵，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_k$，使得 $\boldsymbol{P}_k\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$. 于是 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_k\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$，从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_k^{-1}$. 由于三种初等矩阵的逆矩阵仍然是同类初等矩阵，所以，可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

再由 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_k\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{P}_k\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 可知，对 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 作同样的行变换，当 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{E}$ 时，$\boldsymbol{E}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$（这是(1)式求逆矩阵方法的理论依据）. 如果对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换不能将 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 不可逆. 也可用初等列变换求 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s=\boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s=\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$，因此，对 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 作同样的列变换，当 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{E}$ 时，$\boldsymbol{E}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$（见(2)式中方法）.

(4) 关于可逆矩阵的一些性质

① 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，可以得出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$（即可逆矩阵的零因子必是零矩阵）；由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 可以得出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$（即此时消去律成立）；由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 得唯一解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$（由上面三个矩阵等式两端分别左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，就得上述三个结论）. 由 $\boldsymbol{YA}=\boldsymbol{B}$ 的两端分别右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即得唯一解 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BA}^{-1}$.

② 当 $\boldsymbol{A}$ 是主对角元都是非零数的上（下）三角矩阵时，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 仍是上（下）三角矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的主对角元为 $\frac{1}{a_{ii}}(i=1,2,\cdots,n)$.

③ 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换）时，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 均可交换. 证明如下：

在等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 的两边都左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 又右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即得 $\boldsymbol{BA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$；在等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 的两边都左乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 又右乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$，即得 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AB}^{-1}$；对等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 两边分别求逆而得 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$.

④ 注意：当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆时，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不一定可逆，即使 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$ 也不一定等于 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$，例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$ 都可逆，但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&0\\0&0\end{bmatrix}$ 不可逆. 又如，

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{E}^{-1}+\boldsymbol{E}^{-1}=2\boldsymbol{E}^{-1}.$$

5. 矩阵的转置和可逆矩阵的逆运算(主教材 4.5—4.6 节)

矩阵的转置和矩阵的逆满足下列(非常重要的)运算律：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$($\lambda$ 是数)；

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，

$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}$，

$(\boldsymbol{A}^k)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^k$；

(5) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$；

(6) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

(7) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；

(8) $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$　(数 $\lambda\neq0$)；

(9) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，

$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n)^{-1}=\boldsymbol{A}_n^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$，

$(\boldsymbol{A}^k)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^k$.

6. 几个等价命题(主教材 4.5 节，4.8 节)

若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则下列命题等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 可逆(也称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异或非退化矩阵)；

(2) $\boldsymbol{A}$ 满秩，即 $r(\boldsymbol{A})=n$；

(3) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量线性无关；

(4) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量线性无关；

(5) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解；

(6) $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det\boldsymbol{A}\neq0$(见第 5 章)；

(7) $\boldsymbol{A}$ 对应的线性映射 $\sigma:V\to V$ 是双射(或单射，或满射，或 $\operatorname{Ker}\sigma=\{\boldsymbol{0}\}$，或 $\operatorname{Im}\sigma=V$).

7. 矩阵的初等变换及其应用(主教材 4.7 节)

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等变换将其化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，记作 $\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$($\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价)，但不能写作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 含有符号“$\cong$”的矩阵式子不能再作其他运算(例如，$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{B}_1$ 不能推出 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1$). 引入初等矩阵，就可以把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等变换用初等矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 相乘来实现.

三种初等矩阵 $\boldsymbol{E}_i(C)$，$\boldsymbol{E}_{ij}(C)$，$\boldsymbol{E}_{ij}$ 的定义见教材 135—136 页. 初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$ 表示对 $\boldsymbol{A}$ 做由 $\boldsymbol{E}$ 变为初等矩阵的同样的行变换，右乘 $\boldsymbol{B}$ 表示对 $\boldsymbol{B}$ 做由 $\boldsymbol{E}$ 变为初等矩阵的同样的列变换. 详见教材 135—136 页.

矩阵的初等变换的应用：

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,见前面的 2(3).

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换将其化为阶梯形矩阵时,阶梯形矩阵非零行的行数就是 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

(3) 求向量组的极大线性无关组.利用对矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n]$ 做初等行变换不改变 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的线性相关性,即当

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_n]=\boldsymbol{U}(\text{阶梯形矩阵})$$

时,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{U}$ 中对应的列向量组有相同的线性相关性.由于阶梯形矩阵 $\boldsymbol{U}$ 中每个非零行第一个非零元所在列对应的列向量 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_k}$ 是 $\boldsymbol{U}$ 的列向量组的极大线性无关组,所以 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_k}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大线性无关组.

(4) 求解线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$.用初等行变换化 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 为行简化阶梯形矩阵,得到同解方程组,可判别 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解是否存在,是否唯一,并求解;或求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的全部非零解.

(5) 解矩阵方程.已知 $\boldsymbol{A}$ 可逆,求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 时,只需对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 做同样的一系列初等行变换,那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{E}$ 时,$\boldsymbol{B}$ 就变为矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$,即存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$,使 $\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$(即有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$),于是

$$(\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{AX}=(\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B},$$

故

$$\boldsymbol{EX}=\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

同理,求解矩阵方程 $\boldsymbol{YA}=\boldsymbol{B}$,只需对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 做同样的一系列初等列变换,那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{E}$ 时,$\boldsymbol{B}$ 就变为矩阵方程 $\boldsymbol{YA}=\boldsymbol{B}$ 的解 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BA}^{-1}$,即

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BA}^{-1}\end{bmatrix}.$$

(6) 求矩阵的行列式(见第 5 章).

(7) 分块矩阵的块初等变换可用来求逆矩阵,求行列式和某些归纳法证明题.

(8) 求特征值与特征向量(见第 7 章)

矩阵的初等变换是最简单、最基本、最重要的运算,是线性代数计算的基础.它只用到行(或列)对换和向量的加法及数乘运算,可往往由于不小心而出错,前功尽弃或令后来的计算白费力气.为防止出错,除了小心外,最重要的是通过验证,检查是否有错.例如,求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵要用 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 来验证;求解线性方程组,要将所得的解代入方程组看是否满足方程等.

8. 矩阵的秩的概念、计算和应用(主教材 4.8 节)

矩阵的秩是矩阵在初等变换中的一个不变量(就是说初等变换可以把矩阵

变得面貌全非，但它们的秩保持不变）．线性映射 σ 与其对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩相等，即 $r(\boldsymbol{A})=r(\sigma)=$ 矩阵的行秩 $=$ 矩阵的列秩 $=$ 矩阵的行列式秩（见第五章）．

利用矩阵的秩可以判别矩阵行（或列）向量组的相关性，判别齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 是否有非零解．秩 $r(\boldsymbol{A})$ 是确定 $\boldsymbol{A}$ 的等价（相抵）标准形的唯一因素．对同型矩阵，等价的充要条件是等秩（不同型的矩阵谈不上等价）．利用增广矩阵与系数矩阵的秩是否相等可以判别非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 是否有解．这些都是线性代数中的重要问题．

利用初等变换可以求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的等价（相抵）标准形（矩阵的相抵关系是等价关系）．若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$（即 $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{B}$），则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$；反之，若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$（注意：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不是同型的矩阵，虽有 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，也不能说 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相抵，因为对 $\boldsymbol{A}$ 作初等变换，不可能将 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{B}$．

9．关于秩的几个重要结论（主教材 4.8 节）

(1) 对任意的 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，都有 $r(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$．

(2) $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})$．

(3) $r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$ （k 为非 0 常数）．

(4) $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$．

(5) $r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$．如果 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别是 m,n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则

$$r(\boldsymbol{PA})=r(\boldsymbol{AQ})=r(\boldsymbol{PAQ})=r(\boldsymbol{A}).$$

*(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵，则

$$r(\boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n.$$

(7) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则（上式不等式的特例）

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n.$$

(8) $r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$，$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$．

10．矩阵的分块和分块矩阵的运算及用数学归纳法证明命题时的应用（主教材 4.9 节）

(1) 常用的分块矩阵有：按每个列分块的 $1\times n$ 分块矩阵，按每个行分块的 $m\times 1$ 分块矩阵，方阵的 2×2 分块矩阵和对角块阵（非零子块只在块主对角线上）．

(2) 两个同型的对角块阵的乘积还是对角块阵，对角块阵的逆还是对角块阵，即

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{AC} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{BD}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} \qquad (\text{已知 } \boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \text{ 可逆}).$$

但要注意：$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$不是对角块矩阵.当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆时,

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} O & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}.$$

(3) 可逆的上三角块矩阵$\begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix}$的逆(其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$ 可逆)还是上三角块矩阵,而且用分块矩阵的初等行变换易得

$$\begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}CD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}.$$

同理,可逆的下三角块矩阵的逆矩阵还是下三角块矩阵.

两个上(下)三角块矩阵之积还是上(下)三角块矩阵(可以利用数学归纳法证明).

11. 基变换矩阵(过渡矩阵)和坐标变换公式(主教材 4.10 节)

坐标变换公式一般都是经过自然基过渡的.

如果 $\mathbf{R}^n$ 的基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$, $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$,求基 B_1 变为基 B_2 的变换矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可直接用下面的方法：

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}.$$

把上式中将基 B_1,B_2 的基向量按照列排成的矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$,则

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

这里还要注意：

(1) 基 B 的向量组是有序的,因此向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B 下的坐标 $\boldsymbol{\alpha}_B$ 是有序数组(是 n 元列向量).基给定了,坐标是唯一确定的.

(2) 坐标变换公式:若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1,B_2 下的坐标分别为 $\boldsymbol{\alpha}_{B_1}=\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_{B_2}=\boldsymbol{Y}=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$,基 B_1 变为基 B_2 的变换矩阵为 $\boldsymbol{A}$,则

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}.$$

(3) 正确区分由于基变换而引起的向量坐标变换公式与线性变换 σ 的像 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$的坐标计算公式.

若 n 维线性空间 V 中的线性变换 $\sigma\in L(V,V)$在基 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 下对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, V 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B 下的坐标为 $\boldsymbol{\alpha}_B=\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}$ 的像 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$在基 B 下的坐标为 $\boldsymbol{Y}=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$,即

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = y_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + y_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + y_n \boldsymbol{\alpha}_n,$$

则

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AX}.$$

12. 本章的重点和难点

(1) 重点

线性映射对应的矩阵;矩阵的乘法、转置和逆矩阵的运算;矩阵的初等变换和矩阵的秩;分块矩阵的运算;基变换公式和坐标变换公式.

(2) 难点

矩阵的乘法、转置和逆矩阵的运算律与数的运算律的不同;有关矩阵秩的命题的证明;分块矩阵的运算以及利用数学归纳法证明一些命题.

4-4 例题分析与解答

例 1 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,以下各式正确的是( ).

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2$ (B) $(\boldsymbol{AB})^3 = \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}^3$

(C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$ (D) $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 4\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E}$

(E) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+7\boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{A}+7\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}$ (F) $\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{BA}$

解 因为 $\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{EA}$,所以,(D),(E)是正确的.

一般 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.所以,

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{B}^2 \neq \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2,$$

$$(\boldsymbol{AB})^3 = (\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB}) \neq \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}^3,$$

$$\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{ABA} + \boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{ABA} + \boldsymbol{BA} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{BA}.$$

例 2 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}, \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA}$,下列不成立的是( ).

(A) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为同阶方阵 (B) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{BC})\boldsymbol{A}$

(C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{BA})$ (D) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$

(E) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^3 = \boldsymbol{A}^3 + 3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{AB}^2 + \boldsymbol{B}^3$

解 由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}, \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA}$ 和可乘条件得 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为同阶方阵.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{CA}) = (\boldsymbol{BC})\boldsymbol{A}.$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{CA} = (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}.$$

当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 时,$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k$ 二项式展开定理成立.

所以(A),(B),(D),(E)成立;(C)不成立.

例 3 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n(>1)$ 阶矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}, \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$,则有( ).

(A) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$ (B) $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{O}$

(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ (D) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$

解 (D) 成立. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AAB} + \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$.

(A),(B)不成立,因此(C)也不成立.

下面举一个 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 而 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{O}$ 的例子:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&1\end{bmatrix}.$$

例 4 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,则下列成立的是(　　).

(A) 若$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$

(B) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

(C) $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

(D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$是对称矩阵;$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$是反对称矩阵

解 (D)成立.因为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

是对称矩阵;

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}=-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$$

是反对称矩阵.

(A) 不成立.因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{O}$ 不能得出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$(即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$).

(B) 不成立.$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,而 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 的例子如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}.$$

(C) 不成立.因为充分性虽然成立(即若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{ABAB}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$),但必要性不成立.例如,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\neq\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&1\end{bmatrix},$$

但

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}^2(-2\boldsymbol{B})=-2\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}=(\boldsymbol{AB})^2.$$

例 5 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 行对换后的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆;

(2) 求 $\boldsymbol{AB}^{-1}$.

(研究生入学考试试题,1997 年)

解 (1) 将 n 阶单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行和第 j 行对换后所得的对换初等矩阵记为 $\boldsymbol{E}_{ij}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$.因为

$$E_{ij}E_{ij}=E,$$

即 $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$，而可逆矩阵的乘积仍然可逆，所以 B 可逆.

(2) $$AB^{-1}=A(E_{ij}A)^{-1}=AA^{-1}E_{ij}^{-1}=E_{ij}^{-1}=E_{ij}.$$

例 6 设 $\alpha=(1,2,3)$，$\beta=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，$A=\alpha^{\mathrm{T}}\beta$，则 $A^n=$ ________.

（研究生入学考试试题，1994 年）

解 因为

$$A^2=(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)=\alpha^{\mathrm{T}}(\beta\alpha^{\mathrm{T}})\beta=(\beta\alpha^{\mathrm{T}})A,$$
$$A^3=A^2A=(\beta\alpha^{\mathrm{T}})AA=(\beta\alpha^{\mathrm{T}})^2A,$$

由归纳法得 $A^n=(\beta\alpha^{\mathrm{T}})^{n-1}A$，其中

$$\beta\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=3,$$

所以，$$A^n=3^{n-1}(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)=3^{n-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=3^{n-1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}.$$

例 7 设 A,B 为 n 阶矩阵，则下列命题正确的是（　　）.

(A) 若 A,B 皆可逆，则 $A+B$ 也可逆

(B) 若 $A+B$ 可逆，则 A,B 皆可逆

(C) 若 AB 不可逆，则 A,B 皆不可逆

(D) $A^3=E$；则 $A^{-1}=A^2$

解 (A)不正确，如 $A=-B=E$.

(B)不正确，如 $A=\mathrm{diag}(1,0)$，$B=\mathrm{diag}(0,1)$.

(C)不正确，如 $A=\mathrm{diag}(1,1)$，$B=\mathrm{diag}(0,1)$.

(D)正确，由 $A^3=A^2A=E$，即得 $A^{-1}=A^2$.

例 8 设 A 满足 $A^2+A-4I=O$（I 为单位矩阵），则 $(A-I)^{-1}=$ ______.

（研究生入学考试试题，2001 年）

解 由于 A 与单位矩阵 I 相乘可交换，于是，由

$$A^2+A-4I=O$$

可得 $$(A-I)(A+2I)=2I,$$

所以 $$(A-I)\left[\frac{1}{2}(A+2I)\right]=I,$$

因此，$$A^{-1}=\frac{1}{2}(A+2I).$$

例 9 设

$$B=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix},$$

且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}.$$

将上式关系化简,并求 $\boldsymbol{A}$.

(研究生入学考试试题,1990 年)

解 先利用矩阵转置和逆的运算律:$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{QP})^{\mathrm{T}}$,$(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$,$(\boldsymbol{PQ})^{-1}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}$,化简左式;再利用 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{I}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{Q}$.

$$\begin{aligned}\text{左式}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})]^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\text{右边}=\boldsymbol{I},\end{aligned}$$

得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{A}=((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}})^{-1},$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{bmatrix}.$$

再用初等变换法求 $\boldsymbol{A}^{-1}$的逆矩阵(求法略去),得

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}.$$

例 10 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix},$$

且 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$,则$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}=$______.

(研究生入学考试试题,2000 年)

解 解法 1
$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\\&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\\&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}[(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})]=2(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1},\end{aligned}$$

所以 $$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}.$$

解法 2　先在原式两边各左乘 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$,再将等式两边各加 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$,得
$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})=2\boldsymbol{I},$$
所以 $$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}).$$

例 11　设方阵 $\boldsymbol{A}$ 存在正整数 k,使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$,证明 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,并写出逆矩阵的表达式.

(研究生入学考试试题,1990 年)

解　利用 $\boldsymbol{E}^k-\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}^k-\boldsymbol{O}=\boldsymbol{E}$,将 $\boldsymbol{E}^k-\boldsymbol{A}^k$ 再分解因式(因为 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 相乘可交换,它与初等代数中的 $1-x^k$ 分解因式是类似的),得
$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})=\boldsymbol{E},$$
所以 $$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}.$$

例 12　$\boldsymbol{\beta}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,证明:

(1) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1$;

(2) 当 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1$ 时 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(研究生入学考试试题,1996 年)

证　$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$是 $n\times n$ 矩阵,而 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 是 1×1 矩阵,可以看成一个数 k,则
$$(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^2=(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}.$$

(1) 设 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=k$,则
$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{E}-(2-k)\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}.$$

若 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=k=1$,即 $2-k=1$,则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

反之,若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,即 $\boldsymbol{E}-(2-k)\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,即$(k-1)\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$.

由于 $\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$;$r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\geqslant1$,从而 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}$,所以,$k-1=0$,即 $k=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1$.

这就说明了 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1$ 是 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件.

(2) 由题(1)知,当 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1$ 时,$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$.

反证法:若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,在 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 等式两边左乘得 $\boldsymbol{A}^{-1}$,得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,这与 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$矛盾(因为 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}$),所以 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

例 13　设矩阵
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{bmatrix},$$

且 $r(\boldsymbol{A})=3$，则 $k=$ ______.

（研究生入学考试试题，2001 年）

解 做初等变换：先将第 1 行与第 4 行对换，再做初等行变换化为上三角矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&k\\0&k-1&0&1-k\\0&0&k-1&1-k\\0&1-k&1-k&1-k^2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{k\neq1}\begin{bmatrix}1&1&1&k\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&1&1&1+k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&k\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&3+k\end{bmatrix}.$$

显然，$k\neq1$（若 $k=1$，四行相同，有 $r(\boldsymbol{A})=1$）. 当 $r(\boldsymbol{A})=3$ 时，则有

$$3+k=0,$$

即

$$k=-3.$$

例 14 已知

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix};$$

$\boldsymbol{P}$ 为三阶非零矩阵，且满足 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$，则有（　　）.

(A) $t=6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1　　(B) $t=6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2

(C) $t\neq6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1　　(D) $t\neq6$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2

（研究生入学考试试题，1993 年）

解 若 $t=6$，则 $\boldsymbol{Q}$ 的三行成比例，所以，$r(\boldsymbol{Q})=1$；

若 $t\neq6$，则 $r(\boldsymbol{Q})=2$.

由 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$，得

$$r(\boldsymbol{P})+r(\boldsymbol{Q})\leqslant3.$$

由 $\boldsymbol{P}\neq\boldsymbol{O}$，得

$$1\leqslant r(\boldsymbol{P})\leqslant3-r(\boldsymbol{Q}).$$

当 $t=6$ 时，有 $r(\boldsymbol{Q})=1,1\leqslant r(\boldsymbol{P})\leqslant2$；

当 $t\neq6$ 时，$r(\boldsymbol{Q})=2$，$\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1.

所以，此题选(C).

例 15 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩（　　）.

(A) 必有一个等于零　　(B) 都小于 n

(C) 一个小于 n，一个等于 n　　(D) 都等于 n

解 $r(\boldsymbol{A})=0$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;若 $r(\boldsymbol{A})=n$,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$,即一个满秩,另一个必为 $\boldsymbol{O}$.由于都是非零矩阵,所以都不满秩,排除(A),(C),(D).

因为 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$,$r(\boldsymbol{A})>0$,$r(\boldsymbol{B})>0$,所以 $r(\boldsymbol{A})<n$,$r(\boldsymbol{B})<n$.选(B).

例 16 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$,而

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix},$$

则 $r(\boldsymbol{AB})=$______.

(研究生入学考试试题,1996 年)

解 将 $\boldsymbol{B}$ 的第一行加到第三行,可以看出 $r(\boldsymbol{B})=3$.

方法 1 因为 $\boldsymbol{B}$ 满秩,所以,$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})=2$.

方法 2 利用

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-3\leqslant r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\},$$

得

$$2+3-3\leqslant r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{2,3\},$$

所以,$r(\boldsymbol{AB})=2$.

例 17 设 $n(n\geqslant3)$阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{bmatrix}.$$

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$,则 a 必为______.

(研究生入学考试试题,1998 年)

解 解法 1 初等变换法.若 $a=1$,各行成比例,$r(\boldsymbol{A})=1$,所以,排除 $a=1$.将 $\boldsymbol{A}$ 的各列加到第一列,当 $1+(n-1)a\neq0$ 时,即 $a\neq\frac{1}{1-n}$,第一列乘 $\frac{1}{1+(n-1)a}$,再将第一行乘(-1)加到其余各行,得到

$$\begin{bmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&a&a&\cdots&a\\1&1&a&\cdots&a\\1&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a&a&\cdots&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\0 & 1-a & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 1-a & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a\end{bmatrix},$$

可知 $a\neq1$ 且 $a\neq\dfrac{1}{1-n}$时,有 $r(\boldsymbol{A})=n$.当 $a=\dfrac{1}{1-n}$时,有

$$\boldsymbol{A}\Rightarrow\begin{bmatrix}0 & a & a & \cdots & a\\0 & 1 & a & \cdots & a\\0 & a & 1 & \cdots & a\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & a & a & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}0 & a & a & \cdots & a\\0 & 1-a & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 1-a & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},$$

第 2,…,n 行各乘$\dfrac{a}{a-1}$都加到第一行,将第一行化为全零行,所以,

$$r(\boldsymbol{A})=n-1.$$

解法 2　利用第 5 章的行列式.

例 18　设矩阵

$$\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$$

是满秩的,则直线

$$L_1:\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$$

与直线

$$L_2:\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$$

的关系是(　　).

(A) 相交于一点　　　　　(B) 重合

(C) 平行但不重合　　　　(D) 异面

(研究生入学考试试题,1998 年)

解 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-a_3 & c_2-a_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$,

由于矩阵满秩,所以,其中任两行不成比例,即 L_1 与 L_2 的方向向量不平行,排除(B),(C).

分析 L_1 与 L_2 是否共面,只须考虑三点 $A(a_1,a_2,a_3)$,$B(b_1,b_2,b_3)$,$C(c_1,c_2,c_3)$是否共面.由混合积

$$\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}=0$$

可知,AC,L_1,L_2 三线共面,而 L_1 与 L_2 又不平行,所以必相交.选(A).

例 19　若 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $(m<n)$线性无关,则 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充要条件为(　　).

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示

(B) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m]$可以经过初等变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m]$

(研究生入学考试试题,2000 年)

解　选(D).因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以经过初等变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$,又初等变换不改变矩阵的秩,所以,$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=m$,从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关,条件是充分的.反之,若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关,则 $r(\boldsymbol{B})=m$,于是 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}$ 有相同的等价标准形 $\boldsymbol{U}$,即存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$,使得 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{U}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2$,从而 $(\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Q}_2^{-1})=\boldsymbol{B}$,所以,$\boldsymbol{A}$ 可以经过初等变换化为 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的必要条件.

条件(B)无法确定 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 是否线性无关,所以,这个条件既非 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分条件也非必要条件.

条件(A),(C)都是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分条件,而非必要条件.例如,

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,0),\boldsymbol{\beta}_1=(0,0,1,0),\boldsymbol{\beta}_2=(0,0,0,1),$$

此时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$也线性无关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$不能由 $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性表示，向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$与$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$也不等价.

例 20 若 $f(x)$是 x 的实系数 m 次多项式：

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

则有矩阵多项式：

$$f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}\quad(\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}).$$

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \lambda_2\end{bmatrix}$，证明：$f(\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}f(\lambda_1) & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & f(\lambda_2)\end{bmatrix}$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，证明：$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}$.

证 (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \lambda_2\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{\Lambda}^k=\begin{bmatrix}\lambda_1^k & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \lambda_2^k\end{bmatrix},\qquad k=1,2,\cdots,m.$$

于是，
$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{A})&=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}\\
&=a_m\begin{bmatrix}\lambda_1^m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \lambda^m\end{bmatrix}+a_{m-1}\begin{bmatrix}\lambda_1^{m-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \lambda_2^{m-1}\end{bmatrix}+\cdots+a_1\begin{bmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \lambda_2\end{bmatrix}+a_0\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}a_m\lambda_1^m+a_{m-1}\lambda_1^{m-1}+\cdots+a_0 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & a_m\lambda_2^m+a_{m-1}\lambda_2^{m-1}+\cdots+a_0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}f(\lambda_1) & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & f(\lambda_2)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，则

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})=\boldsymbol{P\Lambda}^2\boldsymbol{P}^{-1}.$$

由归纳法得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$，于是

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1^k & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \lambda_2^k\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},\quad k=1,2,\cdots,m.$$

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{A})=&a_m\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1^m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \lambda_2^m\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}+a_{m-1}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1^{m-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \lambda_2^{m-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}+\cdots+\\
&a_1\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \lambda_2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}+a_0\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\
=&\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}a_m\lambda_1^m+a_{m-1}\lambda_1^{m-1}+\cdots+a_0 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & a_m\lambda_2^m+a_{m-1}\lambda_2^{m-1}+\cdots+a_0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\end{aligned}$$

$$= P\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & O \\ O & f(\lambda_2) \end{bmatrix}P^{-1}$$
$$= Pf(\Lambda)P^{-1}.$$

例 21 a,b,c,d 是四个实数,证明:

$$\begin{cases} a^2+b^2=1, \\ c^2+d^2=1, \\ ac+bd=0 \end{cases}$$

成立的充要条件是

$$\begin{cases} a^2+c^2=1, \\ b^2+d^2=1, \\ ab+cd=0 \end{cases}$$

成立.

证 将四个数的数量等式用一个矩阵方程来表示,从数字 1,0 看,这个矩阵方程可能与单位矩阵有关.令

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

则 $$AA^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix}, A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & c^2+d^2 \end{bmatrix},$$

因此,只需证明:$AA^{\mathrm{T}}=E$(单位矩阵)成立(即题中命题成立)的充要条件是 $A^{\mathrm{T}}A=E$(即题中的充要条件).这是显然的.因为由 $AA^{\mathrm{T}}=E$,可得 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$,所以,$A^{\mathrm{T}}A=A^{-1}A=E$.反之,由 $A^{\mathrm{T}}A=E$,同理可得 $AA^{\mathrm{T}}=AA^{-1}=E$.

例 22 设 A 为 n 阶可逆矩阵,A 的每行各元素之和都等于 k,证明:$k\neq0$,且 A^{-1} 的每行各元素之和都等于 $\frac{1}{k}$.

证 将 A 的行和用矩阵乘积来表示,令 α 是元素均为 1 的 n 元列向量,则 $A\alpha$ 是元素均为 A 的行和($=k$)的 n 元列向量,即 $A\alpha=k\alpha$.

证法 1 因为 A 的每行各元素之和都等于 k,所以,由 $A\alpha=k\alpha$ 及 A 可逆,即得

$$\alpha=kA^{-1}\alpha.$$

显然 $k\neq0$,否则 $\alpha=0\cdot A^{-1}\alpha=0$,矛盾.此时又有

$$\frac{1}{k}\alpha=A^{-1}\alpha,$$

其中 $A^{-1}\alpha$ 是元素均为 A^{-1} 的行和的 n 元列向量,$\frac{1}{k}\alpha$ 是元素均为 $\frac{1}{k}$ 的 n 元列向量,所以,A^{-1} 的每行各元素之和都等于 $\frac{1}{k}$.

证法 2　令 $\boldsymbol{J}$ 是元素均为 1 的 n 阶方阵. 因为 $\boldsymbol{A}$ 的每行各元素之和都等于 k,所以 $\boldsymbol{AJ}=k\boldsymbol{J}$. 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆,得 $\boldsymbol{J}=k\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{J}$(显然 $k\neq0$,否则 $\boldsymbol{J}=0\cdot\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{O}$,矛盾);此时又有

$$\frac{1}{k}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{J},$$

其中 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{J}$ 是元素均为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的行和的 n 阶方阵,$\frac{1}{k}\boldsymbol{J}$ 是元素均为 $\frac{1}{k}$ 的 n 阶方阵. 所以,$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每行各元素之和都等于 $\frac{1}{k}$.

4-5　习题提示与解答

1. 求下列线性映射关于自然基所对应的矩阵:

(1) $\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,x_1-x_3,x_2)$;

(2) $\sigma(x_1,x_2)=(x_1-x_2,x_1,x_1+x_2)$;

(3) $\sigma(p(x))=p(x+1)-p(x),p(x)\in R[x]_n$;

(5) σ 是 n 维线性空间 $V(F)$ 的恒等变换(对 $V(F)$ 的任一组基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$).

解　(1) 先求 σ 关于 $\mathbf{R}^3$ 的自然基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 的像,易得

$$\sigma(\boldsymbol{e}_1)=\sigma(1,0,0)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=(1,1,0),$$
$$\sigma(\boldsymbol{e}_2)=\sigma(0,1,0)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3=(1,0,1),$$
$$\sigma(\boldsymbol{e}_3)=\sigma(0,0,1)=-\boldsymbol{e}_2=(0,-1,0).$$

于是,
$$\sigma(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

所以,σ 关于 $\mathbf{R}^3$ 的自然基对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

(2) 由 σ 的定义易得

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}.$$

所以,σ 关于 $\mathbf{R}^2$ 的自然基 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2\}$ 和 $\mathbf{R}^3$ 的自然基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}.$$

(3) $R[x]_n$的自然基为$\{p_0(x)=1,p_1(x)=x,p_2(x)=x^2,\cdots,p_{n-1}(x)=x^{n-1}\}$. σ 关于自然基的像为

$\sigma(1)=1-1=0,$

$\sigma(x)=(x+1)-x=1,$

$\sigma(x^2)=(x+1)^2-x^2=1+2x,$

…………

$\sigma(x^{n-1})=(x+1)^{n-1}-x^{n-1}=1+C_{n-1}^{n-2}x+C_{n-1}^{n-3}x^2+\cdots+C_{n-1}^{1}x^{n-2}.$

将上面 n 个等式形式地写成下面的矩阵等式:

$$\sigma(1,x,x^2,\cdots,x^{n-1})=(1,x,x^2,\cdots,x^{n-1})\begin{bmatrix}0&1&1&1&\cdots&1\\0&0&2&3&\cdots&C_{n-1}^{n-2}\\0&0&0&3&\cdots&C_{n-1}^{n-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&C_{n-1}^{1}\\0&0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}.$$

其中右端的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 即为$\sigma(p(x))$关于 $R[x]_n$的自然基$\{1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}\}$对应的矩阵.

(5) 由 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$得

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{E}.$$

所以,恒等变换对任一组基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$对应的矩阵为 n 阶单位矩阵.

*2. 设 **C** 为全体复数在实数域上构成的线性空间,$z_0=a_0+b_0\mathrm{i}\in\mathbf{C}$,定义 **C** 到 **C** 的映射 σ_{z_0} 为 $\sigma_{z_0}(z)=z_0z$,证明:σ_{z_0} 是线性的,并求:

(1) σ_{z_0} 关于基 $B_1=\{1,\mathrm{i}\}$所对应的矩阵;

(2) σ_{z_0} 关于基 $B_2=\{1,1+\mathrm{i}\}$所对应的矩阵.

解 $\forall z_1,z_2\in\mathbf{C}$ 和 $\forall k_1,k_2\in\mathbf{R}$,有

$$\begin{aligned}&\sigma_{z_0}(k_1z_1+k_2z_2)\\=&z_0(k_1z_1+k_2z_2)\\=&k_1z_0z_1+k_2z_0z_2\\=&k_1\sigma_{z_0}(z_1)+k_2\sigma_{z_0}(z_2)\end{aligned}$$

所以,σ_{z_0} 是线性映射.

(1)
$$\sigma_{z_0}(1,\mathrm{i})=(1,\mathrm{i})\begin{bmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{bmatrix}.$$

(2)
$$\sigma_{z_0}(1)=z_0=a_0+b_0\mathrm{i}=(a_0-b_0)+b_0(1+\mathrm{i}),$$
$$\begin{aligned}\sigma_{z_0}(1+\mathrm{i})&=z_0(1+\mathrm{i})=(a_0+b_0\mathrm{i})(1+\mathrm{i})\\&=-b_0+b_0\mathrm{i}+a_0(1+\mathrm{i})\\&=-2b_0+(a_0+b_0)(1+\mathrm{i}),\end{aligned}$$

所以，
$$\sigma_{z_0}(1,1+\mathrm{i})=(1,1+\mathrm{i})\begin{bmatrix} a_0-b_0 & -2b_0 \\ b_0 & a_0+b_0 \end{bmatrix}.$$

上面两式右端的矩阵分别是 σ_{z_0} 关于基 B_1 和基 B_2 对应的矩阵.

3. 设 $D:R[x]_4\to R[x]_3$ 为
$$D(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=a_1+2a_2x+3a_3x^2.$$

(1) 证明 D 是线性的；

(2) 求 D 关于 $R[x]_4$ 的基 $B_1=\{1,x,x^2,x^3\}$ 和 $R[x]_3$ 的基 $B_2=\{1,x,x^2\}$ 所对应的矩阵；

(3) 求 $p(x)=4+3x-x^2+2x^3$ 的像 $D(p(x))$ 关于基 B_2 的坐标；

(4) 如果把 D 看作 $R[x]_4$ 到自身的线性变换，那么 D 关于基 B_1 所对应的矩阵是什么？

解 (1) 证明略去. 这里 $D(p(x))$ 就是 $p'(x)$，即 $D(p(x))=p'(x)$，这个线性映射 D 就是多项式 $p(x)$ 的求导运算.

(2) $D(1)=0,D(x)=1,D(x^2)=2x,D(x^3)=3x^2$，得
$$D(1,x,x^2,x^3)=(1,x,x^2)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

上式右端的矩阵即为线性映射 D 关于基 B_1 和 B_2 对应的矩阵，这是 4×3 矩阵.

(3)
$$\begin{aligned}D(p(x))&=D(4+3x-x^2+2x^3)=(4+3x-x^2+2x^3)'\\&=3-2x+6x^2=(1,x,x^2)\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

所以，$D(p(x))$ 关于基 B_2 对应的坐标为 $(3,-2,6)^{\mathrm{T}}$.

(4)
$$D(1,x,x^2,x^3)=(1,x,x^2,x^3)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

上式右端的矩阵即为 $R[x]_4$ 上线性变换 D 关于基 B_1 对应的矩阵，这是 4 阶方阵.

4. 对第 3 章习题 3 中的投影变换 p 和镜像变换 φ：

(1) 分别求 p 和 φ 关于 $\mathbf{R}^3$ 的自然基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 所对应的矩阵（此时令 $\boldsymbol{\omega}=(c_1,c_2,c_3)^{\mathrm{T}}$）；

(2) 求 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，使 p 和 φ 关于这组基所分别对应的矩阵都是对角矩阵.

解 (1) 由

$$p(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}$$

和

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}=(c_1,c_2,c_3)^{\mathrm{T}},$$

得

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{e}_1)&=\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}=(1,0,0)-c_1(c_1,c_2,c_3)\\&=(1-c_1^2,-c_1c_2,-c_1c_3).\end{aligned}$$

同理计算 $p(\boldsymbol{e}_2),p(\boldsymbol{e}_3)$，得

$$p(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix}1-c_1^2 & -c_1c_2 & -c_1c_3\\ -c_1c_2 & 1-c_2^2 & -c_2c_3\\ -c_1c_3 & -c_2c_3 & 1-c_3^2\end{bmatrix}.$$

同样计算出 $\varphi(\boldsymbol{e}_1),\varphi(\boldsymbol{e}_2),\varphi(\boldsymbol{e}_3)$，可得

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix}1-2c_1^2 & -2c_1c_2 & -2c_1c_3\\ -2c_1c_2 & 1-2c_2^2 & -2c_2c_3\\ -2c_1c_3 & -2c_2c_3 & 1-2c_3^2\end{bmatrix}.$$

上式右端的矩阵分别为 p 和 φ 关于自然基对应的矩阵.

(2) 取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\perp\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\perp\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为不共线的非零向量. 在基$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$下，投影变换 p 对应的矩阵为

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

镜像变换 φ 对应的矩阵为

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

8. 计算 $\boldsymbol{QP},(\boldsymbol{PAQ})^k$（$k$ 为正整数），其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{A},\boldsymbol{Q}$ 为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}.$$

解

$$\boldsymbol{QP}=\boldsymbol{I}\text{（单位矩阵）}.$$

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}$,则

$$\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{PAQ})(\boldsymbol{PAQ})=\boldsymbol{PA}(\boldsymbol{QP})\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{PA}^2\boldsymbol{Q},$$

一般地,

$$\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{PA}^k\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^k&0\\0&(-1)^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2^{k+2}+3(-1)^{k+1}&-3\cdot2^{k+1}+6(-1)^k\\2^{k+1}+2(-1)^{k+1}&-3\cdot2^k+4(-1)^k\end{bmatrix}.$$

11. 计算下列矩阵的幂:

(1) $\begin{bmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi\\-\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}^n$;　　(2) $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}^n$;

(3) $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}^n$;　　(4) $\begin{bmatrix}a&1&0&0\\0&a&1&0\\0&0&a&1\\0&0&0&a\end{bmatrix}^n$.

解 (1) 先计算

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi\\-\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\cos2\varphi&\sin2\varphi\\-\sin2\varphi&\cos2\varphi\end{bmatrix};$$

再用数学归纳法证明(略去),

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi\\-\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\varphi&\sin n\varphi\\-\sin n\varphi&\cos n\varphi\end{bmatrix}.$$

(2) 先计算

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}^2=-\boldsymbol{E},$$

于是,　　$\boldsymbol{B}^3=-\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^4=\boldsymbol{E}.$

一般地,　$\boldsymbol{B}^{2k+1}=(-1)^k\boldsymbol{B}$,　$\boldsymbol{B}^{2k}=(-1)^k\boldsymbol{E}$,　$k=1,2,3,\cdots$.

(3) 设

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}.$$

利用 $\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n$ 的展开式. 由于

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{O},\cdots,\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{O}\quad(m\geqslant 3),$$

即得

$$\begin{aligned}原式&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=\boldsymbol{E}+n\boldsymbol{B}+\frac{n(n-1)}{2}\boldsymbol{B}^2\\&=\begin{bmatrix}1&2n&2n^2+n\\0&1&2n\\0&0&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(4) 设

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}^4=0.$$

于是，
$$原式=(a\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=\begin{bmatrix}a^n&a^{n-1}\mathrm{C}_n^1&a^{n-2}\mathrm{C}_n^2&a^{n-3}\mathrm{C}_n^3\\0&a^n&a^{n-1}\mathrm{C}_n^1&a^{n-2}\mathrm{C}_n^2\\0&0&a^n&a^{n-1}\mathrm{C}_n^1\\0&0&0&a^n\end{bmatrix}.$$

12．求平方等于零矩阵的所有二阶矩阵．

解 令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，由

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

得
$$a^2=-bc,d=-a,$$

所以，当 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&-a\end{bmatrix}$，其中 a,b,c 为满足 $a^2=-bc$ 的任意常数时，均有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$.

13．求所有与 A 可交换的矩阵，其中

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$;　　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$.

解　(1) 令 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$,由

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}a+c & b+d\\ c & d\end{bmatrix}=\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}a & a+b\\ c & c+d\end{bmatrix},$$

得
$$d=a,c=0,$$
所以,与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}(\text{其中 } a,b \text{ 为任意常数}).$$

(2) 同理可得

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b+3c & 2c\\ 0 & c & b\end{bmatrix}.$$

14. 设对角矩阵 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,其中 $a_i\neq a_j\ (i\neq j)$,证明:与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵必是对角矩阵.

证　设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,($\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$ 是将 a_i 乘 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行,$\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{B}$ 是将 a_j 乘 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列,$i,j=1,2,\cdots,n$),得

$$\begin{bmatrix}a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_ib_{i1} & a_ib_{i2} & \cdots & a_ib_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1b_{i1} & a_2b_{i2} & \cdots & a_nb_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\end{bmatrix}.$$

由上式第 i 行,第 j 列元素相等,得
$$a_ib_{ij}=a_jb_{ij}\quad (i,j=1,2,\cdots,n).$$
当 $i\neq j$ 时,$a_i\neq a_j$,所以 $b_{ij}=0$. 因此,与对角元互不相同的对角阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 必为对角阵,即 $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(b_{11},b_{22},\cdots,b_{nn})$.

15. 设 $f(x),g(x)\in F[x]$,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_n(F)$,证明:
$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A}).$$
(1) 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则 $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{B})=g(\boldsymbol{B})f(\boldsymbol{A})$;

(2) 设 $f(x)=1+x+\cdots+x^{m-1}$, $g(x)=1-x$, $A=\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}$,计算 $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})$.

解　(1) 设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}a_ix^i$,$g(x)=\sum\limits_{j=0}^{s}b_jx^j$,$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{B}^0=\boldsymbol{E}$,则

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{B})=\sum_{i=0}^{m}a_i\boldsymbol{A}^i\cdot\sum_{j=0}^{s}b_j\boldsymbol{B}^j\quad(\text{当 } \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\text{ 时})$$
$$=\sum_{k=0}^{m+s}\sum_{i+j=k}a_ib_j\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}^j=\sum_{k=0}^{m+s}\sum_{i+j=k}b_ja_i\boldsymbol{B}^j\boldsymbol{A}^i$$
$$=g(\boldsymbol{B})f(\boldsymbol{A}).$$

(2) $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{m-1})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$
$$=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^m=\begin{bmatrix}1-a^m & -mba^{m-1}\\ 0 & 1-a^m\end{bmatrix}.$$

16. 证明:若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶下三角矩阵,则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 也是下三角矩阵,且 $c_{ii}=a_{ii}b_{ii},i=1,\cdots,n$.

证 证法 1 直接做乘法.

证法 2 利用分块矩阵和数学归纳法:

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{\alpha} & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{\beta} & b_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{B}_1+a_{nn}\boldsymbol{\beta} & a_{nn}b_{nn}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1$ 是 $n-1$ 阶下三角矩阵.由归纳假设 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1$ 是 $n-1$ 阶下三角矩阵,所以 $\boldsymbol{AB}$ 是 n 阶下三角矩阵.

17. 证明:若 $\boldsymbol{A}$ 是主对角元全为 1 的上三角矩阵,则 $\boldsymbol{A}^2$ 也是主对角元全为 1 的上三角矩阵.

证 证法 1 直接做乘法.

证法 2 利用分块矩阵和数学归纳法:

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^2 & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 是主对角元全为 1 的 $n-1$ 阶上三角矩阵.由归纳假设 $\boldsymbol{A}_1^2$ 是主对角元全为 1 的 $n-1$ 阶上三角矩阵,所以 $\boldsymbol{A}^2$ 也是主对角元全为 1 的 n 阶上三角矩阵.

*****18.** 设 $S=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbf{Z}(\text{整数集})\right\}$.

(1) 验证 S 对矩阵的加法和乘法构成一个环;

*(2) 求 S 的幂零元素(幂零矩阵,即 $\exists\, k\in\mathbf{N}^*$,使 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$)与幂等元素(幂等矩阵,即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$),并证明 S 的幂零元素组成的集合是 S 的一个子环.

解 (1) 上三角矩阵的和还是上三角矩阵,矩阵加法满足结合律和交换律,加法的单位元是零矩阵,$\forall\,\boldsymbol{A}\in S$,其加法的逆元 $-\boldsymbol{A}\in S$,所以,$\langle S;+\rangle$ 是交换群.

$\langle S;\cdot\rangle$ 是含幺半群(因为上三角矩阵的乘积仍是上三角矩阵,矩阵乘法满足

结合律，乘法单位元为单位矩阵．但有的上三角矩阵关于乘法不可逆，所以是半群，而不是群）；矩阵乘法对加法满足左（右）分配律，所以$\langle S:+,\cdot\rangle$是一个含幺环．

（2）由

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得 $a=c=0$，b 任意，所以，幂零矩阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由
$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix},$$

得
$$a=0, c=1 \text{ 或 } c=0, a=1, b \text{ 任意},$$

所以，幂等矩阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

S 的幂零元素 $S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, b \in \mathbf{Z} \right\}$ 是特殊的上三角矩阵，所以，$\langle S_1:+,\cdot\rangle$ 是环，是 S 的一个子环（但不是含幺子环，因为 S_1 中没有单位矩阵）．

19．设 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是三维向量空间 V 的一组基，$\sigma \in L(V,V)$ 关于基 B 所对应的矩阵为 $\mathbf{A}$，求 $\operatorname{Im}\sigma$ 和 $\operatorname{Ker}\sigma$：

（1）$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$；　　（2）$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

解　（1）设 $\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 \in V$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B 下的坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，此时，$\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 在基 B 下的坐标 $(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$ 为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+2x_3 \\ -x_1+2x_2+x_3 \\ x_1+2x_2+5x_3 \end{bmatrix},$$

所以，
$$\begin{aligned} \sigma(\boldsymbol{\alpha}) &= y_1\boldsymbol{\alpha}_1 + y_2\boldsymbol{\alpha}_2 + y_3\boldsymbol{\alpha}_3 \\ &= (x_1+2x_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (-x_1+2x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_2 + (x_1+2x_2+5x_3)\boldsymbol{\alpha}_3 \\ &= x_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3) + x_2(2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3) + x_3(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3), \end{aligned}$$

其中 x_1,x_2,x_3 为任意常数．因此，σ 的像（值域）$\operatorname{Im}\sigma$ 是由上式中的三个向量生成的子空间，即

$$\operatorname{Im}\sigma = L(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3)$$

$$= L(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3).$$

由 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$，即$(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

这个齐次线性方程组的解空间 $L((4,3,-2)^{\mathrm{T}})$就是 σ 的核，但其中$(4,3,-2)^{\mathrm{T}}$是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基B下的坐标，即 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$ 的 $\boldsymbol{\alpha}$ 为

$$\boldsymbol{\alpha} = 4\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3,$$

因此，
$$\operatorname{Ker} \sigma = L(4\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3).$$

(2) 同理，
$$\operatorname{Im} \sigma = L(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3),$$
$$\operatorname{Ker} \sigma = L(-\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2).$$

20.“若 $\boldsymbol{A}$ 是n阶可逆矩阵，则方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 对任意的 $\boldsymbol{b}$ 有唯一解，且其解 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$”. 利用这个结论，判断下列矩阵是否可逆？如可逆，求其逆矩阵.

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$；　　(4) $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$；

(5) 证明：上三角矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times n}$($i > j$ 时，$a_{ij} = 0$)可逆的充要条件是 $a_{ii} \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$.

解　(1) 求

$$\boldsymbol{AX} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

的解，用高斯消元法：

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & b_1 \\ 3 & 4 & b_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -2 & b_2 - 3b_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 \end{array}\right],$$

得
$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -2b_1 + b_2 \\ \frac{3}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

所以，
$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(2) $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{b}$ 对任意 $\boldsymbol{b}$ 没有唯一解，$\boldsymbol{B}$ 不可逆.

(3) 方法同题(1)，

$$C^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 3 & 0 & -1\\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

(4) $\boldsymbol{DX}=\boldsymbol{b}$ 对任意 $\boldsymbol{b}$ 没有唯一解，$\boldsymbol{D}$ 不可逆.

(5) 当 $a_{ii}\neq 0$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 对任意 $\boldsymbol{b}$ 均有唯一解，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，因此，充分性成立.

必要性：用反证法.设 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 不是全不等于 0，即存在非零主对角元，不妨设 $a_{nn}=0$(其余全不为 0)，此时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 显然对任意的 $\boldsymbol{b}$ 没有唯一解.例如，$\boldsymbol{b}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 时，无解；$\boldsymbol{b}=(1,\cdots,1,0)^{\mathrm{T}}$ 时，有无穷多个解.所以，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 对任意 $\boldsymbol{b}$ 有唯一解时，必须 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

21. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明：

(1) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 都是可逆矩阵，并求它们的逆矩阵；

(2) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 不可能同时都是可逆的.

证 (1) 若 $\boldsymbol{AB}=k\boldsymbol{E}(k\neq 0)$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{B}$.由

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O},$$

得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}\quad 或\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=-2\boldsymbol{E},$$

所以，

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}),(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}.$$

(2) 由

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$$

可知，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 不可能同时都是可逆的.因为若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 都可逆，则$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$可逆，但零矩阵不可逆，矛盾.

26. (2) 证明：对于任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 可表示为对称矩阵和反对称矩阵之和.

证 由于对任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 均有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为反对称矩阵，于是

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})].$$

28. 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证 直接做乘法.由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$ 可得，$\boldsymbol{A}^2$ 的第 i 行第 j 列元素为 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2=0$，即 $a_{ij}=0$，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

30. 证明：可逆的对称(反对称)矩阵的逆矩阵仍是对称(反对称)矩阵.

提示 利用$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

32. 已知

$$A=\begin{bmatrix}a & a & 1\\ a & 1 & a\\ 1 & a & a\end{bmatrix},\quad 0<a<1.$$

证明：A 是可逆矩阵，并求 A^{-1}.

证

$$[A,E]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}a & a & 1 & 1 & 0 & 0\\ a & 1 & a & 0 & 1 & 0\\ 1 & a & a & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & a & a & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 & 0 & 1 & -a\\ 0 & a-1 & 1-a & 1 & -1 & 0\end{array}\right]$$

…………

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & \frac{a}{(a-1)(2a+1)} & \frac{a}{(a-1)(2a+1)} & -\frac{a+1}{(a-1)(2a+1)}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{(a-1)(2a+1)} & -\frac{a+1}{(a-1)(2a+1)} & \frac{a}{(a-1)(2a+1)}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a+1}{(a-1)(2a+1)} & \frac{a}{(a-1)(2a+1)} & \frac{a}{(a-1)(2a+1)}\end{array}\right],$$

所以，
$$A^{-1}=\frac{1}{(a-1)(2a+1)}\begin{bmatrix}a & a & -a-1\\ a & -a-1 & a\\ -a-1 & a & a\end{bmatrix}.$$

注：学了第 5 章，用 $|A|=(-a-1)^2(2a+1)\neq 0$ 判断 A 可逆，用“伴随矩阵法”求 A^{-1}，比这里的方法更简便些.

33. 利用逆矩阵(或用初等变换法)解下列矩阵方程：

(1) $\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$；　　(3) $A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

解 (1) 解法 1

$$B=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 3\\ -3 & -1\end{bmatrix}.$$

解法 2　将矩阵方程记作 $AB=C$，对 A,C 做同样的初等行变换(即各左乘初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$)，当 A 变为单位矩阵时，C 变换后的矩阵就等于 B，即

$$P_s\cdots P_2P_1(AB)=P_s\cdots P_2P_1C.$$

当 $P_s\cdots P_2P_1A=E$ 时，即得

$$B=P_s\cdots P_2P_1C.$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc}2 & 5 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行变换}}\cdots\xrightarrow{\text{行变换}}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 8 & 3\\ 0 & 1 & -3 & -1\end{array}\right],$$

所以，
$$B=\begin{bmatrix}8&3\\-3&-1\end{bmatrix}.$$

(3) 解法 1

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}3&-3&1\\-1&2&-1\end{bmatrix}.$$

解法 2　这个矩阵方程等号左端的已知矩阵在要求的矩阵 A 的右边，所以要对等号两端已知矩阵做同样的初等列变换，当左端已知矩阵变换为单位矩阵时，右端已知矩阵就变为所求的矩阵 A.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\\hdashline 1&-2&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\cdots\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hdashline 3&-3&1\\-1&2&-1\end{bmatrix},$$

所以，
$$A=\begin{bmatrix}3&-3&1\\-1&2&-1\end{bmatrix}.$$

36. 设 $A,B,C\in M_n(F)$，证明：

(1) $r\left(\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}\right)=r(A)+r(B)$；

(2) $r(A)+r(B)\leqslant r\left(\begin{bmatrix}A&C\\O&B\end{bmatrix}\right)\leqslant r(A)+r(B)+r(C)$.

证　(1) 对于 A 和 B，分别存在可逆矩阵 P_1,Q_1 和 P_2,Q_2，使得
$$P_1AQ_1=\begin{bmatrix}E_{r_1}&O\\O&O\end{bmatrix},P_2BQ_2=\begin{bmatrix}E_{r_2}&O\\O&O\end{bmatrix},$$
其中 E_{r_1} 和 E_{r_2} 分别是 r_1 和 r_2 阶单位矩阵，于是
$$\begin{bmatrix}P_1&O\\O&P_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1&O\\O&Q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_1AQ_1&O\\O&P_2BQ_2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_{r_1} & & & \\ & O & & \\ & & E_{r_2} & \\ & & & O \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{bmatrix} E_{r_1+r_2} & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

其中，
$$P = \begin{bmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{bmatrix}$$
仍为可逆矩阵.所以，
$$r\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} E_{r_1+r_2} & O \\ O & O \end{bmatrix}\right) = r_1 + r_2 = r(A) + r(B).$$

(2) 若 A 中存在 r_1 行线性无关，不妨设是前 r_1 行.由于线性无关的向量组增加分量后仍然线性无关，所以，$[A, C]$ 的前 r_1 行也线性无关，因此，
$$r([A, C]) \geqslant r([A, O]) = r(A)$$
(这里可能“>”，因为 A 中线性相关的行向量添加了 C 中的分量后，可能线性无关).所以，
$$r\left(\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}\right) \geqslant r\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\right) = r(A) + r(B).$$
又 $r\left(\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & C \\ O & O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & O \\ O & B \end{bmatrix}\right) \leqslant r(A) + r(B) + r(C).$

37. 证明：矩阵添加一列(或一行)，其秩或不变，或增加 1.

证 考虑矩阵 A 的行向量组的极大线性无关组，若添加的一行可由其极大线性无关组线性表示，则秩不变，否则，秩增加 1.

38. 设 A 是 $s \times n$ 矩阵，B 是 A 的前 m 行构成的 $m \times n$ 矩阵，证明：
$$r(B) \geqslant r(A) + m - s.$$

证 设 A 的行向量组为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$，$r(A) = r$；$B$ 的行向量组为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$，$r(B) = k$.不妨设：$B$ 的行向量组的极大线性无关组为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$，$A$ 的行向量组的极大线性无关组为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_{r-k}}\}$，其中 $\{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_{r-k}}\}$(共 $r-k$ 个向量)是包含在 $\{\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_s\}$(共 $s-m$ 个向量)之中的.显然有
$$r - k \leqslant s - m,$$
即
$$r(B) = k \geqslant r + m - s = r(A) + m - s.$$

***39.** 设 $A \in M_n(F)$，$r(A) = 1$，证明：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{bmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}$,其中 k 是 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元之和.

证 (1) 由于 $r(\boldsymbol{A})=1$,所以 $\boldsymbol{A}$ 中任意两行成比例.设第一行是$[a_1b_1,a_1b_2,\cdots,a_1b_n]$,第二行是$[a_2b_1,a_2b_2,\cdots,a_2b_n]$,…,第 n 行是$[a_nb_1,a_nb_2,\cdots,a_nb_n]$,则

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{bmatrix}.$$

(2)
$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{bmatrix}$$

$$=k\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{bmatrix}=k\boldsymbol{A},$$

其中
$$k=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,$$

k 是 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元之和.

40. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵($m\leqslant n$),$r(\boldsymbol{A})=m$,证明:存在 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$.

证 由于 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$r(\boldsymbol{A})=m$,可知对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做初等列变换,可使其前 m 列变为单位矩阵,而后 $n-m$ 列变为全零列.因此,存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$(若干 n 阶初等矩阵的乘积),使得

$$\boldsymbol{AP}=[\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{O}_{m\times(n-m)}],$$

于是,
$$\boldsymbol{AP}(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{E},\boldsymbol{O}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_m,$$

即
$$APP^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=E_m,$$
所以存在 $B=(PP^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})$ 为 $n\times m$ 矩阵,使 $AB=E$.

41. 设 $A,B\in M_n(F)$,$r(A)+r(B)\leqslant n$,证明:存在可逆阵 M,使 $AMB=O$.

证 利用 A,B 的相抵标准形.存在 n 阶可逆矩阵 P_1,Q_1 和 P_2,Q_2,使得
$$P_1AQ_1=\begin{bmatrix}E_{r_A} & O\\ O & O\end{bmatrix},\qquad P_2BQ_2=\begin{bmatrix}O & O\\ O & E_{r_B}\end{bmatrix},$$
于是,
$$AQ_1=P_1^{-1}\begin{bmatrix}E_{r_A} & O\\ O & O\end{bmatrix},\qquad P_2B=\begin{bmatrix}O & O\\ O & E_{r_B}\end{bmatrix}Q_2^{-1},$$
所以,
$$AQ_1P_2B=P_1^{-1}\begin{bmatrix}E_{r_A} & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O & O\\ O & E_{r_B}\end{bmatrix}Q_2^{-1}=O,\tag{1}$$
取
$$M=Q_1P_2$$
即可.

(1)式等于 O 是因为 $r(A)+r(B)=n$.所以(1)式中间两个对角矩阵的乘积等于零矩阵.对 $r(A)+r(B)<n$,把 B 的等价(相抵)标准形中的"1"放后,使之与 A 的等价(相抵)标准形中的"1"错开,同样有乘积为零.

42. 设 $A,B\in M_{m\times n}(F)$,证明:$A\cong B\Leftrightarrow r(A)=r(B)$.

证 必要性:由于 $A\cong B$,即存在可逆矩阵 P,Q,使 $PAQ=B$,所以 $r(A)=r(B)$.

充分性:由于 $r(A)=r(B)$,所以 A 和 B 有相同的相抵标准形,即存在可逆矩阵 P_1,Q_1 和 P_2,Q_2,使得
$$P_1AQ_1=\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}=P_2BQ_2,$$
从而 $P_2^{-1}P_1AQ_1Q_2^{-1}=B$,其中 $P_2^{-1}P_1$ 与 $Q_1Q_2^{-1}$ 可逆.所以,$A\cong B$.

43. 设$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$是 n 维空间 $V(F)$的一组基,$A\in M_{n\times k}(F)$,且
$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A.$$
证明:$L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)$的维数等于 $r(A)$.

证 由主教材 4.8 节引理知$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\}$的列向量组与 A 的列向量组有相同的线性相关性,即$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\}$的极大线性无关组有 $r(A)$个向量,所以
$$\dim L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)=r(A).$$

44. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0&0\\2&5&0&0&0\\0&0&-2&1&0\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&-2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\-1&2&3&0\\1&2&0&4\\0&1&2&4\\0&0&1&4\end{bmatrix}.$$

用矩阵分块的方法:(1) 计算 A^2,AB;(2) 求 A^{-1}.

提示 将 A,B 分块表示为

$$A=\begin{bmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{bmatrix},$$

其中
$$A_1=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}1&0\\3&0\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-2&1&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{bmatrix},\quad B_3=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad B_4=\begin{bmatrix}0&4\\2&4\\1&4\end{bmatrix}.$$

于是,
$$A^2=\begin{bmatrix}A_1^2&\\&A_2^2\end{bmatrix}(\text{计算过程略}).$$

$$AB=\begin{bmatrix}A_1B_1&A_1B_2\\A_2B_3&A_2B_4\end{bmatrix},$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{bmatrix},$$

其中
$$A_1^{-1}=\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix},A_2^{-1}=\frac{-1}{2}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

45. 设 $A,B,C\in M_n(F)$, $P=\begin{bmatrix}A&B\\O&C\end{bmatrix}$,给出 P 可逆的条件,并求其逆矩阵.

解 对 P 做初等变换,可知:若 A,C 都满秩,则 P 可逆.对 P 做倍加行变换,把 P 的第二行左乘 $-BC^{-1}$后加到第一行,相应地用分块倍加初等矩阵

$$H=\begin{bmatrix}E&-BC^{-1}\\O&E\end{bmatrix}$$

(其中 E 为 n 阶单位矩阵)左乘 P,使 P 化为对角块矩阵,即

$$HP=\begin{bmatrix}E&-BC^{-1}\\O&E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\O&C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&O\\O&C\end{bmatrix},$$

对上式两边求逆,得

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} E & -BC^{-1} \\ O & E \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

将上式两边分别右乘分块倍加初等阵 H,得

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & -BC^{-1} \\ O & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

46. 设 B, C 分别是 m 阶和 n 阶矩阵,$A=\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}$.

(1) 证明:A 可逆$\Leftrightarrow B,C$ 都可逆;

(2) 当 A 可逆时,求 A^{-1}.

(3) 求 $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$.

解 (1) 由于 $r(A)=r(B)+r(C)$,所以,A 可逆的充分必要条件是

$$r(A)=r(B)+r(C)=m+n,$$

即

$$r(B)=m, r(C)=n,$$

即 B,C 都可逆.

(2) 由

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_n & O \\ O & I_m \end{bmatrix}=I$$

得

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}.$$

(3) $$A=\begin{bmatrix} O & B \\ 1 & O \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} O & 1 \\ B^{-1} & O \end{bmatrix},$$

其中 $$B^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

47. 设 B 是 n 阶可逆矩阵,

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}.$$

求一个矩阵 $\boldsymbol{A}$,使 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_n$.

提示 令 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_1 \quad \boldsymbol{A}_2]$,则

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{A}_1 \quad \boldsymbol{A}_2]\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}_n,$$

只需取 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{B}^{-1}$, $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$,即 $\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{O}_{n\times 3}$ 或 $\boldsymbol{A}_2=[\boldsymbol{O}_{n\times 1} \quad \boldsymbol{D}_{n\times 2}]$,所以,

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{B}^{-1} \quad \boldsymbol{O}_{n\times 1} \quad \boldsymbol{D}_{n\times 2}],$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 为任意 $n\times 2$ 矩阵.

48.将 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & a_{nn}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$是 $n-1$ 阶矩阵.设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}_1$都是可逆矩阵,且已知 $\boldsymbol{A}_1^{-1}$,试求 $\boldsymbol{A}^{-1}$(这种利用 $\boldsymbol{A}_1^{-1}$来求 $\boldsymbol{A}^{-1}$的方法称为加边法).利用这个结果,求

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}^{-1}.$$

解
$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1}+\frac{1}{a}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1^{-1} & -\frac{1}{a}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{B}\\ -\frac{1}{a}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \frac{1}{a}\end{bmatrix},$$

其中 $a=a_{nn}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{B}$.

***49**.对矩阵作 $\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}$ 分解:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

解 (1) 左乘两个倍加初等矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 化为上三角矩阵:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{8} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 8 & -4\\ 0 & 0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}=\boldsymbol{U},$$

所以，

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&4&2\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{1}{8}&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&8&-4\\0&0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&\frac{1}{8}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&8&-4\\0&0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}=LU.$$

其中 $$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&\frac{1}{8}&1\end{bmatrix},U=\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&8&-4\\0&0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}.$$

50. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 变为基 $B_2=\{\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3\}$ 的变换矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$，求：

(1) 基 $B_3=\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 变为基 B_2 的变换矩阵；

(2) 基 $B_4=\{-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 变为基 B_2 的变换矩阵；

(3) 基 B_4 变为基 $B_5=\{\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_2,-\boldsymbol{\xi}_1\}$ 的变换矩阵；

(4) 基 B_4 变为基 $B_6=\{\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1\}$ 的变换矩阵.

解 已知

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},$$

等式两边对应的列向量相等，即

$$\begin{cases}\boldsymbol{\xi}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+a_{31}\boldsymbol{\alpha}_3,\\ \boldsymbol{\xi}_2=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+a_{32}\boldsymbol{\alpha}_3,\\ \boldsymbol{\xi}_3=a_{13}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{23}\boldsymbol{\alpha}_2+a_{33}\boldsymbol{\alpha}_3.\end{cases}$$

(1) $$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}.$$

(2) $$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=(-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}-a_{11}&-a_{12}&-a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}.$$

(3) $(\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_2,-\boldsymbol{\xi}_1)=(-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}-a_{13} & -a_{12} & a_{11}\\ a_{23} & a_{22} & -a_{21}\\ a_{33} & a_{32} & -a_{31}\end{bmatrix}$.

(4) $(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1)$

$$=(-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}-a_{11}-a_{12} & -a_{12}-a_{13} & -a_{13}-a_{11}\\ a_{21}+a_{22} & a_{22}+a_{23} & a_{23}+a_{21}\\ a_{31}+a_{32} & a_{32}+a_{33} & a_{33}+a_{31}\end{bmatrix}.$$

51. 已知 $\mathbf{R}^4$ 的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(6,6,1,3)^{\mathrm{T}}$,求一个非零向量 $\boldsymbol{\beta}$,使它关于这组基和关于自然基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ 有相同的坐标.

解 令
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}.\end{aligned}$$

解方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{X}$,即 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$,其中 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$,则

$$\begin{bmatrix}2-1 & 0 & 5 & 6\\ 1 & 3-1 & 3 & 6\\ -1 & 1 & 2-1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 3-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},$$

解得 $$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(-1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

所以,

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3+x_4\boldsymbol{e}_4=(-1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

52. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

(1) 求基 B_1 变为基 B_2 的变换矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 如果 $\boldsymbol{\xi}$ 关于基 B_1 的坐标为 $(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{\xi}$ 关于基 B_2 的坐标.

解 (1) 设基 B_1 变为基 B_2 的变换矩阵 $\boldsymbol{A}$,即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A},$$

得
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}.$$

(2) $\boldsymbol{\xi}$ 关于基 B_2 的坐标为

$$\boldsymbol{\xi}_{B_2}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

53. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1),\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3),\qquad \boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1),$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4),\qquad \boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1),\qquad \boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6).$$

(1) 求 $\boldsymbol{\gamma}=(3,6,2)$ 在基 B_1 下的坐标 $\boldsymbol{X}$；

(2) 求基 B_1 到基 B_2 的变换矩阵 $\boldsymbol{C}$；

(3) 利用变换矩阵，求 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 B_2 下的坐标.

解 令 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}]$， $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}}]$.

(1) 设 $\qquad \boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，

即

$$\boldsymbol{AX}=[\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}},$$

所以，

$$\boldsymbol{\gamma}_{B_1}=\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}.$$

(2) 设 $$[\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}}]=[\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{C},$$

所以，

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{bmatrix}.$$

(3) 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 B_2 下的坐标为 $(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{X}$，即

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}^{-1}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}153\\-106\\83\end{bmatrix}.$$

4-6 补充题提示与解答

1. 证明：与任意 n 阶矩阵都可交换的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必是 n 阶数量矩阵.

证 证法1 因为 $\boldsymbol{A}$ 与任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可交换，可取 $\boldsymbol{B}$ 为倍乘初等矩阵 $\boldsymbol{E}_i(c)$，即由 $\boldsymbol{AE}_i(c)=\boldsymbol{E}_i(c)\boldsymbol{A}$（$\boldsymbol{E}_i(c)$ 右乘 $\boldsymbol{A}$ 是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘 c；$\boldsymbol{E}_i(c)$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ 是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘 c，其余元素不变）得

$$\boldsymbol{AE}_i(c)=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ca_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_i(c)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

当 $i\neq j$ 时，有 $ca_{ij}=a_{ij}$（其中 $c\neq 0$），得 $a_{ij}=0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵

$$\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}).$$

再取 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，其中 $b_{12}=b_{23}=b_{34}=\cdots=b_{n-1,n}=1$，其余 $b_{ij}=0$. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，得

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=\cdots=a_{nn}.$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶数量矩阵.

证法2 因为 $\boldsymbol{A}$ 与任意 n 阶矩阵都可交换，可取 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 为第 i 行第 j 列元素 $b_{ij}=1$，其余元素全为0的 n 阶矩阵. 于是，$\boldsymbol{AB}_{ij}$ 是第 j 列元素为 $\boldsymbol{A}$ 的是第 i 列元素，其余列全为 $\boldsymbol{0}$ 的 n 阶矩阵；$\boldsymbol{B}_{ij}\boldsymbol{A}$ 是第 i 行元素为 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行元素，其余行全为 $\boldsymbol{0}$ 的 n 阶矩阵. 所以，由 $\boldsymbol{AB}_{ij}=\boldsymbol{B}_{ij}\boldsymbol{A}$，即

$$\boldsymbol{AB}_{ij}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{2i} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \text{第}j\text{列}\end{array}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{j(n-1)} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\xlongequal{\text{第 }i\text{ 行}}\boldsymbol{B}_{ij}\boldsymbol{A}$$

可知：$\boldsymbol{AB}_{ij}$ 的第 i 行第 j 列元素为 a_{ii}，而 $\boldsymbol{B}_{ij}\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素为 a_{jj}，所以，

$$a_{ii}=a_{jj},$$

其余元素为

$$a_{1i}=a_{2i}=a_{i-1,i}=a_{i+1,i}=\cdots=a_{ni}=0,$$

$$a_{j1}=a_{j2}=a_{j-1,j}=a_{j+1,j}=\cdots=a_{jn}=0.$$

因此，由 $\boldsymbol{AB}_{12}=\boldsymbol{B}_{12}\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{AB}_{23}=\boldsymbol{B}_{23}\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{AB}_{n-1,n}=\boldsymbol{B}_{n-1,n}\boldsymbol{A}$，即得

$$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}.$$

当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0\quad(i,j-1,2,\cdots,n)$. 所以，$\boldsymbol{A}$ 必是 n 阶数量矩阵.

2. 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的主对角元之和称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹，记作

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

证明:若 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_{n\times m}(F),\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_{m\times n}(F)$,则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$.

证 以下用 $[\boldsymbol{AB}]_{ii}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 个对角元. 利用交换求和顺序,其和不变,得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})&=\sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{AB}]_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{ki}\right)(\text{交换求和顺序})\\&=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{m}[\boldsymbol{BA}]_{kk}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA}).\end{aligned}$$

3. 证明:对任意的两个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都有 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{I}$.

证 由上题知

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA}),$$

所以,

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})=0\neq\mathrm{tr}(\boldsymbol{I})=n,$$

因此,

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{I}.$$

*__4__. 设

$$H=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ -\bar{b} & \bar{a}\end{bmatrix}\mid a,b\in\mathbf{C}(\text{复数域})\right\},$$

证明:H 是一个除环(含乘法单位元的无零因子环),但不是域.

提示 证明 H 中非零矩阵可逆,乘法不可交换.

5. 设 $\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{Y}=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$,且 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=2$,证明:

(1) $(\boldsymbol{XY}^{\mathrm{T}})^k=2^{k-1}(\boldsymbol{XY}^{\mathrm{T}}),k\geqslant2$;

(2) 如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{XY}^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆,并求其逆矩阵.

解 (1) $(\boldsymbol{XY}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}=2(\boldsymbol{XY}^{\mathrm{T}})$(因为 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=2$).

用数学归纳法易证

$$(\boldsymbol{XY}^{\mathrm{T}})^k=2^{k-1}(\boldsymbol{XY}^{\mathrm{T}}),\quad k\geqslant2.$$

(2) 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{XY}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{XY}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{XY}^{\mathrm{T}})^2\\&=\boldsymbol{E}+4\boldsymbol{XY}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}+4(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\\&=4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

可得

$$\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O},$$

即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})=-3\boldsymbol{E},$$

于是,

$$\boldsymbol{A}\left[-\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E},$$

所以,

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{3}(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}).$$

6. 证明:对换变换可以通过若干次倍加和倍乘变换来实现.

证 只要证明初等对换矩阵可以表示为若干初等倍加矩阵和初等倍乘矩阵的乘积,为此,需要证明初等对换矩阵可以经过若干次初等倍加变换和初等倍乘变换而变成单位矩阵.以 2 阶矩阵为例.

$$\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\boldsymbol{E}_{12}(-1)]{\text{左乘}}\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[\boldsymbol{E}_{21}(1)]{\text{左乘}}\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\boldsymbol{E}_{12}(-1)]{\text{左乘}}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[\boldsymbol{E}_{2}(-1)]{\text{左乘}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}.$$

将上面对 $\boldsymbol{E}_{12}$ 做 4 次初等行变换而变成单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的过程表示为下面的矩阵方程:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{12}&=(\boldsymbol{E}_2(-1)\boldsymbol{E}_{12}(-1)\boldsymbol{E}_{21}(1)\boldsymbol{E}_{12}(-1))^{-1}\\&=\boldsymbol{E}_{12}^{-1}(-1)\boldsymbol{E}_{21}^{-1}(1)\boldsymbol{E}_{12}^{-1}(-1)\boldsymbol{E}_{2}^{-1}(-1)\\&=\boldsymbol{E}_{12}(1)\boldsymbol{E}_{21}(-1)\boldsymbol{E}_{12}(1)\boldsymbol{E}_2(-1).\end{aligned}$$

于是,

$$\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_{12}(1)\boldsymbol{E}_{21}(-1)\boldsymbol{E}_{12}(1)\boldsymbol{E}_2(-1)\boldsymbol{A}.$$

上式表明对 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,2 行对换可以通过一次初等倍乘变换和 3 次初等倍加变换来实现.

此题的答案不唯一,例如,还有 $\boldsymbol{E}_{12}=\boldsymbol{E}_1(-1)\boldsymbol{E}_{21}(-1)\boldsymbol{E}_{12}(1)\boldsymbol{E}_{21}(-1)$.不唯一的原因是将 $\boldsymbol{E}_{12}$ 变换为 $\boldsymbol{E}$ 时,可以通过不同的初等倍乘变换和初等倍加变换来实现.

7. 把二阶矩阵 $\begin{bmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{bmatrix}$ 表示为若干个倍加初等阵的乘积.

解 用与上题类似的方法,可将题中矩阵通过若干次初等倍加变换而变成单位矩阵.如此可得

$$\begin{bmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-a\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\a^{-1}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-a\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}.$$

8. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$,$ad-bc=1$.证明:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个倍加初等矩阵的乘积.

解 (1) 若 $a\neq0$,对 $\boldsymbol{A}$ 做两次初等倍加变换可将 $\boldsymbol{A}$ 化为上题的矩阵,即

$$\begin{bmatrix}1&-ab\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-ca^{-1}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{bmatrix}.$$

利用初等倍加矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(m)$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(m)=\boldsymbol{E}_{ij}(-m)$,即得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\ca^{-1}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&ab\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{bmatrix}.$$

再将上题结果代入，$\boldsymbol{A}$ 就表示为 8 个初等倍加矩阵的乘积.

(2) 若 $a=0$，由 $ad-bc=-bc=1$ 可知，$b\neq 0, c\neq 0$，先做倍加变换，得

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&b+d\\c&d\end{bmatrix},$$

于是，
$$\begin{bmatrix}0&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c&b+d\\c&d\end{bmatrix}.$$

上式右端矩阵为(1)的情形，所以左端就可以表示为若干初等矩阵的乘积.

9. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in \boldsymbol{M}_n(F)$，证明：$r(\boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n$. 并问：如果 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{M}_{m\times n}(F)$，$\boldsymbol{B}\in \boldsymbol{M}_{n\times s}(F)$，上述结论是否成立？（提示：利用矩阵的相抵标准形和主教材中(4－22)式及习题 38 的结论；或者利用习题 36 的结论对分块矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{AB}\end{bmatrix}$做初等变换使之变为$\begin{bmatrix}*&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$型的矩阵.）

证 对分块矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{AB}\end{bmatrix}$做如下的初等变换：

$$\boldsymbol{P}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{A}&\boldsymbol{AB}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\\-\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q},$$

于是，

$$r(\boldsymbol{P})=r(\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{Q})\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\quad(\text{习题 }36),$$

其中 $r(\boldsymbol{E})=n$，所以，

$$r(\boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n.$$

当 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{M}_{m\times n}(F)$，$\boldsymbol{B}\in \boldsymbol{M}_{n\times s}(F)$ 时，上述对分块矩阵的初等变换仍然成立（其中的 $\boldsymbol{E}$ 仍为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{AB}$ 和零矩阵均为 $m\times s$ 矩阵），所以，结论也成立.

10. 设

$$B_1=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\},$$

$$B_2=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\},$$

(1) 证明：B_2 也是线性空间 $\boldsymbol{M}_2(\mathbf{R})$ 的基；

(2) 求基 B_2 变为基 B_1 的变换矩阵；

(3) 求 $\boldsymbol{M}_2(\mathbf{R})$ 的一组基 $B_3=\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4\}$，使得 $\boldsymbol{A}_i^2=\boldsymbol{A}_i\,(i=1,\cdots,4)$；

(4) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于基 B_2 的坐标为 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$ 关于基 B_3 的坐标.

解 记 $B_1=\{\boldsymbol{e}_{11},\boldsymbol{e}_{12},\boldsymbol{e}_{21},\boldsymbol{e}_{22}\}$，$B_2=\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3,\boldsymbol{g}_4\}$.

(1) 设 $k_1 g_1 + k_2 g_2 + k_3 g_3 + k_4 g_4 = O$,即

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 & k_2 + k_3 + k_4 \\ k_3 + k_4 & k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

这个矩阵方程对应的四元齐次线性方程组的解为

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0,$$

所以,g_1, g_2, g_3, g_4线性无关,从而是 $M_2(\mathbf{R})$的一组基.

(2) 由 $M_2(\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^4$,所以,$\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$可以表示为 $\mathbf{R}^4$中的自然基$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$,而$\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$可表示为$\{(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,1,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}\}$,于是,由

$$[g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4] = [e_{11} \quad e_{12} \quad e_{21} \quad e_{22}]C,$$

可得

$$[e_{11} \quad e_{12} \quad e_{21} \quad e_{22}] = [g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4]C^{-1},$$

其中

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

所以,基 B_2变为基 B_1的变换矩阵为 C^{-1}.

(3) 在 $A^2 = A$ 中选较为简单的,例如,由

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

取 $a=1, b=0$ 或 1,得

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ cd & d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix},$$

取 $d=1, c=0$ 或 1,得

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

上面的$\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$都满足 $A_i^2 = A_i\ (i = 1, \cdots, 4)$,而且线性无关,所以它们是 $M_2(\mathbf{R})$的一组基 B_3.

(4) 先求基 B_2变为基 B_3的变换矩阵为 D,即

$$[A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4] = [g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4]D,$$

按题(2)中所述,此时有

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{D}.$$

由于上式右端已知矩阵的逆矩阵为上面的 $\boldsymbol{C}^{-1}$，所以

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&-1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于基 B_2 的坐标为 $\boldsymbol{X}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 关于基 B_3 的坐标为

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&-1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&-1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\\2\end{bmatrix}.$$

11. 设

$$W_1=\left\{\begin{bmatrix}x&-x\\y&z\end{bmatrix}\middle|\,x,y,z\in F(\text{域})\right\},$$

$$W_2=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\-a&c\end{bmatrix}\middle|\,a,b,c\in F\right\}.$$

(1) 证明：W_1,W_2 是 $\boldsymbol{M}_2(F)$ 的子空间，并求 $\dim W_1$，$\dim W_2$，$\dim(W_1+W_2)$，$\dim(W_1\cap W_2)$；

(2) 求 $W_1\cap W_2$ 的一组基，并求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-3\\-3&1\end{bmatrix}$ 关于这组基的坐标.

证 (1) $\quad\forall\ \boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}x&-x\\y&z\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}x'&-x'\\y'&z'\end{bmatrix}\in W_1,$

均有
$$\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2\in W_1,\ k\boldsymbol{A}_1\in W_1,$$
所以，W_1 是 $\boldsymbol{M}_2(F)$ 的子空间. 同理，W_2 也是 $\boldsymbol{M}_2(F)$ 的子空间.

W_1 的一组基为

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

所以，
$$\dim W_1=3.$$

W_2 的一组基为

$$\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_5=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_6=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

所以，
$$\dim W_2 = 3.$$
$$W_1 + W_2 = L(\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_4, \boldsymbol{B}_5) = L(\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_4),$$
因为
$$\boldsymbol{B}_5 = -\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_4, \boldsymbol{B}_6 = \boldsymbol{B}_3,$$
且 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_4$线性无关(证明略去),所以,
$$\dim(W_1 + W_2) = 4.$$
再由子空间的维数公式
$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2),$$
即得
$$\begin{aligned}\dim(W_1 \cap W_2) &= \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2)\\ &= 3 + 3 - 4 = 2.\end{aligned}$$

(2) 显然,$\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{B}_6 \in W_1 \cap W_2$.再由观察可知 $\boldsymbol{B}_4 - \boldsymbol{B}_5 = \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2 \in W_1 \cap W_2$,所以,$(\boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2)$是 $W_1 \cap W_2$的一组基(因为 $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$).设
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\\ &= x_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} x_2 & -x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$
解得
$$(x_1, x_2)^{\mathrm{T}} = (1,3)^{\mathrm{T}},$$
即为 $\boldsymbol{A}$ 关于基$(\boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2)$的坐标.

再附带说一下求 $W_1 \cap W_2$的基的一般方法:设
$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= x_1 \boldsymbol{B}_1 + x_2 \boldsymbol{B}_2 + x_3 \boldsymbol{B}_3\\ &= x_4 \boldsymbol{B}_4 + x_5 \boldsymbol{B}_5 + x_6 \boldsymbol{B}_6\\ &\in W_1 \cap W_2,\end{aligned}$$
则由矩阵方程
$$x_1 \boldsymbol{B}_1 + x_2 \boldsymbol{B}_2 + x_3 \boldsymbol{B}_3 - x_4 \boldsymbol{B}_4 - x_5 \boldsymbol{B}_5 - x_6 \boldsymbol{B}_6 = \boldsymbol{0}$$
对应的 $x_1, x_2, \cdots, x_6$的齐次线性方程组的解空间的基(不妨设 k 个向量)所对应的矩阵 $\boldsymbol{P} = x_1 \boldsymbol{B}_1 + x_2 \boldsymbol{B}_2 + x_3 \boldsymbol{B}_3$(也有 k 个矩阵)就是 $W_1 \cap W_2$的基.

12. 设 $V_1 = L(f_1, f_2, f_3)$, $V_2 = L(g_1, g_2)$,其中
$$f_1 = 1 + 2x - x^2 - 2x^3, f_2 = 3 + x + x^2 + x^3, f_3 = -1 + x^2 - x^3;$$
$$g_1 = 2 + 5x - 6x^2 - 5x^3, g_2 = -1 + 2x - 7x^2 + 3x^3.$$
求:$\dim(V_1 \cap V_2)$ 和 $V_1 \cap V_2$的基;$\dim(V_1 + V_2)$和 $V_1 + V_2$的基.

解 设
$$k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3=0,$$
即
$$(k_1+3k_2-k_3)+(2k_1+k_2)x+(-k_1+k_2+k_3)x^2+(-2k_1+k_2-k_3)x^3=0,$$
可得
$$\begin{cases}k_1+3k_2-k_3=0,\\2k_1+k_2=0,\\-k_1+k_2+k_3=0,\\-2k_1+k_2-k_3=0,\end{cases}$$
得
$$k_1=k_2=k_3=0,$$
所以,(f_1,f_2,f_3)是 V_1的基,$\dim V_1=3$.同理,(g_1,g_2)是 V_2的基,$\dim V_2=2$.
$$V_1+V_2=L(f_1,f_2,f_3,g_1,g_2)=L(f_1,f_2,f_3,g_2),$$
$$\dim(V_1+V_2)=4.$$

这里求 $f_1,f_2,f_3,g_1,g_2\in R[x]_4$的极大线性无关组的方法是把它们分别对应于同构空间 $\mathbf{R}^4$中的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$(例如,$f_1$对应 $\mathbf{R}^4$中的$(1,2,-1,-2)^{\mathrm{T}}$,其他类同),然后再求出后者的极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$,它们对应的 f_1,f_2,f_3,g_2就是前者的极大线性无关组.
$$\begin{aligned}\dim(V_1\cap V_2)&=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)\\&=3+2-4=1.\end{aligned}$$

以下求 $V_1\cap V_2$.设
$$k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3=-k_4g_1-k_5g_2\in V_1\cap V_2,$$
由此得
$$k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3+k_4g_1+k_5g_2=0.$$
这个多项式方程对应的 k_1,k_2,k_3,k_4,k_5 五元齐次线性方程组的一般解为
$$(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5)^{\mathrm{T}}=c(3_1,-1_2,-2_3,-1_4,0_5)^{\mathrm{T}},$$
其中 c 为任意常数.于是,$V_1\cap V_2$的基为
$$\varphi=-k_4g_1-k_5g_2=g_1+0=2+5x-6x^2-5x^3,$$
即
$$V_1\cap V_2=L(g_1).$$
不用前面的维数公式也可以得到
$$\dim(V_1\cap V_2)=1.$$

第5章　行　列　式

5-1　学时安排的建议

表 5-1

节	教　学　内　容	复习页数
22	5.1 n 阶行列式的定义,5.2 行列式按一列(行)的展开式	170—175
23	5.2 行列式按一列(行)的展开式,5.3 方阵乘积的行列式	176—182
24	5.3 节中矩阵的行列式秩,5.4 Cramer 法则	182—187

5-2　基本要求

1. 熟练掌握 n 阶行列式的定义和性质,特别是:倍加变换不改变行列式的值,$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$,和"若$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$线性相关,则 $D(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=0$".

2. 熟悉上(下)三角行列式等于其主对角元的乘积;知道范德蒙行列式展开的结果;熟悉上(下)三角块矩阵行列式:

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}_1\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是k 阶和 m 阶矩阵,$\boldsymbol{C}$ 是 $m\times k$ 矩阵,$\boldsymbol{C}_1$是 $k\times m$ 矩阵.

3. 熟练掌握 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$对第j 列和对第i 行的展开式:

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\qquad j=1,\cdots,n;$$

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\qquad i=1,\cdots,n$$

及 D 的某一列(或行)元素与另一列(或行)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即

$$\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}A_{ik}=0\qquad(j\neq i).$$

于是 $$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{ki}=\delta_{ij}D, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik}=\delta_{ij}D,$$

其中 $$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

4. 能熟练应用公式：$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$. 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵.

5. 能用各种方法求行列式的值，最基本的方法是

(1) 利用性质，将某行(或列)化为只有一个非零元，然后对该行(或列)展开.

(2) 利用性质，将行列式化为上(或下)三角行列式.

6. 掌握 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，并会证明

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*},$$

其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式矩阵的转置. 称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

7. 理解矩阵的行列式秩的定义. 熟知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式秩等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数. 且秩$(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的行列式秩.

8. 熟悉 Cramer 法则和齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵)有非零解的充要条件为 $|\boldsymbol{A}|=0$，即秩$(\boldsymbol{A})<n$ 以及 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解的充要条件为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即秩$(\boldsymbol{A})=n$.

5-3 内容综述与分析

1. 本章在线性代数中的地位

行列式是学习线性代数的一个重要工具. 线性代数中很多重要问题都可以用行列式来研讨，例如，n 阶行列式可以用来判别 n 个 n 元向量的线性相关性，判别矩阵是否可逆，判别系数矩阵为方阵的线性方程组的解是否唯一，当有唯一解时可以用 Cramer 法则求线性方程组的解，还可以用来求矩阵的特征值，判别二次型的正定性，讨论线性变换的不变量等. 此外，欧氏空间中的一些几何问题(如六面体的体积)也可用行列式加以处理.

2. 关于 n 阶行列式的定义(主教材 5.1 节)

(1) n 阶行列式的三种定义法

n 阶行列式有如下三种定义法：利用逆序的表达式法、递归法和公理化定义. 表达式法是用 n 个处于不同行、不同列的数的乘积的代数和(共有 $n!$ 项，每项的符号由逆序数的奇偶性决定)来定义行列式；递归法是用 n 个 $n-1$ 阶行列式($n=2,3,\cdots$)来定义 n 阶行列式；公理化定义是将 n 阶行列式定义为 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in F^n$ 的 n 重线性反对称函数(主教材定义 5.1 中(1)(2)两条

体现线性性，第 3 条表示反对称性）$D(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，且 $D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=1$（其中$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$为 F^n 的自然基）.

(2) 用公理化定义行列式的好处

行列式的公理化定义就把行列式的基本性质—线性性和反对称性放人定义中，这样再用定义去推证行列式的其他性质，其过程就比较简单，也减少了篇幅.

由于主教材对线性空间、线性映射和内积的概念都用公理化定义，因此对行列式也采用公理化定义是顺理成章的. 这可以使全书具有统一的风格. 学生习惯了公理化定义，对以后自学现代数学的一些内容也大有好处.

利用行列式的公理化定义和向量组的线性相关性的概念，可使很多命题的证明得以简化，例如，上(下)三角矩阵的行列式等于主对角元之积；行列式的 n 个列向量(或行向量)线性相关时，该行列式等于零；n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；$\det \boldsymbol{A}=\det \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；行列式对一列(或一行)的展开定理；上(下)三角块矩阵的行列式等于主对角块矩阵的行列式的乘积等(它们的证明请参阅主教材).

3. 矩阵运算与行列式运算的差别：

矩阵是 m 行 n 列的数表(可以 $m\neq n$)，它是 n 维线性空间到 m 维线性空间的线性映射的数值表示. n 阶行列式(行数必等于列数)是个数，它是 n 重线性反对称函数的数值.

$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$仅当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶方阵时才成立，若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$m\neq n$，不能取$|\boldsymbol{A}|$.

若方阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$；反之不成立，即$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$而 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$ 的例子大量存在.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，矩阵运算与行列式运算的对比如下：

(1) $|\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}|$.

一般 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ （当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不是方阵时，甚至有 $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$ 可乘，而 $\boldsymbol{BA}$ 不可乘).

(2) 若$|\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=0$，则$|\boldsymbol{B}|=0$ 或$|\boldsymbol{A}|=0$.

由 $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

(3) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$，$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$可以表示为 2^n 个行列式之和，$|\boldsymbol{A}|$与$|\boldsymbol{B}|$只是其中的两个.

(4) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}|=2^n|\boldsymbol{A}|$； $\quad |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}|$；

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}$； $\quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

(5) $|\boldsymbol{B}|\neq0$ 时，$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{B}|}$有意义.

在矩阵中不定义除法运算，$\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$没有意义，这是由矩阵乘法不满足交换律所决

定的.

(6) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$.

一般 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵.

(7) 若 $|\boldsymbol{A}|\neq0$,则由 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}|$,即 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|$,可以推出 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{C}|$.

若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,则由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$,不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

若 $|\boldsymbol{A}|\neq0$(即 $\boldsymbol{A}$ 可逆),则由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$,将等式两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 就可推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

(8) $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$ (其中 k 为数,$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵).

因为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,则 $k\boldsymbol{A}=k(a_{ij})_{n\times n}=(k\,a_{ij})_{n\times n}$. 例如,

$$\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ la_{21} & la_{22} \end{vmatrix}=kl\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\xlongequal{k=l}k^2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

(9) 当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维列向量时,

$$n\text{ 阶行列式 }|\boldsymbol{\alpha}_1,k\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=k|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|$$

$$n\text{ 阶矩阵 }[\boldsymbol{\alpha}_1,k\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\neq k[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n].$$

4. 计算(或展开)n 阶行列式(主教材 5.1—5.2 节)

(1) 化为上(下)三角行列式的计算法

用初等行(列)变换,化行列式 D_n 为上(下)三角行列式. 若 D_n 的每行(列)元素之和均为 k,此时,可把第 $2,3,\cdots,n$ 列(行)都加到第一列(行),将第一列(行)的公因子 k 提出来,再将第一行(列)乘 (-1) 分别加到第 $2,3,\cdots,n$ 行(列),使第一列(行)除第一个元素外,全部化为零. 最后对第一列(行)展开或继续化为上(下)三角行列式.

(2) 化为低阶的行列式的计算法

利用性质,将行列式化为某行(列)只剩下一个非零元,然后对该行(列)展开,化为低一阶的行列式来计算. 此法常用于某行(列)已有若干零元的行列式.

以上两种方法是展开行列式的基本方法.

(3) 拆项法

若 D_n 的每行(列)每一元素都是两项之和,利用行列式的线性性质可将其拆成 2^n 个行列式之和. 此法适用于拆出的 2^n 个行列式中绝大部分行列式都是零的情况.

(4) 递推法

一般对 D_n 的第 1 行(列)或第 n 行(列)展开,求得 D_n 和 D_{n-1}(或 D_n 和

D_{n-1}, D_{n-2}）之间的递推关系式，再解递推关系式而得 D_n.

(5) 分块法

分块矩阵的行列式，一般利用分块初等变换化为上(下)三角块行列式，再利用公式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|;\text{和}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} \xlongequal[m\times n\text{ 次}]{\text{逐列对换}} (-1)^{mn} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 m,n 阶矩阵.

(6) 其他方法

如数学归纳法；用范德蒙行列式的结果；加边法(见 5－4 中例 6 证法 3)等也可用来计算某些行列式.

5. 关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式秩(主教材 5.3 节)

(1) $\boldsymbol{A}$ 的行列式秩的定义

$\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数 k，称为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式秩. 或：若 $\boldsymbol{A}$ 存在一个 k 阶子式不等于零，且任何 $k+1$ 阶子式(如果存在)都等于零，则 k 称为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式秩(此时，$\boldsymbol{A}$ 的更高阶的子式也都等于零，所以 k 为 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数).

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的行列式秩的方法

用定义求非零子式的最高阶数；或用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵，于是 $\boldsymbol{A}$ 的行列式秩等于阶梯形矩阵的非零行的行数，从而等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

(3) 若 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})=m<n$，则有：

① n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 一定不可逆(因为 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}=m<n$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数小于 n，因此，$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=0$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵)；

② $\boldsymbol{A}$ 中存在 m 阶子式不等于零；

③ 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，因为 $r(\boldsymbol{A})=m<n$(未知元个数)，求解时有 $n-m$ 个自由未知量，它们可以取任意的常数；

④ 存在非零的 $n\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$(其中 $\boldsymbol{B}$ 的 s 个非零列向量都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的非零解).

6. 伴随矩阵的定义和性质(主教材 5.3 节)

(1) 伴随矩阵的定义

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素 a_{ij} 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 构成的矩阵 $(\boldsymbol{A}_{ij})_{n\times n}$ 的转置，即

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}=(A_{ij})_{n\times n}^{\mathrm{T}}.$$

注意：$\boldsymbol{A}^*$ 的第 i 行第 j 列元素 $(\boldsymbol{A}^*)_{ij}$ 是 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 j 行第 i 列元素 a_{ji} 的代数余子式 A_{ji}，即

$$(\boldsymbol{A}^*)_{ij}=A_{ji}=(-1)^{j+i}M_{ji},$$

其中 M_{ji} 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中划去第 j 行第 i 列后的 $(n-1)$ 阶子行列式.

(2) 伴随矩阵的性质

① $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*,\qquad \boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1};\qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

例如，当 $ad-bc\neq 0$ 时，$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

② $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & 当\ r(\boldsymbol{A})=n; \\ 1, & 当\ r(\boldsymbol{A})=n-1; \\ 0, & 当\ r(\boldsymbol{A})<n-1. \end{cases}$ （证明见第 6 章习题 7）

③ $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ （此式对 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$|\boldsymbol{A}|=0$ 都成立）.

④ 伴随矩阵满足以下运算律（证明见 5-4 中例 13 和例 11）：

$(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$（要求当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆时会证明）；

$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$；

$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$ （可用伴随矩阵的定义证明）；

$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$（$\boldsymbol{A}$ 不可逆时也成立）.

7. Cramer 法则（主教材 5.4）

Cramer 法则：设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{b},（其中\ \boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}};\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}），$$

或
$$x_j=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj})=\frac{D_j}{D},\ j=1,2,\cdots,n.$$

解线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的主要方法仍然是高斯消元法.

Cramer 法则的一个重要应用是证明了：$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵时，齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的必要条件是 $r(\boldsymbol{A})<n$（用反证法证明：若 $r(\boldsymbol{A})=n$，即 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解）.

下面证明 $r(\boldsymbol{A})<n$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分条件：

对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换将其化为阶梯形矩阵 U 时，其非零行的行数 $=r(\boldsymbol{A})<n$，所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

8. 本章的重点和难点

(1) 重点

行列式的定义、性质和计算；行列式对一列(或一行)的展开式；方阵乘积行列式 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；$n$ 阶矩阵可逆的充要条件；用伴随矩阵求逆矩阵的公式；伴随矩阵的性质；矩阵的秩等于矩阵的行列式秩；$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$($\boldsymbol{A}$ 为方阵)有非零解的充要条件.

(2) 难点

n 阶文字行列式的计算；矩阵可逆的充要条件；伴随矩阵的性质；有关矩阵的秩与矩阵的行列式秩的证明.

5-4 例题分析与解答

例 1 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n(>1)$ 阶矩阵，以下各式正确的是(　　).

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$　　(B) $|\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

(C) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|$　　(D) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=2|\boldsymbol{A}|$

(E) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$　　(F) $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

(G) 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{A}|$ 等于 1 或 -1

(H) $|3\boldsymbol{A}^{-1}-2\boldsymbol{A}^{*}|=(3-2|\boldsymbol{A}|)^{n}|\boldsymbol{A}|^{-1}$　($\boldsymbol{A}$ 可逆)

解 由于 $|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{B}|$ 和 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，两个行列式的乘积可交换，所以(B),(C),(E)是正确的.

(G)正确. 因为 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}|$，即 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=1$，$|\boldsymbol{A}|^{2}=1$，所以，$|\boldsymbol{A}|$ 等于 1 或 -1.

(A),(D),(F)不正确：$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=2^{n}|\boldsymbol{A}|\neq 2|\boldsymbol{A}|$；由 $|\boldsymbol{A}|$ 是个数，得 $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|^{n}|\boldsymbol{B}|$.

(H)正确. 因为

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{A}||3\boldsymbol{A}^{-1}-2\boldsymbol{A}^{*}|\\=&|3\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}|\text{(利用 }\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})\\=&|3\boldsymbol{E}-2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|\\=&|(3-2|\boldsymbol{A}|)\boldsymbol{E}|\\=&(3-2|\boldsymbol{A}|)^{n},\end{aligned}$$

所以，
$$|3\boldsymbol{A}^{-1}-2\boldsymbol{A}^{*}|=(3-2|\boldsymbol{A}|)^{n}|\boldsymbol{A}|^{-1}.$$

例 2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶反对称矩阵，n 为奇数. 证明：$\boldsymbol{A}$ 不可逆.

证 因为

$$A^{T}=-A,$$

$$|A|=|A^{T}|=|-A|=(-1)^{n}|A|.$$

当 n 为奇数时，

$$|A|=-|A|,$$

从而有

$$|A|=0,$$

故 A 不可逆.

例 3 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 维向量，且 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=$ ______.

(A) $m+n$　　　　(B) $-(m+n)$

(C) $n-m$　　　　(D) $m-n$

（研究生入学考试试题，1993 年）

解

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2| &= |\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2|\\ &= -|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2|\\ &= -|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\\ &= -m+n,\end{aligned}$$

所以选择(C).

例 4 问

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}=0$$

有几个根?

（研究生入学考试试题，1999 年）

解 解法 1 第一列乘(-1)分别加到第 2,3,4 列，然后再将第 2 列加到第 4 列，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1\\ 2x-2 & 1 & 0 & -1\\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2\\ 4x & -3 & x-7 & -3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0\\ 2x-2 & 1 & 0 & 0\\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1\\ 4x & -3 & x-7 & -6\end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix} \\
&= (x-2-2x+2)(-6x+12+x-7) \\
&= -x(-5x+5) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

所以，$$x=0 \text{ 或 } 1,$$

即方程 $f(x)=0$ 有两个根.

解法 2　将第 3 列加到第 1 列，第 4 列加到第 2 列，然后，第 2 列乘(-1)加到第 1 列，第 3 列乘(-2)加到第 2 列，得

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{vmatrix} 2x-4 & 2x-4 & x-2 & x-3 \\ 4x-4 & 4x-4 & 2x-2 & 2x-3 \\ 7x-8 & 6x-7 & 4x-5 & 3x-5 \\ 9x-7 & 8x-6 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & x-2 & x-3 \\ 0 & 0 & 2x-2 & 2x-3 \\ x-1 & -2x+3 & 4x-5 & 3x-5 \\ x-1 & -2x+8 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

看得出 $f(x)$是二次多项式，且 $x=1$ 时，第 1 列全部为 0，所以，1 是 $f(x)=0$ 的一个根. 观察当 $x=0$ 时，行列式的第 1,2 行相同，所以，0 是 $f(x)=0$ 的又一个根.

解法 3　第 1 行乘(-1)加到第 2 行，然后第 2 行乘(-1),(-3),(-4) 分别加到第 1,3,4 行，再提出第 2 行的公因子 x，得

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ x & x & x & x \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} \\
&= x\begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & x-5 & -5 \\ 0 & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

看得出 $f(x)$是个二次多项式，在复数域上有两个根.

解法 4　把每列看成是两项之和($4x$ 表示成 $4x+0$)，将行列式拆成 2^4 个行列式. 第 1,2,4 列的 x 的系数都相同. 当两列成比例时，行列式等于 0，所以，在

$2^4=16$ 个行列式中，仅当第 3 列取第 1 项，以及第 1,2,4 列分别也取第 1 项的三个行列式是 x 的二次多项式，其余行列式为 x 的一次多项式或常数(包括 0). 因此，$f(x)$是个二次多项式，在复数域上有两个根.

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ a & -a & & & & \\ & a & -a & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & a & -a & \\ & & & & a & -a \end{vmatrix}.$$

解 将第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第一列，再对第一列展开，得

$$D=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} i & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 0 & -a & & & & \\ 0 & a & -a & & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & a & -a & \\ 0 & & & & a & -a \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} i\begin{vmatrix} -a & & & \\ a & -a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & -a \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}a^{n-1}.$$

例 6 证明：

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}=\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right),$$

其中 $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k=a_1a_2\cdots a_n$.

证 证法 1 将 1 写成 $1+0$，将 D 拆成 2^n 个行列式，只有如下的 $n+1$ 个行列式非 0：

$$D=\begin{vmatrix}1&&&\\1&a_2&&\\\vdots&&\ddots&\\1&&&a_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&1&&\\&1&&\\&\vdots&\ddots&\\&1&&a_n\end{vmatrix}+\cdots+$$

$$\begin{vmatrix}a_1&&&1\\&a_2&&1\\&&\ddots&\vdots\\&&&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{a_1}\prod_{k=1}^{n}a_k+\frac{1}{a_2}\prod_{k=1}^{n}a_k+\cdots+\frac{1}{a_n}\prod_{k=1}^{n}a_k+\prod_{k=1}^{n}a_k$$

$$=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

证法 2　将 D 的第 1 行乘(-1) 加到第 $2,3,\cdots,n$ 行，然后将 $2,3,\cdots,n$ 列分别乘$\frac{a_1}{a_i}(i=2,\cdots,n)$都加到第 1 列，得

$$D=\begin{vmatrix}1+a_1&1&\cdots&1\\-a_1&a_2&&\\\vdots&&\ddots&\\-a_1&&&a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i}&1&\cdots&1\\0&a_2&&\\\vdots&&\ddots&\\0&&&a_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i}\right)a_2\cdots a_n$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{k=1}^{n}a_k.$$

*证法 3　在 D 的左边加一列$(1,0,\cdots,0)^{\mathrm T}$，上面加一行$(1,1,\cdots,1)$，得到 $n+1$阶行列式 D_1（此时 $D_1=D$）. 将 D_1 的第 1 行乘(-1) 加到其余各行，然后将第 i 列乘$\frac{1}{a_i}(i=2,3,\cdots,n+1)$加到第 1 列，再对第 1 列展开，即得

$$D=D_1=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1+a_1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&1&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(i)-(1)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

例 7 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(1,-2,1)$，则 $\boldsymbol{B}$ = ______.

（研究生入学考试试题，1998 年）

解 先从矩阵方程中解出 $\boldsymbol{B}$(即用 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 表示 $\boldsymbol{B}$)，然后计算 $\boldsymbol{B}$.

由已知方程得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=-8\boldsymbol{E},$$

即

$$(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=-8\boldsymbol{E}. \tag{1}$$

由于 $|\boldsymbol{A}|=-2$，$\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{A}^{-1}=\mathrm{diag}\left(1,-\frac{1}{2},1\right)$，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=(-2,1,-2)$，于是，$\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E}=\mathrm{diag}(-4,-1,-4)$ 也可逆，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=-8(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \qquad (2)\\ &=-8\mathrm{diag}\left(-\frac{1}{4},-1,-\frac{1}{4},\right)\cdot\mathrm{diag}\left(1,-\frac{1}{2},1\right)\\ &=\mathrm{diag}(2,-4,2)\\ &=2\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

如果题目出成：已知 $\boldsymbol{A}$ 可逆．$\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$．此时，可由(1)式得(2)式，再利用 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})^{-1}$ 即得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=-8[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E})]^{-1} \qquad (\text{利用 } \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})\\ &=-8(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}\\ &=-8(-2\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}\\ &=4(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\\ &=4[\mathrm{diag}(2,-1,2)]^{-1}\end{aligned}$$

$$=4\operatorname{diag}\left(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\boldsymbol{A}.$$

例 8 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则(　　).

(A) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$　　(B) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|$

(C) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n$　　(D) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}^{-1}|$

(研究生入学考试试题，1990 年)

解 选(A). 利用

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},$$

得

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|,$$

于是

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，所以，

$$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}.$$

例 9 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{bmatrix},$$

则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$ ______.

(研究生入学考试试题，1995 年)

解 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，得

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$$
$$=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0.1&0&0\\0.2&0.2&0\\0.3&0.4&0.5\end{bmatrix}.$$

例 10 设 $\boldsymbol{A}$ 为非零方阵，当 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 时，证明：$|\boldsymbol{A}|\neq0$.

(研究生入学考试试题，1995 年)

证 证法 1　由 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 知 $a_{ij}=A_{ij}$，因为 $\boldsymbol{A}$ 非零，存在 $a_{ij}\neq0$，对 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行展开，得

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\neq0.$$

证法 2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，当 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$时，由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{in}^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A},$$

因为 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，所以，存在 $a_{ij}\neq 0$，因此

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\neq 0.$$

证法 3　用反证法．假设$|\boldsymbol{A}|=0$，利用 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n]$，则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n]$$

$$=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{O}.$$

等式两边第(i,i)元相等$(i=1,2,\cdots,n)$，即

$$\forall\, i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2=0,$$

得 $$a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n),$$
所以,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,矛盾,因此$|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

例 11 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异($n\geqslant 2$),则( ).

(A) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$ (B) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$

(C) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$ (D) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$

(研究生入学考试试题,1996 年)

解 选(C),

证法 1 利用 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,得
$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\text{和}(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A},$$
在 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\ \boldsymbol{A}^{-1}$中以 $\boldsymbol{A}^*$代 $\boldsymbol{A}$,并代入$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$,得
$$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}^*|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

证法 2 利用 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,得
$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\ \boldsymbol{A}^{-1},$$
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^*)^*&=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^*\\&=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}|(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\\&=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{A}|^{-1}|\boldsymbol{A}|^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\\&=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

例 12 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为
$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix},$$
且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$,求 $\boldsymbol{B}$.

(研究生入学考试试题,2000 年)

解 由 $$|\boldsymbol{A}^*|=8=|\boldsymbol{A}|^{4-1},$$
得 $$|\boldsymbol{A}|=2.$$
再由
$$\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E},$$
得
$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{BA}^{-1}=3\boldsymbol{E}.\tag{1}$$
由于
$$\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E},$$
所以,
$$\boldsymbol{A}=2(\boldsymbol{A}^*)^{-1}.$$

这是主对角元为 $2,2,2,\frac{1}{4}$ 的下三角矩阵(因为 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$ 是主对角元为 $1,1,1,\frac{1}{8}$ 的下三角矩阵),所以,

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=(2-1)^3\left(\frac{1}{4}-1\right)=-\frac{3}{4}\neq 0,$$

因此,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆. 于是,由(1)式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=3(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}\\&=3(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\\&=3[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})]^{-1}\\&=3(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}.\end{aligned}\tag{2}$$

解法 1　将 $\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*$ 代入(2)式得

$$\boldsymbol{B}=3\left(\boldsymbol{E}-\frac{\boldsymbol{A}^*}{2}\right)^{-1}=3\left(\frac{2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*}{2}\right)^{-1}=6(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)^{-1},$$

所以,

$$\begin{aligned}B&=6\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{bmatrix}^{-1}\\&=6\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

解法 2　先求 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$,得

$$\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=2(\boldsymbol{A}^*)^{-1},$$

再求 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$,然后算出

$$\boldsymbol{B}=3(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}.$$

这里要计算两个逆矩阵,比解法 1 麻烦一些.

$$\boldsymbol{B}=3(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$$

$$
=3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{-3}{4}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -1\end{bmatrix}.
$$

例 13 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆,证明:

(1) $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$;

(2) $(\boldsymbol{A}^{-1})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{-1}$;

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$.

证 由 $\boldsymbol{C}^{-1} = |\boldsymbol{C}|^{-1}\boldsymbol{C}^*$,得

$$
\boldsymbol{C}^* = |\boldsymbol{C}|\boldsymbol{C}^{-1},
$$

将其当成公式,分别令 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB},\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,即得:

(1)
$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{AB})^* &= |\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1}\\
&= |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\\
&= |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\\
&= \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*;
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}^{-1})^* &= |\boldsymbol{A}^{-1}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\\
&= |\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}\\
&= (|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\\
&= (\boldsymbol{A}^*)^{-1};
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* &= |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\\
&= |\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\\
&= (|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\\
&= (\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

例 14 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,且满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$ 和 $|\boldsymbol{A}|<0$,求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|$($\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位阵).

(研究生入学考试试题,1995 年)

解
$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}| &= |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\\
&= |\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})|\\
&= |\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|\\
&= |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|,
\end{aligned}
$$

即
$$|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|(1-|\boldsymbol{A}|)=0,$$
由于$|\boldsymbol{A}|<0$, $1-|\boldsymbol{A}|>0$,所以,
$$|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|=0.$$

例 15 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,$n$ 为正整数,则$|a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^n|=$____.

解 由于$(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=2$,所以,
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\&=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$
由归纳法得
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=2^{n-1}\boldsymbol{A}\\&=2^{n-1}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}[1\quad 0\quad -1]\\&=\begin{vmatrix}2^{n-1}&0&-2^{n-1}\\0&0&0\\-2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}|a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^n|&=\begin{vmatrix}a-2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&a&0\\2^{n-1}&0&a-2^{n-1}\end{vmatrix}\\&=a[(a-2^{n-1})^2-(2^{n-1})^2]\\&=a^2(a-2^n).\end{aligned}$$

例 16 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶方阵,且$|\boldsymbol{A}|=1$,$|\boldsymbol{B}|=2$,求$\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{A}\\4\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\end{vmatrix}$.

解 将$-\boldsymbol{A}$所在的第 4,5 列与第 1,2,3 列逐列对换,共对换 6 次,即得
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{A}\\4\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\end{vmatrix}&=(-1)^{2\times3}\begin{vmatrix}-\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&4\boldsymbol{B}\end{vmatrix}\\&=(-1)^6|-\boldsymbol{A}||4\boldsymbol{B}|\\&=(-1)^2 4^3|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\\&=128.\end{aligned}$$

例 17 已知 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵.证明:行列式
$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|.$$

证 这是 2×2 分块矩阵的行列式.对这个分块矩阵做分块的倍加初等行变

换和列变换，使之出现 $A+B$ 和 $A-B$. 为此，只要将第 1 行加到第 2 行；再将第 2 列乘(-1)加到第 1 列，得到上三角块矩阵，即

$$\begin{bmatrix} E & O \\ E & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & O \\ -E & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{bmatrix}.$$

上面两式两边取行列式. 由于

$$\begin{vmatrix} E & O \\ E & E \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E & O \\ -E & E \end{vmatrix}=1,$$

所以，

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}&=\begin{vmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{vmatrix}\\&=|A-B||A+B|.\end{aligned}$$

例 18 设 A 为 n 阶非奇异矩阵，α 为 n 维列向量，b 为常数，记分块矩阵

$$P=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\alpha^{T}A^{*} & |A| \end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{T} & b \end{bmatrix},$$

其中 A^{*} 是矩阵 A 的伴随矩阵，I 为 n 阶单位矩阵.

(1) 计算并化简 PQ；

(2) 证明：矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^{T}A^{-1}\alpha\neq b$.

（研究生入学考试试题，1997 年）

解 (1) 利用 $A^{*}A=|A|I$ 和 $A^{*}=|A|A^{-1}$，得

$$\begin{aligned}PQ&=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\alpha^{T}A^{*} & |A| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{T} & b \end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^{T}A^{*}A+|A|\alpha^{T} & -\alpha^{T}A^{*}\alpha+|A|b \end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ 0^{T} & |A|(b-\alpha^{T}A^{-1}\alpha) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(2)
$$|P|=|I||A|=|A|\neq 0,$$

由题(1)得

$$|PQ|=|P||Q|=|A||A|(b-\alpha^{T}A^{-1}\alpha),$$

于是，
$$|Q|=|A|(b-\alpha^{T}A^{-1}\alpha).$$

因为$|A|\neq 0$，所以，Q 可逆（即$|Q|\neq 0$）的充分必要条件是

$$b-\alpha^{T}A^{-1}\alpha\neq 0,$$

即 $$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b.$$

如果本题没有(1),只有(2),其证明如下:对 $\boldsymbol{Q}$ 做初等倍加变换,将其化为上三角块矩阵,即左乘初等倍加分块阵

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & 1\end{bmatrix},$$

此时, $$|\boldsymbol{P}_1|=1.$$

于是, $$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix},$$

从而,

$$|\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{A}|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})\neq 0(\text{即 } \boldsymbol{Q} \text{ 可逆})$$

的充要条件是

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b.$$

例 19 试证明 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$D=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{vmatrix}\neq 0.$$

(研究生入学考试试题,1991 年)

解 令 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\alpha}_n]$,则

$$D=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2,$$

所以,$\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,即 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 的充分必要条件是 $D\neq 0$.

5-5 习题提示与解答

1. 计算下列行列式:

(4) $D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & i & -1 & i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -i & -1 & i\end{vmatrix}$; (6) $D_6=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda+2 & -1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda+2 & -1\\ -1 & -1 & -1 & \lambda+2\end{vmatrix}$;

(7) $D_7=\begin{vmatrix}1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2\\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2\\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2\\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2\end{vmatrix}$; (8) $D_8=\begin{vmatrix}3 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{vmatrix}$.

注:以(i)表示第 i 行,$[j]$表示第 j 列.$k(i)$表示第 i 行乘以 k;$k(i)+(j)$表示第 i 行乘以 k 加到第 j 行.

解 (4)将第 3 列加到第 1 列上,再用(-1)乘第 4 列加到第 2 列上,而后用(-1)乘第 3 行加到第 1 行,对第 1 行展开,再对第 2 列展开,得

$$D_4=-8i;$$

(6) 第 2,3,4 列都加到第 1 列,提出第 1 列的公因子 $\lambda-1$,再将第 1 行乘(-1)分别加到第 2,3,4 行,得到上三角行列式,得

$$D_6=(\lambda-1)(\lambda+3)^3;$$

(7) 用(-1)乘第 3 列加到第 4 列上,再用(-1)乘第 2 列加到第 3 列上,用(-1)乘第 1 列加到第 2 列上,而后用(-1)乘第 3 列加到第 4 列上,最后用(-1)乘第 2 列加到第 3 列上,两列相同,得

$$D_7=0;$$

(8) 做行变换,将其化为上三角行列式,得

$$D_8=31;$$

4. 证明下列恒等式:

(1) $$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}=(1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

(2) $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0;$$

(3) $$\begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^n+\sum_{k=1}^{n}a_kx^{n-k};$$

(4) $$\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\cos n\theta \quad (n\text{ 阶行列式}).$$

证 (1) 对第 1 列和第 2 列拆项,拆成 4 个行列式,其中两个等于零,得

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (1-x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(2) 用(-1)乘第 3 列加到第 4 列上，再用(-1)乘第 2 列加到第 3 列上，用(-1)乘第 1 列加到第 2 列上，而后用(-1)乘第 3 列加到第 4 列上，最后用(-1)乘第 2 列加到第 3 列上，两列相同，得

$$D=0.$$

(3) 用数学归纳法，$n=1,2$ 成立，假设对 $n-1$ 阶的行列式命题成立，证明 n 阶成立时，对第 1 列展开或对最后一行展开即可.

(4) 用数学归纳法，$n=1,2$ 成立，假设对小于 n 阶的行列式命题成立，证明对 n 阶行列式D_n成立时，对最后一列展开，得到递推公式，再把归纳假使的结果代入，用积化和差公式，得

$$\begin{aligned} D_n &= 2\cos\theta\, D_{n-1} - D_{n-2} \\ &= 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta \\ &= \cos n\theta + \cos(n-2)\theta - \cos(n-2)\theta \\ &= \cos n\theta. \end{aligned}$$

5. 利用 Vandermonde 行列式，展开下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ a^2 & (a-1)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_2+a_3 & \cdots & a_{n-1}+a_n & a_n+a_1 \\ a_1^2+a_2^2 & a_2^2+a_3^2 & \cdots & a_{n-1}^2+a_n^2 & a_n^2+a_1^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^n+a_2^n & a_2^n+a_3^n & \cdots & a_{n-1}^n+a_n^n & a_n^n+a_1^n \end{vmatrix}$.

解 (1) Vandermonde 行列式中，

$$x_1=a,\quad x_2=a-1,\quad x_3=a-2,\cdots,x_{n+1}=a-n,$$

则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j-x_i) \\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}[a-(j-1)-a+(i-1)] \end{aligned}$$

$$= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (i-j).$$

(2) 利用行列式的线性性,将其拆项为每个元素只有一个数,可拆为 2^n 个行列式之和.但其中只有两个非零的行列式,一个是每列都取第一项;另一个是每列都取第二项.后一个把最后一列与相邻前一列对换,一直换到第一列为止,共对换 $n-1$ 次,再把两个行列式中每列的公因子提出来,就得到两个 Vandermonde 行列式,即

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n-1}^n & a_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 & a_1^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2^n & a_3^n & \cdots & a_n^n & a_1^n \end{vmatrix}$$

$$= [1+(-1)^{n-1}] \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n-1}^n & a_n^n \end{vmatrix}$$

$$= [1+(-1)^{n-1}] \prod_{i=1}^{n} a_i \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= [1+(-1)^{n-1}] \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

6. 设

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

(1) 用递推公式计算行列式 D;

(2) 利用定义 5.1 中的(2),将 D 表示为 2^n 个行列式之和,并算出结果.

解 (见 5.4 节例 6).

*7. Fibonacci 数列 $\{F_n\}$:1,2,3,5,8,13,21,…满足递推关系:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, & n \geqslant 3; \\ F_1 = 1, & F_2 = 2. \end{cases}$$

证明:

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ -1 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (n\text{ 阶三对角行列式}).$$

证 这里是要证明：n 阶行列式 F_n 的值等于 Fibonacci 数列中的第 n 个数.行列式 $F_1=1, F_2=2$ 是显然的.当 $n\geqslant 3$ 时，对 F_n 的第 1 列展开，得

$$F_n = 1\cdot F_{n-1} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & & \\ -1 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1\text{阶}} \quad (\text{对第 1 行展开})$$

$$= F_{n-1} + F_{n-2}.$$

求 F_n 的方法可以直接按上述递推关系递推，或用下面的方法：

令

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix},$$

由

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{n-1} = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_{n-2} = \cdots = \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}_1,$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

上面补充规定 $F_0=1$ 是合理的，因为满足

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1+1=2.$$

计算出 $\boldsymbol{A}^{n-1}$，即可以求出 F_n.学了第 7 章，容易求得

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{A}^{n-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{bmatrix} \lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n \end{bmatrix},$$

其中

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

于是，

$$F_n = \frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2} = \lambda_1^n + \lambda_1^{n-1}\lambda_2 + \cdots + \lambda_1\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^n.$$

对任何正整数 n，按上式求得的 F_n 都是正整数，这可能出乎人们的预料，然而这是准确无误的.读者不难检验

$$F_2 = 2, F_3 = 3.$$

8. 利用 5 - 2 例 4 的结论，计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_3(\mathbf{R}),\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_4(\mathbf{R})$，已知：$|\boldsymbol{A}|=-6,|\boldsymbol{B}|=4$，计算

$$D=\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \frac{1}{2}\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是任意的 4×3 矩阵.

解 (1) 将第 2 列和第 3 列对换，则

$$原式=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-35.$$

(3) 将 $\boldsymbol{A}$ 所在的三列与 $\boldsymbol{B}$ 所在的四列逐列对换，共对换 $3\times 4=12$ 次，得

$$\begin{aligned} D&=(-1)^{3\times 4}\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & -\boldsymbol{B} \end{vmatrix} \\ &=\left(\frac{1}{2}\right)^3|\boldsymbol{A}|(-1)^4|\boldsymbol{B}| \\ &=\frac{1}{8}\times(-6)\times 4 \\ &=-3. \end{aligned}$$

9. 计算下列行列式：

(1) $D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}$；

*(2) $D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

解 (1) 把第 1 行和第 2 行对换后，再将第 1 行乘(-1) 加到其余各行，第 1 行的公因子 2 提出来，然后，第 1 行加到第 2 行，得上三角行列式，即

$$D=-2\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\-1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n-3&0\\0&0&\cdots&0&n-2\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n-3&0\\0&0&\cdots&0&n-2\end{vmatrix}$$

$$=-2(n-2)!.$$

(2) 将第 2,3,…,n 列都加到第 1 列,提出公因子 $\frac{1}{2}n(n+1)$,再依次将第 $n-1$ 行乘(-1) 加到第 n 行,…,第 2 行乘(-1) 加到第 3 行,第 1 行乘(-1) 加到第 2 行,然后对第 1 列展开,得到一个 $n-1$ 阶行列式,它的副对角元为 $1-n$,其余元素均为 1.再把它的各列加到第 1 列,并把它的第 1 行乘(-1) 加到其余各行,得

$$D=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&2&\cdots&n-1&n\\1&3&\cdots&n&1\\1&4&\cdots&1&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&1&1&\cdots&1-n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&1&1-n&\cdots&1\\0&1-n&1&\cdots&1\end{vmatrix}_n$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1-n\\1&1&\cdots&1-n&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1-n&\cdots&1&1\\1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\\ 0 & 0 & \cdots & -n & n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & -n & \cdots & 0 & n\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n\end{vmatrix}_{n-1}$$

将上式先对第 1 列展开,得到一个 $n-2$ 阶行列式,再将它对最后一行展开,得

$$D=\frac{-n(n+1)}{2}n\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -n\\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0\\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}_{n-3}$$

$$=-\frac{n^2(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-3)(n-4)}{2}}(-n)^{n-3}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{(n+1)n^{n-1}}{2}.$$

10. 证明下列等式:

$$^*(1)\ U_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i);$$

$$^*(2)\ D_n=\begin{vmatrix}a & c & c & \cdots & c\\ b & a & c & \cdots & c\\ b & b & a & \cdots & c\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}=\frac{b(a-c)^n-c(a-b)^n}{b-c},$$

其中 $b\neq c$,等式左端是 n 阶行列式.

证 (1) 证法 1 仿照范德蒙行列式 V_n 的证明方法,用数学归纳法. $n=2$ 时成立,假设 $n-1$ 阶行列式命题成立,证明 n 阶行列式也成立时,将第 $n-1$ 行乘 $(-x_1^2)$ 加到第 n 行,然后依次从第 $n-2$ 行起直到第 1 行,分别乘 $(-x_1)$ 加到后一行,再对第一列展开,提出公因子并拆成两个行列式之和,得

$$U_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-3}(x_2-x_1) & x_3^{n-3}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-3}(x_n-x_1) \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2^2-x_1^2) & x_3^{n-2}(x_3^2-x_1^2) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n^2-x_1^2) \end{vmatrix}$$

$$=\left[\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-3} & x_3^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ x_2^{n-2}(x_2+x_1) & x_3^{n-2}(x_3+x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n+x_1) \end{vmatrix}$$

$$=\left[\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-3} & x_3^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}+$$

$$\left[\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\right]x_1\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

上式第一项是 $x_2,\cdots,x_n$ 的行列式 U_{n-1}，第二项是 $x_2,\cdots,x_n$ 的 $n-1$ 阶范德蒙行列式. 由归纳假设得

$$U_n=\left[\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\right]\left(\sum_{i=2}^{n}x_i\right)\left[\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\right]+\left[\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\right]x_1\left[\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\right]$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left[\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\right].$$

证法 2　添加一行和一列得到 $n+1$ 阶范德蒙行列式，再利用范德蒙行列式公式. 令

$$V_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & x_n^{n} & y^{n} \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)\prod_{i=1}^{n}(y - x_i).$$

对 V_{n+1} 的最后一列展开，其展开式的 y^{n-1} 项的系数为 $(-1)^{n+(n+1)}U_n$，而上式右边的

$$\prod_{i=1}^{n}(y - x_i) = (y - x_1)(y - x_2)\cdots(y - x_n)$$

$$= y^n + (-x_1 - x_2 - \cdots - x_n)y^{n-1} + \cdots + (-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n,$$

所以，上面 V_{n+1} 的等式右边的 y^{n-1} 项系数为

$$\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)\sum_{i=1}^{n}(-x_i),$$

因此

$$(-1)^{n+(n+1)}U_n = -\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i),$$

所以，
$$U_n = \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i).$$

(2) 若 $b = c$，则每行行和都相等，把第 2，3，…，n 列都加到第 1 列，提出公因子 $a+(n-1)c$，再将第 1 行乘 (-1) 加到其余各行，得到上三角行列式，于是

$$D_n = [a+(n-1)c]\begin{vmatrix} 1 & c & c & \cdots & c \\ 1 & a & c & \cdots & c \\ 1 & c & a & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)c]\begin{vmatrix} 1 & c & c & \cdots & c \\ 0 & a-c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)c](a-c)^{n-1}.$$

若 $b \ne c$，第 i 行乘 (-1) 加到第 $i-1$ 行（i 依次取 $n, n-1, \cdots, 2$），再对第 1 列展开，

$$D_n = \begin{vmatrix} a-b & c-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & c-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c-a \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)D_{n-1}+(-1)^{1+n}b(c-a)^{n-1}. \tag{1}$$

由 $D_n=D_n^{\mathrm{T}}$，而 D_n^{T} 是把 D_n 中的 b 与 c 互换，所以得

$$D_n^{\mathrm{T}}=(a-c)D_{n-1}+(-1)^{1+n}c(b-a)^{n-1}. \tag{2}$$

在(1)式和(2)式中消去 D_{n-1}，解得

$$D_n=\frac{b(a-c)^n-c(a-b)^n}{b-c}.$$

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶反对称矩阵. 证明：当 n 为奇数时，齐次线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

证 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆得

$$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B}).$$

而当 n 为奇数时，n 阶反对称矩阵的行列式为零(见 5.4 节例 2)，所以，

$$r(\boldsymbol{B})<n,$$

于是，

$$r(\boldsymbol{AB})<n,$$

因此，$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解(此题中条件“$\boldsymbol{A}$ 对称”是多余的).

13. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in \boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$，判断下列命题是否正确？如正确，证明之；如不正确，举反例：

(1) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆可逆，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也可逆；

(2) 若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆可逆；

(3) 若 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆不可逆；

(4) 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{A}|$ 等于 1 或 -1；

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$；

(6) 若 $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵(即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$)，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}|=1$；

(7) 若 $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵(即 $k\in\mathbf{N}^*$，使 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$)，则 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

解 (1) 不正确. 如 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{E}$.

(2) 不正确. 如 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

(3) 不正确. 例子同(2).

(4) 正确. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{E}|=1,$$

所以 $|\boldsymbol{A}|$ 等于 1 或 -1.

(5)(6)(7) 都正确(证明略去).

***14**. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 n 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 且 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，证明：

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|.$$

证 对行列式中的 2×2 分块矩阵做分块初等变换将其化为上三角块矩阵，即

$$\begin{bmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix},$$

所以,

$$\begin{vmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}$$
$$=|A||D-CA^{-1}B|,$$

于是, $$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|=|AD-ACA^{-1}B|.$$

再由 $AC=CA$,可得

$$ACA^{-1}=C,$$

所以,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

*15. 证明:$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}=|E_n-AB|=|E_m-BA|$.

证 对左端行列式的 2×2 分块矩阵做分块初等行、列变换,将其分别化为上三角块矩阵,再两边取行列式,即

$$\begin{bmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_m & B \\ O & E_n-AB \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_m-BA & B \\ O & E_n \end{bmatrix},$$

所以,

$$\begin{vmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E_m & B \\ O & E_n-AB \end{vmatrix}=|E_n-AB|,$$

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E_m-BA & B \\ O & E_n \end{vmatrix}=|E_m-BA|,$$

于是, $$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}=|E_n-AB|=|E_m-BA|.$$

如果题目出为:"$A\in M_{n\times m}(\mathbf{R}),B\in M_{m\times n}(\mathbf{R})$,证明:$|E_n-AB|=|E_m-BA|$".这是一个很难的题.这里提供了简便的证明方法.

*16. 设 $A,B\in M_n(\mathbf{R}),\lambda\in F$,证明:

$$|\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|.$$

证 若 $\lambda=0$,则

$$|-AB|=|-BA|=(-1)^n|A||B|.$$

若 $\lambda\neq 0$,类似于习题 15,对分块矩阵

$$\begin{bmatrix}\lambda E & B\\ A & E\end{bmatrix}$$

做两种分块初等行变换,将其分别化为上、下三角块矩阵,再两边取行列式,即

$$\begin{bmatrix}E & -B\\ O & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda E & B\\ A & E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda E-BA & O\\ A & E\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}E & O\\ -\frac{1}{\lambda}A & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda E & B\\ A & E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda E & B\\ O & E-\frac{1}{\lambda}AB\end{bmatrix},$$

所以,

$$\begin{vmatrix}E & -B\\ O & E\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda E & B\\ A & E\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda E-BA & O\\ A & E\end{vmatrix}=|\lambda E-BA|,$$

$$\begin{vmatrix}E & O\\ -\frac{1}{\lambda}A & E\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda E & B\\ A & E\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda E & B\\ O & E-\frac{1}{\lambda}AB\end{vmatrix}=|\lambda E|\left|E-\frac{1}{\lambda}AB\right|,$$

于是, $$|\lambda E-BA|=|\lambda E|\left|E-\frac{1}{\lambda}AB\right|=|\lambda E-AB|.$$

18. 已知对称轴平行于 y 轴的抛物线过三点:$(1,-1)$,$(2,1)$,$(-1,7)$,试求该抛物线的方程.

解 设抛物线方程为

$$y=a+bx+cx^2.$$

将三点的坐标代入,得到线性方程组,解出 a,b,c,得到

$$y=1-4x+2x^2.$$

19. 圆的一般方程为$(x^2+y^2)+ax+by+c=0$,已知圆过三点:$(6,-1)$,$(4,3)$,$(-3,2)$,求该圆的一般方程.

解 解法 1 将三点的坐标代入,得到非齐次线性方程组

$$\begin{cases}c-b+6a=-37,\\ c+3b+4a=-25,\\ c+2b-3a=-13.\end{cases}$$

用高斯消元法,将增广矩阵化为阶梯形矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & 6 & -37\\ 1 & 3 & 4 & -25\\ 1 & 2 & -3 & -13\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & 6 & -37\\ 0 & 4 & -2 & 12\\ 0 & -1 & -7 & 12\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & -23\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right].$$

第 1,2,3 列对应的未知量为 c,b,a,所以,

$$c=-23, b=2, a=-2,$$

所求圆的方程为

$$x^2+y^2-2x+2y-23=0.$$

解法 2　将上面的非齐次线性方程组与圆的一般方程一起改写为齐次线性方程组

$$\begin{cases} c-b+6a+37d=0, \\ c+3b+4a+25d=0, \\ c+2b-3a+13d=0, \\ c+by+ax+(x^2+y^2)d=0. \end{cases}$$

由于这个齐次线性方程组有非零解($d=1$),所以 c,b,a,d 的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 & 37 \\ 1 & 3 & 4 & 25 \\ 1 & 2 & -3 & 13 \\ 1 & y & x & x^2+y^2 \end{vmatrix}=0.$$

展开左边的行列式,得

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 & 37 \\ 0 & 4 & -2 & -12 \\ 0 & -1 & -7 & -12 \\ 0 & y-2 & x+3 & x^2+y^2-13 \end{vmatrix}=0.$$

对前三行做初等行变换,可化为下面的情况:

$$-30\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & y-2 & x+3 & x^2+y^2-13 \end{vmatrix}=0,$$

再将第 1,2,3 列分别乘 -23,2 和 -2 加到第 4 列,然后,对第 4 列展开,即得

$$x^2+y^2-2x+2y-23=0.$$

第6章　线性方程组与线性几何

6－1　学时安排的建议

表6－1

节	教学内容	复习页数
25	6.1 齐次线性方程组，6.2 非齐次线性方程组	193—200
26	6.2 非齐次线性方程组，6.3 线形图形的几何问题	200—209

6－2　基本要求

1. 理解齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$（$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵）有非零解的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})<n$；解空间 $N(\boldsymbol{A})$ 的维数 $\dim N(\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{A})$.

2. 能熟练求出 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系（$N(\boldsymbol{A})$ 的基）$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_p$（$p=n-r(\boldsymbol{A})$）. 理解 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一般解是基础解系的线性组合. 即

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{X}_p.\quad (k_1,k_2,\cdots,k_p\text{为任意常数})$$

知道解空间 $N(\boldsymbol{A})$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的行空间 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 互为正交补：$N(\boldsymbol{A})=(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}))^{\perp}$

3. 会证明和应用下列结果：若 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}(F)$，$\boldsymbol{B}\in M_{n\times s}(F)$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

4. 理解非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件是 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})$，或 $\boldsymbol{b}$ 可以用 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示.

当 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=n$（$\boldsymbol{A}$ 的列数）时，有唯一解；

当 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})<n$ 时，有无穷多解，一般解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+\overline{\boldsymbol{X}}$，其中 $\boldsymbol{X}_0$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任一个解，$\overline{\boldsymbol{X}}$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一般解.

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任意两个解 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 的差（$\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2$）是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

5. 会分析平面之间（或直线之间，或平面与直线之间）是否平行、相交、垂直、重合，会判别两直线是共面的还是异面的.

6. 会求点到平面或直线的距离；平面之间（或直线之间，或平面与直线之间）的距离与夹角.

6－3 内容综述与分析

1. 本章的中心问题及其与其他章的关系

本章的中心问题是讨论线性方程组解的基本理论：齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的条件和解的结构；非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解(唯一解或有无穷多个解)的条件和解的结构. 在第 1 章中虽然已经讲过如何用高斯消元法求线性方程组的解，但其中还有很多重要问题有待深入研究. 例如，对 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$做初等行变换将其化为阶梯形矩阵$[\boldsymbol{U},\boldsymbol{d}]$时，其中的 d_{r+1} 什么情况下(即增广矩阵满足什么条件时)必等于零(即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解)；对于方程组采用不同的消元步骤(即对增广矩阵做不同的初等行变换)，将其化为阶梯形矩阵时，其非零行的行数是否相同，即求解时自由未知量个数是否相同；自由未知量一般可以有不同的取法，从而解的表示形式有所不同，那么它们全部解的集合是否相同呢？这些深层次的问题不搞清楚，即使会用高斯消元法求线性方程组的解，也不能说对线性方程组的解的问题有透彻的认识.

在第 4 章中讲过，矩阵是线性映射的数值表示，也就是：如果 $\dim V_1(F)=n,\dim V_2(F)=m$，并且给定 V_1,V_2，的基为 B_1,B_2，则线性映射 $\sigma\in L(V_1,V_2)$与矩阵 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}$一一对应. 因此，线性映射 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}$(其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 关于基 B_1,B_2，的坐标分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_{B_1}=\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in F^n,\boldsymbol{\beta}_{B_2}=\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}\in F^m.$$

与非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 相对应. 所以，给定 $\boldsymbol{b}$ 求其解 $\boldsymbol{X}$，就是给定线性映射 σ 的像 $\boldsymbol{\beta}$ 求其原像 $\boldsymbol{\alpha}$，即

$$\sigma^{-1}(\boldsymbol{\beta})=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}_{B_1}=\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}\text{ 是 }\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\text{ 的解}\}.$$

同理，求齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，就是求 σ 关于零向量 $\boldsymbol{0}_2$ 的原像，即 σ 的核

$$\operatorname{Ker}\sigma=\sigma^{-1}(\boldsymbol{0}_2)=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}_{B_1}=\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}\text{ 是 }\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}\text{ 的解}\}.$$

于是，利用线性映射的有关理论，例如，维数公式

$$r(\sigma)+\dim(\operatorname{Ker}\sigma)=\dim V_1=n \tag{1}$$

和秩(σ)=秩$(\boldsymbol{A})$，以及初等变换不改变矩阵的秩等结果，就能顺利解决线性方程组的上述深层次的问题. 例如，由秩(σ)=秩$(\boldsymbol{A})$及 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间 $N(\boldsymbol{A})$对应 σ 的核 $\operatorname{Ker}\sigma$ 和(1) 式即得，解空间 $N(\boldsymbol{A})$的维数

$$\dim N(\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{A})=n-r.$$

用高斯消元法求齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解时，对 $\boldsymbol{A}$ 不论做怎样的初等行变换将其化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{U}$ 时，$\boldsymbol{U}$ 的非零行的行数必是矩阵的秩 r，所以，自由未

知量个数必为 $n-r$. 至于自由未知量如何取任意常数,及如何求解空间 $N(\boldsymbol{A})$ 的基 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}$,可参见 6-3 中的 4 所述. 于是,解空间中任一解向量,即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一般解,就可以表示为

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{X}_{n-r}$$

(其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数). 这就是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解的结构.

线性方程组是线性代数历史上最早研究的一个问题. 在线性代数的很多问题里都要用到线性方程组的求解. 例如,讨论向量组的线性相关性;向量在基下的坐标等问题都离不开线性方程组的求解. 再如以后求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间,就是求以特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$($\lambda$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值)为系数矩阵的齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解空间.

解析几何是用代数方法研究几何问题. 在空间解析几何中,研究线性图形(平面和直线)的位置关系(平行、重合、相交等问题)也可以用线性方程组的解的理论予以阐明. 至于线性图形的度量关系(距离、夹角、垂直、和六面体体积等问题)则要用 $\mathbf{R}^3$ 中向量的内积与混合积.

2. 线性方程组的三种表示法(主教材 6.1-6.2 节)

线性方程组有三种表示法(它们各有用处),都应该熟悉.

(1) 方程组表示法

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

(2) 矩阵表示法

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

(3) 向量方程表示法

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_j=[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}]^{\mathrm{T}},j=1,2,\cdots,n$.

3. 齐次线性方程组有非零解的充要条件(主教材 6.1 节)

$(0,\cdots,0,1)$,代入同解方程组 $UX=0$ 中,相应地得到的 $X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$,为方程组的基础解系.

② 将 $n-r$ 个自由未知量分别取任意常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$,代入同解方程组 $UX=0$,求得方程组 $AX=0$ 的通解(全部解),将通解表示为式(1)的形式,则 $X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的一组基础解系.

5. 非齐次线性方程组有解判别定理和解的结构(主教材 6.2 节)

非齐次线性方程组 $AX=b$(其中 A 是 $m\times n$ 矩阵)不一定有解.有解时,解集合也不是 $\mathbf{R}^n$ 的线性子空间(因为解集合对向量的加法和数乘不封闭).

(1) $AX=b$ 有解判别定理

$AX=b$ 有解的充要条件是增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩,即 秩$(A,b)=$秩$(A)=r$,当 $r=n$ 时,有唯一解;$r<n$ 时,有无穷多个解.

$Ax=b$ 有解的另一个充要条件是:向量 b 可由 A 的列向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$线性表示.

(2) 非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解的结构

$AX=b$ 的一般解为

$$X=\overline{X}+X,$$

其中$\overline{X}$为齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解;X_0为 $AX=b$ 的任一个解(或特解).

非齐次线性方程组解的线性组合一般不再是方程组的解(仅当线性组合的系数和为 1 时,才是方程组的解).非齐次线性方程组的任意两个解之差是其对应的齐次方程组的解.

(3) 求解方法:对增广矩阵$[A,b]$作初等行变换,将其化为阶梯形矩阵$[U,d]$.则 $UX=d$ 与 $AX=b$ 是同解方程组.(求 $AX=0$ 的通解(一般解)的方法同上).

在 $UX=d$ 中,将自由未知量都取为 0 时,容易求得 $AX=b$ 的一个特解 X_0.

6. 值得注意的几点

(1) 检查解是否正确,一是代入方程组看是否满足方程,二是看任意常数的个数是否等于 $n-r$.

(2) 当方程组中含有若干待定常数(如 a,b)时,要求分析它们取哪些值时方程组有解,或有唯一解,或有无穷多解.这时作初等行变换,不能用$\frac{1}{a}$或$\frac{1}{b}$作倍乘变换.若一定要用,必须另外分析 $a=0$ 或 $b=0$ 的情况.

(3) 求线性方程组的解时,只能做行变换,不能做倍乘和倍加列变换.因为这种列变换后所得的方程组与原方程组不是同解方程组.

(4) 由 $AX=b$ 有唯一解或有无穷多个解可以推出 $AX=0$ 只有零解或有无

穷多个解；反之不成立，即由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解或有无穷多个解不能推出 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解或有无穷多个解；

(5) 求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的交的方法是求下列联立方程组的解

$$\begin{cases} AX=0, \\ BX=0. \end{cases}$$

(6) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间 $N(\boldsymbol{A})$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的行空间 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$（$\boldsymbol{A}$ 的行向量组生成的空间）互为正交补. 因为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的每一个解向量都与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组正交，且

$$\dim N(\boldsymbol{A})+\dim R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=n.$$

所以，

$$N(\boldsymbol{A})=(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}))^{\perp}.$$

(7) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以 $\boldsymbol{B}$ 的列空间 $R(\boldsymbol{B})$（$\boldsymbol{B}$ 的列向量组生成的空间）包含于 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间之中，即 $R(\boldsymbol{B})\subseteq N(\boldsymbol{A})$，故 $r(\boldsymbol{B})\leqslant n-r(\boldsymbol{A})$，由此得：$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

(8) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $n-r(\boldsymbol{A})\leqslant n-r(\boldsymbol{B})$，所以，$r(\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})$.

7. $\mathbf{R}^3$ 中的平面和直线的位置关系.

(1) m 个平面 π_i 的方程是 m 个三元一次方程 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3=b_i\,(i=1,2,\cdots,m)$，它构成一个方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$（其中两个平面方程的联立是一条直线），于是平面和直线的位置关系取决于 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 和 $r(\boldsymbol{A})$ 以及平面的法向量. 分析它们之间的关系，就能掌握判别平面之间（或直线之间，或平面与直线之间）平行或垂直的条件以及判别两直线共面的分析方法. 例如，平面 π_1 和直线 L（π_2 与 π_3 方程的联立）的位置关系为：

① 当 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=3$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；π_1 与 L 相交于一点.

② 当 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=2$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解. 解集合的图形就是直线 L，即直线 L 位于平面 π_1 上，此时 π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 垂直于 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_2\times\boldsymbol{s}_3$，从而 $\boldsymbol{n}_1\cdot(\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{n}_3)=\det\boldsymbol{A}=0$.

③ 当 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3,\ r(\boldsymbol{A})=2$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 无解. $L\,/\!/\,\pi_1$，但 L 不在 π_1 上.

再如两条直线的方程为标准方程时，即直线 L_i 的方程为：

$$\frac{x-x_i}{l_i}=\frac{y-y_i}{m_i}=\frac{z-z_i}{n_i},$$

其中点 $P_i(x_i,y_i,z_i)$ 在直线 L_i 上，$\boldsymbol{s}_i=(l_i,m_i,n_i)$ 为 L_i 的方向向量（$i=1,2$）.

① L_1 与 L_2 重合，当且仅当 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$ 与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 平行，即秩 $\{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{P_1P_2}\}=1$.

② L_1与L_2平行而不重合，当且仅当 $s_1 \parallel s_2$，但不平行于$\overrightarrow{P_1P_2}$，即秩$\{s_1, s_2\}=1$，秩$\{s_1, s_2, \overrightarrow{P_1P_2}\}=2$.

③ L_1与L_2交于一点，当且仅当 s_1, s_2与$\overrightarrow{P_1P_2}$共面，但 s_1与 s_2不平行，即秩$\{s_1, s_2, \overrightarrow{P_1P_2}\}=$秩$\{s_1, s_2\}=2$，或

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(s_1\times s_2)=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

④ L_1与L_2异面(交叉而不相交)，当且仅当 s_1, s_2与$\overrightarrow{P_1P_2}$不共面，即秩$\{s_1, s_2, \overrightarrow{P_1P_2}\}=3$ 或$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(s_1\times s_2)\neq 0$.

(2) 线性图形的度量关系包括:点到平面(或直线)的距离;平面与平面间以及直线与直线间的距离和夹角;直线与平面间的距离与夹角. 主要是学会用内积、叉积、混合积分析处理这些问题的方法(有关公式见主教材 203－208 页).

(3) 利用投影的绝对值来求平面、直线的度量问题. 例如，求两平行平面(或两条异面直线)的距离，只需在两平面(或两异面直线)上各取一个点 P_1, P_2求线段 P_1P_2在两平面的法向量(或两直线的公垂线)n 上的投影的绝对值. 即

$$d=|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot \boldsymbol{n}^\circ|.$$

8. 重点与难点

(1) 重点

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系($N(\boldsymbol{A})$的基)和一般解，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件(有唯一解或无穷多解的条件)，一般解的结构，线性图形的位置关系与度量关系(距离与夹角等).

(2) 难点

系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中含有参数时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解和 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件，有关伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩的证明题.

6－4 例题分析与解答

例 1 已知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{array}\right].$$

问:a, b 取何值时，方程组无解，有唯一解，无穷多解？有无穷多解时，求一般解.

(研究生入学考试试题，1987 年)

解

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]\xRightarrow{\text{行变换}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&-1&-2&a-3&-1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{array}\right].$$

(1) 当 $a\neq 1$ 时, $r[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]=r(\boldsymbol{A})=4$,方程组有唯一解.

(2) 当 $a=1,b\neq -1$ 时, $r[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]=3,r(\boldsymbol{A})=2$,方程组无解.

(3) 当 $a=1,b=-1$ 时, $r[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]=r(\boldsymbol{A})=2$,方程组有无穷多解,此时

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right],$$

即

$$\begin{cases}x_1=-1+x_3+x_4,\\x_2=1-2x_3-2x_4.\end{cases}$$

取自由未知量 x_3,x_4 为任意常数 k_1 和 k_2,得方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+k_1+k_2\\1-2k_1-2k_2\\k_1\\k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}.$$

例 2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×4 矩阵,若 $r(\boldsymbol{A})=2$, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有三个解: $\boldsymbol{X}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{X}_2=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{X}_3=(-1,1,1,-1)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一般解.

解 $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2=(0,2,2,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_3=(2,0,0,2)^{\mathrm{T}}$是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关解(因为两者不成比例). 又 $n-r(\boldsymbol{A})=2$,所以, $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_3$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 于是得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一般解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\boldsymbol{X}_1+k_1(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)+k_2(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_3)\\&=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+k_1(0,2,2,0)^{\mathrm{T}}+k_2(2,0,0,2)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

例 3 若 X_1, X_2 是 $AX=0$ 的基础解系，X_1^*, X_2^* 是 $AX=b$ 的两个不同的解，k_1, k_2 为任意常数，则 $AX=b$ 的一般解是(　　　　).

(A) $k_1 X_1 + k_2(X_1 + X_2) + \frac{1}{2}(X_1^* - X_2^*)$

(B) $k_1 X_1 + k_2(X_1 + X_2) + \frac{1}{2}(X_1^* + X_2^*)$

(C) $k_1 X_1 + k_2(X_1^* + X_2^*) + \frac{1}{2}(X_1^* + X_2^*)$

(D) $k_1 X_1 + k_2(X_1^* - X_2^*) + \frac{1}{2}(X_1^* - X_2^*)$

(研究生入学考试试题,1990 年)

解 选(B). 因为 $\{X_1, X_1 + X_2\}$ 也是 $AX=0$ 的解，且线性无关，所以，它们也是 $AX=0$ 的基础解系. 又因为

$$A\left[\frac{1}{2}(X_1^* + X_2^*)\right] = \frac{1}{2}(AX_1^* + AX_2^*) = b,$$

所以，$\frac{1}{2}(X_1^* + X_2^*)$ 是 $AX=b$ 的一个解. 于是(B)成立.

(A)和(D)中 $\frac{1}{2}(X_1^* - X_2^*)$ 不是 $AX=b$ 的解；(C)中 $k_2(X_1^* + X_2^*)$ 不是 $AX=0$ 的解，所以都不成立.

例 4 已知矩阵 $ABC=O$，下列成立的是(　　).

(A) B 的列向量是线性齐次方程组 $AX=0$ 的解

(B) C 的行向量是线性齐次方程组 $(AB)X=0$ 的解

(C) C 的列向量是线性齐次方程组 $BX=0$ 的解

(D) A 的行向量是线性齐次方程组 $(BC)^{\mathrm{T}}X=0$ 的解

(清华大学试题,2001 年)

解 选(D). 因为 $(ABC)^{\mathrm{T}} = (BC)^{\mathrm{T}}(A)^{\mathrm{T}} = O$，所以 A^{T} 的列向量(即 A 的行向量)是 $(BC)^{\mathrm{T}}X=0$ 的解.

由 $ABC=O$ 不能得到 $AB=O$ 或 $BC=O$，所以(A)和(C)都不对. C 的列向量是 $(AB)X=0$ 的解，所以(B)不对.

例 5 已知 $AX=0$ 的基础解系 $X_1=(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}}, X_2=(0,2,1,1)^{\mathrm{T}}$，求一个最简单的 A.

解 由

$$4 - r(A) = 2,$$

得

$$r(A) = 2,$$

所以，最简单的 A 为 2×4 矩阵. 令 A 的行向量为 (a_1, a_2, a_3, a_4)，由 $AX_i = 0$($i=$

1,2),得

$$\begin{cases}a_1-a_3=0,\\ 2a_2+a_3+a_4=0.\end{cases}$$

这是关于 a_1,a_2,a_3,a_4的齐次线性方程组,它的基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$均可为 $\boldsymbol{A}$ 的行向量,取(a_3,a_4)为$(1,0)$和$(0,1)$,得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(1,-\frac{1}{2},1,0\right),\boldsymbol{\alpha}_2=\left(0,-\frac{1}{2},0,1\right).$$

于是,最简单的 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

例 6 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,\frac{1}{2},0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}=(0,0,8)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$,求解方程:

$$2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\gamma}.$$

解 这里的 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2$ 是一个数,因此,此题是求方程组

$$(2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^4-\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\gamma}$$

的解,其中

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}^2=2^3\boldsymbol{A}=8\boldsymbol{A}.$$

于是,

$$\begin{aligned}(2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^4-\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}&=(8\boldsymbol{A}^2-8\boldsymbol{A}-16\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}\\&=8(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}\\&=\boldsymbol{\gamma},\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\frac{1}{8}\boldsymbol{\gamma},$$

即

$$\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2} & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

求解此方程组,得原方程组的解

$$\boldsymbol{X}=k\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

例 7 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，记 $\boldsymbol{A}$ 的前 $n-1$ 列形成的矩阵为 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}$ 的第 n 列为 $\boldsymbol{b}$. 问：线性方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 有解否？为什么？

解 无解. 因为

$$r(\boldsymbol{A}_1)=n-1,$$
$$r(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=n,$$

所以，系数矩阵与增广矩阵的秩不等，从而无解.

例 8 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，则方程组 Ⅰ：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 和 Ⅱ：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 为同解方程组.

证 因为若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AX})=\boldsymbol{0},$$

所以 Ⅰ 的解都是 Ⅱ 的解.

反之，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX})=(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0},$$

设向量 $\boldsymbol{AX}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=0（因为\ b_i\ 是实数）,$$

得

$$b_1=b_2=\cdots=b_n=0,$$

所以

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0},$$

即 Ⅱ 的解也是 Ⅰ 的解.

例 9 若 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的各行，各列元素之和都为 0，证明：行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的所有元素的代数余子式都相等.

（清华大学试题，2002 年）

证 由各列的元素之和都为 0，得

$$|\boldsymbol{A}|=0.$$

利用习题 7 的结论：

如果 $r(\boldsymbol{A})<n-1$，则 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$，$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，所以，$A_{ij}=0\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$；

如果 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，则 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，且 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{O}$，于是 $\boldsymbol{A}^*$ 的每一列 $[A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in}]^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,n)$ 都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

由于 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数为

$$n-r(\boldsymbol{A})=n-(n-1)=1,$$

所以，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的任意两个解成比例. 又元素全部为 1 的 n 元向量 $\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 满足方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，因此 $\boldsymbol{A}^*$ 任意一列都与 $\boldsymbol{e}$ 成比例，即

$$(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})^{\mathrm{T}}=k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}.$$

于是，

$$A_{i1}=A_{i2}=\cdots=A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

所以，$\boldsymbol{A}^*$ 的每一列元素（即 $|\boldsymbol{A}|$ 的每一行元素的代数余子式）都相等.

同理，$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$ 的每一列元素（即 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 的每一行元素也是 $|\boldsymbol{A}|$ 的每一列元素的代数余子式）都相等，即

$$A_{1j}=A_{2j}=\cdots=A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

例 10 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和都为 0，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解是________.

（研究生入学考试试题，1993 年）

解 $k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$（见例 9），可直接代入方程检验.

例 11 设四元线性方程组（Ⅰ）为

$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0,\end{cases}$$

又已知某齐次方程组（Ⅱ）的通解为 $k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求线性方程组（Ⅰ）的基础解系；

(2) 问：线性方程组（Ⅰ），（Ⅱ）是否有非零的公共解？若有，求所有非零的公共解；若没有，说明理由.

（研究生入学考试试题，1994 年）

解 (1) 取自由未知量 $(x_3,x_4)=(1,0)$ 和 $(0,1)$，得（Ⅰ）的基础解系为

$$\boldsymbol{X}_1=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{X}_2=(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

(2) 解法 1 将 $(x_1,x_2,x_3,x_4)=k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$ 代入（Ⅰ），得

$$\begin{cases}-k_2+(k_1+2k_2)=0,\\(k_1+2k_2)-k_2=0,\end{cases}$$

即
$$k_1+k_2=0,$$

所以，当 $k_1=-k_2$ 时，

$$\boldsymbol{X}=k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}=k_2(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}\quad(k_2\text{为任意常数})$$

既是方程组（Ⅱ）的解，也是方程组（Ⅰ）的解，因而是（Ⅰ）和（Ⅱ）的非零的公共解.

解法 2 方程组（Ⅰ）的通解为

$$\boldsymbol{X}=k_3(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_4(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

若存在 k_3,k_4 使得

$$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}=k_3(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_4(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}.\quad(1)$$

解方程(1)对应的齐次线性方程组

$$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}+k_3(0,0,-1,0)^{\mathrm{T}}+k_4(1,-1,0,-1)^{\mathrm{T}}=\mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\1&2&0&-1\\1&2&-1&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

得

$$[k_1,k_2,k_3,k_4]^{\mathrm{T}}=[-k_4,k_4,k_4,k_4]^{\mathrm{T}}.$$

取 $k_4=k$(k 为任意常数),得方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的全部非零的公共解为($k_1=-k,k_2=k$)

$$\begin{aligned}k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}&=-k(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}\\&=k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

或($k_3=k_4=k$)

$$k(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}=k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

例 12 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix},$$

则三条直线

$$\begin{aligned}a_1x+b_1y+c_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2=0,\\a_3x+b_3y+c_3=0\end{aligned}$$

(其中 $a_i^2+b_i^2\neq0,i=1,2,3$)交于一点的充要条件是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关

(C) $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关

(研究生入学考试试题,1997 年)

解 选(D).三条直线交于一点的充要条件是方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2=0,\\a_3x+b_3y+c_3=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=-c_1,\\a_2x+b_2y=-c_2,\\a_3x+b_3y=-c_3\end{cases}$$

有唯一解,而方程组有唯一解的充要条件是增广矩阵的秩与系数矩阵的秩相等,

即

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=2,$$

所以，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关.

注意：(C)不充分. 因为 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=1$ 时方程组的解不唯一.

例 13 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s=t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$，其中 t_1,t_2为实常数. 试问 t_1,t_2满足什么关系时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$也为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

(研究生入学考试试题，2001 年)

解 由 $\boldsymbol{A\beta}_i=\boldsymbol{A}(t_1\boldsymbol{\alpha}_i+t_2\boldsymbol{\alpha}_{i+1})=t_1\boldsymbol{A\alpha}_i+t_2\boldsymbol{A\alpha}_{i+1}=0\quad(i=1,2,\cdots,s,\ \boldsymbol{\alpha}_{s+1}=\boldsymbol{\alpha}_1)$可知，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$也都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以，只须证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性无关. 设

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{0},\tag{1}$$

即 $$x_1(t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+x_s(t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0},$$

$$(t_1x_1+t_2x_s)\boldsymbol{\alpha}_1+(t_2x_1+t_1x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(t_2x_{s-2}+t_1x_{s-1})\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+(t_2x_{s-1}+t_1x_s)\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，所以系数必全部为 0，即

$$\begin{cases} t_1x_1 \qquad\qquad\qquad + t_2x_s=0, \\ t_2x_1+t_1x_2 \qquad\qquad\quad =0, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad t_2x_{s-2}+t_1x_{s-1} \quad =0, \\ \qquad\qquad t_2x_{s-1}+t_1x_s=0, \end{cases}\tag{2}$$

欲使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性无关，(1)式中的系数必须全为 0，即齐次线性方程组(2)只有零解，为此方程组(2)的系数行列式必须不等于 0，即

$$D=\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & & t_2 \\ t_2 & t_1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & t_2 & t_1 & \\ & & & & t_2 & t_1 \end{vmatrix}\quad(\text{对第 1 行展开})$$

$$=t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s$$

$$\neq 0.$$

因此，当 s 为偶数时，$t_2\neq\pm t_1$；当 s 为奇数时，$t_2\neq -t_1$，就有 $D\neq 0$，从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性无关，也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

另一解法：由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 之间的关系，可以形式地表示为下面的矩阵等式：

$$[\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\beta}_{s-1}\quad \boldsymbol{\beta}_s]=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & & t_2 \\ t_2 & t_1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & t_2 & t_1 & \\ & & & & t_2 & t_1 \end{bmatrix}.$$

当上式右端的 s 阶矩阵 $\boldsymbol{T}$ 可逆（即 $D=|\boldsymbol{T}|\neq 0$）时，$\boldsymbol{T}$ 就是解空间 $N(\boldsymbol{A})$ 的基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 变为基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 的变换矩阵，所以，$D=|\boldsymbol{T}|\neq 0$ 时，$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系（解空间 $N(\boldsymbol{A})$ 的基）.

例 14 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $(n-1)\times n$ 矩阵，$|A_j|$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 中划去第 j 列所构成的行列式. 证明：

(1) $(-|A_1|,|A_2|,\cdots,(-1)^n|A_n|)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个解；

(2) 若 $|A_j|$ 不全为零，则(1)中的解是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

证 (1) 令 n 阶矩 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的代数余子式

$$B_{nj}=(-1)^{n+j}|A_j|,$$

且

$$|\boldsymbol{B}|=0,$$

于是，

$$\boldsymbol{BB}^*=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O},$$

所以，$\boldsymbol{B}^*$ 的每一列都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ 的解. $\boldsymbol{B}^*$ 的第 n 列是由 $\boldsymbol{B}$ 的第 n 行的代数余子式构成的，因此，

$$(B_{n1},B_{n2},\cdots,B_{nn})^{\mathrm{T}}=((-1)^{n+1}|A_1|,(-1)^{n+2}|A_2|,\cdots,(-1)^{2n}|A_n|)^{\mathrm{T}}$$

是 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ 的解. 又 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 是同解方程组，所以 $(-|A_1|,|A_2|,\cdots,(-1)^n|A_n|)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个解.

(2) 当 $|A_j|$ 不全为零时，有

$$r(\boldsymbol{A})=n-1,$$

因此 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系只含 $n-r(\boldsymbol{A})=1$ 个解，所以，题(1)中的非零解是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

例 15 求 L_1 与 L_2 的公垂线 L 的方程（L 与 L_1,L_2 垂直且相交），其中

$$L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1},$$

$$L_2:\begin{cases} x=-2-4t,\\ y=2+t,\\ z=3+2t.\end{cases}$$

解 因为 L_1 与 L_2 方向向量分别为 $\boldsymbol{S}_1=(2,-2,1)$ 和 $\boldsymbol{S}_2=(-4,1,2)$，所以，$L$ 的方向向量为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2=(2,-2,1)\times(-4,1,2)=(-5,-8,-6).$$

取 $\boldsymbol{S}=(5,8,6)$. 设 $\boldsymbol{n}_i$ 是过直线 L 与 L_i 的平面 π_i $(i=1,2)$ 的法向量，则

$$\boldsymbol{n}_i=\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S}_i,$$

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S}_1=(5,8,6)\times(2,-2,1)=(20,7,-26),$$

$$\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S}_2=(5,8,6)\times(-4,1,2)=(10,-34,37).$$

π_1 过点 $P_1=(1,-1,0)$，π_2 过点 $P_2=(-2,2,3)$，由点法式可以得到 π_i $(i=1,2)$ 的方程. 公垂线 L 是 π_1 与 π_2 的交线，所以，L 的方程为

$$\begin{cases}20(x-1)+7(y+1)-26z=0,\\10(x+2)-34(y-2)+37(z-3)=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}20x+7y-26z-13=0,\\10x-34y+37z-23=0.\end{cases}$$

6－5 习题提示与解答

1. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系及一般解：

(1) $\begin{cases}x_1-x_2+5x_3-x_4=0,\\x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\3x_1-x_2+8x_3+x_4=0,\\x_1+3x_2-9x_3+7x_4=0.\end{cases}$

解 (1)

$$\begin{bmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&2&-7&4\\0&4&-14&8\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-1&5&-1\\0&2&-7&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$r(\boldsymbol{A})=2$，基础解系含 $4-r(\boldsymbol{A})=2$ 个解向量. 取自由未知量 (x_3,x_4) 为 $(2,0)$，$(0,1)$，得基础解系

$$\boldsymbol{X}_1=(-3,7,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_2=(-1,-2,0,1)^{\mathrm{T}},$$

其一般解为

$$\boldsymbol{X}=k_1(-3,7,2,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,-2,0,1)^{\mathrm{T}}\quad(k_1,k_2\text{为任意常数}).$$

2. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

试求数 λ,使齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$ 有非零解,并求其基础解系.

解
$$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$$
即
$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$
有非零解的充要条件是

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0,$$

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{bmatrix}2-\lambda & -1 & -1 & -1\\ -1 & 2-\lambda & -1 & -1\\ -1 & -1 & 2-\lambda & -1\\ -1 & -1 & -1 & 2-\lambda\end{bmatrix}$$
$$=(\lambda+1)(\lambda-3)$$
$$=0.$$

$\lambda=-1$ 时,解 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得基础解系为

$$\boldsymbol{X}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}};$$

$\lambda=3$ 时,解 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=0$,得基础解系为

$$\boldsymbol{X}_1=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_3=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

3. 求一个齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$,使其解空间解 $N(\boldsymbol{A})=L(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)$,其中,

$$\boldsymbol{X}_1=(1,2,-1,4)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{X}_2=(1,0,-4,0)^{\mathrm{T}}.$$

解 设 $\boldsymbol{A}$ 的行向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$. 由 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{X}_i)=0(i=1,2)$ 得 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 是 $N(\boldsymbol{A})$ 的正交补.

$$\begin{cases}a_1+2a_2-a_3+4a_4=0,\\ a_1-4a_3=0.\end{cases}$$

解此方程组,得基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(8,-3,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-2,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

所以,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}8 & -3 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases}8x_1-3x_2+2x_3=0,\\-2x_2+x_4=0.\end{cases}$$

4. 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_{m\times n}(F)$,证明:若 F^n 中任一个向量都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,并用线性映射的语言来叙述这个命题.

解 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间是 F^n,所以,

$$\dim N(\boldsymbol{A})=n.$$

由

$$r(\boldsymbol{A})+\dim N(\boldsymbol{A})=n,$$

得

$$r(\boldsymbol{A})=0,$$

所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}.$$

线性空间的语言为:设

$$\dim V_1(F)=n,\dim V_2(F)=m,\sigma\in L(V_1,V_2),$$

若 σ 的核为 V_1,则

$$\sigma=\theta(\text{零映射}).$$

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 和 $n\times s$ 矩阵,证明:若方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解,则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$.

证 因为 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,所以 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间包含于 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解空间,故

$$s-r(\boldsymbol{B})\leqslant s-r(\boldsymbol{AB}),$$

即

$$r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B}).$$

同理,因为 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解,所以

$$s-r(\boldsymbol{AB})\leqslant s-r(\boldsymbol{B}),$$

即

$$r(\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{AB}).$$

于是,

$$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B}).$$

*7. 设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,证明:

(1) $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & \text{当 } r(\boldsymbol{A})=n,\\1, & \text{当 } r(\boldsymbol{A})=n-1,\\0, & \text{当 } r(\boldsymbol{A})<n-1;\end{cases}$

(2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

证 (1) 当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时,$|\boldsymbol{A}|\neq0$,由

$$\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E},$$

得

$$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\neq0,$$

所以

$$r(\boldsymbol{A}^*)=n.$$

当 $r(\boldsymbol{A})=n-1$ 时,

$$|\boldsymbol{A}|=0,\quad \boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O},$$

A^* 的列向量都是 $AX=0$ 的解.因为

$$n-r(A)=1,$$

所以 $AX=0$ 的解空间中任意两个解成比例,所以

$$r(A^*)\leqslant 1. \tag{1}$$

或者由 $AA^*=O$ 得

$$r(A)+r(A^*)\leqslant n,$$

又

$$r(A)=n-1,$$

所以,

$$r(A^*)\leqslant n-(n-1)=1.$$

由于 $r(A)=n-1$,A 中存在 $n-1$ 阶非零子式,即存在 A 的一个代数余子式 $A_{ij}\neq 0$,于是

$$r(A^*)\geqslant 1, \tag{2}$$

由(1)式和(2)式得

$$r(A^*)=1.$$

当 $r(A)<n-1$ 时,A 中任意一个 $n-1$ 阶子式都等于 0,即任意一个代数余子式 A_{ij} 都等于 0,所以,$A^*=O$,从而 $r(A^*)=0$.

(2) 利用 $AA^*=|A|E$,得

$$|A||A^*|=|AA^*|=|A||E|=|A|^n|E|=|A|^n.$$

当 A 可逆即 $|A|\neq 0$ 时,$|A^*|=|A|^{n-1}$.

当 $|A|=0$ 时,$r(A^*)=1$ 或 0,$|A^*|=0$,$|A^*|=|A|^{n-1}$ 也成立.

*8. 设 $A\in M_n(F)$,证明:若 $|A|=0$,则 A 中任意两行(或列)对应元素的代数余子式成比例.

证 由上题可知,当 $r(A)<n$,即 $|A|=0$ 时,$r(A^*)\leqslant 1$,所以,$A^*=(A_{ij})^T$ 中任意两行(或列)成比例,也就是 A 中任意两列(或行)对应元素的代数余子式成比例.

*9. 证明:若 A 是 n 阶幂等矩阵(即 $A^2=A$),则 $r(A)+r(E-A)=n$.

证 由 $A^2=A$,即

$$A(A-E)=O,$$

得

$$r(A)+r(A-E)\leqslant n. \tag{1}$$

再由 $E=A+(E-A)$ 及 $r(E-A)=r(A-E)$,又得

$$r(E)=r(A+(E-A))\leqslant r(A)+r(E-A),$$

即

$$n\leqslant r(A)+r(E-A)=r(A)+r(A-E). \tag{2}$$

由(1)式和(2)式得

$$r(A)+r(A-E)=n.$$

*10. 证明：若 $A\in M_n(F)$，且 $A^2=E$，则 $r(A+E)+r(A-E)=n$.

证 证明方法同上题.此时要用$(A+E)+(E-A)=2E$.

*13. 设 $A\in M_{m\times n}(F)$，证明：非齐次线性方程组 $AX=b$ 对任何$b\in F^m$都有解的充分必要条件是 $r(A)=m$.

证 充分性.由于 $r(A)=m$，所以，$\forall\, b\in F^m$，

$$r(A,b)=m=r(A)\text{（因为}(A,b)\text{是 } m \text{ 行的矩阵）}.$$

因此，$AX=b$ 对任何$b\in F^m$都有解.

必要性：用反证法.设 A 的列向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\subset F^m$的秩小于$m$，不妨假设它的极大线性无关组为$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}(k<m)$.于是，存在$\forall\, b\in F^m$，使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,b$ 线性无关，即 b 不能由$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$线性表示，从而也不能由$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$线性表示，因此，$AX=b$ 无解，与题设矛盾.

14. 设

$$\begin{cases} x_1-x_2=a_1, \\ x_2-x_3=a_2, \\ x_3-x_4=a_3, \\ x_4-x_5=a_4, \\ x_5-x_1=a_5. \end{cases}$$

证明：该方程组有解的充分必要条件是 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$，有解时，求其一般解.

解 系数矩阵中各列的元素之和都等于0，把每行都加到最后一行，系数矩阵得到全零行，即

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \end{array}\right].$$

由于方程组有解的充分必要条件是 $r(A,b)=r(A)$，得

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0.$$

有解时，其一般解为

$$X=(a_1+a_2+a_3+a_4,\quad a_2+a_3+a_4,\quad a_3+a_4,\quad a_4,\quad 0)^T+k(1,1,1,1,1)^T,$$

其中 k 为任意常数.

15. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$m=n+1$，证明：

(1) 线性方程组 $AX=b$ 有解的必要条件是 $\det(A,b)=0$；

(2) 如果 $r(\boldsymbol{A})=n$,(1)中条件也是充分的.

证 (1) 若线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解,则

$$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})\leqslant n.$$

于是,$n+1$ 阶行列式

$$\det(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=0.$$

(2) 如果 $r(\boldsymbol{A})=n$ 且 $\det(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=0$,即 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\leqslant n$,则

$$n=r(\boldsymbol{A})\leqslant r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\leqslant n,$$

所以,

$$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=n,$$

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解,故条件也是充分的.

17. 已给平面:

$$\pi_1: x-2y+2z+1=0;$$

$$\pi_2: 2x+3y-6z-6=0.$$

(1) 求平面 π_1 与 π_2 之间的夹角;

(2) 在 x 轴上确定一点,使它到平面 π_1 与 π_2 的距离相等.

解 (1) 两平面间的夹角 θ 为其法向量间小于 $90°$ 的夹角 $\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$,所以,

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|2-6-12|}{3\cdot 7}=\frac{16}{21},$$

$$\theta=\arccos\frac{16}{21}.$$

(2) 点 $\boldsymbol{P}(a,0,0)$ 到平面 π_1 与 π_2 的距离分别为

$$d_1=\frac{1}{3}\left|(x-2y+2z+1)|_P\right|=\left|\frac{a+1}{3}\right|,$$

$$d_2=\frac{1}{7}\left|(2x+3y-6z-6)|_P\right|=\left|\frac{2(a-3)}{7}\right|.$$

由 $d_1=d_2$ 得

$$\left|\frac{1}{3}(a+1)\right|=\left|\frac{2}{7}(a-3)\right|.$$

当 $a<-1$ 或 $a>3$ 时,

$$\frac{a+1}{3}=\frac{2(a-3)}{7},$$

得
$$a=-25.$$

当 $-1<a<3$ 时,

$$\frac{a+1}{3}=-\frac{2(a-3)}{7},$$

得 $$a=\frac{11}{13}.$$

所求点为$(-25,0,0)$或$\left(\frac{11}{13},0,0\right)$.

19. 求点$A(2,4,3)$在直线$x=y=z$上的投影点的坐标及点A到该直线的垂直距离.

解 直线$x=y=z$过坐标原点,单位方向向量为$\boldsymbol{S}^0=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. 设点$A$在直线上的投影点为$B$,则

$$\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{S}^0)\boldsymbol{S}^0=\left[(2,3,4)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right]\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=(3,3,3).$$

A到该直线的垂直距离.

$$d=|\overrightarrow{AB}|=|(1,-1,0)|=\sqrt{2}.$$

21. 已知:

$$\text{平面 }\pi: x-2y-2z+4=0;$$

$$\text{直线 }L: \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{n}.$$

(4) 当$n=-2$时,求L与π的交点,并求L在π上的投影线方程;

(5) 求L在各坐标平面上的投影线方程;

(6) 当$n=-2$时,求直线L_1,使L_1与L关于平面π对称;

解 (4) 将直线L的方程:

$$x=1-t,\quad y=2t,\quad z=-2-2t$$

代入平面π的方程,得

$$(1-t)-4t-2(-2-2t)+4=0,$$

于是, $$t=9,$$

所以,L与π的交点为$P=(-8,18,-20)$.

过L作平面$\pi_1\perp\pi$,π_1与π的交线就是L在π上的投影线. π_1的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=(1,-2,-2)\times(-1,2,-2)=(8,4,0),$$

取$\boldsymbol{n}_1=(2,1,0)$. π_1过L上的点$(1,0,-2)$,所以,π_1的方程为

$$2(x-1)+y=0.$$

L在π上的投影线方程为

$$L_0:\begin{cases}x-2y-2z+4=0,\\ 2x+y-2=0\end{cases}\quad\text{或}\quad \frac{x}{2}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z}{5}.$$

(5) 求L在坐标面xOy上的投影线方程的方法如下:

过L作平面$\pi_1\perp$平面xOy,π_1的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=(1,-2,-n)\times(0,0,1)=(-2,-1,0).$$

又 π_1 过 L 上的点 $(1,0,-2)$，所以，π_1 的方程为

$$-2(x-1)-1(y-0)=0,$$

即
$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}.$$

坐标面 xOy 的方程为 $z=0$，所以 L 在坐标面 xOy 上的投影线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2},\\ z=0,\end{cases}$$

即
$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{0}.$$

此时，直线 L 方程中第一个等式两边不变，只是将 $\dfrac{z+2}{n}$ 改为 $\dfrac{z}{0}$.

同理，L 在坐标面 zOx，yOz 上的投影线方程分别为

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z+2}{n},$$

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{n}.$$

(6) 解法 1　只须求出 L 上的点 $A(1,0,-2)$ 关于 π 的对称点 $B=(a,b,c)$，以及 L 与 π 的交点 P（在(4)中已求出），则直线 PB 就是 L_1.

直线 AB 与平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-2,-2)$ 平行，所以

$$\overrightarrow{AB}=(a-1,b,c+2)=k\boldsymbol{n}=k(1,-2,-2),$$

即 AB 的中点 $C=\left(\dfrac{a+1}{2},\dfrac{b}{2},\dfrac{c-2}{2},\right)$ 位于 L 在 π 的投影线 L_0（在(4)中已求出）上，所以有

$$\frac{a-1}{1}=\frac{b}{-2}=\frac{c+2}{-2}=k, \tag{1}$$

$$\frac{\dfrac{a+1}{2}}{2}=\frac{\dfrac{b}{2}-2}{-4}=\frac{\dfrac{c-2}{2}}{5}. \tag{2}$$

由(1)式和(2)式解得

$$a=-1,b=4,c=2.$$

直线 L_1 即 PB 的方向向量为

$$\boldsymbol{S}=\overrightarrow{PB}=(7,-14,22),$$

其方程为
$$\frac{x+1}{7}=\frac{y-4}{-14}=\frac{z-2}{22}.$$

解法 2　先求 $\overrightarrow{PA}$ 在 L_0 上的投影向量 $\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}$ 是 L_1 的方向向量，

又已知 L_1 过点 P，如此，可得直线 L_1 的方程.

22. 设有两个相交的平面：

$$\pi_1: a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0,$$

$$\pi_2: a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0.$$

问当 λ, μ 是不全为零的任意常数时，方程

$$\lambda(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) + \mu(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) = 0$$

的图形有何共同特点？

解 π_1, π_2 交线上的点都满足方程，又 λ, μ 不全为零时，所以方程的图形都是平面，而且过 π_1, π_2 交线的任一个平面都是某一组不全时为零的 λ, μ 相对应的方程的图形，因此它是过 π_1, π_2 交线的所有平面(即平面束)的方程.

23. 已知两个平面：

$$\pi_1: x - y - 2z = 2,$$

$$\pi_2: x + 2y + z = 8.$$

(1) 求过 π_1 与 π_2 的交线，且与 $\pi_3: x + y + z = 0$ 垂直的平面的方程；

(2) 求 π_1 与 π_2 的平分面的方程.

解 (1) 利用上题，过 π_1 与 π_2 的交线的平面束方程为(取 $\mu = 1$)

$$\lambda(x - y - 2z - 2) + (x + 2y + z - 8) = 0.$$

它与 $\pi_3: x + y + z = 0$(法向量为 $\boldsymbol{n}_3 = (1,1,1)$)垂直，因此，$\boldsymbol{n}_3$ 与 $\boldsymbol{n} = (\lambda + 1, -\lambda + 2, -2\lambda + 1)$ 的点积等于 0，即

$$\boldsymbol{n}_3 \cdot \boldsymbol{n} = \lambda + 1 - \lambda + 2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

于是，
$$\lambda = 2.$$

所求方程为

$$2(x - y - 2z - 2) + (x + 2y + z - 8) = 0,$$

即
$$x - z = 4.$$

(2) 解法 1　π_1 与 π_2 的平分面上任意一点 (x, y, z) 到 π_1, π_2 的距离相等，即 (x, y, z) 满足：

$$\frac{1}{\sqrt{6}}|x - y - 2z - 2| = \frac{1}{\sqrt{6}}|x + 2y + z - 8|,$$

即
$$x - y - 2z - 2 = x + 2y + z - 8$$

或
$$x - y - 2z - 2 = -(x + 2y + z - 8),$$

化简得 π_1 与 π_2 的平分面的方程为

$$y + z = 2 \qquad 或 \qquad 2x + y - z = 10.$$

解法 2　过 π_1, π_2 的平面束方程中找一个平面方程使其到 π_1, π_2 的距离相等，即在方程

$$\lambda(x-y-2z-2)+(x+2y+z-8)=0 \tag{1}$$

中任取一点 $P(0,0,\frac{8+2\lambda}{1-2\lambda})$，到 π_1,π_2 的距离相等，即满足：

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\left|0-0-2\frac{8+2\lambda}{1-2\lambda}-2\right|=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|0+2.0+\frac{8+2\lambda}{1-2\lambda}-8\right|,$$

于是，

$$\frac{8+2\lambda}{1-2\lambda}=2 \text{ 或 } -10,$$

得

$$\lambda=-1 \text{ 或 } 1,$$

代入(1)式，化简得 π_1 与 π_2 的平分面的方程为

$$y+z=2 \quad \text{或} \quad 2x+y-z=10.$$

6-6 补充题提示与解答

1. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$m<n$，$r(\boldsymbol{A})=m$；$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times(n-m)}$，$m<n$，$r(\boldsymbol{B})=n-m$. 已知齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间 $N(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$(矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列空间)，试求齐次线性方程组

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}y_i=0, \qquad j=1,2,\cdots,n-m \tag{1}$$

的一个基础解系.

解 方程组(1)为

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1,n-m} & b_{2,n-m} & \cdots & b_{n,n-m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

它就是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$，由 $r(\boldsymbol{B})=n-m$ 知 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$ 的 $n-m$ 个列向量就是 $N(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$ 的基. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，得 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，所以，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 m 个列向量(即 $\boldsymbol{A}$ 的行向量)都是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$ 的解，其基础解系含 $n-r(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=n-r(\boldsymbol{B})=m$ 个解向量. 又 $r(\boldsymbol{A})=m$，$\boldsymbol{A}$ 的 m 行向量线性无关，它们就是方程组(1)的基础解系.

2. 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_{m\times n}(F)$；$r(\boldsymbol{A})=m$；$\boldsymbol{B}$ 是 m 阶非奇异矩阵(即可逆阵). 已知 $\boldsymbol{A}$ 的行空间 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 是方程组 $\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{O}$ 的解空间. 证明：$\boldsymbol{BA}$ 的行向量组也是 $\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系.

证 由 $r(\boldsymbol{A})=m$ 可知，$\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量($\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 m 个列向量)线性无关，它们是方程组 $\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 由 $\boldsymbol{CA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$ 和 $n-r(\boldsymbol{C})=m$，得 $r(\boldsymbol{C})=n-m$. 因此，由 $\boldsymbol{CA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，可知 $(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}$ 的 m 个列向量(即 $\boldsymbol{BA}$ 的 m 个行向量)也是 $\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

由于 $\boldsymbol{B}$ 是 m 阶可逆矩阵，$r(\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})=m$，所以 $\boldsymbol{BA}$ 的 m 个行向量线性无关，它们也是 $\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

3．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵$(n>2)$，证明：$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

见第 5 章 5－4 中例 11(C).

4．设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$，证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 是对角绝对优势矩阵，即

$$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则

$$\det \boldsymbol{A}\neq 0\quad (\text{即 } r(\boldsymbol{A})=n).$$

证 用反证法，假设 $r(\boldsymbol{A})<n$，即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{X}_0=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 设 $\{x_i\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$中绝对值最大的是 x_j，即

$$\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|\}=|x_j|>0.$$

取 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的第 j 个方程

$$a_{j1}x_1+\cdots+a_{jj}x_j+\cdots+a_{jn}x_n=0,$$

得

$$-a_{jj}x_j=\sum_{i\neq j}a_{ji}x_i,$$

于是

$$|-a_{jj}x_j|=\left|\sum_{i\neq j}a_{ji}x_i\right|\leqslant\sum_{i\neq j}|a_{ji}|\,|x_i|\leqslant|x_j|\sum_{i\neq j}|a_{ji}|,$$

如此，则有

$$|a_{jj}|\leqslant\sum_{i\neq j}|a_{ji}|,$$

与已知矛盾. 所以，

$$r(A)=n,$$

即

$$\det \boldsymbol{A}\neq 0.$$

5．证明：欧氏空间 $V(\mathbf{R})$ 中向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$线性相关的充分必要条件是 Gram 矩阵的行列式

$$\det\begin{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_r)\\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_r)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_r)\end{bmatrix}=0.$$

证 必要性：如果 $V(\mathbf{R})=\mathbf{R}^n$，记 $n\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_r]$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$为 n 维列向量. 已知$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$线性相关，则 $r(\boldsymbol{A})<r$，于是

$$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})<r,$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_r]$$

$$
=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_r)\\(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_r)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\(\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_r)\end{bmatrix}.
$$

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 不满秩,所以,

$$
\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=0 .
$$

如果 $V(\mathbf{R})$是一般的欧氏空间,而不是 $\mathbf{R}^n$,那么上面的 $\boldsymbol{A}$ 就不是矩阵.证明中用到的关键“$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})<r$”就不能引用.

对一般的欧氏空间,必要性的证法为:

已知$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$线性相关,所以存在一个向量(不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$)可用其余向量线性表示,即

$$
\boldsymbol{\alpha}_1=k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r .
$$

将 Gram 矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的行列式 $\det \boldsymbol{G}$ 的第 $2,3,\cdots,r$ 行分别乘 $-k_2,-k_3,\cdots,-k_r$,然后都加到第 1 行,即得

$$
|\boldsymbol{G}|=\det\begin{bmatrix}(0,\boldsymbol{\alpha}_1) & (0,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (0,\boldsymbol{\alpha}_r)\\(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_r)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\(\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_r)\end{bmatrix}=0
$$

(因为零向量与任何向量的内积都等于0,上式第 1 行为全 0 行).必要性得证.

充分性:设 $$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r=0,$$

两边与 $\boldsymbol{\alpha}_j\,(j=1,2,\cdots,r)$ 作内积,有

$$
x_1(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+x_r(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_r)=(0,\boldsymbol{\alpha}_j)=0\quad(j=1,2,\cdots,r).\tag{1}
$$

以 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 为未知元的线性方程组(1)的系数矩阵是 Gram 矩阵,由于行列式等于零,所以方程组存在非零解,即存在不全为 0 的 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 使 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$,所以,$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 线性相关(这里的证明不要求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\in\mathbf{R}^n$).

此题的等价命题为:$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$线性无关的充分必要条件是 Gram 矩阵的行列式 $\det \boldsymbol{G}\neq 0$.如果要证明这个命题,证充分性时,可用反证法.相当于证明第 5 题的必要性.

6. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$,证明:

(1) 若 $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{b}$ 有解,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的任一组解,都满足 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$;

(2) 方程组 $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是方程组

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

无解(其中 $\mathbf{0}$ 是 n 维零向量).

证 (1) 证法 1 若 $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{b}$ 有解,则两边转置,有

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AY})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

设 $\boldsymbol{X}_0$ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的任一解,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_0=\mathbf{0}$,则

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_0=(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

所以 $\boldsymbol{X}_0$ 为 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解.

证法 2 对于联立方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}, \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}, \end{cases}$$

即
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{X} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

由 $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{b}$ 有解,知 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})$,于是$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$和 $\boldsymbol{A}$ 的转置的矩阵的秩也相等,即

$$r\left\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\right\}=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}),$$

所以,$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$可以用 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的行向量组线性表示,也就是方程 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 可以用 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 中的 n 个方程线性表示.因此,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的任一组解都满足 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$.

(2) 必要性:证法 1 方程组 $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{b}$ 有解,由题(1)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的任一个解,都满足 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=0\neq1$,所以,(1)无解.

证法 2 由于方程组 $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{b}$ 有解,所以 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})$,即 $r([A,b]^{\mathrm{T}})=r(A)$,而

$$r\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})+1=r(\boldsymbol{A})+1.$$

因此,方程组(1)的增广矩阵的秩大于系数矩阵的秩,所以,方程组(1)无解.

充分性:若方程组(1)无解,则增广矩阵的秩大于系数矩阵的秩,即

$$r\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}+1=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])+1.$$

又因为
$$r\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}=r([\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{0}])+1=r(\boldsymbol{A})+1,$$

所以,
$$r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])+1=r(\boldsymbol{A})+1,$$

即
$$r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}])=r(\boldsymbol{A}).$$

故 $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{b}$ 有解.

*7. 相容的线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 在怎样的条件下，其解中第 k 个未知量 x_k 都是同一个值？你给的条件是否是充分必要的？

解 设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n]$，$n-r(\boldsymbol{A})=p$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=\overline{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{X}^*=\sum_{i=1}^{p}k_i\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}^*,$$

即
$$\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_k\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\ \vdots\\ x_k^{(1)}\\ \vdots\\ x_n^{(1)}\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}x_1^{(2)}\\ \vdots\\ x_k^{(2)}\\ \vdots\\ x_n^{(2)}\end{bmatrix}+\cdots+k_{n-r}\begin{bmatrix}x_1^{(p)}\\ \vdots\\ x_k^{(p)}\\ \vdots\\ x_n^{(p)}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_1^*\\ \vdots\\ x_k^*\\ \vdots\\ x_n^*\end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{X}^*$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解. 要使 $\boldsymbol{X}$ 的第 k 个未知量 x_k 都是同一个值，必须

$$\overline{x}_k=k_1x_k^{(1)}+k_2x_k^{(2)}+\cdots+k_{n-r}x_k^{(n-r)}=0. \tag{2}$$

所以，齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_k\boldsymbol{\alpha}_k+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$ 的解中第 k 个分量 $x_k=0$. 于是，

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_{k-1}\boldsymbol{\alpha}_{k-1}+x_{k+1}\boldsymbol{\alpha}_{k+1}+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},$$

它等价于 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k-1},\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示(因为如果 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 能用 $\boldsymbol{A}$ 的其余列向量线性表示，则 $x_k\neq0$)，因此，$\boldsymbol{A}$ 的第 k 列向量不能用其余列向量线性表示是必要条件. 此条件也是充分的. 因为，如果 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 不能用 $\boldsymbol{A}$ 的其余列向量线性表示，则齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_k\boldsymbol{\alpha}_k+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$$

的解中 $x_k=0$(否则 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 可以用其余列向量线性表示). 因此，由(1)式和(2)式可知，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解中第 k 个未知量 x_k 都是同一个值.

8. 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^m$，证明：正规方程

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

有解；当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，求其解，并证明 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是幂等的对称矩阵.

证 只要证增广矩阵与系数矩阵的秩相等，

$$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\geqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}) \tag{1}$$

(见《大学数学——代数与几何(第 2 版)》6.1 节例 3)，

$$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})=r[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})]\leqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}). \tag{2}$$

由(1)式和(2)式，得

$$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}).$$

所以，正规方程有解.

当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，则

$$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=n,$$

即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 可逆.所以,$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 的解为

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}.$$

记 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^2&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P},\\\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}&=[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}[(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}]^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P},\end{aligned}$$

所以,$\boldsymbol{P}$ 为幂等的对称的矩阵.

*9. 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$(其中 $m\gg n$),$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 是不相容方程组(即无解).证明：$\exists\,\boldsymbol{X}^*\in\mathbf{R}^n$,使 $\forall\,\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$ 有

$$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX}^*|\leqslant|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX}|,$$

这个 $\boldsymbol{X}^*$ 称为不相容方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解.

证 设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_n]$,$W=R(\boldsymbol{A})=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$($\boldsymbol{A}$ 的列空间),若 $\boldsymbol{\alpha}\in W$,即存在 $\boldsymbol{X}^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^{\mathrm{T}}$,使得

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1^*\boldsymbol{\alpha}_1+x_2^*\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n^*\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{AX}^*.$$

如果$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\alpha})\perp W$,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 在 W 上的投影向量.$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX}^*|$是 $\boldsymbol{b}$ 到 W 的垂直距离(即最短距离).于是,$\forall\,\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$,
有

$$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX}^*|\leqslant|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX}|.$$

其中 $$\boldsymbol{AX}^*=x_1^*\boldsymbol{\alpha}_1+x_2^*\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n^*\boldsymbol{\alpha}_n\in W,$$

此时,$\boldsymbol{X}^*$ 应该满足:$\forall\,\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$,有

$$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX}^*)\perp\boldsymbol{AX},$$

或内积 $$((\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX}^*),\boldsymbol{AX})=0,$$

则 $$(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX}^*)=0,$$

即 $$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX}^*)=0.$$

由于上式 $\forall\,\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$ 都成立,所以

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX}^*)=\boldsymbol{0},$$

即 $$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}.$$

因此,$\boldsymbol{X}^*$ 是正规方程$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 的解(这里 $\boldsymbol{X}^*$ 对应的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 就是 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的列空间上的投影向量).由上题知,正规方程的解 $\boldsymbol{X}^*$ 即是不相容方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解.

第7章 特征值与特征向量 矩阵的标准形

7-1 学时安排的建议

表 3-1

节	教学内容	复习页数
27	7.1 正交变换与正交矩阵	216—222
28	*7.2 二次曲线一般方程化为标准方程及其分类(*7.2.2)(*7.2.3),7.3 节中的线性变换在不同基下的矩阵表示	222—233
29	7.3 节中的相似矩阵,7.4 特征值与特征向量	233—239
30	7.4 特征值与特征向量,7.5 可对角化的条件　相似标准形	240—245
31	7.5 节中的不可对角化与约当块,7.6 实对称矩阵的对角化	246—252
32	*7.7 双线性函数　二次型,7.8 实二次型的标准形 实对称矩阵的相合标准形	252—260
33	7.8 实二次型的标准形　实对称矩阵的相合标准形,7.9 正定二次型与正定矩阵　其他有定二次型	261—269

7-2 基本要求

1. 理解正交变换和正交矩阵的定义和性质.熟悉常见的正交变换的例子. * 知道 Q-R分解和哈达马不等式.

*2. 会用旋转和平移的方法将二次曲线的一般方程化为标准方程.知道二次曲线的不变量.

3. 准确理解线性变换和矩阵的特征值与特征向量的概念和性质.熟练掌握求特征值与特征向量的方法.熟悉 n 阶矩阵的 n 个特征值之和等于矩阵的迹;n 个特征值之积等于矩阵的行列式.

4. 理解两个矩阵相似的概念和性质.理解线性变换在不同的基下的矩阵是相

似的.熟悉相似矩阵有相同的特征多项式. * 知道不同的特征值对应的特征子空间之和是直和.

5. 熟练掌握线性变换和矩阵可对角化的充分必要条件.对可对角化的线性变换或矩阵,会求其相似标准形.

6. 熟知实对称矩阵的特征值均为实数,且不同特征值对应的特征向量是正交的.

7. 熟知实对称矩阵一定可以对角化.对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,能熟练求出正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

*8. 知道双线性函数 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=X^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$ 的度量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与基的选择有关,不同基下的度量矩阵是相合的.

9. 理解 n 元实二次型与 n 阶实对称矩阵相对应;二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经非退化线性变换 $x=\boldsymbol{C}y$ 化为 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.理解矩阵相合(或合同)的定义和性质.

10. 熟练掌握用正交变换法、配方法和同型初等行、列变换法,求实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相合标准形,把二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为平方和(标准形).

11. 理解惯性定理.会求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正、负惯性指数和符号差.会求二次型的规范形.

12. 熟练掌握正定二次型(正定矩阵)的定义和判别方法.熟悉实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定(二次型正定)的各种等价命题(正定的充要条件);了解其他有定二次型的判别方法.

7－3　内容综述与分析

1. 本章研讨的主要问题

本章从研究线性变换和矩阵的特征值与特征向量入手,讨论矩阵的相似标准形和实对称矩阵的相合(或合同)标准形的问题.矩阵的相似标准形一般情况是约旦标准形.我们主要是讨论标准形是对角形的情形,也就是在什么条件下矩阵相似于对角阵,通常称为矩阵的可对角化问题.对此要在准确理解线性变换和矩阵的特征值与特征向量概念的基础上,熟练掌握矩阵(或线性变换)可对角化的充分和必要条件(主教材 7.5 节定理 7.8,定理 7.10).

可对角化的矩阵有很多类型,例如幂等矩阵($\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$),主对角元互不相等的上、下三角形矩阵等都可以对角化.但是最重要的是实对称矩阵($\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$)一定可以对角化,而且存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$(满足 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$)使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n).$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.等式 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$表示 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵,等式 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$表示 $\boldsymbol{A}$ 相合(或合同)于对角阵.

由于 n 元实二次型(即 n 元实系数二次齐次多项式)

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,对应于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$,即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$$

(其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$).因此,二次型可以通过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$(其中 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵,$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$),使得

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ})\boldsymbol{Y}\\&=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.\end{aligned}$$

(一般的二次齐次多项式化为纯平方项的和,其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值).当然,二次型还可以通过配方法或对 $\boldsymbol{A}$ 做同类型初等行、列变换使之化为对角矩阵,也就是存在可逆矩阵(或非退化矩阵)$\boldsymbol{C}$,使得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$$

(注意,$d_1,d_2,\cdots,d_n$ 一般不再是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值).从而,对二次型做坐标变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$,就可得

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})\boldsymbol{Y}\\&=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2\end{aligned}$$

(纯平方项的和).

以上就是本章所要讨论的主要问题.对二次型还要进一步讨论正定二次型和其他有定二次型.

本章所讨论的特征值和特征向量,以及矩阵的相似标准形和相合标准形,在其他学科和工程技术中都有重要的应用.下一章中讨论的一般二次曲面方程化为标准方程以及对二次曲面的分类,都要用到本章所讨论过的内容.

作为线性代数教学的最后一章,要综合应用前面学过的知识来讨论本章所研究的问题.

2. 正交变换和正交矩阵(主教材 7.1 节)

正交变换是保持向量长度(从而保持两向量的夹角)不变的线性变换.在 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 中向量的旋转变换和镜面反射(镜像变换)是典型的、基本的正交变换.

正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 是实矩阵,它满足 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$.所以,$|\boldsymbol{Q}|=1$ 或 -1;$\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{Q}$ 的列向量组和行向量组都是单位正交向量组,也是 $\mathbf{R}^n$ 的单位正交基;两个正交矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

正交变换在单位正交基下对应的矩阵为正交矩阵.还可以证明(留给读者证明):以下三个命题中,由任意两个成立,可以推出其余一个也成立:

① σ 为 n 维线性空间 $V(\mathbf{R})$ 上的正交变换.

② B 为 $V(\mathbf{R})$的一组单位正交基.

③ σ 在基 B 下对应的矩阵为正交矩阵.

3. 矩阵的相似、相合(或合同)和相抵(或等价)关系(主教材 7.3 节)

(1) 矩阵相似、相合、和相抵的定义

同一个线性变换在不同基下对应的矩阵是相似的. 所谓 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$(记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$)即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相合(记作 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$),即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵(记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$),即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

注意:相似和相合的矩阵都是方阵,而相抵的矩阵可以是一般的 $m\times n$ 矩阵. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做初等行、列变换将其化为 $\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

(2) 矩阵的相似、相合和相抵之间的关系

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似或相合,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 一定相抵,因为可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{C}^{-1}$ 也是可逆矩阵.

若实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 必相合,因为实对称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似,其特征值相同,从而 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的正、负惯性指数,所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相合. 或者,若实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,一定存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$ 使得

$$\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{AQ}_1=\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}_1=\mathrm{diag}(\lambda_i,\cdots,\lambda_n)=\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{BQ}_2=\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BQ}_2,$$

从而,
$$(\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}.$$

(其中,$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}$),所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相合.

(3) 值得注意的几点

① 上面命题的逆命题都不成立,即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为方阵,它们相抵但不一定相似或相合. 因为相抵关系式 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$ 中可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 之间不要求 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{-1}$ 或 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$. 也就是说,$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可以是任意的可逆矩阵.

② 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相等的行列式,相等的秩,相同的特征多项式(即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值相同),从而 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相等的迹,即

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,$$
$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B}),$$
$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}).$$

注意:相合矩阵的秩也相等,但其行列式和迹可能不相等,例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}2&0\\0&-6\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

③ 相似矩阵的特征值相同,但特征值相同的矩阵不一定相似. 例如,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值,但不相似. 因为对任何可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,

$$P^{-1}AP=P^{-1}(2E)P=2E\neq B.$$

所以,A 与 B 不相似.

(4) 矩阵相似、相合、和相抵关系都是等价关系,即都具有自反性、对称性和传递性.

4. 特征值和特征向量的概念和计算(主教材 7.4 节)

(1) 特征值和特征向量的概念

① 定义

设 $\sigma\in L(V,V)$,$A\in M_n(F)$,$\xi\in V$,$X\in F^n$.若

$$\sigma(\xi)=\lambda_0\xi\quad(\xi\neq 0);AX=\lambda_0 X\quad(X\neq 0),$$

则称 λ_0为 σ 和 A 的特征值,ξ 和 X 是 σ 和 A 属于特征值 λ_0的特征向量.

② 矩阵 A 的特征值 λ 是 n 次代数方程 $|\lambda I-A|=0$ 的根.A 属于特征值 λ 的特征向量 X 是齐次线性方程组 $(\lambda I-A)X=0$ 的非零解.特征值可以是零(矩阵不可逆时有零特征值),但是特征向量一定不是零向量.在特征子空间 $V_\lambda=\{X\mid AX=\lambda X$,即$(\lambda E-A)X=0\}$中,除零向量外的向量都是属于 λ 的特征向量.

③ n 阶矩阵 A 的特征多项式是 n 阶行列式 $|\lambda I-A|$,其展开式是 λ 的 n 次多项式.在一般情况($n\geqslant 3$)下,求特征方程的根是很困难的.在线性代数课程中能求特征值的矩阵 A 一般都是在行列式 $|\lambda I-A|$ 的计算(利用行列式的性质和展开)过程中能够分解因式的.对于一般的 n 阶矩阵,只好借助于计算机软件求特征值的近似值.

④ 矩阵 A 的两个不同特征值 λ_1,λ_2,对应的特征子空间的交

$$V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}=\{0\},$$

这表明,任一个非零向量都不可能是两个不同特征值对应的特征向量.每一个特征向量只能属于一个特征值,但一个特征值 λ 却可以对应无数个特征向量.

(2) 求特征值的方法

求特征值一般都是求矩阵 A 的特征方程 $|\lambda I-A|=0$ 的根,有时也可以用定义求.例如,当 A 的每行行和都是 k 时,则有

$$\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\\vdots\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kc\\\vdots\\kc\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}c\\\vdots\\c\end{bmatrix},$$

即 $AX=kX$,其中 $X=(c,c,\cdots,c)^{\mathrm T}$ (c 为任意常数).

由定义可知:k 是 A 的一个特征值,其对应的特征向量是元素全部为 $c(c\neq 0)$ 的 n 维列向量.

5. 特征值和特征向量的性质(主教材 7.4 节)

(1) 若 λ_0是 A 的一个特征值,X 是 A 的对应于 λ_0的特征向量,即

$$AX=\lambda_0 X \quad (X\neq 0),$$

则有：

① λ_0也是 A^T的一个特征值(因为$|\lambda I-A|=|\lambda I-A^T|$)；

② $k\lambda_0$为 kA 的一个特征值(k 为任意常数)；

③ λ_0^m是 A^m的一个特征值(m 为任意正整数)；

④ 若 $f(t)$是 t 的一个多项式,则 $f(\lambda_0)$ 是 $f(A)$ 的一个特征值；

⑤ 若 A 可逆,则 $\lambda_0\neq 0$,且 λ_0^{-1}为 A^{-1}的一个特征值,$\lambda_0^{-1}|A|$为 A^*(A 的伴随矩阵)的一个特征值,因为

$$AX=\lambda_0 X\Rightarrow X=A^{-1}(\lambda_0 X)\Rightarrow A^{-1}X=\lambda_0^{-1}X \quad (\lambda_0\neq 0).$$

$$AA^*=|A|E\Rightarrow A^*=|A|A^{-1} \quad A^*X=|A|A^{-1}X=|A|\lambda_0^{-1}X \quad (\lambda_0\neq 0).$$

而且特征向量 x 仍然是矩阵 $kA,A^m,f(A),A^{-1}$和 A^* 的分别对应于特征值 $k\lambda_0,\lambda_0^m,f(\lambda_0),\lambda_0^{-1}$和 $\lambda_0^{-1}|A|$的特征向量.

(2) 若 X_1,X_2都是 A 的属于特征值 λ_0的线性无关的特征向量,则 $k_1X_1+k_2X_2$(k_1,k_2是不全为零的任意常数)也是 A 的属于特征值 λ_0的特征向量.

(3) 不同特征值对应的特征向量线性无关.

(4) k 重特征值至多有 k 个线性无关的特征向量.

(5) 若 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=tr(A) \quad (\text{称为 } A \text{ 的迹})\text{和} \quad \prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|.$$

(6) A 可逆的充分必要条件是 A 的特征值全都不等于零.

(7) 相似矩阵有相同的特征多项式,因此有相同的特征值.

(8) 注意:实矩阵的特征值一般是复数.对于实向量 $X\neq 0$,必有 $X^TX>0$(即 X 与 X 的内积或 X 的模的平方大于 0),而对复向量 $X\neq 0$,未必有 $X^TX>0$(例如 $X=(1,i)^T\neq 0$,有 $X^TX=0$),但必有$\overline{X}^TX>0$.在证明题中,若未知特征值是实数,就必须把其对应的特征向量当成复向量来处理.

6. 矩阵可对角化的条件和相似标准形(主教材 7.5－7.6 节)

(1) n 阶矩阵 A 与对角阵相似的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

(2) n 阶矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值,则 A 可对角化(因为不同特征值对应的特征向量线性无关).此条件是充分的,但不是必要的.也就是由 A 可对角化不能推出 A 必有 n 个不相同的特征值.

(3) 若 n 阶矩阵 A 存在一个特征值,其特征子空间的维数小于特征值的重数,则 A 不能与对角阵相似(因为 A 的所有特征值的重数大于或等于其特征子空间的维数,从而 A 的线性无关的特征向量的个数小于 n).所以,A 与对角阵相似

的充要条件也可以叙述为：$\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的重数等于其特征子空间的维数.

(4) 实对称矩阵一定存在正交矩阵使之与对角矩阵既相似又相合. 即存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$($\boldsymbol{Q}$ 的 n 列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量)使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n).$$

(5) 由(4)可知：与 $\boldsymbol{A}$ 对应的二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 可以通过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 化为标准形，即

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

这在二次曲面(线)化标准形中及其他问题中都有重要的应用.

7. 矩阵对角化的解题步骤(主教材 7.5 节第 244 页，7.6 节第 249 页)

(1) 对 n 阶可对角化矩阵 $\boldsymbol{A}$，求变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$(对角阵)的解题步骤：

① 求 $\boldsymbol{A}$ 的互异特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$，其重数分别为 $r_1,\cdots,r_m$(它们的和等于 n).

② 求特征值 λ_i 对应的特征子空间 N_{λ_i}(其维数等于 λ_i 的重数)的基 $\{\boldsymbol{X}_{i1},\boldsymbol{X}_{i2},\cdots,\boldsymbol{X}_{ir_i}\}$，即$(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系($i=1,2,\cdots,m$).

③ 将 m 个特征子空间的基向量依次按列排成矩阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{X}_{11},\cdots,\boldsymbol{X}_{1r_1},\cdots,\boldsymbol{X}_{m1},\cdots,\boldsymbol{X}_{mr_m}]$(其中 n 个列向量线性无关，从而变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆)，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\cdots,\lambda_m,\cdots,\lambda_m).$$

(2) 对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$(对角阵)的解题步骤：

在(1)中，求得特征向量后，必须把 k 重特征值对应的 k 个线性无关的特征向量用施密特正交化方法将其化为 k 个标准正交的特征向量(当 $k=1$ 时，只要将特征向量单位化)，然后把它们按特征值的顺序、按列排成正交矩阵 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})$，则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\cdots,\lambda_m,\cdots,\lambda_m).$$

(3) 值得注意的几点

① 对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元的排序要使得第 i 个特征值 λ_i 对应的特征向量排在 $\boldsymbol{Q}$ 的第 i 列.

② 正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 不是唯一的.

③ 检查计算结果的正确性. 可以利用"$\boldsymbol{Q}$ 的任意两个列向量的内积为 0，每个列向量的长度为 1"来检查. 也可以利用 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 来检查.

8. 可对角化矩阵的应用

(1) 求 $\boldsymbol{A}^k$ ($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可对角化矩阵；k 为正整数)

若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$(对角阵)，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$.

若 $f(x)$是个多项式,可以得到 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵,而且其特征值 λ 都是特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 的单根,则特征向量组已经是正交向量组,只需将特征向量单位化,即可得正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,利用 $\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$,就有 $\boldsymbol{A}^{k}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}^{k}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$(这就避免了求逆矩阵的麻烦).

(2) 求行列式

若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,利用 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$,可以求行列式(下列 a,b 为常数)

$$\begin{aligned}|a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E}|&=|a\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}+b\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}|\\&=|\boldsymbol{P}|\,|a\boldsymbol{\Lambda}+b\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{P}^{-1}|\\&=|a\boldsymbol{\Lambda}+b\boldsymbol{E}|\\&=(a\lambda_1+b)(a\lambda_2+b)\cdots(a\lambda_n+b).\end{aligned}$$

(3) 解应用问题

参见例 19 和补充题第 18 题.一般说,应用问题所求的与自然数 n 有关的数量 x_n,y_n,如果能表达为

$$\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$$

(通常称其为递推关系式),则

$$\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\cdots=\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{\alpha}_0,$$

于是,由已知的起始状态 $\boldsymbol{\alpha}_0=(x_0,y_0)^{\mathrm{T}}$ 求 $\boldsymbol{\alpha}_n=(x_n,y_n)^{\mathrm{T}}$ 的问题,就归结为求 $\boldsymbol{A}^{n}$ 的问题.

9. 二次型的标准形和规范形(主教材 7.8 节)

(1) 二次型及其对应的矩阵

实二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一一对应,即

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_{ij}x_ix_j\quad(\text{令 } a_{ij}=a_{ji}),\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\end{aligned}$$

(其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$),$a_{ij}\in\mathbf{R}(i,j=1,2,\cdots,n)$,$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 为实对称矩阵.

例如,三元二次型

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2x_2^2-x_3^2+x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3\\&=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&-1\\\frac{1}{2}&2&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\0 & 2 & 2\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$= [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\-2 & 2 & 3\\-3 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

上式中只有第一个实对称矩阵才是二次型对应的矩阵，其余两个(不是实对称矩阵，它们可以有无穷多个)都不是此二次型对应的矩阵.

给定一个二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，根据其系数可以写出其对应的矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$，得到二次型的矩阵表示 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$. 在某些证明题中，还将二次型表示为内积，即

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AX})=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{AX}),$$
$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{X}).$$

(2) 二次型的坐标变换

n 元二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 经过坐标变换(或称非退化线性变换)$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$($\boldsymbol{C}$ 为可逆阵)，化为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的二次型

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=(\boldsymbol{CY})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ACY}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BY},$$

其中 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$ 仍然是实对称矩阵. 对二次型用配方法或对 $\boldsymbol{A}$ 做同样类型的行、列变换可找到变换矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

(b_i 不一定是特征值)，其对应的二次型为

$$\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BY}=\sum_{i=1}^{n} b_i y_i^2 \quad (\text{纯平方项的和}).$$

如果做正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$($\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵)，且 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，则

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQY}=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2.$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(3) 二次型的标准形不唯一，规范形唯一

实二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 可以通过坐标变换化为平方和(称为实二次型的标准形)，此时，实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同于对角阵，但 $\boldsymbol{A}$ 合同的对角阵不是唯一的. 然而，惯性定理指出，对角元中正数的个数 p(正惯性指数)和负数的个数 $r-p$(负惯性指数，其中 r 是 $\boldsymbol{A}$ 的秩)是由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定的，即对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}_1=\mathrm{diag}(d_1,\cdots d_p,-d_{p+1},\cdots,-d_r,0,\cdots,0)$$

(其中 $d_i>0,i=1,\cdots,r$) 为 $\boldsymbol{A}$ 的合同标准形. 若取

$$C_2=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{d_r}},1,\cdots,1\right),$$

则 $$C_2^{\mathrm{T}}(C_1^{\mathrm{T}}AC_1)C_2=C^{\mathrm{T}}AC=\operatorname{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0),$$

其中 $C=C_1C_2$，并称上式中的对角矩阵为 A 的相合(合同)规范形.它是由 A 唯一确定的.

(4) 实对称矩阵相合的充要条件

任意两个 n 阶实对称矩阵相合的充分必要条件是它们有相同的规范形，或相等的正惯性指数和相等的秩，或有相等的正惯性指数和相等的负惯性指数.

全体 n 阶实对称矩阵按其规范型(不考虑 $1,-1,0$ 的排序)分类，共有$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$类.因为规范型中 A 的秩 $r=i(i=0,1,\cdots,n)$时，正惯性指数 p 可以取 $0,1,\cdots,i$(共有 $i+1$ 类)，所以，共有

$$\sum_{i=0}^{n}(i+1)=1+2+\cdots+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\text{类}.$$

(5) 求 $X^{\mathrm{T}}AX$ 的标准形的方法

求实二次型 $f=X^{\mathrm{T}}AX$ 的标准形(化 f 为平方和)有三种方法：正交变换法、配方法和同型初等行、列变换法.

① 在 $\mathbf{R}^3$中(为保持曲线或曲面的形状)必须用正交变换法

正交变换 $X=QY$(Q 为正交矩阵)是保向量长度和向量夹角不变的坐标变换，因为

$$X^{\mathrm{T}}X=(QY)^{\mathrm{T}}QY=Y^{\mathrm{T}}(Q^{\mathrm{T}}Q)Y=Y^{\mathrm{T}}Y(\text{其中 } Q^{\mathrm{T}}Q=I),$$

从而向量长度$|X|=|Y|$；向量夹角

$$\langle X_1,X_2\rangle=\arccos\frac{(X_1,X_2)}{|X_1||X_2|}=\arccos\frac{X_1^{\mathrm{T}}X_2}{|X_1||X_2|}$$
$$=\arccos\frac{Y_1^{\mathrm{T}}Y_2}{|Y_1||Y_2|}=<Y_1,Y_2>.$$

其中 $X_i=Q_iY_i(i=1,2)$.所以正交变换使 Y_1,Y_2 的夹角与 X_1,X_2 的夹角相等.

在 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$ 空间中，判别二次曲线或二次曲面的类型时，必须用正交变换法，而不能用配方法和初等变换法.

例如，在 $\mathbf{R}^3$ 中，求函数

$$f(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$

在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大或最小值问题.先求出矩阵 $A=(a_{ij})$的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 及其对应的特征向量，并将特征向量标准正交化，得到正交矩阵 Q.再做正交变换 $X=QY$(其中 $X=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$；$Y=(x_1,y_1,z_1)^{\mathrm{T}}$)化二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$

为标准形

$$f(X)=X^{\mathrm{T}}AX=\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2+\lambda_3z_1^2=g(Y).$$

由于
$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=x^2+y^2+z^2=1,$$

从而，
$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}&=(\boldsymbol{QY})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QY}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QY}\\&=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)=1.\end{aligned}$$

于是，求 $f(X)$ 在 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大、最小值，就是求 $g(Y)$ 在 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=x_1^2+y_1^2+z_1^2=1$ 上的最大、最小值. 此时，不妨设 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3$，如此，则有

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\lambda_1(x_1^2+y_1^2+z_1^2)\leqslant g(Y)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2+\lambda_3z_1^2\\&\leqslant\lambda_3(x_1^2+y_1^2+z_1^2)=\lambda_3.\end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{Y}_1=(\pm1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Y}_2=(0,0,\pm1)^{\mathrm{T}}$ 时，$g(\boldsymbol{Y}_1)=\lambda_1$，$g(\boldsymbol{Y}_2)=\lambda_3$ 分别为 $f(\boldsymbol{X})$ 的最小值和最大值. 且 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{QY}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2=(\boldsymbol{QY}_2)$ 分别为 $f(\boldsymbol{X})$ 的最小值点和最大值点.

请读者思考一下：如果对二次型，做一般的坐标变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$（$\boldsymbol{C}$ 不是正交矩阵），使

$$f(X)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})\boldsymbol{Y}=b_1x_1^2+b_2y_1^2+b_3z_1^2=g(Y)$$

（其中 $=b_1,b_2,b_3$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值）. 这样能顺利求出 $f(X)$ 在 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=1$ 上的最大、最小值吗？

② 配方法求 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 的标准形（主教材 258 - 260 页）.

③ 同型初等行、列变换法求 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 的标准形（见主教材 260 - 261 页）.

10. 正定二次型（正定矩阵）（主教材 7.9 节）

正（负）定与半正（负）定二次型（正（负）定与半正（负）定矩阵）的定义

$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 正（负）定，即 $\forall\,\boldsymbol{X}\neq0$，$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}>0(<0)$，$\boldsymbol{A}$ 称为正（负）定矩阵.

$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 半正（负）定，即 $\forall\,\boldsymbol{X}\neq0$，$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\geqslant0(\leqslant0)$，$\boldsymbol{A}$ 称为半正（负）定矩阵.

注意：若 $f(\boldsymbol{X})$ 经非退化线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$（$\boldsymbol{C}$ 为可逆阵）化为 $\boldsymbol{Y}$ 的二次型 $g(\boldsymbol{Y})$，则 $f(\boldsymbol{x})$ 和 $g(\boldsymbol{Y})$ 有相同的正（负）定性、半正（负）定性. 也就是说，相合的矩阵的正（负）定性、半正（负）定性是相同的.

对于 n 阶实对称正定矩阵 $\boldsymbol{A}$，一定存在正定矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

11. 有定二次型的几个等价命题

(1) 对于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，下列几个命题等价：

① $\boldsymbol{A}$ 是正（负）定矩阵，或 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 是（负）正定二次型.

② $\boldsymbol{A}$ 的正（负）惯性指数为 n，即 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$（负单位矩阵 $-\boldsymbol{E}$）相合.

③ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$（$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$）；

④ $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都大于(小于)零；

⑤ $\boldsymbol{A}$(或 $-\boldsymbol{A}$)的 n 个顺序主子式(左上角主子式)都大于零，即

$$|\boldsymbol{A}_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k=1,2,\cdots,n.$$

(或 $\det(-\boldsymbol{A}_k)=(-1)^k\det(\boldsymbol{A}_k)>0$，即 $\boldsymbol{A}$ 的奇数阶顺序主子式 $\det(\boldsymbol{A}_k)$(k 为奇数)都小于零，偶数阶顺序主子式 $\det(\boldsymbol{A}_k)$(k 为偶数)都大于零).

(2) 对于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，下列命题等价：

① $\boldsymbol{A}$ 是半正定(半负定)矩阵，或二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 半正定(半负定).

② $\boldsymbol{A}$ 的正(负)惯性指数为 $r(\boldsymbol{A})\leqslant n$，即

$\boldsymbol{A}$ 相合于 $\mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$ (或 $\boldsymbol{A}$ 相合于 $\mathrm{diag}(-1,\cdots,-1,0,\cdots,0)$)

其中 1(或 -1)的个数为 r 个，当 $r<n$ 时，存在 $\boldsymbol{X}\neq 0$，使得 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$.

③ $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都 $\geqslant 0$(或 $\leqslant 0$)；

④ $\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式都 $\geqslant 0$(或奇数阶的主子式 $\leqslant 0$，偶数阶主子式 $\geqslant 0$).(注意，这里是“各阶主子式”不是“各阶顺序主子式”).

12. 本章的重点和难点

(1) 重点

正交变换和正交矩阵的定义和性质；矩阵的特征值与特征向量的概念、性质和求法；矩阵相似与相合的概念和性质；矩阵可对角化的充要条件；求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵的方法；实对称矩阵的性质；对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，求正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角阵的方法；或用配方法和同型初等行、列变换法将实对称矩阵相合于对角阵；正定二次型(正定矩阵)的定义和判别方法；关于正定的各种等价命题.

(2) 难点

矩阵的三种等价关系——相抵、相似和相合之间的区别和联系；特征值与特征向量的性质和有关的证明方法；正定二次型(正定矩阵)的等价命题和证明.

7-4 例题分析与解答

例 1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是______.

(A) 1,0,1　　(B) 1,1,2　　(C) $-1,1,2$　　(D) $-1,1,1$

（研究生入学考试试题,1989 年）

解　利用 $\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|=-2$ 和 $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=2$,排除(A),(B),(D),所以,选(C).

例 2　设 λ 为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,且 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(1) 证明:λ^{-1}为 $\boldsymbol{A}^{-1}$的一个特征值;

(2) 证明:$|\boldsymbol{A}|\lambda^{-1}$为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值;

（(1),(2) 研究生入学考试试题,1989 年）

(3) $(\boldsymbol{A}^*)^2+\boldsymbol{E}$ 的特征值是__________.

（研究生入学考试试题,1998 年）

解　(1) 证法 1　因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆,

$$|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\neq 0.$$

所以,$\boldsymbol{A}$ 的特征值全不为零.

设 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0})$,两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$,得

$$\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X},$$

所以,

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\lambda^{-1}\boldsymbol{X}\quad(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}),$$

即 λ^{-1}为 $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值, 对应的特征向量仍是 $\boldsymbol{X}$.

证法 2

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|&=|\lambda\boldsymbol{AA}^{-1}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}||\lambda\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|\\&=|\boldsymbol{A}||-\lambda(\lambda^{-1}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1})|\\&=(-\lambda)^n|\boldsymbol{A}||\lambda^{-1}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}|=0.\end{aligned}$$

因为$|\boldsymbol{A}|\neq 0,\lambda\neq 0$,所以,

$$|\lambda^{-1}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}|=0,$$

即 λ^{-1}为 $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值.

(2) 证法 1　将 $\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}^*$代入 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\lambda^{-1}\boldsymbol{X}$ 中,得

$$|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\lambda^{-1}\boldsymbol{X},$$

所以,

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}\quad(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}),$$

即 $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$为 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值,其对应的特征向量仍是 $\boldsymbol{X}$.

证法 2　在 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$ 的两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$,利用 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,得

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{EX}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X},$$

移项得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=(\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|)\boldsymbol{X}\quad(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}).$$

(3) $(\boldsymbol{A}^*)^2+\boldsymbol{E}$ 的特征值是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 λ^* 的平方加 1,即为$(\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|)^2+1$.

例 3 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,证明:若 $\lambda_1\neq 0$ 是 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值,则 λ_1 也是 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值.

证 设 λ_1 为 $\boldsymbol{AB}$ 的非零特征值,对应的特征向量是 $\boldsymbol{X}_1$,即

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}_1=\lambda_1\boldsymbol{X}_1\quad(\boldsymbol{X}_1\neq\boldsymbol{0},\lambda_1\neq 0),$$

所以,$\lambda_1\boldsymbol{X}_1\neq\boldsymbol{0}$,上式两边左乘 $\boldsymbol{B}$,有

$$\boldsymbol{BA}(\boldsymbol{BX}_1)=\lambda_1(\boldsymbol{BX}_1)\quad(\boldsymbol{X}_1\neq\boldsymbol{0}).$$

显然 $\boldsymbol{BX}_1\neq\boldsymbol{0}$(否则,由 $\boldsymbol{BX}_1=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{ABX}_1=\boldsymbol{A0}=\boldsymbol{0}$,与 $\lambda_1\boldsymbol{X}_1\neq\boldsymbol{0}$ 矛盾),所以 λ_1 为 $\boldsymbol{BA}$ 的一个特征值,对应的特征向量是 $\boldsymbol{BX}_1$.有更一般的结论:$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值.因为它们的特征多项式相等,即 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|$(见本章补充题第 12 题).

例 4 设 λ_1,λ_2 为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,其对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{X}_1$,$\boldsymbol{X}_2$,则成立的是(　　).

(A) $\lambda_1=\lambda_2$ 时,$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 一定成比例

(B) $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时,$\lambda_3=\lambda_1+\lambda_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,且对应的特征向量是 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$

(C) $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时,$\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 不可能是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量

(D) $\lambda_1=0$ 时,有 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{0}$

解 (C) 正确.

(A)不正确,因为二重根可能有两个线性无关的特征向量.

(B) 不正确,(C) 正确.因为若 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于λ_3 的特征向量,即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)=\lambda_3(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)=\lambda_1\boldsymbol{X}_1+\lambda_2\boldsymbol{X}_2,$$

则
$$(\lambda_3-\lambda_1)\boldsymbol{X}_1+(\lambda_3-\lambda_2)\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时,$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 线性无关,所以,

$$\lambda_3-\lambda_1=\lambda_3-\lambda_2=0,$$

即
$$\lambda_3=\lambda_1=\lambda_2,$$

与题设矛盾,故 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 不可能是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.因此(B)不正确,而(C)正确.

$\boldsymbol{0}$ 向量一定不是特征向量,所以(D)也不正确.

例 5 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中两个向量,且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n=k\neq 0$.求矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 的特征值.

解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\&=k(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=k\boldsymbol{A},\end{aligned}$$

其中 $k=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$.设 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0})$,则

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X},$$

于是
$$kAX = k\lambda X = \lambda^2 X,$$
由 $X\neq 0$,得
$$\lambda^2 = k\lambda,$$
即 $\lambda_1=0$ 或 $\lambda_2=k$ 为 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$ 的特征值,而且 $\lambda_1=0$ 是其 $n-1$ 重特征值,因为
$$(\lambda_1 I - A)X = -AX = 0.$$
的解空间是 $n-1$ 维的,即属于 $\lambda_1=0$ 的线性无关的特征向量有 $n-1$ 个,所以 $\lambda_1=0$ 至少是 $n-1$ 的重特征值.再由
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = k,$$
又可知 $\lambda_2=k$ 是单重特征值.

例 6 设多项式 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0$,$\lambda_0$ 是矩阵 A 的一个特征值,X 是 A 对应特征值 λ_0 的特征向量.证明:$f(\lambda_0)$是 $f(A)$的特征值,且 X 仍然是 $f(A)$对应特征值 $f(\lambda_0)$的特征向量.

证 设 $AX=\lambda_0 X \quad (X\neq 0)$,则
$$\begin{aligned} f(A)X &= (a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1 A + a_0 I)X \\ &= a_n A^n X + a_{n-1}A^{n-1}X+\cdots+a_1 AX + a_0 X \\ &= a_n \lambda_0^n X + a_{n-1}\lambda_0^{n-1}X+\cdots+a_1\lambda_0 X + a_0 X \\ &= f(\lambda_0)X, \end{aligned}$$
所以,$f(\lambda_0)$是 $f(A)$的特征值,且 X 仍然是 $f(A)$对应于特征值 $f(\lambda_0)$的特征向量.

例 7 设 A,P 都是 3 阶方阵,P 可逆,已知 A 的特征值:$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$,$\lambda_3=2$. $B=A^3-5A^2$.求$|B|$,$|A+5E|$和$|5E+P^{-1}AP|$.

解 因为 $B=A^3-5A^2$, 所以 B 的特征值为
$$\mu_i=\lambda_i^3-5\lambda_i^2 (i=1,\ 2,\ 3),$$
即
$$\mu_1=-4,\qquad \mu_2=-6,\qquad \mu_3=-12,$$
所以,
$$|B|=(-4)(-6)(-12)=-288.$$
同理,$A+5E$ 的特征值为λ_i+5, 三个特征值为
$$1+5=6,\qquad -1+5=4,\qquad 2+5=7.$$
所以,
$$|A+5E|=6\cdot4\cdot7=168.$$
$$\begin{aligned} |5E+P^{-1}AP| &= |5P^{-1}P+P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}|\,|5E+A|\,|P| \\ &= |5E+A| = 168. \end{aligned}$$

例 8 下列命题正确的是(　　).

(A) 若 0 是某个矩阵的特征值,则与它对应的特征向量是零向量

(B) 若两个矩阵有相同的特征值,则他们对应的特征向量必相同

(C) 若两个矩阵有相同的特征向量,则它们对应的特征值必相同

(D) 不同的矩阵必有不同的特征多项式

(E) 不同的矩阵有不同的特征值,则他们对应的特征向量必不同

(F) 矩阵的一个特征值可以对应多个特征向量,但一个特征向量只可以属于一个特征值

解 (F)正确,其余都不正确.

例 9 设 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶实矩阵.

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|<0$,问:$\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵是否相似?

(2) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,$ad-bc=1$,$|a+d|>2$,问:$\boldsymbol{A}$ 是否可对角化?

解 (1) 由 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2<0$,知 $\boldsymbol{A}$ 有两个互异特征值 λ_1 与 λ_2,所以,$\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似.

(2)
$$
\begin{aligned}
|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2-(a+d)\lambda+1=0,
\end{aligned}
$$
因为 $|a+d|>2$,特征方程的判别式 $\Delta=(a+d)^2-4>0$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 有两个互异的实特征值 λ_1,λ_2,因此,$\boldsymbol{A}$ 可对角化.

例 10 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 相似.

(1) 求 x 和 y;

(2) 求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

(研究生入学考试试题,1988 年)

解 (1) 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,可知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值相同,因此,
$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$
$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3.$$
由
$$|\boldsymbol{A}|=-2=|\boldsymbol{B}|=-2y$$
得
$$y=1.$$
再由
$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=2+0+x=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}=2+y+(-1),$$
得
$$x=0.$$
(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值就是 $\boldsymbol{B}$ 的对角元,即 $2,1,-1$.

当 $\lambda_1=2$ 时,由 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 及

$$2I-A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

可得其特征向量

$$X_1=(1,0,0)^{\mathrm T}.$$

当 $\lambda_2=1$ 时,由 $(I-A)X=\mathbf{0}$ 及

$$I-A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

可得其特征向量

$$X_2=(0,1,1)^{\mathrm T}.$$

当 $\lambda_3=-1$ 时,由 $(I-A)X=\mathbf{0}$ 及

$$-I-A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

可得其特征向量

$$X_3=(0,1,-1)^{\mathrm T}.$$

取

$$P=[X_1\quad X_2\quad X_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

例 11 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{bmatrix}$,已知 A 有三个线性无关的特征向量,$\lambda=2$ 为 A 的二重特征值.求可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵.

(研究生入学考试试题,2000 年)

解 因为三阶矩阵 A 有三个线性无关的特征向量,所以 A 与对角矩阵相似.二重特征值 $\lambda=2$ 恰有两个线性无关的特征向量,因此,

$$r(2E-A)=1,$$

由

$$2E-A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-x-y\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得 $$x-2=0, -x-y=0,$$
所以， $$x=2, y=-2.$$

当 $\lambda_1=2$ 时，求解 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，由

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

可得其特征向量

$$\boldsymbol{X}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

再由

$$\lambda_1+\lambda_1+\lambda_2=\operatorname{tr}\boldsymbol{A},$$

即 $$4+\lambda_2=1+4+5,$$

得 $$\lambda_2=6.$$

求解 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，由

$$6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&1&-1\\-2&2&2\\3&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0\end{bmatrix},$$

可得其特征向量

$$\boldsymbol{X}_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}.$$

取 $$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{X}_1\quad\boldsymbol{X}_2\quad\boldsymbol{X}_3]=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{bmatrix},$$

则 $$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}.$$

例 12 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和三维向量 $\boldsymbol{X}$，使得向量组 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{AX},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$ 线性无关，且满足

$$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{AX}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}.$$

(1) 记 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{X}\quad\boldsymbol{AX}\quad\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}]$，求三阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$.

(2) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

（研究生入学考试试题，2001 年）

解 (1) 解法 1 由于 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{AX},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$ 线性无关，所以 3 阶矩阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{X}\quad\boldsymbol{AX}\quad\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}]$ 可逆. 欲求满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$ 的 $\boldsymbol{B}$，就要满足

$$\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{X}\quad\boldsymbol{AX}\quad\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}]$$

$$=[\boldsymbol{AX} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X} \quad \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{X}]. \tag{1}$$

将 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{AX}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$ 代入式(1)得

$$\boldsymbol{PB}=[\boldsymbol{AX} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X} \quad 3\boldsymbol{AX}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}].$$

再将 $\boldsymbol{PB}$ 的三个列向量 $\boldsymbol{AX},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X},3\boldsymbol{AX}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$ 用线性无关的 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{AX},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$ 线性表示，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{PB}&=(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X},3\boldsymbol{AX}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X})\\&=[\boldsymbol{X} \quad \boldsymbol{AX} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}]\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{2}$$

由于 $\boldsymbol{P}$ 可逆，式(2)两边左乘 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 得

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}.$$

解法 2　令 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，即

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{X} \quad \boldsymbol{AX} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}]=[\boldsymbol{X} \quad \boldsymbol{AX} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}]\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}. \tag{3}$$

上式两边对应的列分别相等，即得

$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}=b_{11}\boldsymbol{X}+b_{21}\boldsymbol{AX}+b_{31}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}, & (4)\\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=b_{12}\boldsymbol{X}+b_{22}\boldsymbol{AX}+b_{32}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}, & (5)\\ \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{X}=b_{13}\boldsymbol{X}+b_{23}\boldsymbol{AX}+b_{33}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}. & (6)\end{cases}$$

将 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{AX}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$ 代入方程(6)，得

$$3\boldsymbol{AX}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=b_{13}\boldsymbol{X}+b_{23}\boldsymbol{AX}+b_{33}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}. \tag{7}$$

再改写方程(4),(5),(7)为

$$\begin{cases}b_{11}\boldsymbol{X}+(b_{21}-1)\boldsymbol{AX}+b_{31}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},\\ b_{12}\boldsymbol{X}+b_{22}\boldsymbol{AX}+(b_{32}-1)\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},\\ b_{13}\boldsymbol{X}+(b_{23}-3)\boldsymbol{AX}+(b_{33}+2)\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}.\end{cases}$$

由于 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{AX},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$ 线性无关，上式各个系数必全部为零，得

$$b_{11}=b_{12}=b_{13}=b_{22}=b_{31}=0,$$

$$b_{21}=b_{32}=1,b_{23}=3,b_{33}=-2,$$

故

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}.$$

(2) 因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值相同.

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ -1 & \lambda & -3\\ 0 & -1 & \lambda+2\end{vmatrix}$$
$$=\lambda(\lambda+3)(\lambda-1)=0,$$
得
$$\lambda_1=0,\lambda_2=-3,\lambda_3=1.$$
所以，$\boldsymbol{A}$ 的特征值也是 $0,-3,1$，从而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $1,-2,2$. 因此，
$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=1\cdot(-2)\cdot 2=-4.$$

例 13(习题 25) 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，$a_i\in\mathbf{R}$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

(1) 证明：$\boldsymbol{B}^k=t\boldsymbol{B}$，其中 k 为正整数，t 为常数，并求 t；

(2) 求可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵，并写出此对角矩阵.

(研究生入学考试试题，2000 年)

解 (1)
$$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$
$$=m\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=m\boldsymbol{B},$$
其中
$$m=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1^2+\cdots+a_n^2=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}.$$
$$\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{B}=m\boldsymbol{B}^2=m^2\boldsymbol{B}.$$
用数学归纳法可以得
$$\boldsymbol{B}^k=m^{k-1}\boldsymbol{B}=t\boldsymbol{B},$$
其中
$$t=(\operatorname{tr}\boldsymbol{B})^{k-1}=\Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)^{k-1}.$$

(2) 先求特征值.

解法 1 设
$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}),$$
则
$$\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X}=m\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=m\lambda\boldsymbol{X},$$
由 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 得
$$\lambda^2=m\lambda,$$
即 $\lambda_1=0$ 或 $\lambda_2=m$.

$\lambda_1=0$ 时，由
$$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},$$
及
$$r(\boldsymbol{B})=1,$$
可知特征值 $\lambda_1=0$ 对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量，所以，$\lambda_1=0$ 至少是 $\boldsymbol{B}$ 的 $n-1$ 重特征值. 由
$$\sum_{i=1}^n\lambda_i=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}=m,$$
得 $\lambda_2=m$ 是一个一重特征值.

解法 2　设 $a_1 \neq 0$，在 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$ 中将第 1 行乘 $\left(-\dfrac{a_i}{a_1}\right)$ 加到第 i 行 $(i=2,\cdots,n)$，再将第 i 列乘 $\left(\dfrac{a_i}{a_1}\right)$ 都加到第 1 列 $(i=2,\cdots,n)$，得

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda-a_n^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -\dfrac{a_2}{a_1}\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\dfrac{a_n}{a_1}\lambda & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^{n-1}\left(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)=0,$$

所以，$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}a_i^2=m.$$

再求特征向量. 当 $\lambda_1=0$ 时，解 $(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 由于 $r(\boldsymbol{B})=1$，当 $a_1\neq 0$ 时，只需解第一个方程

$$a_1^2x_1+a_1a_2x_2+\cdots+a_1a_nx_n=0,$$

其基础解系含 $n-1$ 个解向量，所以，$\lambda_1=0$ 对应的线性无关的特征向量为

$\boldsymbol{X}_1=(-a_2,a_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_2=(-a_3,0,a_1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$\boldsymbol{X}_{n-1}=(-a_n,0,\cdots,0,a_1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=m$ 时，解 $(m\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}.$$

观察出 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\alpha}$ 满足此方程，因为

$$(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}\quad(\text{其中 }\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=m\text{ 是一个数}).$$

所以，$\lambda_n=m$ 对应的特征向量为

$$X_n=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}.$$

取
$$P=[X_1\quad\cdots\quad X_{n-1}\quad X_n]=\begin{bmatrix}-a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n & a_1\\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_2\\ 0 & a_1 & \cdots & 0 & a_3\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_n\end{bmatrix},$$

则
$$P^{-1}BP=\mathrm{diag}(0,\cdots,0,\sum_{i=1}^{n}a_i^2).$$

例 14 设 A 是 n 阶正交矩阵，λ 是 A 的实特征值，X 是 A 的对应于 λ 的特征向量.证明：λ 只能是 ±1，且 X 也是 A^{T} 的特征向量.

解 设 $AX=\lambda X(X\neq 0)$，两边转置再右乘 AX，得
$$X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AX=\lambda X^{\mathrm{T}}AX=\lambda^2X^{\mathrm{T}}X,$$
因为 A 是正交矩阵，$A^{\mathrm{T}}A=E$，将其代入上式，得
$$X^{\mathrm{T}}X=\lambda^2X^{\mathrm{T}}X.$$
由于 λ 是 A 的实特征值，X 也是实的特征向量，所以 $X\neq 0$ 时，$X^{\mathrm{T}}X>0$，于是得
$$\lambda^2=1,$$
即
$$\lambda=\pm1.$$

正交矩阵 A 的特征向量 X 所对应的特征值 λ 只能是 ±1，即
$$AX=\lambda X=(\pm1)X\quad(X\neq 0).$$
在上式的两边左乘 A^{T}（注意到 $A^{\mathrm{T}}A=E$），得
$$A^{\mathrm{T}}AX=(\pm1)A^{\mathrm{T}}X,$$
即
$$A^{\mathrm{T}}X=\pm A^{\mathrm{T}}AX=\pm X,$$
所以，X 也是 A^{T} 的特征向量.

例 15 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$，已知线性方程组 $AX=\beta$ 有解但不唯一.

(1) 求 a 的值；

(2) 求正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

（研究生入学考试试题，2001 年）

解 (1) 由 $AX=\beta$ 有解但不唯一，知 $r(A,\beta)=r(A)<3$.用初等行变换求 $r(A,\beta)$.
$$(A,\beta)=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & a & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ a & 1 & 1 & -2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & a & 1\\ 0 & a-1 & 1-a & 0\\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & a+2\end{array}\right].$$

由
$$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{A})<3,$$
得
$$a=-2.$$

（2）由
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 2\\ -1 & \lambda+2 & -1\\ 2 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$
$$=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)=0,$$
得
$$\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3.$$

$\lambda_1=\mathbf{0}$ 时，求解$(0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$，得特征向量
$$\boldsymbol{X}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},$$
单位化得
$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

$\lambda_2=3$ 时，求解$(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$，得特征向量
$$\boldsymbol{X}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}},$$
单位化得
$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

$\lambda_3=-3$ 时，求解$(-3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$，得特征向量
$$\boldsymbol{X}_3=(1,-2,1)^{\mathrm{T}},$$
单位化得
$$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

上面不同特征值的单位特征向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是两两正交的，所以取正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为
$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\varepsilon}_1\quad\boldsymbol{\varepsilon}_2\quad\boldsymbol{\varepsilon}_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},$$
则
$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}.$$

例 16 三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$.

解 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(-1,1,1)$ 相似. 不同的特征值对应的特征向量正交. 在与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交的平面上取两个线性无关(也是正交)的向量,如 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$,则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_3,$$

写成矩阵等式

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3]$,则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda},$$

得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

注意:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交的向量组,只需单位化即得单位正交向量组:

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\alpha}_2,\qquad \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\gamma}_1\quad \boldsymbol{\gamma}_2\quad \boldsymbol{\gamma}_3]$, 则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\text{省略了求逆矩阵的运算}),$$

且 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$,
从而得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\\&=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 17 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素均为 1.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

(研究生入学考试试题,1999 年)

(2) $\boldsymbol{A}$ 可否对角化? 若可以,求矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$(对角矩阵).

(3) 若 $f(x)$ 是 x 的 m 次多项式,且常数项为 0. 证明存在 $k\in\mathbf{R}$,使得 $f(\boldsymbol{A})=k\boldsymbol{A}$,并求出 k.

(4) 设 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称矩阵,每行的各元素之和都是 b, 若 b 是 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$ 的单根,求 $\boldsymbol{B}$ 的属于 b 的特征向量;当 $f(\lambda)=(\lambda-b)g(\lambda)$ 时(其

中 $f(\boldsymbol{B})=0$)，证明：$g(\boldsymbol{B})$的每一列都是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，求与其对应特征值；并证明：$g(\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}$，其中 k 为常数，$\boldsymbol{A}$ 为元素全部为 1 的 n 阶矩阵.

解 (1) 由 $r(\boldsymbol{A})=1$，得 $\det \boldsymbol{A}=0$，所以 0 是特征值. 当 $\lambda=0$ 时，

$$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}.$$

有 $n-r(\boldsymbol{A})=n-1$ 个线性无关的特征向量，所以 0 至少是 $n-1$ 重特征值，又

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\lambda_1+\cdots+\lambda_n=n,$$

所以有一个非 0 特征值为 n，0 是 $n-1$ 重特征值.

(2) 由于 $\boldsymbol{A}$ 的每行行和都是 n，由

$$\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\ \vdots\\ n\end{bmatrix}=n\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$$

可知，$\lambda_n=n$ 时，对应的特征向量是元素全部为 1 的 n 维列向量，记为 $\boldsymbol{X}_n=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

$\lambda_1=0$ 时，由

$$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

和

$$r(\boldsymbol{A})=1,$$

可知其同解方程组

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$$

的基础解系含 $n-1$ 个解向量，所以，$\lambda_1=0$ 对应的线性无关的特征向量为

$\boldsymbol{X}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{X}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\cdots$, $\boldsymbol{X}_{n-1}=(-1,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$.

取

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{X}_1\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{X}_{n-1}\ \ \boldsymbol{X}_n]=\begin{bmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(0,\cdots,0,n)=\boldsymbol{\Lambda}.$$

(3) 由(2)题得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$. 当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ 时，$f(\boldsymbol{A})$的特征值为 $f(\lambda)$，所以，$f(n)$和 $f(0)=0$($n-1$ 重)为 $f(\boldsymbol{A})$的 n 个特征值. 当 $k,l\in\mathbf{N}$ 时，有

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}(\text{其中 }\boldsymbol{\Lambda}^k=\operatorname{diag}(0,\cdots,0,n^k))$$

和

$$a\boldsymbol{A}^k+b\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{P}(a\boldsymbol{\Lambda}^k+b\boldsymbol{\Lambda}^l)\boldsymbol{P}^{-1},$$

所以，

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{A})&=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{P}(a_m\boldsymbol{\Lambda}^m+a_{m-1}\boldsymbol{\Lambda}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}\end{aligned}$$

$$
=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_m n^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}
$$

$$
=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(n)\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}
$$

$$
=\frac{f(n)}{n}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}
$$

$$
=\frac{f(n)}{n}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=k\boldsymbol{A},
$$

其中 $k=\dfrac{f(n)}{n}$.所以,

$$
f(\boldsymbol{A})=k\boldsymbol{A}.
$$

注意:如果 $f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}\ (a_0\neq 0)$,则不存在 k 使得 $f(\boldsymbol{A})=k\boldsymbol{A}$.因为 $f(0)\neq 0$.

(4) 记元素全部为 1 的 n 维列向量为 $\boldsymbol{X}_n=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$, 则

$$
\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_n=b\boldsymbol{X}_n.
$$

所以,b 为 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征值,对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}_n=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.依据

$$
f(\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E})g(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{O},
$$

则

$$
\boldsymbol{B}g(\boldsymbol{B})=bg(\boldsymbol{B}).
$$

令 $g(\boldsymbol{B})$的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,上式可写为

$$
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=b(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),
$$

于是

$$
\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_i=b\boldsymbol{\alpha}_i\quad(i=1,2,\cdots,n),
$$

所以 $g(\boldsymbol{B})$的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 不等于零时,都是属于特征值 $\lambda=b$ 的特征向量.又因为 b 是 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-b)g(\lambda)=0$ 的单根($g(b)\neq 0$),所以,特征子空间的维数 $\dim V_{\lambda=b}=1$.因此,$g(\boldsymbol{B})$的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 两两成比例,于是,

$$
\boldsymbol{\alpha}_i=k_i\boldsymbol{X}_n=k_i(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\quad(i=1,2,\cdots,n,\text{记 }k_1=k),
$$

如此即有

$$g(\boldsymbol{B})=[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n]=\begin{bmatrix} k & k_2 & \cdots & k_n \\ k & k_2 & \cdots & k_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}.$$

又已知 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称矩阵,从而 $g(\boldsymbol{B})$ 也是实对称矩阵,于是由 $g(\boldsymbol{B})=(g(\boldsymbol{B}))^{\mathrm{T}}$,即得

$$k=k_2=\cdots=k_n\neq 0.$$

所以, $g(\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{A}$ 为元素全部为 1 的 n 阶矩阵).

例 18 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵,证明:

(1) 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素全部大于零;

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个正交单位特征向量,对应的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则

$$\boldsymbol{A}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}};$$

(3) 当 $n=3$ 时,已知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\boldsymbol{\lambda}_1=1,\boldsymbol{\lambda}_2=2,\boldsymbol{\lambda}_3=3$,对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},$$

求 $\boldsymbol{A}$.

解 (1)令 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$, 则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} \\ &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i1}^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i1}b_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i1}b_{in} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i1}b_{i2} & \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i2}^2 & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i2}b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i1}b_{in} & \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i2}b_{in} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} b_{in}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆,$\boldsymbol{B}$ 的每列元素都不可能全为零,所以,$\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i1}^2,\ \sum_{i=1}^{n} b_{i2}^2,\cdots,\ \sum_{i=1}^{n} b_{in}^2$$

全部大于零.

(2) 令 $\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$,因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是单位正交向量组,所以 $\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵,

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_n]^{\mathrm{T}},$$

且
$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

所以,
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

得
$$\boldsymbol{A}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}.$$

(3) 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是不同的特征值对应的特征向量,所以两两正交,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组.将它们单位化

$$\boldsymbol{\gamma}_i=\frac{\boldsymbol{\alpha}_i}{|\boldsymbol{\alpha}_i|}\ (i=1,2,3),$$

则
$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}=(1,-2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$$

是单位正交特征向量组.由(2)题得

$$\boldsymbol{A}=\lambda_1\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}+\lambda_2\boldsymbol{\gamma}_2\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}+\lambda_3\boldsymbol{\gamma}_3\boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm{T}}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}13&-2&-5\\-2&10&-2\\-5&-2&13\end{bmatrix}.$$

例 19 试验性生产线每年一月进行熟练工和非熟练工的人数统计,然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他部门,其缺额由招收新的非熟练工补齐.新老非熟练工经培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工.设第 n 年一月份统计熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n,y_n,记成向量 $\boldsymbol{X}_n=(x_n,y_n)^{\mathrm{T}}$,

(1) 求 $\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}$ 的关系式,并写成矩阵形式 $\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}$;

(2) 验证 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ 是两个线性无关的特征向量,并求出相应的特征值;

(3) 当 $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 时,求 $\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}$.

（研究生入学考试试题，2000 年）

解　(1) 设第 n 年熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n, y_n，依题意第 $n+1$ 年的熟练工所占百分比 x_{n+1} 是由上一年留下的熟练工 $\frac{5}{6}x_n$ 加上新招的 $\frac{1}{6}x_n$ 和上一年非熟练工 y_n 两者经培训考核后的 $\frac{2}{5}$（成为熟练工）组成，即 $x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right)$；第 $n+1$ 年的非熟练工所占百分比 y_{n+1} 是由新招的 $\frac{1}{6}x_n$ 和上一年非熟练工 y_n 两者经培训考核后余下的 $\frac{3}{5}$（为非熟练工）组成，即

$$y_{n+1} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right).$$

所以，

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right) = \frac{9}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n, \\ y_{n+1} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right) = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n, \end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

(2) 求特征值.

解法 1　由

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{9}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & \lambda - \frac{3}{5} \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

得

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

当 $\lambda_1 = 1$ 时，解 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$，得对应的特征向量是 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$；

当 $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ 时，解 $\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X} = 0$，得对应的特征向量 $\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

解法 2

$$A\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}\frac{9}{10} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{\eta}_1,$$

$$A\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}\frac{9}{10} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_2,$$

所以,特征向量 $\boldsymbol{\eta}_1=(4,1)^{\mathrm{T}}$ 对应的特征值为 $\lambda_1=1$;特征向量 $\boldsymbol{\eta}_2=(-1,1)^{\mathrm{T}}$ 对应的特征值为 $\lambda_2=\frac{1}{2}$.

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$,A 与对角矩阵相似,取 $P=[\boldsymbol{\eta}_1\quad\boldsymbol{\eta}_2]$,则

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,\frac{1}{2}).$$

(3) 由递推关系式得

$$\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=A^2\begin{bmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{bmatrix}=\cdots=A^n\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}.$$

再由(2)题得

$$A=P\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}P^{-1},$$

其中

$$P=\begin{bmatrix}4 & -1\\1 & 1\end{bmatrix},P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}A^n&=P\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^n P^{-1}\\&=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & (\frac{1}{2})^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4+(\frac{1}{2})^n & 4-4(\frac{1}{2})^n\\1-(\frac{1}{2})^n & 1+4(\frac{1}{2})^n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}=A^n\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}8-3(\frac{1}{2})^n\\2+3(\frac{1}{2})^n\end{bmatrix}.$$

这里的三个小题实际上给出求 x_{n+1},y_{n+1} 这个应用问题的三个步骤.一般

说,这类应用问题的解决大都要经过这三个步骤,即先列出 x_{n+1},y_{n+1} 的表达式,再用一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_n$ 的等式表示之,然后找到 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_n$ 的递推关系式,一般是用矩阵表示.若矩阵与对角矩阵相似,求矩阵的 n 次方就是求特征值、特征向量和做矩阵乘法的运算.

例 20 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

的秩为 2.

(1) 求参数 c 及二次型对应矩阵的特征值;

(2) 指出方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

(研究生入学考试试题,1996 年)

解 (1) 所给二次型对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{bmatrix}.$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=2$,所以

$$\det \boldsymbol{A}=0,$$

即
$$|\boldsymbol{A}|=24(c-3)=0,$$

得
$$c=3.$$

由
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)=0,$$

得二次型对应矩阵的特征值:

$$\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9.$$

(2) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(0,4,9).$$

做坐标变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$,则方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 化为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}&=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Y}\\&=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2\\&=4y_2^2+9y_3^2=1.\end{aligned}$$

所以,$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示母线平行于 Oy_1 轴的椭圆柱面.

例 21 设四元二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,其中

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}.$$

(1) 已知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 3,求 y;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{P}$,使$(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$为对角矩阵.

(研究生入学考试试题,1996 年)

解 (1) 已知 3 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则

$$|3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0,$$

即

$$\begin{aligned}|3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}3&-1&0&0\\-1&3&0&0\\0&0&3-y&-1\\0&0&-1&1\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}3&-1\\-1&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3-y&-1\\-1&1\end{vmatrix}\\&=8(2-y)\\&=0,\end{aligned}$$

得

$$y=2.$$

(2) 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,所以,$(\boldsymbol{A}^2)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^2$ 为实对称矩阵.由

$$(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P},$$

问题化为:求 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.利用分块矩阵的运算,令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^2&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2^2\end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}_2,\boldsymbol{A}_2^2=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}.$$

用配方法或同型初等行、列变换法或正交变换法,求 $\boldsymbol{A}_2^2$ 的合同标准形,进而易得 $\boldsymbol{A}^2$ 的合同标准形.

解法 1 配方法.

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2^2\boldsymbol{X}=5x_1^2+5x_2^2+8x_1x_2$$

$$= 5(x_1 + \frac{4}{5}x_2)^2 + \frac{9}{5}x_2^2$$

$$= 5y_1^2 + \frac{9}{5}y_2^2,$$

其中
$$y_1 = x_1 + \frac{4}{5}x_2, y_2 = x_2,$$

得
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \xlongequal{\text{记作}} C_1 Y,$$

于是
$$C_1^{\mathrm{T}} A_2^2 C_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{9}{5} \end{bmatrix} = \Lambda_2.$$

取
$$P = \begin{bmatrix} I_2 & O \\ O & C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则
$$(AP)^{\mathrm{T}}(AP) = P^{\mathrm{T}} A^2 P$$
$$= \begin{bmatrix} I_2 & O \\ O & C_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^2 & O \\ O & A_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & O \\ O & C_1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} I_2 & O \\ O & C_1^{\mathrm{T}} A_2^2 C_1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} I_2 & O \\ O & \Lambda_2 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(1,1,5,\frac{9}{5}).$$

解法 2　同型初等行、列变换法.

$$\begin{bmatrix} A_2^2 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \\ \hdashline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{4}{5}(1)+(2)]{-\frac{4}{5}[1]+[2]} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{9}{5} \\ \hdashline 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

取
$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则
$$C_1^{\mathrm{T}} A_2^2 C_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{9}{5} \end{bmatrix}.$$

以下同配方法.

解法 3　正交变换法.

若存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E})$,使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=\boldsymbol{\Lambda}(\text{对角矩阵}),$$

则

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^2=\boldsymbol{\Lambda}^2(\text{仍然是对角矩阵}).$$

由
$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1=0,$$

得
$$\lambda_1=1,\lambda_2=-1.$$

对应于 $\lambda_1=1$ 和 $\lambda_2=-1$ 的单位特征向量为

$$\boldsymbol{X}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\text{和 }\boldsymbol{X}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P}_1=[\boldsymbol{X}_1\quad \boldsymbol{X}_2]$,则

$$\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}_1.$$

由
$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-1)=0,$$

得
$$\lambda_3=3,\lambda_4=1.$$

对应于 $\lambda_3=3$ 和 $\lambda_4=1$ 的单位特征向量为

$$\boldsymbol{X}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\text{和 }\boldsymbol{X}_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P}_2=[\boldsymbol{X}_3\quad \boldsymbol{X}_4]$,则

$$\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}_2.$$

取
$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} P_1^{\mathrm{T}}A_1P_1 & O \\ O & P_2^{\mathrm{T}}A_2P_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \Lambda_2 \end{bmatrix},$$

故

$$(AP)^{\mathrm{T}}(AP)=P^{\mathrm{T}}A^2P=(P^{\mathrm{T}}AP)^2$$

$$=\begin{bmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \Lambda_2 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} \Lambda_1^2 & O \\ O & \Lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{diag}(1,1,9,1).$$

例 22 设 A 为 n 阶实对称矩阵,$r(A)=n$,A_{ij} 是 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式($i,j=1,2,\cdots,n$).二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j.$$

(1) 记 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成矩阵形式,并证明二次型 $f(X)$ 的矩阵是 A^{-1}.

(2) 二次型 $g(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 与 $f(X)$ 的规范形是否相同?说明理由.

(研究生入学考试试题,2001 年)

解 (1) 设二次型 $f(X)$ 的矩阵是 B,则

$$f(X)=X^{\mathrm{T}}BX.$$

已知 $b_{ij}=|A|^{-1}A_{ij}$,利用 A 的伴随矩阵是 A 的代数余子式矩阵的转置,即

$$A^*=(A_{ij})^{\mathrm{T}} \text{ 和 } A^{-1}=|A|^{-1}A^*,$$

得

$$B^{\mathrm{T}}=(|A|^{-1}A_{ij})^{\mathrm{T}}=|A|^{-1}A^*=A^{-1}.$$

所以,

$$B=(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}=A^{-1} \quad (\text{为对称矩阵}).$$

$$f(X)=X^{\mathrm{T}}A^{-1}X.$$

(2) 解法 1(利用定义) 由于 $|A|\neq 0$,A 可逆,令 $X=A^{-1}Y$,$\forall X\neq \mathbf{0}$,则 $Y\neq\mathbf{0}$,

$$g(X)=X^{\mathrm{T}}AX=(A^{-1}Y)^{\mathrm{T}}A(A^{-1}Y)$$

$$=Y^{\mathrm{T}}A^{-1}Y=f(Y),$$

$g(X)$ 与 $f(X)$ 合同,所以有相同的规范形.

解法 2

$$A^{-1}=A^{-1}AA^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}AA^{-1},$$

所以,A^{-1} 与 A 合同,$f(X)$ 与 $g(X)$ 合同,因此它们有相同的规范形.

解法 3 利用特征值.设 $AX=\lambda X$ ($X\neq\mathbf{0}$),则

$$A^{-1}X=\lambda^{-1}X,$$

λ 与 λ^{-1} 同为正或负.所以,$X^{\mathrm{T}}AX$ 和 $X^{\mathrm{T}}A^{-1}X$ 的标准形中有相同的正(负)惯性指数,因而 $f(X)$ 与 $g(X)$ 有相同的规范形.

例 23 设有 n 元二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots$$

$$+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2,$$

其中 $a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为实数. 试问当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足何种条件时，二次型为正定二次型？

（研究生入学考试试题，2000 年）

解 因为 $f(\boldsymbol{X})$ 是完全平方项的和，所以 $f(\boldsymbol{X})\geqslant 0$. $f(\boldsymbol{X})=0$ 的充要条件是

$$\begin{aligned} x_1+a_1x_2 &= x_2+a_2x_3=\cdots=x_{n-1}+a_{n-1}x_n \\ &= x_n+a_nx_1=0. \end{aligned} \tag{1}$$

若方程组(1)只有零解，则 $\forall\, \boldsymbol{X}\neq 0$, $f(\boldsymbol{X})>0$，即二次型正定. 方程组(1)只有零解的充要条件是其系数行列式不等零，即

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & & & \\ & 1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_{n-1} \\ a_n & & \cdots & & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0 \quad \text{（对第一列展开）},$$

所以，$a_1a_2\cdots a_n\neq(-1)^n$ 时，二次型正定.

例 24 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵. 证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 的行列式大于 1.

（研究生入学考试试题，2000 年）

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$（注意 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$），使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{Q} &= \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)+\boldsymbol{I} \\ &= \mathrm{diag}(\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1). \end{aligned}$$

上式两边取行列式，得

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{Q}| &= |\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}|\,|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|\,|\boldsymbol{Q}| \\ &= |\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}|\,|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}| \\ &= (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1). \end{aligned}$$

所以，
$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1.$$

例 25 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称正定矩阵，$\boldsymbol{X}_i\in\mathbf{R}^n\ (i=1,2;\boldsymbol{X}_1\neq\boldsymbol{X}_2)$，证明：

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2<\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2).$$

证 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\forall\,(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)\neq\boldsymbol{0}$，有

$$(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)>0,$$

即 $$X_1^{\mathrm T}AX_1-X_1^{\mathrm T}AX_2-X_2^{\mathrm T}AX_1+X_2^{\mathrm T}AX_2>0. \tag{1}$$

又 $$(X_1^{\mathrm T}AX_2)^{\mathrm T}=X_2^{\mathrm T}A^{\mathrm T}X_1=X_2^{\mathrm T}AX_1,$$

所以, $$X_2^{\mathrm T}AX_1=X_1^{\mathrm T}AX_2,$$

于是由(1)式得

$$X_1^{\mathrm T}AX_2<\frac{1}{2}(X_1^{\mathrm T}AX_1+X_2^{\mathrm T}AX_2).$$

例 26 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵, I 是 n 阶单位阵. 已知 $B=\lambda I+A^{\mathrm T}A$. 试证: 当 $\lambda>0$ 时, 矩阵 B 为正定矩阵.

(研究生入学考试试题,1999 年)

证 因为 $$B^{\mathrm T}=(\lambda I+A^{\mathrm T}A)^{\mathrm T}=\lambda I+A^{\mathrm T}A=B,$$

所以, B 是实对称矩阵.

证法 1 利用定义. 由于二次型

$$\begin{aligned}X^{\mathrm T}BX&=X^{\mathrm T}(\lambda I+A^{\mathrm T}A)X\\&=\lambda X^{\mathrm T}X+X^{\mathrm T}A^{\mathrm T}AX\\&=\lambda X^{\mathrm T}X+(AX)^{\mathrm T}AX,\end{aligned}$$

$\forall X\neq 0$, AX 的内积

$$(AX,AX)=(AX)^{\mathrm T}AX\geqslant 0,$$

且 $\lambda>0$ 时, $\lambda X^{\mathrm T}X>0$, 从而,

$$X^{\mathrm T}BX=\lambda X^{\mathrm T}X+(AX)^{\mathrm T}AX>0,$$

所以 B 为正定矩阵.

证法 2 利用特征值全部大于零. 因为 $A^{\mathrm T}A$ 是实对称矩阵, 设 μ 是 $A^{\mathrm T}A$ 的任一特征值, 对应的特征向量是 X, 即

$$A^{\mathrm T}AX=\mu X\ (X\neq\mathbf 0).$$

两边左乘 $X^{\mathrm T}$, 有

$$X^{\mathrm T}A^{\mathrm T}AX=\mu X^{\mathrm T}X,$$

即 $$(AX)^{\mathrm T}AX=\mu X^{\mathrm T}X,$$

所以, $$\mu=\frac{(AX)^{\mathrm T}AX}{X^{\mathrm T}X}\geqslant 0$$

(因为 $X\neq 0$, $X^{\mathrm T}X>0$, $(AX)^{\mathrm T}AX\geqslant 0$).

$\lambda I+A^{\mathrm T}A$ 的特征值为 $\lambda+\mu$. 当 $\lambda>0$ 时, B 的任一特征值 $(\lambda+\mu)>0$, 所以, B 为正定矩阵.

例 27 设 A 为 m 阶实对称正定矩阵, B 是 $m\times n$ 实矩阵, $B^{\mathrm T}$ 为 B 的转置, 试证: $B^{\mathrm T}AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是秩 $r(B)=n$.

(研究生入学考试试题,1999 年)

证 充分性: 首先 $B^{\mathrm T}AB$ 是实对称矩阵, 因为

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}.$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 不是方阵，判别矩阵正定的一些定理都不好用，要利用二次型正定的定义来判别. 由于

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\quad(\text{其中 }\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}).$$

当 $r(\boldsymbol{B})=n$ 时，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 没有非零解，所以，$\forall\,\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，均有

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0},$$

从而 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}>0$ （因为 $\boldsymbol{A}$ 正定）.

所以，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 正定.

必要性：由于 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 正定，$\forall\,\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})>0,$$

所以，必须有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 没有非零解，所以，

$$r(\boldsymbol{B})=n\ (\text{此时也必有 }m\geqslant n).$$

注意：下列证明是错误的："由 $\boldsymbol{A}$ 正定，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$，于是，$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})$，所以$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$正定."错在$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})_{m\times n}$不是方阵，从而不是可逆矩阵. 如果 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，这样证明是可以的(即 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 正定的充要条件是 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$ 可逆，而(当 $\boldsymbol{P}$ 可逆时)$\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{B}$ 可逆，即 $r(\boldsymbol{B})=n$).

例 28(补充题 17) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆是正定矩阵，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$. 证明：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵.

证 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵，因为

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}.$$

证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵. 有以下方法.

证法 1 证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 的特征值全部大于零. 设 λ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 的任意一个特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}$，即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}\ (\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}),$$

于是

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}.$$

等号两边左乘有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，得

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}.$$

由于 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}$ 正定，所以，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 也正定($\boldsymbol{A}$ 正定，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也正定的证明见《大学数学——代数与几何(第 2 版)》7.9 节例 1)，则 $\forall\,\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}>0$，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}>0$，因此，

$$\lambda=\frac{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}}>0,$$

所以，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

证法 2　证明 $\boldsymbol{AB}$ 与正定矩阵合同.

由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆正定,存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$,使得
$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{E},$$
即
$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{-1}.$$
等号两边右乘 $\boldsymbol{BC}$,则
$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{BC},$$
可知 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的全都大于零的特征值,故 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 正定.而 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 合同,所以 $\boldsymbol{AB}$ 也正定.

证法 3　证明 $\boldsymbol{AB}$ 与正定矩阵 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$ 相似.

由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆正定, 所以存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使得
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q},$$
于是,
$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q})\\&=(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q})\\&=\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q},\end{aligned}$$
即 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}$ 相似,必合同.又因为
$$\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D},$$
其中 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}$ 可逆,所以 $\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}$ 正定.$\boldsymbol{AB}$ 与其相似必合同,故 $\boldsymbol{AB}$ 也正定.

证法 4　类似证法 3.由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$ (其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 为可逆矩阵),得
$$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}).$$
等式两边左乘$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}$,右乘 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$,得
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}&=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\\&=(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}})\\&=(\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D},\end{aligned}$$
其中 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}}$ 可逆.所以,$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 正定,而 $\boldsymbol{AB}$ 与其相似,必合同.因此,$\boldsymbol{AB}$ 也为正定阵.

证法 5　由于对实对称正定矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,分别存在实对称正定矩阵 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$,使得
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^2,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}^2.$$
再由
$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}&=\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{CCDD})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{CDDC}\\&=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DC}=(\boldsymbol{DC})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DC}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F},\end{aligned}$$
其中 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{DC}$ 可逆.所以 $\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 正定,而 $\boldsymbol{AB}$ 与其相似,因此 $\boldsymbol{AB}$ 也正定.

例 29(习题 53)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵,$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,证明:

$$f(\boldsymbol{X})=\det\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{A}\end{bmatrix}$$

是负定二次型.

证 证法1 做分块矩阵的块初等行变换,将所给矩阵化为下三角块阵,

$$\begin{bmatrix}1 & -\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{A}\end{bmatrix}.$$

两边取行列式,有

$$\begin{vmatrix}1 & -\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix},$$

即
$$f(\boldsymbol{X})=\begin{vmatrix}0 & \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=-(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X})|\boldsymbol{A}|,$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 正定,所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也正定,且 $|\boldsymbol{A}|>0$. 于是,$\forall\ \boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,

$$f(\boldsymbol{X})=-(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X})|\boldsymbol{A}|<0,$$

即 $f(\boldsymbol{X})$负定.

证法2 设 $n+1$ 阶行列式

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}_{n+1\text{阶}}=f(\boldsymbol{X}).$$

记
$$B_{1j+1}=\begin{vmatrix}x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n}\\ x_2 & a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}_{n\text{阶}}.$$

依$|\boldsymbol{B}|$的第一行展开,得

$$|\boldsymbol{B}|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{2+j}x_jB_{1,j+1}\quad(x_j\text{ 处于第 }j+1\text{ 列}).$$

再对 $B_{1,j+1}$依第一列展开,得

$$B_{1,j+1}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}x_iM_{ij}\quad(M_{ij}\text{是}\boldsymbol{A}\text{ 的 }a_{ij}\text{元的余子式}),$$

所以,

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{X})=|\boldsymbol{B}|&=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{2+j}x_j\sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}x_iM_{ij}\\&=(-1)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}M_{ij}x_ix_j\end{aligned}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_i x_j = -\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}$$
$$= -|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X},$$

其中，A_{ij}是$\boldsymbol{A}$的a_{ij}元的代数余子式，$\boldsymbol{A}^* = (A_{ij})^{\mathrm{T}}$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，且$(A_{ij})^{\mathrm{T}} = A_{ij}$.

由于$|\boldsymbol{A}|>0$和$\boldsymbol{A}^{-1}$正定，所以，$\forall \boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，$f(\boldsymbol{X}) = -|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X})<0$，即$f(\boldsymbol{X})$负定.

证法3　因为$\boldsymbol{A}$可逆，做非退化线性变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$ ($\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$)，有

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j,$$

即
$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = 0 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

在
$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，第$i+1$列（x_i所处的列）乘$(-y_i)$都加到第1列，则第1列变换成$(-\sum_{i=1}^{n} x_i y_i, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$，然后，对第1列展开，得

$$|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = -|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}.$$

再将$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$代入，得

$$f(\boldsymbol{X}) = |\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}.$$

由于$|\boldsymbol{A}|>0$和$\boldsymbol{A}^{-1}$正定，所以，$\forall \boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，

$$f(\boldsymbol{X}) = -|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X})<0,$$

即$f(\boldsymbol{X})$负定.

7-5　习题提示与解答

1. 求a,b,c,d,e使$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵：

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & c & d \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & e \end{bmatrix}.$$

解 利用 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$，得

$$a=-\frac{6}{7},b=\pm\frac{2}{7},c=\mp\frac{6}{7},d=\mp\frac{3}{7},e=-\frac{6}{7}.$$

2. 证明：任一个方阵如果有三个性质(对称矩阵，正交矩阵，对合矩阵即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$)中的任两个性质，则必有第三个性质.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵又是对合矩阵，由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}$，于是，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵.其余证明类似.

4. 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵.

证 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，得 $|\boldsymbol{A}|^2=1$ 和 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.又 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$.所以，

$$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})=|\boldsymbol{A}|^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E},$$

于是，$\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵.

5. 证明：

(1) 若 $\det\boldsymbol{A}=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的每个元素等于自己的代数余子式；

(2) 若 $\det\boldsymbol{A}=-1$，则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的每个元素等于其代数余子式乘 (-1).

证 (1) $\det\boldsymbol{A}=1$，则

$$\boldsymbol{A}\text{ 为正交矩阵}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*=(A_{ij})^{\mathrm{T}},$$

所以，

$$\boldsymbol{A}\text{ 为正交矩阵}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=(A_{ij}),$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素 a_{ij} 等于其代数余子式 A_{ij}.

(2) $\det\boldsymbol{A}=-1$，则

$$\boldsymbol{A}\text{ 为正交矩阵}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^*=-(A_{ij})^{\mathrm{T}},$$

所以，

$$\boldsymbol{A}\text{ 为正交矩阵}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=(-A_{ij}),$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素 a_{ij} 等于其代数余子式 A_{ij} 乘 (-1).

6. 证明：如果上(下)三角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 必是主对角元为 1 或 (-1) 的对角矩阵.

证 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 是上三角正交矩阵. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$，等式左边是下三角正交矩阵，等式右边是上三角正交矩阵，所以，$\boldsymbol{A}$ 为对角正交矩阵，即 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$，且

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11}^2,a_{22}^2,\cdots,a_{nn}^2)=\boldsymbol{E},$$

于是，$a_{ii}^2=1$，得 $a_{ii}=\pm1\ (i=1,2,\cdots,n)$，故 $\boldsymbol{A}$ 必是主对角元为 1 或 (-1) 的对角矩阵.

*7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，已知 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆，证明：

(1) $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 可交换；

(2) $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$为反对称矩阵.

证 (1) 在等式

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$$

的两端左、右都分别乘$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$,即得

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}.$$

(2) 证法 1 利用 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 和$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,由

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}]^{\mathrm{T}}&=[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}]^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\\&=[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\\&=[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}](\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\\&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})]\\&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\\&=-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\quad\text{(利用(1)题的结论)}\\&=-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}\end{aligned}$$

可知,$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$为反对称矩阵.

证法 2

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}-(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\\&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}-[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}]^{-1}\\&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}})^{-1}\\&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}-[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}]^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\qquad\text{(其中 }\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\text{)}.\end{aligned}$$

又因为 $$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}),$$

即 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是反对称矩阵,所以,$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$也是反对称矩阵.

***8**. 证明:欧氏空间的一组单位正交基变为另一组单位正交基的变换矩阵是正交矩阵.

证 设 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$和 $B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$是欧氏空间 F^n 的两组单位正交基,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$为 B_1 变为 B_2 的变换矩阵,即

$$(\boldsymbol{\eta}_i,\boldsymbol{\eta}_j)=\delta_{ij},\quad(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\delta_{ij},$$

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A},$$

则

$$\begin{aligned}\delta_{ij}=(\boldsymbol{\eta}_i,\boldsymbol{\eta}_j)&=\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\boldsymbol{\varepsilon}_k,\ \sum_{l=1}^{n}a_{lj}\boldsymbol{\varepsilon}_l\Big)\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\boldsymbol{\varepsilon}_k,\boldsymbol{\varepsilon}_l)a_{ki}a_{lj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}\\&=\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}1, & j=i,\\ 0, & j\neq i,\end{cases}\quad i,\ j=1,2,\cdots,n.$$

可见，$\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组单位正交基.所以.一组单位正交基变为另一组单位正交基的变换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

9. 利用转轴与移轴，化简下列二次曲线的方程，并画出它们的图形.

(2) $x^2+2xy+y^2-4x+y-1=0$.

解 (2)解法 1 先旋转 θ 角，消去混合项，使

$$x^2+2xy+y^2=b_{11}x_1^2+2b_{12}x_1y_1+b_{22}y_1^2.$$

由
$$\cot 2\theta=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}=0\quad(\text{可使 } b_{12}=0),$$

得
$$2\theta=\frac{\pi}{2},\theta=\frac{\pi}{4},\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

于是
$$b_{11}=a_{11}+a_{12}\tan\theta=1+1\times1=2,$$
$$b_{22}=a_{22}-a_{12}\tan\theta=1-1\times1=0.$$

令
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix},$$

代入非二次项得

$$(-4,1)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}-1=(-4,1)\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}-1$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(-3x_1+5y_1)-1.$$

于是原方程化为

$$2x_1^2+\frac{\sqrt{2}}{2}(-3x_1+5y_1)-1=0.$$

配方得
$$2\left(x_1-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{5\sqrt{2}}{2}y_1-\frac{25}{16}=0.$$

令
$$x_2=x_1-\frac{3\sqrt{2}}{4},\quad y_2=y_1,$$

于是得，
$$2x_2^2+\frac{5\sqrt{2}}{2}y_2-\frac{25}{16}=0,$$

是一条抛物线(图略).

解法 2 做坐标轴旋转将方程二次项部分 $x^2+2xy+y^2$ 化为平方项的和，可以用正交变换法.求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$的特征值($\lambda_1=2,\lambda_2=0$)和特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$

$=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$，并将其标准正交化，得

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}.$$

令
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}x_1-y_1\\x_1+y_1\end{bmatrix},$$

将其代入非二次项，以下同解法 1.

*10. 利用不变量与半不变量，判断下列二次曲线的类型，并求化简后的方程和标准方程.

(1) $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0$;

(2) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$;

(4) $x^2-4xy+4y^2+2x-2y-1=0$.

解 (1)
$$I_1=a_{11}+a_{22}=2,$$
$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{vmatrix}=-8<0,$$
$$I_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_1\\a_{21} & a_{22} & a_2\\a_1 & a_2 & a_0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 3\\3 & 1 & 1\\3 & 1 & -1\end{vmatrix}=16.$$

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}$的特征值为
$$\lambda_1=4,\lambda_2=-2.$$

由 $I_2<0$ 知曲线是双曲型，即
$$b_{11}x_1^2+b_{22}y_1^2+b_0=0,$$

其中
$$b_{11}=\lambda_1=4,\quad b_{22}=\lambda_2=-2,b_0=\frac{I_3}{I_2}=-2.$$

于是，所求双曲线方程为
$$4x_1^2-2y_1^2-2=0,$$

即
$$2x_1^2-y_1^2=1.$$

(2)
$$I_1=a_{11}+a_{22}=6,$$
$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1\\-1 & 3\end{vmatrix}=8>0,$$

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix}=-64.$$

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$的特征值为

$$\lambda_1=4,\lambda_2=2.$$

由 $I_2>0$ 知曲线是椭圆型,即

$$b_{11}x_1^2+b_{22}y_1^2+b_0=0,$$

其中 $$b_{11}=\lambda_1=4,\quad b_{22}=\lambda_2=2,\quad b_0=\frac{I_3}{I_2}=-8.$$

于是,所求椭圆方程为

$$4x_1^2+2y_1^2-8=0,$$

即 $$\frac{x_1^2}{2}+\frac{y_1^2}{4}=1.$$

(4) $$I_1=a_{11}+a_{22}=5,$$

$$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-1.$$

由 $I_2=0$ 知曲线是抛物型,即

$$b_{22}y_1^2+2b_1x_1=0,$$

其中 $$b_{22}=I_1=5,\quad b_1^2=-\frac{I_3}{I_1}=\frac{1}{5}.$$

于是,所求抛物线方程为

$$5y_1^2+\frac{2}{\sqrt{5}}x_1=0.$$

11. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的一个线性变换

$$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-2x_2,-2x_1+x_2-2x_3,-2x_2).$$

(1) 求 σ 关于自然基$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$所对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 求 σ 关于基$\{(1,1,1),(0,1,1,),(0,0,1)\}$所对应的矩阵 $\boldsymbol{B}$;

(3) 求矩阵 $\boldsymbol{C}_1$,使 $\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{A}$.

解 (1) 由

$$\sigma(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix},$$

得 σ 关于基 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 所对应的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}.$$

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1,)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)$, $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{B}$.

则
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C},$$
其中 $\boldsymbol{C}$ 满足

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(e_1,e_2,e_3)\boldsymbol{C},$$

即
$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},$$

所以
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&-2&0\\-3&1&-2\\1&-1&2\end{bmatrix}.$$

(3) 使 $\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{C}_1$ 是基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 变为自然基 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 的变换矩阵(过渡矩阵),所以,

$$(e_1,e_2,e_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}_1,$$

$$\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}.$$

12. 已知三维线性空间 V 的线性变换 σ 关于基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 所对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}.$$

(1) 求 σ 在基 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 下对应的矩阵 B,其中,

$$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3;$$

(2) 求 σ 的值域 $\sigma(V)$ 和核 $\operatorname{Ker}\sigma$;

(3) 把 $\sigma(V)$ 的基扩充为 V 的基,并求 σ 在这个基下对应的矩阵;

(4) 把 $\operatorname{Ker}\sigma$ 的基扩充为 V 的基,并求 σ 在这个基下对应的矩阵.

解 (1)由

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C},$$

其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&1&1\\3&2&1\end{bmatrix},$$

得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\\&=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&1&1\\3&2&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&1&1\\3&2&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&2&1\\3&1&-1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 由 σ 关于基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 所对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 可知

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3)=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,$$

易见，

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)+3\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3),$$

所以 σ 的值域为

$$\begin{aligned}\sigma(V)&=L(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3))\\&=L(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3))\\&=L(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3).\end{aligned}$$

σ 的核为

$$\operatorname{Ker}\sigma=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}\}.$$

$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$ 对应于 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$. 易得 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解空间为

$$N(\boldsymbol{A})=L(\boldsymbol{X})=L((1,-2,-3)^{\mathrm{T}}).$$

所以，

$$\operatorname{Ker}\sigma=L(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3).$$

(3) 将 $\sigma(V)$的基扩为 V 的基 $B_3=\{\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3\}$. 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

中右端矩阵是可逆的，$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$是 V 的基，所以 B_3 中三个向量线性无关，从而也是 V 的基. 基 B_1 到基 B_3 的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}_1$ 就是上式右端的矩阵. 于是，σ 在基 B_3 下对应的矩阵为

$$A_1=C_1^{-1}AC_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&5&-2\\3&6&-2\end{bmatrix}.$$

(4) 将 $\operatorname{Ker}\sigma$ 的基扩为 V 的基 $B_4=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3\}$. 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

中右端矩阵是可逆的,所以 B_4 也是 V 的基. 基 B_1 到基 B_4 的过渡矩阵 C_2 就是上式右端的矩阵. 于是,σ 在基 B_4 下对应的矩阵为

$$A_2=C_2^{-1}AC_2=\begin{bmatrix}2&2&0\\0&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}.$$

13. 设 $A,B\in M_n(F)$,证明:若 A 可逆,则 $AB\sim BA$.

证 因为 $BA=A^{-1}(AB)A$,所以 $AB\sim BA$.

14. 设 $A\sim B,C\sim D$,证明:

$$\begin{bmatrix}A&O\\O&C\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}B&O\\O&D\end{bmatrix}.$$

证 因为存在可逆矩阵 P_1,P_2,使得

$$P_1^{-1}AP_1=B,\quad P_2^{-1}CP_2=D,$$

所以,
$$\begin{bmatrix}P_1^{-1}&O\\O&P_2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&O\\O&C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1&O\\O&P_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B&O\\O&D\end{bmatrix},$$

即
$$\begin{bmatrix}P_1&O\\O&P_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}A&O\\O&C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1&O\\O&P_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B&O\\O&D\end{bmatrix},$$

因此命题成立.

15. 设 $A\sim B$,$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,证明:$f(A)\sim f(B)$.

证 因为存在可逆矩阵 P,使得 $B=P^{-1}AP$,于是

$$\begin{aligned}P^{-1}f(A)P&=P^{-1}(a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0E)P\\&=a_nP^{-1}A^nP+a_{n-1}P^{-1}A^{n-1}P+\cdots+\\&\quad a_1P^{-1}AP+a_0P^{-1}EP\\&=a_n(P^{-1}AP)^n+a_{n-1}(P^{-1}AP)^{n-1}+\cdots+\\&\quad a_1P^{-1}AP+a_0E\\&=a_nB^n+a_{n-1}B^{n-1}+\cdots+a_1B+a_0E\end{aligned}$$

$$= f(\boldsymbol{B}),$$

所以命题成立.

16. 设 $V(C)$是一个线性空间,$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$是 V 的基,$\sigma\in L(V,V)$.已知 σ 在基B 下对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如下,试求 σ 的特征值与特征向量(只要求特征子空间的基).

(3)
$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

解 (3)由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3,$$

得
$$\lambda=1(\text{三重根}).$$

当 $\lambda=1$ 时,解$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得基础解系为 $\boldsymbol{X}=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$,

所以,σ 的特征子空间的基为

$$\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,$$

其特征子空间为

$$V_{\lambda=1}=L(-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3).$$

17. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{bmatrix}.$$

试求 x 的值,使 $\lambda_1=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值,并求另一个特征值 λ_2 及两个特征子空间的基.

解 由

$$\lambda_1^2\lambda_2=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 4 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & x-1 \end{vmatrix}=33x-24,$$

及
$$2\lambda_1+\lambda_2=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=7+7+x,$$

得
$$\begin{cases} 9\lambda_2-33x=-24, \\ \lambda_2-x=8, \end{cases}$$

由此求解,即得

$$x=4,\quad \lambda_2=12.$$

当 $\lambda_1=3$ 时,解$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

$$(3E-A)=\begin{bmatrix}-4&-4&1\\-4&-4&1\\4&4&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-4&-4&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系为

$X_1=(-1,1,0)^T, X_2=(1,0,4)^T$,这就是特征值 $\lambda_1=3$ 的特征子空间的基.

$\lambda_2=12$ 时,解 $(\lambda_2 E-A)X=(12E-A)X=0$,

$$(12E-A)=\begin{bmatrix}5&-4&1\\-4&5&1\\4&4&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系为

$$X_3=(-1,-1,1)^T,$$

这就是特征值 $\lambda_2=12$ 的特征子空间的基.

18. 对下列矩阵 A 的特征值,能做出怎样的断言?

(2) A 不可逆;

(5) $\det(E-A^2)=0$;

(6) $A^2=E$;

(8) $A^k=O$(幂零矩阵);

(9) $A=\lambda_0 E-B$(λ_0 为常数,且已知 B 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$);

(10) A 为对角矩阵.

解 (2) 由 A 不可逆,可知 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=0$,所以,$A$ 至少有一个特征值为零.

(5) 由
$$|E^2-A|=|E-A||E+A|=0,$$
得
$$|E-A|=0$$
或
$$|E+A|=(-1)^n|-E-A|=0,$$
所以,1 或 -1 是 A 的一个特征值.

(6) 设 λ 是 A 的一个特征值,即
$$AX=\lambda X\ (X\neq 0),$$
则
$$EX=A^2X=\lambda^2X,$$
所以,$\lambda^2=1$,即 A 的特征值为 $\lambda=1$ 或 -1.

(8) 设 λ 为 A 的特征值,即
$$AX=\lambda X\ (X\neq 0),$$
由
$$A^k=O,$$
得
$$A^kX=\lambda^kX=0,$$
于是 $\lambda^k=0$,所以,幂零矩阵的特征值都是零.

(9) 由 $AX=\lambda_i X_i$ ($x_i\neq 0$) ($i=1,2,\cdots,n$),和 $A=\lambda_0 E-B$,得

$$
\begin{aligned}
AX_i &= (\lambda_0 E - B)X_i \\
&= \lambda_0 X_i - BX_i \\
&= (\lambda_0 - \lambda_i)X_i \quad (i = 1,2,\cdots,n),
\end{aligned}
$$

所以,$\lambda_0 - \lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$是 A 的特征值.

(10) 由

$$
|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda E_1 - A_1 & & & \\ & \lambda E_2 - A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda E_m - A_m \end{vmatrix}
$$

$$
= |\lambda E_1 - A_1||\lambda E_2 - A_2|\cdots|\lambda E_m - A_m| = 0,
$$

可见 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的特征值都是 A 的特征值.

19. 设 $A, B \in M_n(F)$, $AB = BA$. 证明:若 X 是矩阵 A 属于特征值 λ_0 的特征向量,则 $BX \in V_{\lambda_0}$(A 的特征子空间,即当 $BX \neq 0$ 时,BX 也是 A 属于 λ_0 的特征向量).

证 由 $AX = \lambda_0 X$ ($X \neq 0$),得

$$
A(BX) = B(AX) = B(\lambda_0 X) = \lambda_0(BX) = 0,
$$

所以,$BX \in V_{\lambda_0}$. 当 $BX \neq 0$ 时,BX 是 A 属于特征值 λ_0 的特征向量.

***20**. 设 $A, B \in M_n(F)$, A 有 n 个不同的特征值. 证明: $AB = BA \Leftrightarrow A$ 的特征向量也是 B 的特征向量.

证 必要性:由 A 有 n 个互不相同的特征值,知 A 可对角化,故 A 有 n 个线性无关的特征向量,记为 $X_1, \cdots, X_n$. 且

$$
AX_i = \lambda_i X_i (X_i \neq 0) \quad (i = 1,2,\cdots,n),
$$

则

$$
A(BX_i) = B(AX_i) = \lambda_i(BX_i),
$$

即 BX_i 属于 A 的特征值子空间 V_{λ_i}. 由于 λ_i 是 A 的单重特征值,对应的特征子空间是一维的,所以 V_{λ_i} 中任两个向量成比例,即

$$
BX_i = \mu_i X_i \quad (i = 1,2,\cdots,n),
$$

故 X_i 也是 B 的对应于特征值 $\mu_i(i=1,2,\cdots,n)$的特征向量.

充分性:已知 A 的 n 个线性无关的特征向量(因为 A 可对角化)$X_1, \cdots, X_n$ 也是 B 的特征向量,它们分别对应于的 A 和 B 的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 和 $\mu_1, \cdots, \mu_n$,即

$$
AX_i = \lambda_i X_i \text{ 和 } BX_i = \mu_i X_i (X_i \neq 0), i = 1,2,\cdots,n.
$$

取 $P = (X_1, \cdots, X_n)$ (P 可逆),则

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\Lambda_1,$$
$$P^{-1}BP=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)=\Lambda_2.$$
利用对角矩阵的乘积可以交换,即 $\Lambda_2\Lambda_1=\Lambda_1\Lambda_2$,得到
$$(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)=\Lambda_1\Lambda_2=\Lambda_2\Lambda_1=(P^{-1}BP)(P^{-1}AP).$$
上式两边左乘 P,右乘 P^{-1},即得
$$AB=BA.$$

21. 下列线性变换 $\sigma\in L(V,V)$可否对角化?如果可以,试求 V 的一组基,使 σ 在这组基下对应的矩阵为对角矩阵,并给出这个对角矩阵.

(1) 第 11 题的 σ.

解(1)
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)=0,$$
得
$$\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=-2.$$
对应的特征向量分别为
$$(-2,-1,2)^{\mathrm{T}},(2,-2,1)^{\mathrm{T}},(1,2,2)^{\mathrm{T}},$$
所以,σ 在基:
$$\{-2e_1-e_2+2e_3,2e_1-2e_2+e_3,e_1+2e_2+2e_3\}$$
下对应的矩阵为对角矩阵 $\mathrm{diag}(1,4,-2)$.

22. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是上三角矩阵,证明:

(1) 如果主对角元互不相等,则 A 与对角矩阵相似;

(2) 如果 n 个主对角元相等,且至少有一个元素 $a_{ij}\neq 0(i<j)$,则 A 不与对角矩阵相似;

(3) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$不可对角化.

解 (1) 上三角矩阵 A 的特征值就是 A 的主对角元.当 A 的主对角元互不相等时,A 有 n 个互异的特征值,所以,A 与对角阵相似.

(2) 如果 n 个主对角元相等,且都等于 c,则 A 只有一个 n 重特征值为c,而齐次线性方程组
$$(cE-A)X=0$$
的系数矩阵 $cE-A$ 的主对角元全部为 0,且至少有一个非零元 $-a_{ij}$,所以,
$$1\leqslant r(cE-A)\leqslant n-1,$$

因此,特征值 c 对应的线性无关的特征向量至多有 $n-1$ 个,故 $\boldsymbol{A}$ 不与对角阵相似.

(3) 由

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda-3)=0,$$

得 $$\lambda_1=2(\text{二重根}),\lambda_2=3.$$

$\lambda_1=2$ 时,方程$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只含一个解向量

$$\boldsymbol{X}=(1,0,0)^{\mathrm{T}},$$

即 $\dim V_{\lambda=2}=1<2$,故 $\boldsymbol{A}$ 不与对角矩阵相似.

23. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1$(二重),$\lambda_2=-2$,属于 λ_1 的特征向量有 $\boldsymbol{X}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{X}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,属于 λ_2 的特征向量有 $\boldsymbol{X}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 问 $\boldsymbol{A}$ 可否对角化?如能对角化,求出 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^k$(k 为正整数).

解 λ_1 对应的特征向量 $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$ 线性无关,又 $\lambda_2\neq\lambda_1$,所以,$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 线性无关. $\boldsymbol{A}$ 可对角化,即存在

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{X}_1\quad \boldsymbol{X}_2\quad \boldsymbol{X}_3]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix},$$

使得 $$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda},$$

所以, $$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1},$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k&=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}\\ &=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (-2)^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\\ &=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2+(-2)^k & -1+(-2)^k & -1+(-2)^k\\ -1+(-2)^k & 2+(-2)^k & -1+(-2)^k\\ -1+(-2)^k & -1+(-2)^k & 2+(-2)^k\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

24. 设

$$A=\begin{bmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&4\\0&0&0&2\end{bmatrix},$$

试求 $\boldsymbol{A}^n$（n 为正整数）.（提示：按对角块矩阵求 $\boldsymbol{A}^n$.）

解 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix},$$

其中 $$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}2&4\\0&2\end{bmatrix}.$$

由 $$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-4\\-4&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+5)=0,$$

得 $$\lambda_1=5,\lambda_2=-5.$$

λ_1,λ_2 对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{X}_1=(2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_1=(-1,2)^{\mathrm{T}}.$$

取 $$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{X}_1\quad\boldsymbol{X}_2]=\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix},$$

则 $$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}5&0\\0&-5\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

于是，$$\boldsymbol{A}_1^n=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}5^n&0\\0&(-5)^n\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=5^{n-1}\begin{bmatrix}4+(-1)^n&2+2(-1)^{n+1}\\2+2(-1)^{n+1}&1+4(-1)^n\end{bmatrix}.$$

设 $$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}2&4\\0&2\end{bmatrix}=2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$$ （注意：$\boldsymbol{A}_2$ 不可对角化），

其中 $$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&4\\0&0\end{bmatrix},$$

且 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{O}$. 于是

$$\boldsymbol{A}_2^n=(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=2^n\boldsymbol{E}+n2^{n-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}2^n&n2^{n+1}\\0&2^n\end{bmatrix}.$$

所以，
$$A^n=\begin{bmatrix}A_1^n & 0\\ 0 & A_2^n\end{bmatrix},$$
其中 A_1^n,A_2^n 如上所示.

26. 对下列实对称矩阵 A，求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ，使 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

(1) $\begin{bmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{bmatrix}$.

解 (1)先求特征值和特征向量，再将特征向量标准正交化得 Q.

由
$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & -4\\ -2 & \lambda & -2\\ -4 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-8)=0,$$
得
$$\lambda=-1 \text{ 或 } 8.$$

$\lambda=-1$ 时，其对应的特征向量为
$$X_1=(-1,0,1)^{\mathrm T},X_2=(-1,2,0)^{\mathrm T}.$$
将其正交化：取
$$\beta_1=X_1=(-1,0,1)^{\mathrm T},$$
$$\beta_2=X_2-\frac{(X_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2})^{\mathrm T},$$
取
$$\beta_2=(1,-4,1)^{\mathrm T}.$$

$\lambda=8$ 对应的特征向量为 $X_3=(2,1,2)^{\mathrm T}$，将 β_1,β_2,X_3 分别单位化，得
$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt2}(-1,0,1)^{\mathrm T},\quad \gamma_2=\frac{1}{3\sqrt2}(1,-4,1)^{\mathrm T},\quad \gamma_3=\frac{1}{3}(2,1,2)^{\mathrm T}.$$
取
$$Q=[\gamma_1\quad\gamma_2\quad\gamma_3]=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt2} & \frac{1}{3\sqrt2} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{-4}{3\sqrt2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{3\sqrt2} & \frac{2}{3}\end{bmatrix},$$
则
$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 8\end{bmatrix}.$$

27. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，且 $A^2=A$. 证明：存在正交阵 Q，使得
$$Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0),$$
其中 1 的个数等于 $r(A)$.

证 任何实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_i,\cdots,\lambda_n),$$

其中 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i=\lambda_i\boldsymbol{X}_i$.从而 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}_i=\lambda_i^2\boldsymbol{X}_i$.又 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,所以 $\lambda_i^2=\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$.于是 $\lambda_i=0$ 或 1,因此,

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0).$$

由于相似矩阵的秩相等,所以上面对角矩阵中 1 的个数等于 $r(\boldsymbol{A})$.

28.设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称幂等矩阵,$r(\boldsymbol{A})=r$,求 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|$.

解 利用上题结果:存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0).$$

于是,$\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}-2\boldsymbol{E}=\operatorname{diag}(-1,\cdots,-1,-2,\cdots,-2)$,

所以,
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q}|&=|\boldsymbol{Q}^{-1}||\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}||\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|\\&=(-1)^r(-2)^{n-r}.\end{aligned}$$

29.设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i\geqslant0(i=1,\cdots,n)$.证明:存在特征值都是非负数的实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$(即半正定矩阵),使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

证 对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$,使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),$$

于是,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{Q}^{-1}\\&=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^{-1}\cdot\\&\quad\ \boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^{-1}\\&=\boldsymbol{B}^2.\end{aligned}$$

其中,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^{-1}$ 为实对称矩阵,其特征值 $\sqrt{\lambda_i}\geqslant0(i=1,2,\cdots,n)$,即 $\boldsymbol{B}$ 为半正定矩阵.

30.证明:反对称实矩阵的特征值 λ 必是零或纯虚数.

证 已知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,$\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$.所以,$\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$.设

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}\quad(\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}).$$

上式两边取共轭和转置,然后再右乘 $\boldsymbol{X}$,并将 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$ 代入,即得

$$\begin{aligned}&(\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=(\overline{\lambda\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X},\\&(\overline{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\overline{\lambda}(\overline{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X},\\&-(\overline{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\overline{\lambda}(\overline{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X},\\&-\lambda(\overline{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\overline{\lambda}(\overline{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,$(\overline{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}>0$,所以,$-\lambda=\overline{\lambda}$.因此,特征值 λ 必为零或纯虚数.

***31**.已知 $\boldsymbol{A}$ 是反对称实矩阵,证明 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2$ 是可逆矩阵.

证 由上题可知:$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda\neq\pm1$,即

$$\det(\pm E - A)\neq 0,$$

因此，
$$|E - A^2| = |E + A||E - A| = (-1)^n|-E - A||E - A|\neq 0,$$

所以 $E - A^2$ 可逆.

*32. 已知 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$，$\beta = (b_1, \cdots, b_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中两个非零的正交向量，证明：矩阵 $A = \alpha^{\mathrm{T}}\beta$ 的特征值全为零，且 A 不可对角化.

证 因为 α, β 正交，所以 α, β 的内积

$$(\alpha, \beta) = \beta\alpha^{\mathrm{T}} = 0.$$

于是

$$A^2 = \alpha^{\mathrm{T}}(\beta\alpha^{\mathrm{T}})\beta = \alpha^{\mathrm{T}}0\beta = O,$$

即 A 为幂零矩阵，故其特征值全部为零(见 18 题(8)).

当 $\lambda = 0$ 时，线性方程组

$$(0I - A)X = -AX = 0,$$

即
$$AX = 0$$

的系数矩阵的秩

$$r(A) = r(\alpha^{\mathrm{T}}\beta) \leqslant r(\beta) = 1.$$

又因为 α, β 为非零向量，所以

$$r(A) \geqslant 1 (A = \alpha^{\mathrm{T}}\beta \neq O),$$

于是，
$$r(A) = 1.$$

因此，$AX = 0$ 的基础解系仅含 $n-1$ 个线性无关的解向量，故 A 不可对角化.

33. 若二次型 $f(x_1, \cdots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX$ 对一切 $X = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 恒有 $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$，证明：$A = O$.

证 取 $X_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$(其中第 i 个分量为 1，其余分量全为零)，则有

$$f(X_i) = X_i^{\mathrm{T}}AX_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

再取 $X_{ij} = (0, \cdots, 1, \cdots, 1 \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$(其中第 i 和第 j 个分量为 1，其余分量全为零)，则有

$$f(X_{ij}) = X_{ij}^{\mathrm{T}}AX_{ij} = 2a_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

所以，A 的 n^2 个元素全为 0，即 A 为 n 阶零矩阵.

34. 设二次型：$f(x_1, x_2, x_3) = X^{\mathrm{T}}AX$，$g(x_1, x_2, x_3) = X^{\mathrm{T}}BX$. 证明：若 $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3)$，则 $A = B$.

证 令 $F(X) = f(X) - g(X) = X^{\mathrm{T}}(A - B)X = 0$，利用上题结果，得 $A - B = O$，所以，$A = B$.

35. 设 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\simeq\boldsymbol{D}$,且它们都是 n 阶实对称矩阵,下列结论成立吗?

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})\simeq(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D})$;　　(2) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}$.

解　(1) 不成立.如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

此时,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(-1,1)$不相合.

(2) 成立.由 $\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{D}$ (其中 $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2$ 为可逆矩阵),得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix},$$

其中,$\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}_2\end{bmatrix}$仍然可逆,所以结论成立.

36. 用正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$,将下列二次型化为标准形,并给出 $\boldsymbol{Q}$.

(2) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3-2x_3x_4$.

解　(2)二次型 f 对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&-1\\-1&0&-1&1\end{bmatrix}.$$

由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0&1\\-1&\lambda-1&1&0\\0&1&\lambda-1&1\\1&0&1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1-\sqrt{2})^2(\lambda-1+\sqrt{2})^2=0,$$

得

$$\lambda_1=1+\sqrt{2}(\text{二重}),\lambda_2=1-\sqrt{2}(\text{二重}).$$

$\lambda_1=1+\sqrt{2}$对应的特征向量为

$$\boldsymbol{X}_1=(-1,-\sqrt{2},1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_2=(-\sqrt{2},-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

将其正交化:取

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{X}_1=(-1,-\sqrt{2},1,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{X}_2-\frac{(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2},2)^{\mathrm{T}}.$$

$\lambda_2=1-\sqrt{2}$对应的特征向量为

$$\boldsymbol{X}_3=(-1,\sqrt{2},1,0)^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{X}_4=(\sqrt{2},-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

将其正交化：取

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{X}_3=(-1,\sqrt{2},1,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{X}_4-\frac{(\boldsymbol{X}_4,\boldsymbol{\beta}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_3)}\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,1,\sqrt{2})^{\mathrm{T}},$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 分别单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{2}(-1,-\sqrt{2},1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{2}(-1,0,-1,\sqrt{2})^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{2}(-1,\sqrt{2},1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\gamma}_4=\frac{1}{2}(1,0,1,\sqrt{2})^{\mathrm{T}}.$$

取
$$\boldsymbol{Q}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-1&-1&1\\-\sqrt{2}&0&\sqrt{2}&0\\1&-1&1&1\\0&\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\end{bmatrix},$$

令
$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y},$$

则
$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}&&&\\&1+\sqrt{2}&&\\&&1-\sqrt{2}&\\&&&1-\sqrt{2}\end{bmatrix},$$

$$f=(1+\sqrt{2})(y_1^2+y_2^2)+(1-\sqrt{2})(y_3^2+y_4^2).$$

37. 用配方法将下列二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 化为标准形，并给出坐标变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 的变换矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&4\end{bmatrix}$.

解 (1)

$$\begin{aligned}f&=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=2x_1^2+5x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3\\&=2[x_1^2+2(x_2-x_3)x_1+(x_2-x_3)^2]+3x_2^2-4x_2x_3+2x_3^2\\&=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2^2-\frac{4}{3}x_2x_3+\frac{4}{9}x_3^2\right)+\frac{2}{3}x_3^2\\&=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{2}{3}x_3^2.\end{aligned}$$

令
$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2-x_3,\\y_2=x_2-\dfrac{2}{3}x_3,\\y_3=x_3,\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2+\dfrac{1}{3}y_3,\\ x_2=y_2+\dfrac{2}{3}y_3,\\ x_3=y_3.\end{cases}$$

于是做坐标变换

$$X=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=C(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}=CY,$$

其中
$$C=\begin{bmatrix}1&-1&\dfrac{1}{3}\\0&1&\dfrac{2}{3}\\0&0&1\end{bmatrix},$$

则有
$$f=X^{\mathrm{T}}AX=Y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACY=2y_1^2+3y_2^2+\frac{2}{3}y_3^2.$$

38. 用初等变换法将题 37 的二次型化为标准形,并给出坐标变换 $X=CY$ 的变换矩阵 C.

解

$$\begin{bmatrix}A\\E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&4\\\hdashline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&-2\\0&-2&2\\\hdashline 1&-1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&\dfrac{2}{3}\\\hdashline 1&-1&\dfrac{1}{3}\\0&1&\dfrac{2}{3}\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

做坐标变换
$$X=CY,$$

其中 $C=\begin{bmatrix}1&-1&\dfrac{1}{3}\\0&1&\dfrac{2}{3}\\0&0&1\end{bmatrix}$(这个 C 与 37 题的 C 相同是一种巧合),

则有
$$f=X^{\mathrm{T}}AX=Y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACY=2y_1^2+3y_2^2+\frac{2}{3}y_3^2.$$

39. 证明:秩为 r 的 n 阶实对称矩阵 A 可以表示为秩为 1 的 r 个实对称矩阵之和.

证 实对称矩阵 A 存在正交矩阵 $Q(Q^{-1}=Q^{\mathrm{T}})$,使得

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)=\boldsymbol{\Lambda}\ (\text{对角矩阵}),$$

其中 $\lambda_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,r)$为 A 的非零特征值．于是，

$$A=Q\boldsymbol{\Lambda}Q^{\mathrm{T}}=Q(\boldsymbol{\Lambda}_1+\boldsymbol{\Lambda}_2+\cdots+\boldsymbol{\Lambda}_r)Q^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}_i=\mathrm{diag}(0,\cdots,\lambda_i,\cdots 0)$（第 i 个元素为λ_i 其余元素均为 $0,i=1,\cdots,r$），所以，

$$\begin{aligned}A&=Q\boldsymbol{\Lambda}_1Q^{\mathrm{T}}+Q\boldsymbol{\Lambda}_2Q^{\mathrm{T}}+\cdots+Q\boldsymbol{\Lambda}_rQ^{\mathrm{T}}\\&=D_1+D_2+\cdots+D_r,\end{aligned}$$

其中 $$D_i=Q\boldsymbol{\Lambda}_iQ^{\mathrm{T}}=D_i^{\mathrm{T}}\quad(i=1,\cdots,r)$$

是秩为 1 的实对称矩阵(因为 $r(D_i)=r(\boldsymbol{\Lambda}_i)=1$)．命题得证．

40．已知 n 阶实对称幂等矩阵 A 的秩为 r，试求：

(1) 二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 的一个标准形；

(2) $\det(E+A+A^2+\cdots+A^k)$．

解 (1)(见第 27 题)n 阶实对称幂等矩阵 A 存在正交阵 $Q(Q^{\mathrm{T}}=Q^{-1})$，使得

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots 0)=\boldsymbol{\Lambda}$$

(其中 1 是 r 重特征值，0 是 $n-r$ 重特征值)．

令 $X=QY$，则

$$X^{\mathrm{T}}AX=Y^{\mathrm{T}}(Q^{\mathrm{T}}AQ)Y=y_1^2+\cdots+y_r^2$$

为二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 的一个标准形．

(2) 由 $A^2=A$，得

$$A^m=A(m=1,\cdots,k),$$

于是， $$A^m=A=Q\boldsymbol{\Lambda}Q^{\mathrm{T}},$$

且

$$\begin{aligned}&\det(I+A+A^2+\cdots+A^k)=\det(I+kA)\\&=|QQ^{\mathrm{T}}+kQ\boldsymbol{\Lambda}Q^{\mathrm{T}}|=|Q(I+k\boldsymbol{\Lambda})Q^{\mathrm{T}}|\\&=|Q||(I+k\boldsymbol{\Lambda}||Q^{\mathrm{T}}|=|Q^{\mathrm{T}}Q||I+k\boldsymbol{\Lambda}|\\&=\begin{vmatrix}k+1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&k+1&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{vmatrix}=(k+1)^r.\end{aligned}$$

41．判断题 36 中的二次型哪些是正定的．

解 (2) 非正定．因为 $\lambda_1=1+\sqrt{2}>0$，而 $\lambda_2=1-\sqrt{2}<0$．

42. 判断题 37 中的实对称矩阵哪些是正定的.

解 (1) 正定.因为特征值全部大于零.

43. 求下列二次型中的参数 t,使二次型正定:

(1) $5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

解 (1) 计算 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -1 & t\end{bmatrix},$$

则

$$A_1=5>0,$$

$$A_2=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1>0,$$

$$A_3=|\boldsymbol{A}|=t-2>0,$$

所以,$t>2$ 时二次型正定.

44. 设二次型

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j.$$

(1) 用正交变换法将其化为标准形,并判断它是否正定;

(2) 当 $n=3$ 时,求正定矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

解 (1)由

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

和

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \lambda-1 & \cdots & -\frac{1}{2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-\frac{n+1}{2})\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2}\\ 1 & \lambda-1 & \cdots & -\frac{1}{2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-\frac{n+1}{2})\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2}\\ 0 & \lambda-\frac{1}{2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-\frac{1}{2}\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-\frac{n+1}{2})(\lambda-\frac{1}{2})^{n-1}=0,$$

得
$$\lambda_1=\frac{1}{2}(n+1),\lambda_2=\frac{1}{2}(n-1\text{ 重}).$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 的每行的行和均为$\frac{1}{2}(n+1)$,可知,存在特征值

$$\lambda_1=\frac{1}{2}(n+1),$$

其对应的特征向量为

$$\boldsymbol{X}_1=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}.$$

当 $\lambda_2=\frac{1}{2}$ ($n-1$ 重根)时,

$$(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(\frac{1}{2}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

的同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_2=0,$$

得 $n-1$ 个线性无关的特征向量:

$$\boldsymbol{X}_2=(1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{X}_3=(1,1,-2,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad \cdots,$$
$$\boldsymbol{X}_n=(1,\cdots,1,-n)^{\mathrm{T}}.$$

$\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_n$ 已经为正交向量组,只需单位化.令

$$\boldsymbol{\gamma}_i=\frac{\boldsymbol{X}_i}{|\boldsymbol{X}_i|},\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\gamma}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{\gamma}_n],$$

则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交阵,且

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{2}(n+1),\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}\right).$$

所求的标准形

$$X^{\mathrm{T}}AX=\frac{1}{2}(n+1)y_1^2+\frac{1}{2}(y_2^2+\cdots+y_n^2).$$

所以，A 正定.

(2) 当 $n=3$ 时，

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},$$

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}2 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

所以，

$$A=Q\begin{bmatrix}2 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{2}\end{bmatrix}Q^{-1}$$

$$=Q\begin{bmatrix}\sqrt{2} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}Q^{-1}Q\begin{bmatrix}\sqrt{2} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}Q^{-1}.$$

取

$$B=Q\begin{bmatrix}\sqrt{2} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}Q^{-1}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix},$$

则

$$B^2=A.$$

46. 用定义证明：若 P 是 n 阶实矩阵，则 $P^{\mathrm{T}}P$ 是半正定矩阵.

证 由于 $(P^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}=P^{\mathrm{T}}P$，所以 $P^{\mathrm{T}}P$ 是实对称矩阵，因为 $\forall X\neq 0(X\in \mathbf{R}^n)$，恒有内积

$$(PX,PX)=(PX)^{\mathrm{T}}(PX)=X^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}PX\geqslant 0,$$

所以，二次型 $X^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}PX$ 半正定，即 $P^{\mathrm{T}}P$ 是半正定矩阵.

47. 设 A 是半正定矩阵，C 是可逆矩阵，证明：$C^{\mathrm{T}}AC$ 也是半正定矩阵.

证 由于 $(C^{\mathrm{T}}AC)^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}AC$，所以 $C^{\mathrm{T}}AC$ 是实对称矩阵. 因为 A 是半正定矩阵，$\forall\, Y\neq \mathbf{0}(Y\in \mathbf{R}^n)$，恒有 $Y^{\mathrm{T}}AY\geqslant 0$. $\forall\, X\neq\mathbf{0}(X\in\mathbf{R}^n)$，$X^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)X=(CX)^{\mathrm{T}}A(CX)=Y^{\mathrm{T}}AY\geqslant 0$(因为 C 是可逆矩阵，$\forall\, X\neq\mathbf{0}$，$Y=CX\neq\mathbf{0}$)，所以，二次型 $X^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)X$ 半正定，即 $C^{\mathrm{T}}AC$ 是半正定矩阵.

48. 设 A,B 皆是 n 阶正定矩阵. k,l 都是正数，用定义证明 $kA+lB$ 也是正定矩阵.

证 由 A,B 正定可知：$\forall\, X\neq 0$，$X^{\mathrm{T}}AX>0$，$X^{\mathrm{T}}BX>0$. 又 k,l 都是正数，于是，$\forall\, X\neq 0$，

$$X^{\mathrm{T}}(kA+lB)X=k(X^{\mathrm{T}}AX)+l(X^{\mathrm{T}}BX)>0,$$

所以，$kA+lB$ 也是正定矩阵.

*49. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个互异的特征值，X_1(列向量)是对应于 λ_1 的单位特征向量. 证明：$A-\lambda_1X_1X_1^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 0，$\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

证 设 $AX_i=\lambda_iX_i(X_i\neq\mathbf{0},i=1,2,\cdots,n)$. 因为实对称矩阵不同的特征值对应的特征向量正交，所以

$$(X_1,X_i)=X_1^{\mathrm{T}}X_i=0\quad(i=2,\cdots,n),$$

且

$$(X_1,X_1)=1,$$

于是，

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1X_1X_1^{\mathrm{T}})X_i&=AX_i-\lambda_1X_1(X_1^{\mathrm{T}}X_i)\\&=\lambda_iX_i-\lambda_1X_1\cdot 0=\lambda_iX_i\quad(i=2,\cdots,n),\end{aligned}$$

且

$$(A-\lambda_1X_1X_1^{\mathrm{T}})X_1=AX_1-\lambda_1X_1=0X_1.$$

所以，$0,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $A-\lambda_1X_1X_1^{\mathrm{T}}$ 的特征值.

50. 设 n 阶实对称矩阵 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 问 t 满足什么条件时，

(1) $A+tE$ 为正定矩阵；

(2) $A-tE$ 为正定矩阵.

解 (1) 因为 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，所以 $A+tE$ 的 n 个特征值为

$$\lambda_1+t\leqslant\lambda_2+t\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n+t.$$

当 $\lambda_1+t>0$，即 $t>-\lambda_1$ 时，$A+tE$ 的 n 个特征值都大于零，因而它为正定矩阵.

(2) $A-tE$ 的 n 个特征值为

$$\lambda_1 - t \leqslant \lambda_2 - t \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n - t.$$

当 $\lambda_1 - t > 0$，即 $t < \lambda_1$ 时，$\boldsymbol{A} - t\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

* **51**. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵. 证明：存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$ 和 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BC}$ 都成对角形.

证 因为 $\boldsymbol{B}$ 正定，所以，存在可逆阵 $\boldsymbol{C}_1$，使得

$$\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{E}.$$

因为$(\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1$，所以，$\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1$ 为实对称矩阵. 于是，存在正交阵 $\boldsymbol{C}_2$（注意 $\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{E}$），使得

$$\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1)\boldsymbol{C}_2 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为$(\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1)$的特征值.

令 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2$，则

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1)\boldsymbol{C}_2 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{E}.$$

于是，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$ 和 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BC}$ 都成为对角形.

* **52**. 证明：若 n 元实二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 有 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$，使得 $\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 > 0, \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2 < 0$，则存在 $\boldsymbol{X}_0 \neq \boldsymbol{0}$，使得 $\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 = 0$.

证 因为 $\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 > 0, \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2 < 0$，所以 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 是不定二次型（其正、负惯性指数都大于零），即存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC} = \mathrm{diag}(1, -1, *, \cdots, *),$$

其中“$*$”为 ± 1 或 0. 令 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CY}$，则

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})\boldsymbol{Y} = y_1^2 - y_2^2 + * y_3^2 \cdots + * y_n^2.$$

取 $\boldsymbol{Y}_0 = (1, 1, 0 \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$（即有 $\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}_0 \neq 0$），则

$$\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{Y}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})\boldsymbol{Y}_0 = 1 - 1 = 0 \quad \text{（命题得证）}.$$

* **54**. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 是正定矩阵，证明：

(1) $|\boldsymbol{A}| \leqslant a_{nn}|\boldsymbol{A}_{n-1}|$，其中 $|\boldsymbol{A}_{n-1}|$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的左上角 $n-1$ 阶主子式；

(2) $|\boldsymbol{A}| \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

证 (1) 将 $\boldsymbol{A}$ 分块为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & a_{nn} \end{bmatrix},$$

其中 $$\boldsymbol{\alpha} = (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{n-1,n})^{\mathrm{T}}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 正定，$\boldsymbol{A}$ 的 k 阶顺序主子式 $\det \boldsymbol{A}_k$ 大于零（$k = 1, 2, \cdots, n$），所以，矩阵 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 正定（$\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}$ 也正定），且 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 可逆. 利用分块矩阵的块初等行变换，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为上三角块阵，

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & O \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ 0 & a_{nn} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A_{n-1}^{-1} \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}.$$

再两边取行列式(上三角块矩阵的行列式等于对角块的行列式的乘积),得

$$|A| = |A_{n-1}|(a_{nn} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A_{n-1}^{-1} \boldsymbol{\alpha}).$$

因为 A_{n-1}^{-1} 也正定,当 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ 时,

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A_{n-1}^{-1} \boldsymbol{\alpha} > 0, a_{nn} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} A_{n-1}^{-1} \boldsymbol{\alpha} < a_{nn},$$

所以,

$$|A| \leqslant a_{nn} |A_{n-1}|.$$

(2) 由于 A 的各阶顺序主子式对应的 A 的子块 A_k 都是正定矩阵,所以利用(1)题的结果递推,即得

$$\begin{aligned} |A| &\leqslant a_{nn} |A_{n-1}| \leqslant a_{nn} a_{n-1,n-1} |A_{n-2}| \leqslant \cdots \leqslant \\ & a_{nn} a_{n-1,n-1} \cdots a_{22} |A_1| \leqslant a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

7-6 补充题提示与解答

1. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的 n 个特征值.证明:$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$ 是 A^2 的 n 个特征值,且

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ki}.$$

证 由 $$|\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n),$$

得 $$\begin{aligned} |\lambda E + A| &= (-1)^n |-\lambda E - A| \\ &= (-1)^n (-\lambda - \lambda_1)(-\lambda - \lambda_2) \cdots (-\lambda - \lambda_n), \end{aligned}$$

于是, $$\begin{aligned} |\lambda E - A| |\lambda E + A| &= |\lambda^2 E - A^2| \\ &= (\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2) \cdots (\lambda^2 - \lambda_n^2), \end{aligned}$$

即 $$|\mu E - A^2| = (\mu - \lambda_1^2)(\mu - \lambda_2^2) \cdots (\mu - \lambda_n^2),$$

所以,$\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2$ 是 A^2 的特征值.$\sum \lambda_i^2$ 是 A^2 的迹,即

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \mathrm{tr}\, A^2 = \sum_{i=1}^{n} [A^2]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ki}.$$

注意:由 $AX = \lambda_0 X$ 推出 $A^2 X = \lambda_0^2 X$ 还没有证明本题,因为当 λ_0 是 A 的 k 重特征值时,这里只证明了 λ_0^2 是 A^2 的特征值,还没有证明 λ_0^2 也是 A^2 的 k 重特征值.如用此法证明,还须指出:如果 $X_1, \cdots, X_k$ 是 A 的属于 λ_0 的 k 个线性无关的特征向量,则它们也是 A^2 的属于 λ_0^2 的 k 个线性无关的特征向量.所以,λ_0^2 至少是 A^2 的 k 重特征值,而 λ_0^2 不可能是 A^2 的 $k+1$ 重特征值,否则 A^2 将有

$m>n$ 重特征值(这是不可能的).因此,λ_0^2 也是 $\boldsymbol{A}^2$ 的 k 重特征值.

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$,$\boldsymbol{B}$ 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$.证明:$f(A)$可逆的充要条件为 $\boldsymbol{B}$ 的任一特征值都不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证 设 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_n$,即 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n),$$

则
$$f(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{E})\cdots(\boldsymbol{A}-\lambda_n\boldsymbol{E}).$$

$f(\boldsymbol{A})$可逆的充要条件是$|f(\boldsymbol{A})|\neq 0$,即

$$\begin{aligned}|f(\boldsymbol{A})|&=|(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{E})\cdots(\boldsymbol{A}-\lambda_n\boldsymbol{E})|\\&=|(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})|\,|(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{E})|\cdots|(\boldsymbol{A}-\lambda_n\boldsymbol{E})|\\&\neq 0.\end{aligned}$$

于是,
$$|(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})|=(-1)^n|(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})|\neq 0\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

即 f(A)可逆的充要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的任一特征值λ_i 都不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

注意:不能在 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$中用 $\boldsymbol{A}$ 代λ,去求 $f(\boldsymbol{A})=|\boldsymbol{AE}-\boldsymbol{B}|$,这样 $f(\boldsymbol{A})$成了一个数而不是矩阵了.

3. 设 $V(F)$是 n 维线性空间,$\sigma\in L(V,V)$,证明:

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是σ 的属于不同特征值的特征向量,则当 $c_1c_2\neq 0$ 时,$c_1\boldsymbol{\alpha}+c_2\boldsymbol{\beta}$ 不是σ 的特征向量;

(2) V 中每一非零向量都是σ 的特征向量$\Leftrightarrow\sigma=c_0I_V$,其中 $c_0\in F$ 是一个常数,I_V 是恒等变换.

证 (1) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是σ 的属于不同特征值λ_1,λ_2 的特征向量,即

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\lambda_1\boldsymbol{\alpha},\sigma(\boldsymbol{\beta})=\lambda_2\boldsymbol{\beta}.$$

假设 $c_1\boldsymbol{\alpha}+c_2\boldsymbol{\beta}$ 是σ 的属于特征值λ_0 的特征向量,即

$$\sigma(c_1\boldsymbol{\alpha}+c_2\boldsymbol{\beta})=\lambda_0(c_1\boldsymbol{\alpha}+c_2\boldsymbol{\beta}),$$

于是
$$c_1\sigma(\boldsymbol{\alpha})+c_2\sigma(\boldsymbol{\beta})=c_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+c_2\lambda_2\boldsymbol{\beta}=c_1\lambda_0\boldsymbol{\alpha}+c_2\lambda_0\boldsymbol{\beta},$$

即
$$c_1(\lambda_0-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}+c_2(\lambda_0-\lambda_2)\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}.$$

由于不同特征值对应的特征向量线性无关,所以,

$$c_1(\lambda_0-\lambda_1)=c_2(\lambda_0-\lambda_2)=0.$$

当 $c_1c_2\neq 0$ 时,$\lambda_1=\lambda_0=\lambda_2$,与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾.故 $c_1\boldsymbol{\alpha}+c_2\boldsymbol{\beta}$ 不是σ 的特征向量.

(2) 由(1)题可知,当 V 中每一非零向量都是σ 的特征向量时,σ 不可能有不同的特征值.设 $c_0\in F$ 是σ 的特征值,取 V 的一组基 $B=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$,且 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 都是σ 的对应特征值c_0 的特征向量.设 σ 在基B 下对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,则

$$\sigma(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\begin{bmatrix}c_0&&\\&\ddots&\\&&c_0\end{bmatrix},$$

于是
$$(e_1,e_2,\cdots,e_n)A=c_0(e_1,e_2,\cdots,e_n)E,$$

所以，
$$A=c_0E,$$

即
$$\sigma=c_0I_V,\text{其中 } I_V \text{ 为恒等变换}.$$

4. 证明：对任一个 n 阶矩阵 $A\in M_n(\mathbf{C})$，存在可逆阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为上三角阵.

证 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，命题成立. 假设对 $n-1$ 阶矩阵命题成立，对 n 阶矩阵 A，设 λ_1 是 A 的一个特征值，其对应的特征向量为 X_1，即

$$AX_1=\lambda_1X_1,(X_1\neq 0).$$

将 X_1 扩充为 C^n 的基 $\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$（记 $P_1=[X_1\quad X_2\quad\cdots\quad X_n]$），则

$$A[X_1\quad X_2\quad\cdots\quad X_n]=[X_1\quad X_2\quad\cdots\quad X_n]\begin{bmatrix}\lambda_1&\alpha\\0_{n-1}&A_1\end{bmatrix},$$

即
$$P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}\lambda_1&\alpha\\0&A_1\end{bmatrix}.$$

由归纳假设，对 $n-1$ 阶矩阵 A_1，存在 $n-1$ 阶可逆阵 Q，使

$$Q^{-1}A_1Q=B(B\text{ 为上三角阵}).\text{取}$$

$$P_2=\begin{bmatrix}1&\\&Q\end{bmatrix},$$

则

$$P_2^{-1}(P_1^{-1}AP_1)P_2=\begin{bmatrix}1&\\&Q^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&\alpha\\0&A_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\\&Q\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\lambda_1&\alpha Q\\0&Q^{-1}A_1Q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&\alpha Q\\0&B_1\end{bmatrix},$$

即
$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&\alpha Q\\0&B_1\end{bmatrix}\quad(\text{其中 }P=P_1P_2).$$

所以，存在可逆阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为上式右端的上三角阵.

*5. 设 A 相似于对角阵，λ_0 是 A 的特征值，X_0 是 A 对应于 λ_0 的特征向量. 证明：

(1) $r(A-\lambda_0E)^2=r(A-\lambda_0E)$；

(2) 不存在 Y，使 $(A-\lambda_0E)Y=X_0$.

证 (1) 设 A 相似于对角阵 Λ，Λ 的对角元为 A 的特征值 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$，

即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-1})$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})=\boldsymbol{\Lambda}\quad(\text{或 }\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}),$$

即满足
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i=\lambda_i\boldsymbol{X}_i\quad(\boldsymbol{X}_i\neq 0,i=0,1,\cdots,n-1),$$

于是，
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})&=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}-\lambda_0\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(0,\lambda_1-\lambda_0,\cdots,\lambda_{n-1}-\lambda_0)\boldsymbol{P}^{-1},\end{aligned}$$

从而
$$(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(0,(\lambda_1-\lambda_0)^2,\cdots,(\lambda_{n-1}-\lambda_0)^2)\boldsymbol{P}^{-1}.$$

由于 $\lambda_i-\lambda_0=0$ 的充分必要条件是$(\lambda_i-\lambda_0)^2=0$，所以，

$$\begin{aligned}r((\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})^2)&=r(\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(0,(\lambda_1-\lambda_0)^2,\cdots,(\lambda_{n-1}-\lambda_0)^2)\boldsymbol{P}^{-1})\\&=r(\operatorname{diag}(0,(\lambda_1-\lambda_0)^2,\cdots,(\lambda_{n-1}-\lambda_0)^2))\\&=r(\operatorname{diag}(0,\lambda_1-\lambda_0,\cdots,\lambda_{n-1}-\lambda_0))\\&=r(\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(0,\lambda_1-\lambda_0,\cdots,\lambda_{n-1}-\lambda_0)\boldsymbol{P}^{-1})\\&=r(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\ (\text{命题得证}).\end{aligned}$$

(2) 用反证法.假设存在 $\boldsymbol{Y}$，使得

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}_0,$$

由于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=\lambda_0\boldsymbol{X}_0,$$

即
$$(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{0}\quad(\boldsymbol{X}_0\neq 0),$$

将 $\boldsymbol{X}_0=(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{Y}$ 代入，得

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0},$$

根据(1)题 $r(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})^2=r(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})$，可知$(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与$(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 为同解方程组. 因此，若存在 $\boldsymbol{Y}$，使$(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}_0$，即$(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$ 时，也有$(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$，这与$(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}_0\neq\boldsymbol{0}$ 矛盾.所以，不存在 $\boldsymbol{Y}$，使$(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}_0$.

6、证明:(2) 正交矩阵的复特征值的模为 1.

证 (2)设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$(或 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$)，且 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一个复特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}$，即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}\quad(\boldsymbol{X}\neq 0).$$

两边取共轭转置，再右乘 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，得

$$\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}.$$

将 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 代入，得

$$\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\overline{\lambda}\lambda\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}.$$

由于 $\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}>0$，所以，

$$\overline{\lambda}\lambda=|\lambda|^2=1\quad(\text{命题得证}).$$

7. 证明:在奇数维欧氏空间中的第一类正交变换必有一个特征值为 1.

证 设 n 维欧氏空间中的第一类正交变换 σ 在一组基下对应的 n 阶矩阵为 $\boldsymbol{A}$($\boldsymbol{A}$ 必是正交矩阵,且 $\det \boldsymbol{A}=1$),由于实系数多项式 $f(\lambda)=\det(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 的复根总是成对出现的(即若 $f(\lambda)=0$,则 $f(\bar{\lambda})=0$),而 n 为奇数,所以至少有一个实根.由题 6 知,实特征值必为 ± 1.复特征值 λ 与其共轭复特征值 $\bar{\lambda}$ 的乘积为 1.再由 n 个特征值的乘积为 $\det \boldsymbol{A}=1$ 可知,-1 为实特征值必须出现偶数次或不出现,所以必有一个实特征值为 1.

8. 证明:第二类正交变换必有(-1)为其特征值.

证 类似上题,因为 n 个特征值的乘积为 $\det \boldsymbol{A}=-1$,复特征值总是成对出现,且模为 1,实特征值必为 ± 1,所以,必有一个特征值为 -1.

9. 设 σ 是欧氏空间 V 的一个变换.证明:如果 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$,$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \sigma(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$,则 σ 是线性变换,即 $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$,必有 $\sigma(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta})=\lambda \sigma(\boldsymbol{\alpha})+\mu \sigma(\boldsymbol{\beta})$,从而 σ 为正交变换.

证 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$,有

$$
\begin{aligned}
&(\sigma(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta}), \sigma(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta})) \\
&=((\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta}),(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta})) \\
&=\lambda^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})+\mu^2(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})+2 \lambda \mu(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda \sigma(\boldsymbol{\alpha})+\mu \sigma(\boldsymbol{\beta}), \lambda \sigma(\boldsymbol{\alpha})+\mu \sigma(\boldsymbol{\beta})) \\
&=\lambda^2(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \sigma(\boldsymbol{\alpha}))+\mu^2(\sigma(\boldsymbol{\beta}), \sigma(\boldsymbol{\beta}))+ \\
&\quad 2 \lambda \mu(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \sigma(\boldsymbol{\beta})) \\
&=\lambda^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\mu}^2(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})+2 \lambda \mu(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\sigma(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta}), \lambda \sigma(\boldsymbol{\alpha})+\mu \sigma(\boldsymbol{\beta})) \\
&=\lambda(\sigma(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta}), \sigma(\boldsymbol{\alpha}))+\mu(\sigma(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta}), \sigma(\boldsymbol{\beta})) \\
&=\lambda(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})+\mu(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \\
&=\lambda^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})+\mu^2(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})+2 \lambda \mu(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

再计算
$$
\begin{aligned}
&(\sigma(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta})-\lambda \sigma(\boldsymbol{\alpha})-\mu \sigma(\boldsymbol{\beta}), \sigma(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta})-\lambda \sigma(\boldsymbol{\alpha})-\mu \sigma(\boldsymbol{\beta})) \\
&=(\sigma(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta}), \sigma(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta}))+(\lambda \sigma(\boldsymbol{\alpha})+\mu \sigma(\boldsymbol{\beta}), \lambda \sigma(\boldsymbol{\alpha})+\mu \sigma(\boldsymbol{\beta}))- \\
&\quad 2(\sigma(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta}), \lambda \sigma(\boldsymbol{\alpha})+\mu \sigma(\boldsymbol{\beta})). \qquad (4)
\end{aligned}
$$

由于(1),(2),(3)式都相等,所以(4)式等于零.于是,

$$\sigma(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta})-\lambda \sigma(\boldsymbol{\alpha})-\mu \sigma(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0},$$

即
$$\sigma(\lambda \boldsymbol{\alpha}+\mu \boldsymbol{\beta})=\lambda \sigma(\boldsymbol{\alpha})-\mu \sigma(\boldsymbol{\beta}),$$

故 σ 为线性变换,从而 σ 为正交变换.

10. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n \times m}$ 是实矩阵.证明:

$$\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}) \leqslant \prod_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2 .$$

证 类似哈达马不等式的证明(见《大学数学——代数与几何(第2版)》定理7.2).

若 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})<m$,则 $\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=0$, 命题显然成立.

设 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=m=r(\boldsymbol{A})$, 则 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_m]$的 m 个列向量线性无关,由 Schmidt 正交化得

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_m]=[\boldsymbol{\beta}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{\beta}_m]\begin{bmatrix}1&\cdots&*\\\vdots&&\vdots\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{BR},$$

其中 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{\beta}_m]$的列向量组为正交向量组,$\boldsymbol{R}$ 是上三角矩阵,且 $|\boldsymbol{R}|=1$, 则

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}|=|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|,$$

$$\left|\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}[\boldsymbol{\beta}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{\beta}_m]\right|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1&&\\&\ddots&\\&&\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_m\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{k=1}^{m}|\boldsymbol{\beta}_k|^2\leqslant\prod_{k=1}^{m}|\boldsymbol{\alpha}_k|^2$$

$$=\prod_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}^2,$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_k=r_{1k}\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+r_{k-1,k}\boldsymbol{\beta}_{k-1}+\boldsymbol{\beta}_k$,且$\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{k-1},\boldsymbol{\beta}_k\}$两两正交.根据勾股定理

$$|\boldsymbol{\alpha}_k|^2=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}^2\geqslant|\boldsymbol{\beta}_k|^2.$$

11. 证明:σ 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换的充要条件是 σ 关于 V 的单位正交基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$所对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵.

证 证法1 设 σ 为对称变换,即 $\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\sigma(\boldsymbol{\beta}))$,其充分必要条件是

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i),\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\alpha}_i,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_j))\ (i,j=1,2,\cdots,n),$$

由于 $$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的单位正交基,所以,

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i),\boldsymbol{\alpha}_j)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_j\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}(\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_j)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\delta_{kj}=a_{ji},$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_j))=\left(\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\boldsymbol{\alpha}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\delta_{ik} = a_{ij}.$$

于是， $(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i),\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\alpha}_i,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_j))\Leftrightarrow a_{ji}=a_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$，

即 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵.

证法 2 $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 在单位正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标分别为 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$，则 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta})$ 在此基下的坐标分别为 $\boldsymbol{AX},\boldsymbol{AY}$. 由

$$((\boldsymbol{\alpha},\sigma(\boldsymbol{\beta}))=((\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta}),$$

得 $$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{AY})=(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{Y}),$$

即 $$(\boldsymbol{AY})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AX}),$$

则 $$\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX},$$

由于上式对任意的 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 成立，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$（因为若取 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_j$ 为自然基的单位向量，则得 $a_{ij}=a_{ji}$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$）.

12. 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_{m\times n}(\mathbf{C}),\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_{n\times m}(\mathbf{C})$. 证明：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}_1\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}_2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_3 & \boldsymbol{O}_1\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BA}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{O}_1,\boldsymbol{O}_2,\boldsymbol{O}_3$ 分别是 $m\times n,n\times n,m\times m$ 的零矩阵. 并由此推出，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 的非零特征值相同；如果 $m=n$，则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|$.

证 令 $$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix},$$

其逆为 $$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix},$$

则

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BA}\end{bmatrix},$$

所以， $$\begin{bmatrix}\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}_1\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}_2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_3 & \boldsymbol{O}_1\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BA}\end{bmatrix},$$

于是， $$\begin{vmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{E}_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{BA}\end{vmatrix},$$

即 $$\lambda^n|\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{AB}|=\lambda^m|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{BA}|,$$

故 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 的非零特征值相同. 如果 $m=n$，则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|.$$

*13. 证明：若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 至少有一个共同的特征向量.

证 设 $\boldsymbol{AX}=\lambda_0\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0})$，则

$$A(BX)=B(AX)=\lambda_0(BX).$$
可见,当 $X\in V_{\lambda_0}(A)$时,就有 $BX\in V_{\lambda_0}(A)$. 只须证明存在 $Z\neq 0, Z\in V_{\lambda_0}(A)$ 且 $BZ=\mu Z$. 则 Z 是 A,B 共同的特征向量.

设 $X_1,\cdots,X_r$ 为 $V_{\lambda_0}(A)$的基, 则 $BX_i\in V_{\lambda_0}(A)$, 于是 BX_i 可以用基 $X_1,\cdots,X_r$ 线性表示,即
$$BX_i=(X_1,\cdots,X_r)\alpha_i\quad(i=1,2,\cdots,r),$$
其中 $\alpha_i=(a_{1i},\cdots,a_{ri})^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^r$. 如此则有
$$\begin{aligned}B[X_1\ \ \cdots\ \ X_r]&=[X_1\ \ \cdots\ \ X_r][\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_r]\\&=[X_1\ \ \cdots\ \ X_r]P,\end{aligned}$$
其中 r 阶矩阵 $P=[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_r]$在复数域上有特征值 μ,所以存在 $Y_0\neq 0$,使得 $PY_0=\mu Y_0$. 将上式两端右乘 Y_0,得
$$B(X_1\ \ \cdots\ \ X_r)Y_0=(X_1\ \ \cdots\ \ X_r)PY_0=\mu[X_1\ \ \cdots\ \ X_r]Y_0,$$
即
$$BZ_0=\mu Z_0\quad(\text{或 } Z_0\in V_\mu(B)),$$
其中 $Z_0=[X_1\ \ \cdots\ \ X_r]Y_0\neq 0$,且 $Z_0\in V_{\lambda_0}(A)$,所以,Z_0 是 A,B 共同的特征向量.

14. 设 A 为 n 阶实对称矩阵,A 的 n 个特征值 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 证明: $\forall X\in\mathbf{R}^n$.
$$\lambda_1(X,X)\leqslant(AX,X)\leqslant\lambda_n(X,X),$$
并指出分别取怎样的非零向量 X 使两个等号成立.

证 对于实对称矩阵 A,存在正交阵 Q,使得
$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\Lambda.$$
令 $X=QY$,则
$$X^{\mathrm{T}}X=Y^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}QY=Y^{\mathrm{T}}Y=y_1^2+\cdots+y_n^2.$$
因为,
$$(AX,X)=X^{\mathrm{T}}AX=Y^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}AQY=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$
所以,
$$\begin{aligned}\lambda_1(X,X)&=\lambda_1(y_1^2+\cdots+y_n^2)\\&\leqslant\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\\&\leqslant\lambda_n(y_1^2+\cdots+y_n^2)=\lambda_n(X,X),\end{aligned}$$
即
$$\lambda_1(X,X)\leqslant(AX,X)\leqslant\lambda_n(X,X).$$

当 $AX=\lambda_nX$,即 X 是 A 的对应于 λ_n 的特征向量时,$(AX,X)=\lambda_n(X,X)$ 成立;当 $AX=\lambda_1X$,即 X 是 A 的对应于 λ_1 的特征向量时,$(AX,X)=\lambda_1(X,X)$ 成立.

15. 设 A,B 为 n 阶正定矩阵. 证明:$A+B$ 的最大特征值 ρ 大于 A 的最大

特征值.

证 设 μ_1,λ_n 和 ρ 分别是 $\boldsymbol{B}$ 的最小,$\boldsymbol{A}$ 的最大和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的最大特征值(因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 正定,所以 μ_1,λ_n 都大于零),$\boldsymbol{X}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_n 的特征向量,于是,由题意可知

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_n=\lambda_n\boldsymbol{X}_n \quad (\boldsymbol{X}_n\neq 0),$$

$$((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}_n,\boldsymbol{X}_n)=\boldsymbol{X}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}_n\leqslant\rho(\boldsymbol{X}_n,\boldsymbol{X}_n)\ (\text{见上题}),$$

即

$$\begin{aligned}\rho&\geqslant\frac{\boldsymbol{X}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}_n}{\boldsymbol{X}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_n}=\frac{\boldsymbol{X}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_n+\boldsymbol{X}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_n}{\boldsymbol{X}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_n}\\&\geqslant\frac{\lambda_n\boldsymbol{X}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_n+\mu_1\boldsymbol{X}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_n}{\boldsymbol{X}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_n}=\lambda_n+\mu_1\\&>\lambda_n.\end{aligned}$$

16. 设 λ_1 和 μ_1 分别是 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的最小特征值.证明:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的最小特征值 ω 大于或等于 $\lambda_1+\mu_1$.

证 由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵,所以,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵.设 ω 是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的最小特征值,对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}_1$,由 14 题即得

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}_1=\omega\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1,$$

于是

$$\begin{aligned}\omega&=\frac{\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}_1}{\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1}=\frac{\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_1}{\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1}\\&\geqslant\frac{\lambda_1\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1+\mu_1\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1}{\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1}=\lambda_n+\mu_1.\end{aligned}$$

18. 生物外部的某种特征由其内部的两个基因(A,a)组成的基因对 AA,Aa,aa 所确定.例如,某种花的三种颜色被三种基因对所确定.常染色体的遗传规律是亲本双方各自的两个基因等可能地遗传给后代一个,因此,亲本(双方)基因型与后代基因型的关系如表 7-2 所示.

表 7-2

		亲本(双方)基因型					
后代基因型		$AA-AA$	$AA-Aa$	$AA-aa$	$Aa-Aa$	$Aa-aa$	$aa-aa$
	AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
	Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

例如,第 5 列表示亲本皆为 Aa 型时,其后代为 AA,Aa,aa 型的可能性分别为 $\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$.

(1) 设某种植物有三种基因型 AA, Aa, aa，它们各占总数的百分数为 a_0，$b_0, c_0(a_0+b_0+c_0=1)$. 如果它们总是都只与 Aa 型结合而进行繁殖，问繁殖到第 n 代时，三种基因型植物占总数的百分数 a_n, b_n, c_n 各为多少？并求其极限值.

(2) 在(1)中的植物，如果初始时都与 AA 型结合，其第一代都与 Aa 型结合，第二代又都与 AA 型结合，如此交替繁殖下去，求 a_n, b_n, c_n 及其极限值.

解 (1) 设 $\boldsymbol{X}_n=(a_n, b_n, c_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_0=(a_0, b_0, c_0)^{\mathrm{T}}$，因为 AA, Aa, aa 都只与 Aa 型结合而进行繁殖，所以

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix},$$

即
$$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0,$$

其中
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}_0, \cdots, \boldsymbol{X}_n=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}_0.$$

利用对角化来求 $\boldsymbol{A}^n$. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda-\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$=\lambda\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)(\lambda-1)=0,$$

得
$$\lambda_1=0, \lambda_2=\frac{1}{2}, \lambda_2=1.$$

$\lambda_1=0$，对应的特征向量 $\boldsymbol{X}_1=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$；

$\lambda_2=\frac{1}{2}$，对应的特征向量 $\boldsymbol{X}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$；

$\lambda_3=1$,对应的特征向量 $\quad X_3=(1,2,1)^T$.

令
$$P=[X_1\quad X_2\quad X_3]=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-2&0&2\\1&1&1\end{bmatrix},$$

则
$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\Lambda,$$

即
$$A=P\Lambda P^{-1},$$

于是
$$A^n=P\Lambda^nP^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-2&0&2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&(\frac{1}{2})^n&0\\0&0&1\end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-2&0&2\\1&1&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}\end{bmatrix},$$

从而 $X_n=A^nX_0$,即

$$\begin{bmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}(a_0+b_0+c_0)+\frac{1}{2^{n+1}}(a_0-c_0)\\\frac{1}{2}(a_0+b_0+c_0)\\\frac{1}{4}(a_0+b_0+c_0)+\frac{1}{2^{n+1}}(-a_0+c_0)\end{bmatrix}.$$

其极限值为
$$\lim_{n\to\infty}X_n=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}(a_0+b_0+c_0)\\\frac{1}{2}(a_0+b_0+c_0)\\\frac{1}{4}(a_0+b_0+c_0)\end{bmatrix}.$$

(2)

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix},$$

即
$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0,$$

其中
$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix},$$

即
$$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1.$$

于是，
$$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0,$$
$$\boldsymbol{X}_3 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0,$$
$$\boldsymbol{X}_4 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_3 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{X}_0,$$
$$\boldsymbol{X}_5 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_4 = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{X}_0,$$

归纳可得

$$\boldsymbol{X}_{2n} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^n\boldsymbol{X}_0,$$
$$\boldsymbol{X}_{2n+1} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^n\boldsymbol{X}_0.$$

由
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \text{和} \ |\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \lambda - \frac{1}{4} \end{vmatrix}$$
$$= \lambda\left(\lambda - \frac{1}{4}\right)(\lambda - 1) = 0,$$

得
$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{4}, \lambda_2 = 1.$$

$\lambda_1 = 0$,对应的特征向量 $\boldsymbol{X}_1 = (1, -2, 1)^{\mathrm{T}}$;

$\lambda_2=\dfrac{1}{4}$,对应的特征向量 $\boldsymbol{X}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$;

$\lambda_3=1$,对应的特征向量 $\boldsymbol{X}_3=(5,6,1)^{\mathrm{T}}$.

取
$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{X}_1\quad \boldsymbol{X}_2\quad \boldsymbol{X}_3]=\begin{bmatrix}1&-1&5\\-2&0&6\\1&1&1\end{bmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{ABP}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda},$$

于是
$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1},$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB})^n&=\boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{bmatrix}1&-1&5\\-2&0&6\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&(\frac{1}{4})^n&0\\0&0&1\end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&\frac{8}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\frac{5}{12}+\frac{1}{3\cdot4^n}&\frac{5}{12}-\frac{2}{3\cdot4^{n+1}}&\frac{5}{12}-\frac{1}{3\cdot4^{n-1}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{12}-\frac{1}{3\cdot4^n}&\frac{1}{12}+\frac{2}{3\cdot4^{n+1}}&\frac{1}{12}+\frac{1}{3\cdot4^{n-1}}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{X}_{2n}=(\boldsymbol{AB})^n\boldsymbol{X}_0$,即

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}a_{2n}\\b_{2n}\\c_{2n}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\frac{5}{12}+\frac{1}{3\cdot4^n}&\frac{5}{12}-\frac{2}{3\cdot4^{n+1}}&\frac{5}{12}-\frac{1}{3\cdot4^{n-1}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{12}-\frac{1}{3\cdot4^n}&\frac{1}{12}+\frac{2}{3\cdot4^{n+1}}&\frac{1}{12}+\frac{1}{3\cdot4^{n-1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\frac{5}{12}(a_0+b_0+c_0)+\frac{1}{3\cdot4^n}(a_0-\frac{1}{2}b_0-4c_0)\\\frac{1}{2}(a_0+b_0+c_0)\\\frac{1}{12}(a_0+b_0+c_0)+\frac{1}{3\cdot4^n}(-a_0+\frac{1}{2}b_0+4c_0)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{X}_{2n+1}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^n\boldsymbol{X}_0,$$

即

$$\begin{bmatrix} a_{2n+1} \\ b_{2n+1} \\ c_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{12}(a_0 + b_0 + c_0) + \frac{1}{3\cdot 4^n}(a_0 - \frac{1}{2}b_0 - 4c_0) \\ \frac{1}{2}(a_0 + b_0 + c_0) \\ \frac{1}{12}(a_0 + b_0 + c_0) + \frac{1}{3\cdot 4^n}(-a_0 + \frac{1}{2}b_0 + 4c_0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(a_0 + b_0 + c_0) + \frac{1}{3\cdot 4^n}(a_0 - \frac{1}{2}b_0 - 4c_0) \\ \frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0) + \frac{1}{3\cdot 4^n}(-a_0 + \frac{1}{2}b_0 + 4c_0) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

因为
$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{X}_{2n} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12}(a_0 + b_0 + c_0) \\ \frac{1}{2}(a_0 + b_0 + c_0) \\ \frac{1}{12}(a_0 + b_0 + c_0) \end{bmatrix},$$

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{X}_{2n+1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(a_0 + b_0 + c_0) \\ \frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0) \\ 0 \end{bmatrix},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{X}_n$ 不存在.

第8章 常见曲面及二次曲面的分类

8-1 学时安排的建议

表8-1

节	教 学 内 容	复习页数
34	8.1 球面 柱面 锥面 旋转面,8.2 空间曲线方程	283—292
35	8.3 二次曲面 *8.4 二次曲面的分类	292—305

8-2 基本要求

1. 掌握球面方程的特点,会求球心和半径.

2. 掌握母线平行于坐标轴的柱面方程的特点,会勾画其图形.

3. 掌握锥面方程的特点,会勾画对称轴为坐标轴的圆锥面和椭圆锥面的图形.

4. 能熟练写出简单的旋转面方程.

5. 了解空间曲线的参数方程表示法和作为两曲面交线的表示法.

6. 熟悉常见二次曲面(椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面、椭圆抛物面、双曲抛物面)的方程和图形.

7. 会用旋转(即用正交变换将二次型化为纯平方项的和)和平移的方法求一般二次曲面的标准方程,* 知道二次曲面的不变量.

8-3 内容综述与分析

从这一章开始讨论几何问题.本章主要是空间解析几何的内容($\mathbf{R}^3$ 中常见曲面的图形)和利用二次型的正交变换对二次曲面进行化简和分类.要用到二次型的正交变换理论.

解析几何是用代数方法来解决几何问题,因此,要将几何图形与代数方程紧密相连.一方面要利用图形的几何特征去建立方程;另一方面要利用方程的特征

(如对称性,有无常数项,是否缺少某个坐标变量,截面的形状等)去想像它的图形形状.若能配合计算机作图,效果会更好.

对一般二次曲面方程,只要求知道有四个不变量,并且通过不变量可以判别曲面的类型.

1. 曲面与曲线(主教材 8.1 节和 8.2 节)

(1) 曲面方程(主教材 8.1 节)

在 $\mathbf{R}^3$ 中点的坐标(x,y,z)满足的一个方程,如 $F(x,y,z)=0$,(其中也可以缺少一个或两个坐标)就是一个曲面的方程.

注意 xOy 平面上的点的坐标是$(x,y,0)$,不能用(x,y)表示.如果方程中不含 z,如 $4x^2+y^2=1$,表示纵坐标不论取什么值,只要 (x_0,y_0) 满足方程 $4x^2+y^2=1$,则点(x_0,y_0,z) 都在此曲面上,所以 $4x^2+y^2=1$ 表示一个椭圆柱面,其母线平行于 z 轴,其准线为 xOy 平面上的一个椭圆.

曲面可以看作是适合某种条件的动点的轨迹(如动点到原点的距离等于 5 的动点轨迹是一个球面),也可以看作是某曲线依一定规律运动而形成,例如 xOy 平面上的圆

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ z=0, \end{cases}$$

绕 x 轴(或 y 轴)旋转而成球面.

(2) 曲线方程(主教材 8.2 节)

一条空间曲线须用两个方程的联立方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

(即两个曲面的交线)来表示.也可用参数方程

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \quad a\leqslant t\leqslant b \\ z=h(t), \end{cases}$$

来表示(可以理解为动点随时间 t 变化时在空间画出的轨迹).例如,在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,要表示 xOy 平面上的椭圆 $4x^2+y^2=1$,不能只用一个方程表示(因为 $4x^2+y^2=1$ 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,表示一个椭圆柱面),而必须用

$$\begin{cases} 4x^2+y^2=1, \\ z=0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\cos t, \\ y=\sin t, \\ z=0 \end{cases}$$

来表示.因此,空间曲线的表示法一般不是唯一的.又如

$$\begin{cases} x = r\cos \omega t, \\ y = r\sin \omega t, \quad a \leqslant t \leqslant b \\ z = vt, \end{cases}$$

可以看成动点随时间 t 的变化沿 z 轴方向等速上升,同时以等角速度 ω 绕 z 轴做圆周运动(圆周的半径为 r),所以,动点在空间的轨迹是圆柱螺线(螺旋线).

2. 球面(主教材 8.1.1)

球面方程是 x,y,z 的二次方程,其特点是二次项中三个平方项的系数相同.如果没有二次的混合项(如 xy,yz 或 zx).经过配方即可以求出球心和半径.若方程包含混合项,就必须先用正交变换将其中二次多项式部分化为平方项之和(其一次项也要做相应的变换),然后,再用配方去求出球心和半径.

3. 柱面(主教材 8.1.2)

柱面是由动直线(称为母线)沿某条曲线(称为准线)平行移动而形成的.柱面的准线不是唯一的.用任一个与母线相交的平面或曲面去切割柱面,其交线都是柱面的准线.

一般地说,母线平行于一个坐标轴的柱面方程不包含该坐标轴对应的坐标;反之,一个不包含某个坐标的方程的图形是母线平行于该坐标轴的柱面.但如果母线不平行于坐标轴,其柱面方程就要包含所有的坐标.例如,所有的平面都可视为柱面(此时,平面上的任意两条相交的直线,一条可视为准线,另一条可视为母线),它的一般方程是

$$ax + by + cz + d = 0.$$

已知柱面母线的方向向量 $s = (l,m,n)$ 和准线方程

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0, \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

如何求该柱面方程呢?

设点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$既在柱面的准线上又在母线上,点 $P(x,y,z)$在柱面的母线上,则(x_0,y_0,z_0) 满足:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}, \\ f(x_0,y_0,z_0) = 0, \\ g(x_0,y_0,z_0) = 0. \end{cases}$$

消去 x_0,y_0,z_0,就得到柱面方程(见本书 8-4 节例 1).

4. 锥面(主教材 8.1.3)

锥面是过一个定点(顶点)的直线(母线)依一定规律运动而形成的.锥面的准线也不是唯一的.用任一个不过顶点且与母线相交的平面去切割锥面,其交线

都是锥面的准线.

顶点在原点的锥面方程是齐次多项式.例如,方程

$$xy+yz+zx=0 \tag{1}$$

是一个锥面方程.用正交变换将二次型 $xy+yz+zx$ 化为标准形,方程(1)化为

$$x_1^2-\frac{y_1^2}{2}-\frac{z_1^2}{2}=0. \tag{2}$$

容易看出方程(2)是顶点在原点的一个圆锥面的方程.

已知锥面的顶点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,准线方程为

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0, \\ g(x,y,z)=0, \end{cases}$$

如何求此锥面方程呢?

设点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$既在锥面的准线上又在母线上,点 $P(x,y,z)$在锥面上,则(x_1,y_1,z_1)满足:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}, \\ f(x_1,y_1,z_1)=0, \\ g(x_1,y_1,z_1)=0. \end{cases}$$

消去 x_1,y_1,z_1,就得到所求的锥面方程(见本书 8-4 节例 2).

5. 旋转面(主教材 8.1.4)

圆柱面和圆锥面都是由直线绕对称轴旋转而得的曲面.若平面曲线

$$\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$$

绕 x 轴和 y 轴旋转,它所得到的旋转面方程分别为

$$F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0,$$

和

$$F(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0.$$

6. 空间曲线在坐标平面上的投影(主教材 8.2 节)

设空间曲线

$$\mathrm{L}:\begin{cases} f(x,y,z)=0, \\ g(x,y,z)=0. \end{cases}$$

求曲线 L 在 xOy(或 yOz)面上的投影,只需从方程组中消去 z(或 x),得到一个母线平行于 z(或 x)轴的柱面方程,此柱面方程与 $z=0$(或 $x=0$) 联立,即为所求的投影线方程.

*若要求 L 在平面 $x+y+z=1$ 上的投影,则必须以 L 为准线方程,以平面 $x+y+z=1$ 的法向量为母线的方向,求出柱面方程,再与 $x+y+z=1$ 联立即可.

7. 二次曲面的标准方程(主教材 8.3 节)

掌握二次曲面(椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面、椭圆抛物面和双曲抛物面)的标准方程与其图形(见主教材 293—297 页),对重积分的学习很重要.一方面要利用图形的几何特征或旋转面的形成法去建立方程;另一方面要利用方程的特征(如对称性,变量的变化范围,是否缺少某个坐标变量等)去分析图形的概况.若方程缺少常数项,则图形过坐标原点.要善于用平行于坐标面的平面去切割曲面,并以所得截面的形状去想像方程的图形的形状.

椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面和锥面都是有心二次曲面;椭圆抛物面和双曲抛物面都是无心二次曲面(没有对称中心).

8. 用正交变换法判别曲线或曲面的类型(主教材 8.4 节)

在 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$ 空间中,当曲线或曲面的方程不是标准方程时,判别曲线或曲面的类型必须用正交变换法(即做坐标系旋转,保证图形在变换前后不变形),将二次多项式部分化为平方项之和,而不能用配方法或初等变换法将二次多项式部分化为平方项之和.若方程中还含有一次项,也要做相应的变换,然后再做坐标平移变换,将其化为标准方程.因为正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 是保持向量长度和向量之间夹角不变的变换,即

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{QY})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QY}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$$

(其中 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$).这个性质在几何问题中很有用.例如,在 $\mathbf{R}^3$ 中,曲面

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{X}\\&=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+\\&\quad 2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=1\end{aligned}$$

经正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$,得到标准形

$$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{X}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2=1.$$

所以,由特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的符号即可以判别曲面的类型.若 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 全为正数,则上式是椭球面方程;若 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中有一个负的两个正的,则是单叶双曲面;若有一个正的两个负的,则是双叶双曲面;若 $\lambda_1=0,\lambda_2,\lambda_3$ 均为正的,则表示母线平行于 y_1 轴的椭圆柱面;若 $\lambda_1=0,\lambda_2,\lambda_3$ 异号,则是母线平行于 y_1 轴的双曲柱面等.

9. 本章的重点和难点

(1) 重点

常见曲面(球面、柱面、锥面、旋转面)的方程和图形;椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面、椭圆抛物面和双曲抛物面的方程和图形;利用正交变换和平移化一般二次曲面方程为标准方程.

(2) 难点

利用正交变换和平移化一般二次曲面方程为标准方程.

8－4 例题分析与解答

例 1 已知柱面的母线平行于直线 $x=2y=z$,准线为椭圆

$$\begin{cases} x^2+2y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$

求柱面方程.

解 若点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$在准线上,也在母线上,则柱面上任意点 $P(x,y,z)$和点 P_0 的坐标满足:

$$\begin{cases} x-x_0=t, y-y_0=\frac{1}{2}t, z-z_0=t; \\ x_0^2+2y_0^2=1; \\ z_0=0. \end{cases}$$

消去 x_0,y_0,z_0 和 t,就得到柱面方程,即将 $t=z-z_0=z$ 代入另两个方程,得

$$x_0=x-t=x-z,$$

$$y_0=y-\frac{1}{2}t=y-\frac{1}{2}z.$$

再将它们代人方程

$$x_0^2+2y_0^2=1,$$

即得柱面方程

$$(x-z)^2+2(y-\frac{1}{2}z)^2=1.$$

例 2(习题8(1)) 求顶点在原点,准线为椭圆:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ z=k \end{cases}$$

的锥面方程.

解 设 $P(x,y,z)\neq(0,0,0)$为锥面上的点,OP 上的点的坐标为(tx,ty,tz). 当 $tz=k$,即 $t=\frac{k}{z}$时,得到 OP 与平面 $z=k(k>0)$的交点坐标$(\frac{kx}{z},\frac{ky}{z},k)$. 由于它满足准线方程. 所以,

$$\frac{\left(\frac{kx}{z}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{ky}{z}\right)^2}{b^2}=1.$$

于是所求锥面方程为

$$z^2=k^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\ (k>0).$$

例 3 曲线

$$\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0\end{cases}$$

绕 y 轴旋转一周得到的旋转面方程在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的指向外侧的单位法向量为________.

（研究生入学考试试题，1993 年）

解 曲线

$$\begin{cases}f(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$$

绕 y 轴旋转得到的旋转面方程为

$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$ （见《大学数学——代数与几何(第 2 版)》8.14）.

于是，旋转面方程为

$$3(x^2+z^2)+2y^2=12.$$

令 $$F(x,y,z)=3(x^2+z^2)+2y^2-12=0,$$

则 $$F'_x=6x,\ F'_y=4y,\ F'_z=6z.$$

在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的外侧法向量为$(0,4\sqrt{3},6\sqrt{2})$，将其单位化得到所求的单位法向量为$\left(0,\sqrt{\frac{2}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

例 4 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线是(　　).

(A) 只有 1 条　　(B) 只有 2 条

(C) 至少有 3 条　　(D) 不存在

（研究生入学考试试题，1992 年）

解 曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的切线向量为

$$\boldsymbol{S}=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)=(1,-2t,3t^2).$$

平面 $x+2y+z=4$ 的法线向量为

$$\boldsymbol{n}=(1,2,1).$$

题目要求切线与平面平行，即 $\boldsymbol{S}\perp\boldsymbol{n}$，于是，由

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}=1-4t+3t^2=0,$$

得 $$t=1,\frac{1}{3}.$$

所以，只有二条切线与平面平行.

例 5 直线

$$l:\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0\end{cases}$$

在平面 π 上,而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点(1,-2,5),求 a,b 之值.

(研究生入学考试试题,1997 年)

解 曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)=(1,-2,5)$处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right)\bigg|_{P_0}=(2,-4,-1),$$

其切平面(即平面 π)方程为

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{P_0}(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{P_0}(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

有
$$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0,$$
即
$$2x-4y-z-5=0. \tag{1}$$

由于直线

$$l:\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0\end{cases}$$

在平面 π 上,将

$$y=-b-x,\quad z=x+ay-3$$

代入平面 π 的方程(1),得

$$2x+4x+4b-x+3+ax+ab-5=(5+a)x+(4b+ab-2)=0,$$

于是
$$5+a=0,$$
$$4b+ab-2=0,$$
所以,
$$a=-5,b=-2.$$

例 6 已知二次曲面

$$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$$

可以经过正交变换

$$(x,y,z)^{\mathrm{T}}=(\xi,\eta,\zeta)^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

化为椭圆柱面方程

$$\eta^2+4\zeta^2=4.$$

求 a,b 的值和正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(研究生入学考试试题,1998 年)

解 所给二次曲面可以表示为

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=4,$$

其中
$$\boldsymbol{X}=(x,y,z)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

已知经过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$(其中 $\boldsymbol{Y}=(\xi,\eta,\zeta)^{\mathrm{T}}$),$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=4$ 化为椭圆柱面方程

$$\eta^2+4\zeta^2=4,$$

即

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=(\boldsymbol{PY})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{APY}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda Y}=\eta^2+4\zeta^2=4,$$

所以,矩阵

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(0,1,4),$$

即

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}.$$

利用相似矩阵有相同特征值(对角矩阵的特征值就是它的对角元),从而有相同的迹和相同的行列式,于是,

$$\mathrm{tr}\ \boldsymbol{A}=1+a+1=\mathrm{tr}\ \boldsymbol{\Lambda}=0+1+4,$$

$$\det\ \boldsymbol{A}=-(b-1)^2=\det\ \boldsymbol{\Lambda}=0,$$

得

$$a=3,b=1.$$

所以,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4.$$

对应的特征向量分别为$(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,$(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 和$(1,2,1)^{\mathrm{T}}$. 由于不同的特征值对应的特征向量正交,只需单位化,得

$$\boldsymbol{\xi}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

于是, 做正交变换

$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$(即(1)式),对应的正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\xi}_1\quad\boldsymbol{\xi}_2\quad\boldsymbol{\xi}_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}.$$

例 7 已知 A 点和B 点的直角坐标分别为$(1,0,0)$与$(0,1,1)$. 线段 AB 绕

z 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S. 求：由 S 及两平面 $z=0$, $z=1$ 所围成的立体体积.

（研究生入学考试试题，1994 年）

解 直线 AB 的方程为

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1},$$

即

$$\begin{cases} x=1-z, \\ y=z. \end{cases}$$

由于直线与旋转轴不共面，不能直接代旋转面的公式. 但旋转面 S 与平面 $z=z_0$ 的交截面是圆，此圆的半径为

$$\begin{aligned} r(z_0) &= \sqrt{x^2+y^2} \\ &= \sqrt{(1-z_0)^2+z_0^2} \\ &= \sqrt{1-2z_0+2z_0^2}, \end{aligned}$$

则截面面积为 $$A(z_0)=\pi r^2=\pi(1-2z_0+2z_0^2),$$

所以，所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^1 A(z)\mathrm{d}z \\ &= \pi\int_0^1 (1-2z+2z^2)\mathrm{d}z \\ &= \pi\left(z-z^2+\frac{2}{3}z^3\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

8-5 习题提示与解答

1. 求下列球面的球心与半径.

(1) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-7=0$;

(2) $2x^2+2y^2+2z^2-x+3z=0$.

解 (1) 配方为

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=16.$$

所以，球心为 $(1,-2,2)$，半径为 4.

(2) 配方为

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2+\left(z+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{5}{8}.$$

所以，球心为 $(\frac{1}{4},0,\frac{-3}{4})$，半径为 $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

2. 求过 4 点 $A(6,0,0)$，$B(4,4,0)$，$C(-3,-3,0)$，$D(1,0,5)$的球面方程，并求球心和半径.

解 将 $A(6,0,0)$，$B(4,4,0)$，$C(-3,-3,0)$，$D(1,0,5)$代入球面方程

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0,$$

解出 a,b,c,d，得球面方程，配方为

$$(x-1)^2+y^2+z^2=25.$$

所以，球心为$(1,0,0)$，半径为 5.

3. 动点 P 到点$A(2,0,0)$的距离为到点 $B(-4,0,0)$的距离的一半，求动点轨迹的方程.

解 设动点为 $P(x,y,z)$，由于

$$|PA|=\frac{1}{2}|PB|,$$

即

$$(x+4)^2+y^2+z^2=4[(x-2)^2+y^2+z^2].$$

化简可知动点轨迹为球面，其方程为

$$(x-4)^2+y^2+z^2=16.$$

4. 动点 P 到点 $F_1(-a,0,0)$与到点 $F_2(a,0,0)$的距离的平方和等于 $4a^2$，求动点轨迹的方程.

解 设动点为 $P(x,y,z)$，由于

$$|PF_1|^2+|PF_1|^2=4a^2,$$

即

$$(x+a)^2+y^2+z^2+(x-a)^2+y^2+z^2=4a^2.$$

化简可知动点轨迹为球面，其方程为

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

5. 下列方程在空间直角坐标系中各表示什么曲面？并作其略图.

(1) $x^2+y^2-2y=0$； (2) $4x^2+y^2=1$；

(3) $x^2=2z$； (4) $z^2=4$；

(5) $x^2+y^2+z^2=0$； (6) $y^2+z^2=0$；

(7) $x^2-y^2=0$； (8) $x^2-y^2=1$.

解 图略.

(1) 方程化为 $x^2+(y-1)^2=1$. 圆柱面，对称轴过$(0,1,0)$且平行于 z 轴，圆半径为 1.

(2) 椭圆柱面，母线平行于 z 轴.

(3) 抛物柱面，母线平行于 y 轴.

(4) 两平行平面：$z=2$ 和 $z=-2$.

(5) 原点$(0,0,0)$.

(6) x 轴.

(7) 两个过 z 轴的互相垂直的平面 $x=y$ 和 $x=-y$;

(8) 双曲柱面,母线平行于 z 轴.

6. 下列方程各表示什么曲线:

(1) $\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{4}=1, \\ z=1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-25=0, \\ x^2+y^2=16; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25, \\ x^2+y^2+z^2=36; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=\cos\varphi, \\ y=\sin\varphi, \quad \varphi \text{ 为参数}. \\ z=-1, \end{cases}$

解 (1) 椭圆(在平面 $z=1$ 上).

(2) 在平面 $z=3$ 和 $z=-3$ 上的两个圆 $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ z=3 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ z=-3. \end{cases}$

(3) 圆(两球面的交线).原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x-2y+z=-\dfrac{19}{2}, \\ x^2+y^2+z^2=36. \end{cases}$$

所以,也是球面 $x^2+y^2+z^2=36$ 与平面 $x-2y+z=-\dfrac{19}{2}$ 相交的一个圆.

(4) 原方程组等价于

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=-1. \end{cases}$$

它表示圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=-1$ 相交的一个圆,也就是在平面 $z=-1$ 上,圆心在点 $P_0(0,0,-1)$,半径为 1 的一个圆.

7. 求在 yOz 坐标平面上以原点为圆心的单位圆的方程(写出两种以上不同形式的方程).

解 (1)

$$\begin{cases} y^2+z^2=1, \\ x=0; \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x=0, \\ y=\cos\theta, \\ z=\sin\theta; \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x=0; \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} y^2+z^2=1, \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$$

8. 求下列顶点在原点的锥面方程：

(1) 准线为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=k; \end{cases}$$

(2) 准线为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-25=0, \\ x^2+y^2=16. \end{cases}$$

解 (1) 见 8.4 节例 2.

(2) 准线为

$$\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ z=3 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x^2+y^2=16, \\ z=-3. \end{cases}$$

设 $P(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 为锥面上的点，O 为坐标原点，则锥面上的直线 OP 上的点的坐标为 (tx,ty,tz). 当 $tz=3$ 时，即 $t=\dfrac{3}{z}$，得到 OP 与平面 $z=3$ 的交点坐标为 $\left(\dfrac{3x}{z},\dfrac{3y}{z},3\right)$，此坐标满足准线方程. 所以，

$$\left(\frac{3x}{z}\right)^2+\left(\frac{3y}{z}\right)^2=16,$$

则所求锥面方程为

$$x^2+y^2=\frac{16}{9}z^2.$$

9. 求下列曲线绕指定轴旋转而成的旋转面方程：

(1) $\begin{cases} x^2+4y^2=1, \\ z=0, \end{cases}$ 分别绕 x 轴、y 轴旋转；

(2) $\begin{cases} z=\sqrt{y}, \\ x=0, \end{cases}$ 分别绕 y 轴、z 轴旋转；

(3) $\begin{cases} x^2-4z^2=1, \\ y=0, \end{cases}$ 分别绕 x 轴、z 轴旋转.

解 (1) 绕 x 轴旋转的旋转面方程为

$$x^2+4\left(\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)^2=1,$$

即
$$x^2+4y^2+4z^2=1;$$

绕 y 轴旋转的旋转面方程为

$$\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2+4y^2=1,$$

即
$$x^2+4y^2+z^2=1.$$

(2) 绕 y 轴旋转的旋转面方程为

$$\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{y},$$

即
$$y=z^2+x^2 \quad (y>0);$$

绕 z 轴旋转的旋转面方程为

$$z=\sqrt{\sqrt{y^2+x^2}},$$

即
$$z^2=\sqrt{y^2+x^2}.$$

(3) 绕 x 轴旋转的旋转面方程为

$$x^2-4\left(\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)^2=1,$$

即
$$x^2-4y^2-4z^2=1;$$

绕 z 轴旋转的旋转面方程为

$$\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2-4z^2=1,$$

即
$$x^2+y^2-4z^2=1.$$

10. 求下列曲线在指定平面上的投影:

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ y=x\end{cases}$ 在各坐标平面上的投影;

(2) $\begin{cases}x^2+(y-1)^2+z^2=1,\\ y+z=2\end{cases}$ 在平面 $z=2$ 上的投影.

解 (1) 球面与平面的交线是个圆,该圆位于垂直于 xOy 坐标面的平面(柱面) $y=x$ 上,所以,该圆在 xOy 坐标平面($z=0$)上的投影是条直线段:

$$\begin{cases}y=x,\\ z=0,\end{cases} \qquad -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}.$$

该曲线的方程也可以表示为

$$\begin{cases}2x^2+z^2=4,\\ y=x.\end{cases}$$

所以曲线位于椭圆柱面 $2x^2+z^2=4$ 上,因此,该曲线在 xOz 坐标平面($y=0$)上的投影为椭圆

$$\begin{cases}2x^2+z^2=4,\\ y=0.\end{cases}$$

该曲线的方程也可以表示为

$$\begin{cases}2y^2+z^2=4,\\ y=x.\end{cases}$$

所以曲线位于椭圆柱面 $2y^2+z^2=4$ 上，因此，该曲线在 yOz 坐标平面$(x=0)$上的投影为椭圆

$$\begin{cases}2y^2+z^2=4,\\ x=0.\end{cases}$$

(2) 将 $-z=y-2$ 代入球面方程，得母线平行于 z 轴的柱面：

$$x^2+(y-1)^2+(y-2)^2=1,$$

即

$$x^2+2y^2-6y+4=0.$$

于是，该曲线的方程也可以表示为

$$\begin{cases}x^2+2y^2-6y+4=0,\\ y+z=2.\end{cases}$$

所以曲线位于椭圆柱面 $x^2+2y^2-6y+4=0$ 上，因此，该曲线在平面 $z=2$ 上的投影为

$$\begin{cases}x^2+2y^2-6y+4=0,\\ z=2.\end{cases}$$

13. 用坐标变换(转轴和平移)，将下列一般二次曲面方程化为标准方程(并写出坐标变换式，指出你所选取的新坐标系是右手系还是左手系)．

(1) $x_1^2+x_2^2-2x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3+6x_1+6x_2+6x_3-\dfrac{11}{2}=0$；

(4) $x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3+\sqrt{3}x_1-6\sqrt{3}x_2+\sqrt{3}x_3+\dfrac{1}{2}=0$.

解 (1) 题中二次式对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&4&-2\\4&1&-2\\-2&-2&-2\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda-1&-4&2\\-4&\lambda-1&2\\2&2&\lambda+2\end{vmatrix}\\&=(\lambda+3)^2(\lambda-6)\\&=0,\end{aligned}$$

得

$$\lambda_1=6,\lambda_2=-3(\text{二重}).$$

对 $\lambda_1=6$，对应的特征向量为$(-2,-2,1)^{\mathrm{T}}$，单位化后得

$$\xi_1=\left(\frac{-2}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

对 $\lambda_2=-3$,基础解系为$(1,0,2)^{\mathrm{T}},(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$. 用 Schmidt 正交化方法,得单位正交的特征向量

$$\xi_2=\left(\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},\xi_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}}.$$

取正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=[\xi_1\quad\xi_2\quad\xi_3]=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix},$$

则有
$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(6,-3,-3).$$

对二次型做正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$(其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$),即

$$\begin{cases}x_1=-\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3\sqrt{2}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}y_3,\\ x_2=-\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3\sqrt{2}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3,\\ x_3=\frac{1}{3}y_1+\frac{4}{3\sqrt{2}}y_2,\end{cases}$$

就得到
$$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Y}=6y_1^2-3y_2^2-3y_3^2.$$

一次项也相应地变为

$$6x_1+6x_2+6x_3-\frac{11}{2}=6(-y_1+\sqrt{2}y_2)-\frac{11}{2}=0.$$

于是二次曲面的方程就变换为

$$\varphi(\boldsymbol{Y})=6y_1^2-3y_2^2-3y_3^2+6(-y_1+\sqrt{2}y_2)-\frac{11}{2}=0,$$

配方得

$$\left(y_1-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}(y_2-\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}y_3^2=\frac{1}{6}.$$

令
$$\begin{cases}z_1=y_1-\frac{1}{2},\\ z_2=y_2-\sqrt{2},\\ z_3=y_3,\end{cases}$$

其中
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}}(x_1 + x_2 + 4x_3) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_2) \end{bmatrix},$$

即得
$$6z_1^2 - 3z_2^2 - 3z_3^2 = 1,$$

其图形是双叶双曲面。右手坐标系(因为$|\boldsymbol{Q}|>0$).

(4) 同上.可以经过正交变换和平移化为
$$-\frac{z_1^2}{10} + \frac{z_2^2}{5} + \frac{z_3^2}{2} = 1,$$

其图形是单叶双曲面.左手坐标系(因为变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{QY}$ 的矩阵行列式$|\boldsymbol{Q}|<0$).

14. 利用不变量判断下列二次曲面的类型,并把方程化为最简形式和确定曲面的形状.

(1) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 - 14x_1 - 4x_2 + 14x_3 + 16 = 0$;

(2) $4x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 27 = 0$;

(3) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 2x_3 - 1 = 0$;

(4) $7x_2^2 - 7x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3 = 0$.

解 (1) 题中二次式对应的矩阵为
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

其特征值为
$$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = -3.$$

不变量为
$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0,$$
$$I_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & -7 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 & 7 \\ -7 & -2 & 7 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

经过化简后,方程的类型为
$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \frac{I_4}{I_3}$$
$$= 6x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 = 0,$$

即
$$2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 .$$

所以,是个二次锥面的方程.

(2) 与(1) 类似,

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 5 & 2\\ 0 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

的特征值为

$$\lambda_1=2,\lambda_2=5,\lambda_3=8.$$

$$I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=80\neq 0,$$

是有心二次曲面.

$$I_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3=66>0,$$

$$I_4=\begin{vmatrix}4 & -2 & 0 & 2\\ -2 & 5 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 6 & 2\\ 2 & 3 & 2 & -27\end{vmatrix}=-2\,560<0,$$

经过化简后,方程的类型为

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\lambda_3x_3^2+\frac{I_4}{I_3}$$

$$=2x_1^2+5x_2^2+8x_3-32=0,$$

是椭球面.

(3) 与(1)类似,

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\ -1 & 5 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

的特征值为

$$\lambda_1=3,\lambda_2=6,\lambda_3=0.$$

$$I_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=9,$$

$$I_3=\lambda_1\ \lambda_2\lambda_3=0,$$

$$I_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3=18>0,$$

$$I_4=\begin{vmatrix}2 & -1 & -2 & 1\\ -1 & 5 & 1 & -5\\ -2 & 1 & 2 & -1\\ 1 & -5 & -1 & -1\end{vmatrix}=0,$$

$$K_2=A_{11}+A_{22}+A_{33}$$

$$=\begin{vmatrix}5 & 1 & -5\\ 1 & 2 & -1\\ -5 & -1 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ -2 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -5\\ 1 & -5 & -1\end{vmatrix}$$

$$= -108 < 0.$$

经过化简后，方程的类型为

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \frac{K_2}{I_2}$$

$$= 3x_1^2 + 6x_2^2 - 6 = 0,$$

即

$$\frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

是椭圆柱面.

(4) 与(1) 类似,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

的特征值为

$$\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -9, \lambda_3 = 0.$$

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 = -81 > 0,$$

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0,$$

$$I_4 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$K_2 = A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0.$$

这类曲面化简后的方程为

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \frac{K_2}{I_2}$$

$$= 9x_1^2 - 9x_2^2 = 0,$$

即

$$x_1^2 - x_2^2 = 0,$$

是一对相交的平面.

第9章　空间曲线与空间曲面

9－1　学时安排的建议

表9－1

节	教　学　内　容	复习页数
36	9.1 向量函数及其微积分	309—318
37	9.2 曲线的弧长和弗雷耐标架,9.3 节中的曲线的曲率	318—326
38	9.3 曲线的曲率　挠率　弗雷耐公式,9.4 特殊的空间曲线,9.5 节中的曲面的表示	326—333
39	9.5 曲面的表示　切平面　参数变换,9.6 曲面的第一基本形式,9.7 节中的曲面上曲线的法曲率	333—342
40	9.7 曲面上曲线的法曲率　曲面的第二基本形式	342—352

9－2　基本要求

1. 理解向量函数的极限、微分和积分的概念,掌握向量函数的导数和积分的运算法则. 知道三个向量函数(定长的向量函数,定向的向量函数,与定向量垂直的向量函数)的特点.

2. 会求以参数 s(弧长)表示的和以一般参数 t 表示的曲线的弧长. 熟练掌握曲线的切线和法平面,密切平面和副法线,主法线和从切平面的方程. 掌握弗雷耐标架(知道左旋和右旋).

3. 理解曲线的曲率和挠率的概念和计算公式. 了解在刚体运动下,一条空间曲线完全由弧长,曲率和挠率这三个参数所确定. 理解空间曲线为直线的充要条件是每一点的曲率为 0;曲线为平面曲线的充要条件是每一点的挠率为 0.

4. 掌握弗雷耐公式及其矩阵形式.

5. 知道一般螺线和球面曲线的特点.

6. 掌握曲面的参数方程表示法和向量表示法. 会求曲面的切平面和法

向量.

7. 掌握曲面的第一基本形式.会求曲面上曲线的弧长和两曲线间的交角.

8. 掌握曲面的第二基本形式.了解在刚体运动下,两个基本形式处处相同的空间曲面是一样的.知道梅尼埃定理.

9. 了解曲面上的曲线的法曲率、主曲率、高斯曲率(全曲率)和平均曲率.知道欧拉公式.

9-3 内容综述与分析

这一章是微分几何的最基本的内容,是微积分的一个重要应用.应该在学完微积分后再讲授.如果教学课时较少,就不讲这一章.

1. 向量函数及其微积分,曲线的弧长(主教材 9.1 节和 9.2.1)

学生在学完微积分后,对向量函数的微积分(主教材 9.1 节)和曲线的弧长(主教材 9.2.1)这两部分内容的自学不会有较大的困难,这部分内容要突出用向量表示的函数的微积分,即对向量函数的每一个分量的微积分.

空间曲线 $\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OP}$($\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^3$ 的映射)的几何意义是:在 t 的变化范围(定义域)内 P 点的轨迹为一条连续的空间曲线,空间直线和圆柱螺线的向量表示式见主教材第 309 页和 310 页.

利用弧长 s 作为参数往往能使公式大为简化.以 $r'(s)$ 表示对弧长 s 求导,以 $\dot{r}(t)$ 表示对一般参数 t 求导.

2. 直线和平面方程的向量表示式(主教材 9.2 节)

以弧长 s 为参数的曲线方程、直线方程和平面方程的向量表示法如下:

曲线方程:$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$.

过点 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(s_0)$,直线方向的单位向量为 $\boldsymbol{e}$ 的直线方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}_0+s\boldsymbol{e}. \qquad ①$$

过点 $\boldsymbol{r}_0$,法向量为 $\boldsymbol{n}$ 的平面方程为

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0. \qquad ②$$

曲线的切线向量 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{r}'(s)$.与切线垂直的平面为法平面,与副法线(单位副法线 $\boldsymbol{B}$)垂直的平面为密切平面,与主法线(单位主法线 $\boldsymbol{N}$)垂直的平面为从切平面.$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$ 的位置关系(右手系)见主教材 320 页图 9-4,它不仅形象而且很重要.

若曲线的向量表示式为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,由①和②,容易知道在点 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(s_0)$处曲线的切线方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}_0+\lambda\boldsymbol{T},$$

法平面方程为

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{T}=0\quad(\text{其中 }\boldsymbol{T}=\boldsymbol{r}'(s_0)\text{为切线的单位向量}),$$

副法线方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}_0+\lambda\boldsymbol{B},$$

密切平面方程为

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{B}=0\quad(\text{其中 }\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(s_0)\text{ 为单位副法向量}),$$

主法线方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}_0+\lambda\boldsymbol{N},$$

从切平面方程为

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{N}=0\quad(\text{其中 }\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}(s_0)\text{ 为单位主法向量}).$$

3. 弗雷耐标架(主教材 9.2.5)

弗雷耐标架$\{\boldsymbol{r}(s),\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{N}(s),\boldsymbol{B}(s)\}$是在点 s 处的单位正交向量 $\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$ 按右手法则组成的活动坐标系.表 9-1(主教材 322 页)所表示的弗雷耐标架(活动标架)对空间曲线的研究是很有用的.

4. 曲率和挠率(主教材 9.3.1,9.3.2)

曲率和挠率是度量空间曲线在一点处的弯曲和挠扭(偏离该点的密切平面的程度)情况的一个量.在刚体运动下,一条空间曲线完全由弧长,曲率和挠率这三个参数所确定.曲率

$$k(s)=|\boldsymbol{T}'(s)|=|\boldsymbol{r}''(s)|,$$

挠率

$$|\tau|=-\boldsymbol{B}(s)\cdot\boldsymbol{N}(s).$$

5. 典型的证明方法(主教材 9.3.1,9.3.2)

例 8“空间曲线为直线的充要条件是每一点的曲率为 0”和例 9“曲线为平面曲线的充要条件是每一点的挠率为 0”的证明方法较为典型.

6. 弗雷耐公式的矩阵形式(主教材 9.3.3)

弗雷耐公式的矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}'\\\boldsymbol{N}'\\\boldsymbol{B}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&k&0\\-k&0&\tau\\0&-\tau&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}\\\boldsymbol{N}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$

很重要,它既便于记忆,又有重要的应用,特别是在一些证明题中(见例题和习题).

7. 曲面的切平面和法向量方程(主教材 9.5 节)

空间曲面($\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$的映射)可以用参数方程和向量两种形式来表示.掌握了曲面的单位法向量 $\boldsymbol{n}^\circ$的计算(主教材 335 页公式(9-36),再利用①和②式,容易得到曲面的切平面和法向量方程.要清楚常用的曲面如旋转面、圆柱面、圆锥

面和螺旋面的切平面和法线向量方程.

8. 曲面的第一基本形式及其应用(主教材 9.6 节)

曲面的第一基本形式Ⅰ用矩阵的形式(见主教材 338 页 9—(42)′) 来表示,简洁,易记.第一基本形式对应的矩阵是正定矩阵.在不同的参数下,第一基本形式对应的矩阵是相合的.

第一基本形式的应用:用于求曲面上的曲线的弧长和曲面上两曲线间的交角.

9. 曲面上曲线的法曲率和曲面的第二基本形式(主教材 9. 7 节)

曲面的第二基本形式Ⅱ也可以表示为矩阵的形式,曲面上曲线的法曲率可以表示为第二基本形式Ⅱ与第一基本形式Ⅰ的商(即 $k_n=\mathrm{II}/\mathrm{I}$).

梅尼埃定理的证明不要求.

曲面上的曲线的法曲率、主曲率、高斯曲率(全曲率) 和平均曲率都与曲面的第一基本形式和曲面的第二基本形式有密切的关系.

10. 本章的重点和难点

(1) 重点

曲线的弧长.曲线的切线和法平面、密切平面和副法线、主法线和从切平面的方程.曲率和挠率的概念和计算公式.弗雷耐公式及其矩阵形式.曲面的第一基本形式和第二基本形式的矩阵表示法.

(2) 难点

空间曲线(以弧长 S 为参数)和曲面的向量表示法.平面方程、直线方程的向量表示法.挠率的概念.弗雷耐公式的推导.曲面的第Ⅰ,Ⅱ基本形式的推导.

9－4 例题分析与解答

例 1 设曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)(a\leqslant s\leqslant b)$,则 s 为弧长参数的充分必要条件是 $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=1$.

证 必要性见《大学数学——代数与几何(第 2 版)》中(9－13′)式(以 s 代换 t).

充分性:设 $s,s_0\in[a,b]$,由 $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=1$ 及主教材中(9－12)式,得 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 到 $\boldsymbol{r}(s)$ 段的弧长为

$$s(s)=\int_{s_0}^{s}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|\mathrm{d}s=\int_{s_0}^{s}\mathrm{d}s=s-s_0,$$

所以,s 为弧长参数.若

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=1,$$

则
$$s=t\pm c(c\text{ 为常数}),$$
即 s,t 均为弧长参数,两者仅在起点和弧长的增减方向上可能有差别.

例 2 证明:$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}t^3+\boldsymbol{b}t^2+\boldsymbol{c}t$ 为共面的向量函数的充分必要条件是$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$.

证 证法 1 必要性:$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}t^3+\boldsymbol{b}t^2+\boldsymbol{c}t$ 平行于$s(t)=\boldsymbol{a}t^2+\boldsymbol{b}t+\boldsymbol{c}$,取

$$\boldsymbol{s}_0=\boldsymbol{s}(0)=\boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{s}(1)=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{s}(-1)=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

由于$\forall t,s(t)$也是共面的向量函数,所以
$$(\boldsymbol{s}_0,\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2)=0,$$
即
$$(\boldsymbol{s}_0,\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2)=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0,$$
利用行列式性质,得
$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0.$$

充分性:由$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$,即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面。不妨设 $\boldsymbol{c}$ 可以用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性表示,即存在常数 λ,μ,使得
$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$
代入 $\boldsymbol{r}(t)$中,得
$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t)&=\boldsymbol{a}t^3+\boldsymbol{b}t^2+(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})t\\&=(t^3+\lambda t)\boldsymbol{a}+(t^2+\mu t)\boldsymbol{b},\end{aligned}$$
即 $\boldsymbol{r}(t)$在向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所确定的平面上,即 $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}t^3+\boldsymbol{b}t^2+\boldsymbol{c}t$ 为共面的向量函数.

证法 2 $\boldsymbol{r}(t)$为共面向量函数的充分必要条件是
$$(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}})=0\Leftrightarrow(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},\ddot{\boldsymbol{s}})=0.$$
用 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}t^2+\boldsymbol{b}t+\boldsymbol{c}$ 代替$\boldsymbol{r}(t)$可以化简计算,有
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},\ddot{\boldsymbol{s}})&=(\boldsymbol{a}t^2+\boldsymbol{b}t+\boldsymbol{c})\cdot((2\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b})\times2\boldsymbol{a}t)\\&=(\boldsymbol{a}t^2+\boldsymbol{b}t+\boldsymbol{c})\cdot(2t\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\\&=2t(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\\&=-2t(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),\end{aligned}$$
所以,$\forall t,\boldsymbol{r}(t)$为共面向量函数的充要条件是
$$(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}})=0\Leftrightarrow(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}},\ddot{\boldsymbol{s}})=-2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0,$$
即
$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0.$$

例 3 证明主教材中定理 9.3:设 $k\tau\neq0$,下列命题等价:

(1) 曲线的切向量 $\boldsymbol{T}(s)$和某固定方向成定角;

(2) 曲线的主法向量 $\boldsymbol{N}(s)$和某固定方向垂直；

(3) 曲线的副法向量 $\boldsymbol{B}(s)$和某固定方向成定角；

(4) 曲线的挠率 τ 和曲率 k 之比等于常数.

证 用循环证法.

(1) ⇒(2)

设曲线的切向量 $\boldsymbol{T}(s)$和某固定方向成定角 α，记 $\boldsymbol{u}$ 是固定方向的单位向量，则

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}=\cos\alpha. \tag{1}$$

(1)式两边对 s 求导，得

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}'=\boldsymbol{u}\cdot k\boldsymbol{N}(s)=0,$$

即
$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N}(s)=0, \tag{2}$$

故曲线的主法向量 $\boldsymbol{N}(s)$和固定方向 $\boldsymbol{u}$ 垂直.

(2) ⇒(3)

由(2)式及弗雷耐公式，得

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N}(s)=\boldsymbol{u}\cdot\left(-\frac{\boldsymbol{B}'}{\tau}\right)=0,$$

即
$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}'=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B})'=0,$$

从而

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}=c_1(\text{常数})=\sin\alpha, \tag{3}$$

曲线的副法向量 $\boldsymbol{B}(s)$和固定方向 $\boldsymbol{u}$ 成定角.

(3) ⇒(4)

(3)式两边对 s 求导，有

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{u}\cdot[-\tau\boldsymbol{N}(s)]=0,$$

即
$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N}(s)=0,$$

继续求导得

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N}'(s)=\boldsymbol{u}\cdot(-k\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B})=0,$$

即
$$k\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}=\tau\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B},$$

故有

$$\frac{\tau}{k}=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}}=c_2(\text{常数}). \tag{4}$$

(4) ⇒(1)

因为

$$\boldsymbol{T}'=k\boldsymbol{N}(s),\ \boldsymbol{B}'=-\tau\boldsymbol{N}(s),$$

得
$$\frac{\boldsymbol{T}'}{k}+\frac{\boldsymbol{B}'}{\tau}=0. \tag{5}$$

积分(5)式得

$$\frac{\tau}{k}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{u}(\text{常向量}). \tag{6}$$

(6)式两端与 $\boldsymbol{T}$ 作点积,得

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{T}\cdot\left(\frac{\tau}{k}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{B}\right)=\frac{\tau}{k}=c_2,$$

故切向量 $\boldsymbol{T}(s)$和固定方向 $\boldsymbol{u}$ 成定角.

例 4 证明:当 $k,\tau,\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}\neq 0$ 时,下列命题等价:

(1) $\boldsymbol{r}(s)$是位于以 $A(\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\alpha}$ 为常向量)为球心的球面上的曲线(s 为自然参数);

(2) $\boldsymbol{r}(s)$的所有法平面过球心 A,即

$$[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\alpha}]\cdot\boldsymbol{T}(s)=0; \tag{1}$$

(3) $\boldsymbol{r}(s)$在弗雷耐标架上的表示式为

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{\alpha}-R\boldsymbol{N}-\frac{R'}{\tau}\boldsymbol{B}\qquad(R\text{ 为曲率半径}); \tag{2}$$

(4)
$$R\tau+\left(\frac{R'}{\tau}\right)'=0; \tag{3}$$

(5)
$$R^2+\left(\frac{R'}{\tau}\right)^2=c(\text{常数}). \tag{4}$$

证 用循环证法.

(1) ⇒(2)

设以点 A 为球心的球面半径为 r,则

$$|\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\alpha}|^2=[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\alpha}]^2=r^2.$$

将上式两边对 s 求导,即得

$$2[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\alpha}]\cdot\boldsymbol{r}'(s)=2[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\alpha}]\cdot\boldsymbol{T}(s)=0,$$

故(1)式成立.由于 $\boldsymbol{T}(s)$既是曲线 $\boldsymbol{r}(s)$在点 s 处的切向量,又是曲线在点 s 处的法平面的法向量,所以(1)式表明球面曲线的法平面过球心 A.

(2) ⇒(3)

将(1)式两边对 s 求导,得

$$\boldsymbol{r}'(s)\cdot\boldsymbol{T}(s)+[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\alpha}]\cdot\boldsymbol{T}'(s)=0,$$

即

$$[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\alpha}]\cdot k(s)\boldsymbol{N}(s)=-\boldsymbol{T}(s)\cdot\boldsymbol{T}(s)=-1,$$

$$[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\alpha}]\cdot\boldsymbol{N}(s)=-\frac{1}{k(s)}=-R(s). \tag{5}$$

将(5)式两边对 s 求导,得

$$\boldsymbol{r}'(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)+[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\alpha}]\cdot\boldsymbol{N}'(s)=-R'(s),$$

其中
$$\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{N}=0,$$

$$\boldsymbol{N}' = -k\boldsymbol{T} + \tau\boldsymbol{B},$$

于是由命题(2)的条件得

$$[\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{\alpha}]\cdot\boldsymbol{B}(s) = -\frac{R'(s)}{\tau(s)}. \tag{6}$$

由(1)式、(5)式和(6)式可知 $\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{\alpha}$ 在弗雷耐标架$\{\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}\}$上的坐标为

$$\left(0, -R, -\frac{R'(s)}{\tau(s)}\right),$$

故(2)式成立.

(3) ⇒(4)

将(2)式两边对 s 求导,得

$$\boldsymbol{r}'(s) = -R'\boldsymbol{N} - R\boldsymbol{N}' - \left(\frac{R'}{\tau}\right)'\boldsymbol{B} - \left(\frac{R'}{\tau}\right)\boldsymbol{B}'. \tag{7}$$

将弗雷耐公式,$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{T}$,以及 $kR = 1$ 代入(7)式,得

$$\boldsymbol{T}(s) = \boldsymbol{T}(s) - \left[R\tau + \left(\frac{R'}{\tau}\right)'\right]\boldsymbol{B}(s), \tag{8}$$

其中

$$|\boldsymbol{B}(s)| = 1,$$

故

$$R\tau + \left(\frac{R'}{\tau}\right)' = 0.$$

(4) ⇒(5)

由于

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[R^2 + \left(\frac{R'}{\tau}\right)^2\right] &= 2RR' + 2\left(\frac{R'}{\tau}\right)\left(\frac{R'}{\tau}\right)' \\ &= \left(\frac{2R'}{\tau}\right)\left[\tau R + \left(\frac{R'}{\tau}\right)'\right] \\ &= 0.\end{aligned} \tag{9}$$

(9) 式最后一个等号是根据(3)式的条件,故

$$R^2 + \left(\frac{R'}{\tau}\right)^2 = c(\text{常数}).$$

事实上由命题(5)也可以推出命题(4),因为由命题(5)立即得(9)式成立. 由于当 $k\tau k'\neq 0$ 时,又有

$$\frac{R'}{\tau} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)' = \frac{-k'}{\tau k^2}\neq 0,$$

于是由(9)式即得命题(4)成立.

(5) ⇒(1)

令

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{r} + R\boldsymbol{N} + \frac{R'}{\tau}\boldsymbol{B}. \tag{10}$$

将(10)式两边对 s 求导,利用命题(4)成立和(7)式、(8)式的结果,可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{m}}{\mathrm{d}s}=\left[R\tau+\left(\frac{R'}{\tau}\right)'\right]\boldsymbol{B}(s)=0.$$

因此 $\boldsymbol{m}$ 是常向量.由(10)式又得

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m}]^2&=\left(-R\boldsymbol{N}-\frac{R'}{\tau}\boldsymbol{B}\right)^2\\&=R^2+\left(\frac{R'}{\tau}\right)^2=c,\end{aligned}$$

所以,$\boldsymbol{r}(s)$是位于以常向量 $\boldsymbol{m}$ 为球心(即以 $\boldsymbol{m}$ 的终点为球心),以$\sqrt{R^2+\left(\frac{R'}{\tau}\right)^2}$为半径的球面上的球面曲线.

9－5 习题提示与解答

5. 证明:$\boldsymbol{r}(t)=(2t-1,t^2-2,-t^2+4t)$为共面的向量函数.

证 证法 1 因为混合积

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}})&=\begin{vmatrix}2t-1 & t^2-2 & -t^2+4t\\ 2 & 2t & -2t+4\\ 0 & 2 & -2\end{vmatrix}\\&=4\begin{vmatrix}2t-1 & t^2-2 & -t^2+4t\\ 1 & t & -t+2\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}\\&=4\begin{vmatrix}2t-1 & 4t-2 & -t^2+4t\\ 1 & 2 & -t+2\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}\\&=-4\begin{vmatrix}2t-1 & 4t-2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\&=0,\end{aligned}$$

所以,$\boldsymbol{r}(t)$为共面的向量函数(参见《大学数学——代数与几何(第 2 版)》315 页(9－11)式).

证法 2 选一个与$(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\Big|_{t=0}=(-8,4,4)$平行的常向量 $\boldsymbol{a}=(-2,1,1)$.

由于 $\forall t$,有

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=-2(2t-1)+t^2-2-t^2+4t=0,$$

故 $\boldsymbol{r}(t)$垂直于定常向量 $\boldsymbol{a}$,所以,$\boldsymbol{r}(t)$为共面的向量函数.

9. 求曲线 $x^2+y^2=1,y^2+z^2=1$ 在任意点的法平面方程.

解 选 y 为参数，在曲线上任取一点 $\boldsymbol{r}_0=(x(y_0),y_0,z(y_0))$．方程 $x^2+y^2=1,y^2+z^2=1$ 的两边对 y 求导数，得

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+2y=0,\ 2y+2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=0,$$

于是
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{y}{x},\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-\frac{y}{z},$$

所以，
$$\dot{\boldsymbol{r}}_0=\left(-\frac{y_0}{x_0},1,-\frac{y_0}{z_0}\right).$$

$\boldsymbol{r}_0$点的法平面方程为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_0\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0)=0,$$

即
$$\left(-\frac{y_0}{x_0},1,-\frac{y_0}{z_0}\right)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0.$$

因此，
$$-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)+y-y_0-\frac{y_0}{z_0}(z-z_0)=0.$$

化简之，再将 $x_0=1-y_0^2=z_0$代入，则所求法平面方程为

$$y_0x-x_0y+y_0z-x_0y_0=0.$$

13． 证明：球面曲线的法平面通过球心．

证 球心在原点，球半径为 R 的球面方程为

$$\boldsymbol{r}(t)=R,$$

对
$$\boldsymbol{r}^2(t)=R^2$$

的两边求导数，得

$$2\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0.$$

法平面方程为
$$\dot{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r})=0.$$

由 $r\cdot\dot{r}=0$ 得到 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{0}$ 满足法平面方程，即球心通过法平面．

14． 计算圆锥螺线 $\boldsymbol{r}=(\mathrm{e}^t\cos t,\mathrm{e}^t\sin t,\mathrm{e}^t)$的弧长（从 0 到 t）．

解

$$\begin{aligned}s&=\int_0^t\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^t\sqrt{(\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t)^2+(\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t)^2+(\mathrm{e}^t)^2}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^t\sqrt{3}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\sqrt{3}(\mathrm{e}^t-1).\end{aligned}$$

15． 求下列平面曲线的弧长公式及弧长 s．

(1) 曲线由直角坐标表示 $y=f(x)$，$y=\ln(1-x^2)$，$0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$．

(2) 曲线由极坐标表示 $\rho=\rho(x)$，对数螺线 $\rho=\mathrm{e}^{a\varphi}$，$0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$．

解 (1)

$$s=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+y_x'^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\ln 3-\frac{1}{2}.$$

(2)

$$s=\int_0^{\varphi_0}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{\varphi_0}\sqrt{\mathrm{e}^{2a\varphi}+a^2\mathrm{e}^{2a\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{\varphi_0}\mathrm{e}^{a\varphi}\sqrt{1+a^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(\mathrm{e}^{a\varphi_0}-1).$$

19. 证明:曲线 $\boldsymbol{r}=\left(t,1+\frac{1}{t},\frac{1}{t}-t\right)$是平面曲线.

证 曲线是平面曲线的充要条件是其挠率恒等于零.挠率为

$$\tau=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})}{(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})^2}.$$

由于

$$\boldsymbol{r}=\left(t,1+\frac{1}{t},\frac{1}{t}-t\right),$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\left(1,-\frac{1}{t^2},-\frac{1}{t^2}-1\right),$$

所以,

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\left(0,\frac{2}{t^3},\frac{2}{t^3}\right)=\frac{2}{t^3}(0,1,1),$$

$$\dddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{6}{t^4}(0,1,1).$$

由于 $\ddot{\boldsymbol{r}}/\!/\dddot{\boldsymbol{r}}$,所以,

$$\tau=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})}{(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})^2}=0.$$

21. 证明:

(1) $\boldsymbol{T}'\cdot\boldsymbol{N}'=0$; (2) $\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{N}'=0$.

证 利用弗雷耐公式.

(1) $\boldsymbol{T}'\cdot\boldsymbol{N}'=k\boldsymbol{N}\cdot(-k\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B})$

$=-k^2(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{T})+k\tau(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{B})$

$=0.$

(2) $\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{N}'=-\tau\boldsymbol{N}\cdot(-k\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B})$

$$= \tau k(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{T}) - \tau^2(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{B})$$
$$= 0.$$

22. 已知曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,证明:

(1) $\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}''=0$;　　(2) $\boldsymbol{r}'''=-k^2\boldsymbol{T}+k'\boldsymbol{N}+k\tau\boldsymbol{B}$;

(3) $\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}'''=-k^2$;　(4) $(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')=k^2\tau$;

(5) $\boldsymbol{r}''\cdot\boldsymbol{r}'''=kk'$.

证　(1) 利用 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{T}$ 和弗雷耐公式,得

$$\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{T}'=k\boldsymbol{N},$$

则
$$\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{T}\cdot k\boldsymbol{N}=0.$$

(2)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'''&=k'\boldsymbol{N}+k\boldsymbol{N}'\\&=k'\boldsymbol{N}+k(-k\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B})\\&=-k^2\boldsymbol{T}+k'\boldsymbol{N}+k\tau\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}'''&=\boldsymbol{T}\cdot(-k^2\boldsymbol{T}+k'\boldsymbol{N}+k\tau\boldsymbol{B})\\&=-k^2+k'(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{N})+k\tau(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{B})\\&=-k^2.\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')&=(\boldsymbol{T},k\boldsymbol{N},-k^2\boldsymbol{T}+k'\boldsymbol{N}+k\tau\boldsymbol{B})\\&=k^2\tau(\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})=k^2\tau.\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}''\cdot\boldsymbol{r}'''&=k\boldsymbol{N}\cdot(-k^2\boldsymbol{T}+k'\boldsymbol{N}+k\tau\boldsymbol{B})\\&=-k^3(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{T})+kk'(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N})+k^2\tau(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{B})\\&=kk'.\end{aligned}$$

23. 已知曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,证明:

(1) $(\boldsymbol{T},\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}')=\tau$;

(2) $(\boldsymbol{B}',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{B}''')=\tau^5\left(\dfrac{k}{\tau}\right)'$;

(3) $(\boldsymbol{T}',\boldsymbol{T}'',\boldsymbol{T}''')=k^2\left(\dfrac{\tau}{k}\right)'$.

证　(1)
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{T},\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}')&=(\boldsymbol{T},\boldsymbol{B},-\tau\boldsymbol{N})\\&=\tau(\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})\\&=\tau.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{B}',\boldsymbol{B}'',\boldsymbol{B}''')&=(-\tau\boldsymbol{N},-\tau'\boldsymbol{N}-\tau\boldsymbol{N}',-\tau''\boldsymbol{N}-2\tau'\boldsymbol{N}',-\tau\boldsymbol{N}'')\\&=(-\tau\boldsymbol{N},-\tau\boldsymbol{N}',-\tau\boldsymbol{N}'')\\&=-\tau^3(\boldsymbol{N},\boldsymbol{N}',\boldsymbol{N}'') \qquad (1)\\&=-\tau^3(\boldsymbol{N},-k\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B},-k'\boldsymbol{T}-k\boldsymbol{T}'+\tau'\boldsymbol{B}+\tau\boldsymbol{B}')\\&=-\tau^3(\boldsymbol{N},-k\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B},-k'\boldsymbol{T}-k^2\boldsymbol{N}+\tau'\boldsymbol{B}-\tau^2\boldsymbol{N})\\&=-\tau^3[(\boldsymbol{N},-k\boldsymbol{T},\tau'\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{N},\tau\boldsymbol{B},-k'\boldsymbol{T})]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tau^3[k\tau'(\boldsymbol{N},\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}) + \tau k'(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T})] \\
&= \tau^3(-k\tau' + \tau k') \\
&= \tau^5\left(\frac{k}{\tau}\right)'.
\end{aligned}
$$

由(1)式可得

$$
(\boldsymbol{N},\boldsymbol{N}',\boldsymbol{N}'') = k\tau' - \tau k'. \tag{2}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{T}',\boldsymbol{T}'',\boldsymbol{T}''') &= (k\boldsymbol{N},k'\boldsymbol{N}+k\boldsymbol{N}',k''\boldsymbol{N}+2k'\boldsymbol{N}'+k\boldsymbol{N}'') \\
&= (k\boldsymbol{N},k\boldsymbol{N}',k\boldsymbol{N}'') \\
&= k^3(\boldsymbol{N},\boldsymbol{N}',\boldsymbol{N}'').
\end{aligned}
$$

将(2)式代入得

$$
(\boldsymbol{T}',\boldsymbol{T}'',\boldsymbol{T}''') = k^3(k\tau' - \tau k') = k^5\left(\frac{\tau}{k}\right)'.
$$

25. 已知曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,证明:若曲线 C 的

(1) 所有切线通过定点,则 C 是直线;

(2) 所有切线互相平行,则 C 是直线;

(3) 所有主法线通过定点,则 C 是圆;

(4) 所有切线平行于同一平面,则 C 是平面曲线.

证 (1) 设所有切线通过定点 $\boldsymbol{\rho}_0$,切线方程为

$$
\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + \lambda\boldsymbol{r}'.
$$

对任意 $\boldsymbol{r}$ 有
$$
\boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{r} + \lambda\boldsymbol{r}'.
$$

于是,对曲线 C 上定点 $\boldsymbol{r}_0$ 和任意点 $\boldsymbol{r}_1$,有

$$
\boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{r}_0 + \lambda\boldsymbol{r}_0{}' = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\boldsymbol{r}_1{}'.
$$

因此,
$$
(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) /\!/ (\boldsymbol{r}_1{}' - \boldsymbol{r}_0{}'),
$$

所以,
$$
(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\times(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)' = \boldsymbol{0},
$$

由《大学数学——代数与几何(第 2 版)》315 页(9 - 10)式得 $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0$ 是定向向量函数,则 C 是过 $\boldsymbol{r}_0$ 的直线.

(2) 由于所有切线互相平行,所以,对曲线 C 上定点 $\boldsymbol{r}_0$ 和任意点 $\boldsymbol{r}$,有

$$
\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}) /\!/ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}_0),
$$

所以,
$$
\boldsymbol{r}'(s) = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}s + \boldsymbol{b},
$$

故 C 是直线.

(3) 设所有主法线通过定点 $\boldsymbol{\rho}_0$,主法线方程为

$$
\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + \lambda\boldsymbol{N}.
$$

对任意 $\boldsymbol{r}$,有
$$
\boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{r} + \lambda\boldsymbol{N}.
$$

于是,对曲线 C 上定点 $\boldsymbol{r}_0$ 和任意点 $\boldsymbol{r}_1$,有

$$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)/\!/(\boldsymbol{N}_1-\boldsymbol{N}_0).$$

又 $\boldsymbol{N}\perp\boldsymbol{T}=\boldsymbol{r}'(s)$，所以，

$$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)'=0,$$

由《大学数学——代数与几何(第 2 版)》314 页(9 - 8)式得

$$|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0|=k(\text{常数})$$

是定长向量函数，故 C 是以 $\boldsymbol{r}_0$为圆心的圆.

(4) 所有切线平行于同一平面，设此平面的单位法向量为 $\boldsymbol{n}$，则

$$\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

两边求导数，得

$$\boldsymbol{r}''\cdot\boldsymbol{n}=0,\boldsymbol{r}'''\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

于是，

$$(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')=0,$$

即挠率

$$\tau=0,$$

故 C 是平面曲线.

27. 已给 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$的单位副法线向量为 $\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t,\cos t,1)$，求它的单位切向量 $\boldsymbol{T}$ 和单位主法向量 $\boldsymbol{N}$. 证明此曲线是一般螺线，并求它的曲率与挠率的比值.

解 利用 $\boldsymbol{B}'=-\tau\boldsymbol{N}$，得

$$\boldsymbol{N}=-\frac{1}{\tau\sqrt{2}}(-\cos t,-\sin t,0).$$

再由 $|\boldsymbol{N}|=1$，得

$$\boldsymbol{N}=(\cos t,\sin t,0),$$

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t,-\cos t,1).$$

取 $\boldsymbol{u}=(0,0,1)$，因为 $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u}=0$，主法向量 $\boldsymbol{N}$ 与固定向量 $\boldsymbol{u}$ 垂直，所以此曲线是一般螺线.

由 $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u}=0$，求导得

$$\boldsymbol{N}'\cdot\boldsymbol{u}=(-k\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{u}=0,$$

即

$$k\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}=\tau\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B},$$

所以，

$$\frac{\tau}{k}=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}}=1.$$

39. 求双曲抛物面 $\boldsymbol{r}=(u+v,u-v,uv)$在点 $u=1,v=-1$ 处的单位法向量及切平面方程.

解

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_0 &= \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} \\ &= \left.\frac{(1,1,v)\times(1,-1,u)}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}\right|_{(1,-1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,-1). \end{aligned}$$

在点 $\boldsymbol{r}(0,2,-1)$处的切平面方程为

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r})=(0,1,1)\cdot(x-0,y-2,z+1)=0,$$

即

$$y+z-1=0.$$

41. 已知曲面的第一基本形式为 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+f(u,v)\mathrm{d}v^2$,证明:

(1) u 曲线和 v 曲线正交;

(2) 任意两条 u 曲线被 v 曲线截成等长的弧,即(u_1,v_0)到(u_2,v_0)的弧长与 v_0无关.

证 (1) 由

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+f(u,v)\mathrm{d}v^2,$$

得

$$E=1,F=0,G=f(u,v),$$

设 A 为 u 曲线和 v 曲线的交点(其位置向量为 $\boldsymbol{r}$). 在点 A, u 曲线上的切线方向为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u,$$

v 曲线上的切线方向为

$$\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_v\delta v.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r} &= (\mathrm{d}u,0)\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \delta v \end{bmatrix} \\ &= F\mathrm{d}u\delta v=0. \end{aligned}$$

所以, u 曲线和 v 曲线在点 A 处正交.

(2) (u_1,v_0)到(u_2,v_0)的弧长(见《大学数学——代数与几何(第 2 版)》340 页(9-45)式)为

$$\begin{aligned} L &= \int_{u_1}^{u_2}\sqrt{E(\mathrm{d}u)^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G(\mathrm{d}v)^2} \\ &= \int_{u_1}^{u_2}\sqrt{E+f(u,v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}}\mathrm{d}u \\ &= \int_{u_1}^{u_2}\sqrt{E}\mathrm{d}u=\sqrt{E}(u_2-u_1) \end{aligned}$$

(其中 $v=v_0$不随 u 变化). 所以,任意两条 u 曲线被 v 曲线截成等长的弧.

43. 已知曲面 S 的第一基本形式为 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2$,求 S 上两条曲线 $C_1:u+v=0$ 和 $C_2:u-v=0$ 在交点(0,0)处的交角.

解 $$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v,\delta\boldsymbol{r}=\delta u-\delta v,$$
且 C_1 上 $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}v$，C_2 上 $\delta u=\delta v$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}&=(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta u\\ \delta v\end{bmatrix}\\ &=\mathrm{d}u\delta u+(u^2+a^2)\mathrm{d}v\delta v,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\mathrm{d}\boldsymbol{r},\delta\boldsymbol{r})&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}||\delta\boldsymbol{r}|}\\ &=\frac{\mathrm{d}u\delta u+(u^2+a^2)\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2}\sqrt{\delta u^2+(u^2+a^2)\delta v^2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\mathrm{d}\boldsymbol{r},\delta\boldsymbol{r})\Big|_{(0,0)}&=\frac{\mathrm{d}u\delta u+a^2(-\mathrm{d}u)\delta u}{\sqrt{\mathrm{d}u^2+a^2(-\mathrm{d}u)^2}\sqrt{\delta u^2+a^2\delta u^2}}\\ &=\frac{1-a^2}{1+a^2}.\end{aligned}$$

所以，在交点 $(0,0)$ 处两条曲线的交角为

$$\theta=\begin{cases}\arccos\dfrac{1-a^2}{1+a^2}, & \text{当}\ |a|\leqslant 1\ \text{时},\\[2ex] \pi-\arccos\dfrac{a^2-1}{1+a^2}, & \text{当}\ |a|>1\ \text{时}.\end{cases}$$

47. 证明：曲面是平面的充分必要条件是 $L=M=N=0$.

证 必要性：设 S 是 $\mathbf{R}^3$ 中的平面，

$$\boldsymbol{r}=(u,v,au+bv)\ (a,b\ \text{为常数}).$$

它的法向量 $\boldsymbol{n}$ 是常向量，因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}&=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\\ &=(1,0,a)\times(0,1,b)\\ &=(-a,-b,1),\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0},$$

$$H=-\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}^0=0.$$

所以， $$L=M=N=0.$$

充分性：设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$. 由于

$$L=-\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_u^0=0,$$

$$M=-\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_v^0=-\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_u^0=0,$$

$$N=-\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_v^0=0,$$

及 $$|\boldsymbol{n}^0|=1,\ \boldsymbol{n}_u^0\cdot\boldsymbol{n}^0=0,\ \boldsymbol{n}_v^0\cdot\boldsymbol{n}^0=0,$$

得到：$(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}^0)$ 坐标系中，$\boldsymbol{n}_u^0$，$\boldsymbol{n}_v^0$ 分别在 $\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$，$\boldsymbol{n}^0$ 上的投影均为 0，所以，

$$\boldsymbol{n}_u^0=\boldsymbol{n}_v^0=\boldsymbol{0},$$

即 $$\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\mathbf{0}.$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=\mathrm{d}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})=0,$$

故 $$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=k(\text{常数}).$$

所以, $$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0,$$

即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$为平面.

9-6 补充题提示与解答

1. 证明:曲线 $\boldsymbol{r}=(x(t),y(t),z(t))$ 为平面曲线的充要条件是

$$(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})=0.$$

证 曲线是平面曲线的充要条件是其挠率恒为零《大学数学——代数与几何(第2版)》327页例9).挠率为

$$\tau=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})}{(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})^2}=0,$$

即 $$(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})=0.$$

2. 设 D 是半径为 a 的球面,而 C 是一条空间曲线,方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$($s$ 为弧长参数),证明:

(1) 若曲线的所有的法平面与 D 相切,则

$$\boldsymbol{r}^2=\pm 2as+\boldsymbol{r}^2(0);$$

(2) 若曲线的所有的密切平面与 D 相切,则 C 或为平面曲线或满足方程

$$\boldsymbol{r}=\pm a\left(\frac{\tau}{k}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{B}\right).$$

证 (1) 由于所有的法平面与 D 相切,法平面的法向量是 $\boldsymbol{T}$,所以

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'=\pm a,$$

即 $$(\boldsymbol{r}^2)'=\pm 2a,$$

积分得 $$\boldsymbol{r}^2=\pm 2as+C.$$

将 $s=0$ 代入,得

$$C=\boldsymbol{r}^2(0),$$

所以 $$\boldsymbol{r}^2=\pm 2as+\boldsymbol{r}^2(0).$$

(2) 由于所有的密切平面与 D 相切,密切平面的法向量是 $\boldsymbol{B}$,所以

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B}=\pm a.$$

设 $$\boldsymbol{r}=c_1\boldsymbol{T}+c_2\boldsymbol{N}+c_3\boldsymbol{B}.$$

由 $$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B}=(c_1\boldsymbol{T}+c_2\boldsymbol{N}+c_3\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{B}=\pm a,$$

得 $$c_3=\pm a.$$

对等式 $\boldsymbol{r}=c_1\boldsymbol{T}+c_2\boldsymbol{N}\pm a\boldsymbol{B}$ 的两边求导数，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}&=c_1{}'\boldsymbol{T}+c_1\boldsymbol{T}'+c_2{}'\boldsymbol{N}+c_2\boldsymbol{N}'\pm a\boldsymbol{B}'\\&=c_1{}'\boldsymbol{T}+c_1(k\boldsymbol{N})+c_2{}'\boldsymbol{N}+c_2(-k\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B})\pm a(-\tau\boldsymbol{N}),\end{aligned}$$

整理得

$$(1-c_1{}'+c_2k)\boldsymbol{T}+(\pm a\tau-c_1k-c_2{}')\boldsymbol{N}-c_2\tau\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0},$$

于是

$$\begin{cases}1-c_1'+c_2k=0,\\ \pm a\tau-c_1k-c_2'=0,\\ -c_2\tau=0,\end{cases}$$

得

$$c_2=0,\text{或 }\tau=0,$$

$$\boldsymbol{r}(s)\text{为平面曲线}.$$

若 $c_2=0$，则

$$c_1=\pm\frac{a\tau}{k},$$

所以

$$\boldsymbol{r}=\pm a\left(\frac{\tau}{k}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{B}\right).$$

4. 已知曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的曲率 k 和挠率 τ，试求向量函数 $\boldsymbol{W}(s)$，使下式成立：

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}'=\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{T},\\ \boldsymbol{N}'=\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{N},\\ \boldsymbol{B}'=\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{B}.\end{cases}$$

解 设

$$\boldsymbol{W}=a\boldsymbol{T}+b\boldsymbol{N}+c\boldsymbol{B},$$

则

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}'=(a\boldsymbol{T}+b\boldsymbol{N}+c\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{T}=-b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{N}=k\boldsymbol{N},\\ \boldsymbol{N}'=(a\boldsymbol{T}+b\boldsymbol{N}+c\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{N}=a\boldsymbol{B}-c\boldsymbol{T}=-k\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B},\\ \boldsymbol{B}'=(a\boldsymbol{T}+b\boldsymbol{N}+c\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=-a\boldsymbol{N}+b\boldsymbol{T}=-\tau\boldsymbol{N}.\end{cases}$$

于是，

$$\begin{cases}-b\boldsymbol{B}+(c-k)\boldsymbol{N}=\boldsymbol{0},\\ (-\tau+a)\boldsymbol{B}+(-c+k)\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0},\\ (\tau-a)\boldsymbol{N}+b\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0}.\end{cases}$$

因此，

$$b=0,c=k,a=\tau,$$

即

$$\boldsymbol{W}=\tau\boldsymbol{T}+k\boldsymbol{B}.$$

5. 证明：曲线

$$\boldsymbol{r}=\left(t,\frac{k_0}{2}t^2,\frac{k_0\tau_0}{6}t^3\right)$$

在 $t=0$ 处的曲率和挠率分别为 k_0 和 τ_0，而且 $\boldsymbol{T}(0),\boldsymbol{N}(0),\boldsymbol{B}(0)$ 分别重合于 x，y，z 轴.

证

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\left(1,k_0t,\frac{k_0\tau_0t^2}{2}\right),$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=(0,k_0,k_0\tau_0t),$$

$$\dddot{\boldsymbol{r}}=(0,0,k_0\tau_0).$$

曲率为
$$k=\frac{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}\bigg|_{t=0}=k_0.$$

挠率为
$$\tau=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})}{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|^2}=\frac{k_0^2\tau_0}{k_0^2}=\tau_0.$$

$$\boldsymbol{T}(0)=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}\bigg|_{t=0}=(1,0,0),$$

$$\boldsymbol{B}(0)=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}\bigg|_{t=0}=\frac{(0,0,k_0)}{k_0}=(0,0,1),$$

$$\boldsymbol{N}(0)=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T}\Big|_{t=0}=(0,1,0),$$

所以，$\boldsymbol{T}(0)$，$\boldsymbol{N}(0)$，$\boldsymbol{B}(0)$分别重合于 x,y,z 轴.

8. 证明下列条件之一是曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$为一般螺线的充分必要条件.

(1) $(\boldsymbol{N},\boldsymbol{N}',\boldsymbol{N}'')=0$；　　　　(2) $(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''',\boldsymbol{r}^{(4)})=0$.

证 (1) 利用习题23(2)证明过程中的(2)式，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{N}',\boldsymbol{N}'')&=k\tau'-\tau k'\\&=k^2\frac{k\tau'-\tau k'}{k^2}\\&=k^2\left(\frac{\tau}{k}\right)',\end{aligned}$$

所以，$(\boldsymbol{N},\boldsymbol{N}',\boldsymbol{N}'')=0$ 的充要条件是$\left(\frac{\tau}{k}\right)'=0$，即$\frac{\tau}{k}=c$(常数)，这是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$为一般螺线的充分必要条件.

(2) 由于　$(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''',\boldsymbol{r}^{(4)})=(\boldsymbol{T}',\boldsymbol{T}'',\boldsymbol{T}''')=k^5\left(\frac{\tau}{k}\right)'=0$,

所以，$(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''',\boldsymbol{r}^{(4)})=0$ 的充要条件是$\left(\frac{\tau}{k}\right)'=0$，即$\frac{\tau}{k}=c$(常数)，这是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$为一般螺线的充分必要条件.

第 10 章　平面正交变换　仿射变换　射影变换

10-1　学时安排的建议

表 10-1

节	教学内容	复习页数
41	10.1 平面正交变换,10.2 平面仿射变换,10.3 射影平面与齐次坐标	360—367
42	10.3 射影平面与齐次坐标(对偶原理;射影坐标系;交比)	367—374
43	10.3 射影平面与齐次坐标,10.4 射影映射和射影变换(*二阶曲线的射影分类)	374—383

10-2　基本要求

1. 理解平面正交变换和平面仿射变换的定义和性质.

2. 理解仿射变换保持共线三点的简单比不变;平面上两组不共线的三点之间的仿射变换是唯一的.

3. 了解仿射变换的变积系数等于$|\det \boldsymbol{A}|$. 知道二次曲线的仿射标准型.

4. 熟悉点的齐次坐标. 理解射影平面上两点决定一条直线方程与两直线决定一点方程以及三点共线的射影直线方程.

5. 知道射影平面上的命题及其对偶命题. 知道原始射影坐标系和射影坐标变换公式.

6. 知道交比的定义、计算公式和几何意义. 知道调和点列与调和线束.

7. 理解射影映射的代数与几何的定义和性质. 理解射影映射(或变换)基本定理(一般位置的四点到一般位置的四点的射影映射唯一存在).

8. 知道二阶曲线的射影分类.

10-3　内容综述与分析

本章是仿射几何和射影几何的初步介绍.

本章从几何角度讨论平面上点的正交变换和仿射变换，着重于后者，如变积系数的意义及其应用．射影几何是本章的重点．从欧氏平面出发，引入平面射影几何中的齐次坐标、对偶原理、射影坐标系、交比、射影坐标变换和平面二次曲线的射影分类．对偶原理只需知道原理，不要求会证明．要理解射影坐标变换和射影变换的关系．知道交比的定义和它的几何意义．了解二阶曲线的射影分类．总之，本章教学目的是使学生对平面仿射几何和射影几何有初步的认识．

1．平面正交变换（主教材 10.1 节）

（1）平面正交变换的定义

几何定义：平面上的点变换，若保持点之间的距离不变，就称为正交变换（保距变换）．

代数定义：把直角标架 $\boldsymbol{I}=\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 变成直角标架 $\boldsymbol{I}'=\{O';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2\}$（其中 O' 在 $\boldsymbol{I}$ 中的坐标为 (x_0,y_0)）的变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

（其中 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵）称为正交变换．

（2）平面正交变换的定义与主教材 7.1 中正交变换的定义的区别

（1）式中的定义与线性代数（主教材 7.1）中的定义是有区别的：线性代数中的正交变换是一种线性变换，要求把原点变为原点，即 $x_0=y_0=0$；这里讲的平面上的正交变换只要求“保距”，可以把原点变为任意一点 (x_0,y_0)，可以把平行直线变成平行直线．但两者都有下列度量性质（正交变换下不变的几何性质称为度量性质，如距离、角度、面积和对称轴）：

正交变换是保距变换；恒等变换是正交变换；两正交变换的乘积还是正交变换；正交变换可逆且逆变换仍是正交变换；正交变换把共线的三点变成共线的三点；正交变换把直线变成直线；正交变换保持向量长度与夹角不变；正交变换对应的矩阵是正交矩阵；正交变换表示平面上的平移、旋转、反射或它们的复合等．

2．平面仿射变换（主教材 10.2 节）

（1）平面仿射变换的定义

几何定义：平面到自身的一一对应变换，若把共线的三点变成共线的三点，则称之为仿射变换．

仿射变换的代数定义与正交变换的代数定义（见式（1））一样，只是不要求是直角坐标系（称为仿射坐标系），且其中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆（不要求正交）（定义与仿射坐标系的选择无关）．正交变换是一个仿射变换（反之不对）．

（2）仿射变换的性质

仿射变换具有如下性质：

恒等变换是仿射变换；两个仿射变换的乘积仍是仿射变换；仿射变换可逆且逆变换仍是仿射变换；仿射变换把共线的三点变成共线的三点；仿射变换把直线变成直线；仿射变换对应的矩阵是可逆矩阵等.

注意：距离、角度、面积等都不是仿射变换的不变量.

仿射变换还有如下性质：仿射变换保持共线的三点的简单比不变；仿射变换按面积比值 $S'/S = |\det \boldsymbol{A}|$ 改变平面图形的面积；平面上不共线的三点变为不共线的三点的仿射变换是唯一存在的.

(3) 通过仿射变换化二次曲线为标准形

二次曲线可通过仿射变换化为下列标准形之一：

$$(x'')^2 \pm (y'')^2 = \pm 1; \qquad (y'')^2 = x'';$$

$$(x'')^2 \pm (y'')^2 = 0; \qquad (y'')^2 = \pm 1 \text{ 或 } 0.$$

3. 射影平面与齐次坐标(主教材 10.3 节)

(1) 扩大的笛卡儿平面和射影平面

扩大的笛卡儿平面 E 是添加一条无穷远直线的笛卡儿平面. 射影平面是“普通点”和“无穷远点”无差别的扩大的笛卡儿平面，或看成是过一点的所有直线和所有平面的集合，或用球面模型或用代数模型. 在射影平面上，任何两点必在一条直线上，任意两条直线必相交于一点.

(2) 射影平面和欧氏平面的不同

射影平面和欧氏平面的不同之处还有：射影平面上的直线是封闭的，像圆周似的；射影平面上的一条直线不能把射影平面分成两部分，在 E 上，两条相交(或平行)的直线分平面为两部分，而不是四部分或三部分，如图 10－1 所示：

图 10－1

(3) 点的齐次坐标

平面 E 上点 $P(x,y)$ 的齐次坐标是不全为零的三元有序数组 (x_1, x_2, x_3)，满足：

① 成比例的三元有序数组，如 (x_1, x_2, x_3) 与 $\rho(x_1, x_2, x_3)$（ρ 为常数）表示同一点；

② 当 $x_3 \neq 0$ 时，(x,y) 为普通点（其中 $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$）；

③ $(x_1,x_2,0)$（x_1,x_2不全为 0）表示无穷远点.

在射影平面上无穷远点的齐次坐标为$(-B,A,0)$.

(4) 射影直线方程

射影直线的方程为

$$Ax_1+Bx_2+Cx_3=0\ (A,B,C\text{ 不同时为零}),$$

其中 $x_3=0$ 为无穷远直线方程；$A\dfrac{x_1}{x_3}+B\dfrac{x_2}{x_3}+C=0$ 为普通直线方程.

4. 对偶原理（主教材 10.3 节）

借用向量点积（内积）、叉积和混合积的符号，在射影平面上，设点 $X=(x_1,x_2,x_3)$，直线 $U=(u_1,u_2,u_3)$，则有下列等价命题：

点 X 在直线 U 上或直线 U 过点 $X\Leftrightarrow U\cdot X=u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$；

两点 X_1,X_2决定直线 $U\Leftrightarrow U=X_1\times X_2\Leftarrow U\cdot X_1=0$ 与 $U\cdot X_2=0$ 同时成立；

两直线 U_1,U_2决定交点 $X\Leftrightarrow X=U_1\times U_2\Leftarrow U_1\cdot X=0$ 与 $U_2\cdot X$ 同时成立；

三点 X_1,X_2,X_3在一条直线 U 上$\Leftrightarrow(X_1,X_2,X_3)=0$ 或 $X=\lambda X_1+\mu X_2$；

三直线 U_1,U_2,U_3共点$\Leftrightarrow(U_1,U_2,U_3)=0$ 或 $U=\lambda U_1+\mu U_2$.

射影平面上若用齐次坐标，在公式和命题的证明过程中看不出点和直线的区别. 当把命题 $P(X,U)$ 中的点和直线互换，把“点在直线上”与“直线经过点”互换，则得到一个新命题 $P^*(U,X)$，称其为原命题 $P(X,U)$的对偶命题.

Desargues 定理：若两个三角形的对应顶点的连线共点，则它们对应边的交点共线. 其逆命题也成立.

5. 射影坐标系和射影坐标变换（主教材 10.3 节）

射影平面上的一般四点（其中任意三点不共线）（或一般四直线，其中任意三直线不共点）都构成一个射影坐标系.

原始坐标系（坐标架）为 $B_0=\{O_1,O_2,O;E\}$，其中 $O_1(1,0,0)$，$O_2(0,1,0)$，$O(0,0,1)$，$E(1,1,1)$.

射影坐标变换公式：设射影坐标系 $B_1=\{A,B,C;D\}$中的各点在原始标架 B_0下的坐标为 X_A,X_B,X_C,X_D（已规范化，即 $X_D=X_A+X_B+X_C$），则射影平面上任一点 $M(X)$（其中 X 是M 在B_0下的坐标），在 B_1下的齐次坐标 X'满足

$$X=\rho AX',$$

其中 ρ 为任意非零常数；矩阵 $A=[X_A\quad X_B\quad X_C]$是满秩的（是 B_0到 B_1的过渡阵）.

6. 交比（主教材 10.3 节）

(1) 交比的定义

在 $\mathbf{R}^2$ 平面上，共线的四点 P_1,P_2,P_3,P_4 的交比定义为

$$(P_1,P_2;P_3,P_4)=\frac{\dfrac{\overrightarrow{P_1P_3}}{\overrightarrow{P_3P_2}}}{\dfrac{\overrightarrow{P_1P_4}}{\overrightarrow{P_4P_2}}}=\frac{\overrightarrow{P_1P_3}\cdot\overrightarrow{P_2P_4}}{\overrightarrow{P_1P_4}\cdot\overrightarrow{P_2P_3}},$$

在射影平面上，若共线的四点 P_1,P_2,P_3,P_4 的齐次坐标向量分别为 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4$（$P_1,P_2,P_3$ 各不相同，$P_4\neq P_1$），且满足：

$$\boldsymbol{P}_3=\lambda\boldsymbol{P}_1+\mu\boldsymbol{P}_2;\boldsymbol{P}_4=\lambda'\boldsymbol{P}_1+\mu'\boldsymbol{P}_2,$$

则其交比定义为

$$(P_1,P_2;P_3,P_4)=\frac{\dfrac{\mu}{\lambda}}{\dfrac{\mu'}{\lambda'}}=\frac{\mu\lambda'}{\lambda\mu'}.$$

其对偶的定义：若共点四线 l_1,l_2,l_3,l_4 的齐次坐标向量分别为 l_1,l_2,l_3，l_4，且满足：

$$l_3=\lambda l_1+\mu l_2;l_4=\lambda' l_1+\mu' l_2,$$

则交比定义为

$$(l_1,l_2;l_3,l_4)=\frac{\dfrac{\mu}{\lambda}}{\dfrac{\mu'}{\lambda'}}=\frac{\mu\lambda'}{\lambda\mu'}.$$

(2) 交比与射影坐标系选取无关

当四点 P_1,P_2,P_3,P_4 的齐次坐标向量分别为 $\rho_1\boldsymbol{P}_1,\rho_2\boldsymbol{P}_2,\rho_3\boldsymbol{P}_3,\rho_4\boldsymbol{P}_4$（$\rho_1$，$\rho_2,\rho_3,\rho_4$ 为任意常数）时，交比不变.

7. 调和点列与调和线束（主教材 10.3 节）

射影平面上共线的四点（或共点的四线）P_1,P_2,P_3,P_4 称为调和点列（或调和线束），若它们的交比 $(P_1,P_2;P_3,P_4)=-1$（也称 P_1,P_2 与 P_3,P_4 调和共轭）.

8. 射影映射和射影变换（主教材 10.4 节）

(1) 射影映射的定义

几何定义：设 $\bar{\pi}_0,\bar{\pi}_1$ 是两个射影平面，若存在双射 $\tau:\bar{\pi}_0\to\bar{\pi}_1$，把共线的三点变成共线的三点，则称 τ 是一个射影映射. 射影平面到自身（即 $\bar{\pi}_0=\bar{\pi}_1$）的射影映射称为射影变换.

代数定义：设射影平面 $\bar{\pi}_0,\bar{\pi}_1$（标架分别为Ⅰ和Ⅱ），对任意的点 $P=(x_1,x_2,x_3)\in\bar{\pi}_0$，定义 $\tau(P)=(x_1',x_2',x_3')\in\bar{\pi}_1$ 为：

$$\rho\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

或

$$\rho\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}' \tag{2}$$

（其中 ρ 是非零实数，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 为非奇异矩阵），则称 $\tau:P\to\tau(P)$ 为 $\bar{\pi}_0$ 到 $\bar{\pi}_1$ 的射影映射.

(2) 射影映射的性质

射影映射有如下性质：把直线变成直线，把共线（不共线）的三点变成共线（不共线）的三点；保持共线四点的交比不变.

(3) 射影映射基本定理

定理：存在唯一的射影映射把给定的一般位置的四个点映射成给定一般位置的另四个点.即式(2)中 $\boldsymbol{A}$ 是唯一确定的.

*9. 二阶曲线的射影分类（主教材 10.4 节）

(1) 二阶曲线方程

在普通平面上，二阶曲线 C 的方程为

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

在射影平面上，曲线 C 由齐次坐标表达，可写为

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=0.$$

记 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)$，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$（$\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵），则上式的矩阵形式为

$$\boldsymbol{XAX}^{\mathrm{T}}=0$$

（若 $\boldsymbol{X}$ 是列向量，则表示为 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=0$）.

(2) 二阶曲线的射影分类

选取适当的坐标架，二阶曲线 $\boldsymbol{XAX}^{\mathrm{T}}=0$ 可分为以下几种（标准方程）：

① $\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2+\tilde{x}_3^2=0$ （无轨迹）；

② $\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2-\tilde{x}_3^2=0$ （椭圆、双曲线、抛物线）；

③ $\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2=0$ （一点）；

④ $\tilde{x}_1^2-\tilde{x}_2^2=0$ （相交的两直线）；

⑤ $\tilde{x}_1^2=0$ （重合的两直线）.

在射影平面上，椭圆、双曲线和抛物线在同一个射影类里（因为在中心投影下，圆锥曲线—椭圆，双曲线，抛物线可以互变）.

10. 本章的重点和难点

(1) 重点

平面正交变换和平面仿射变换的定义和性质;仿射变换的简单比和变积系数;射影平面与齐次坐标;射影映射的定义和性质;射影映射(变换)基本定理.

(2) 难点

平面仿射变换的几何定义与代数定义;射影平面、齐次坐标、射影映射(变换).

10-4 例题分析与解答

例 1 给定仿射变换 τ,如何求变换 τ 的不动点和不变直线?

解 设仿射变换 τ 的变换公式为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}\text{(记作 } \boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{X}_0\text{)},$$

其中 $$\boldsymbol{X}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{X}$ 为仿射变换 τ 的不动点,即

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}' = \tau(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{X}_0,$$

解方程组

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0,$$

即得不动点 $\boldsymbol{X}$.

求不变直线:

(1) 若有两个以上不动点,则任意两个不动点的连线都是不变直线.

(2) 若只有一个不动点(x_1, y_1),设不变直线方程为

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{1}$$

取不变直线上的另一点 $\boldsymbol{X}_2 = (x_2, y_2)$,设 $\boldsymbol{X}_2' = \tau(\boldsymbol{X}_2) = (x_2', y_2')$,利用

$$\frac{y'_2 - y_1}{x'_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$$

(或利用共线三点的简单比不变),求出 k,代入(1)式得不变直线方程.

(3) 设不变直线为 $ax + by + c = 0$ 变为直线 $ax' + by' + c = 0$,将

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

代入得 $$a(a_{11}x + a_{12}y + x_0) + b(a_{21}x + a_{22}y + y_0) + c = 0,$$

即 $$(aa_{11} + ba_{21})x + (aa_{12} + ba_{22})y + (ax_0 + by_0 + c) = 0,$$

所以，
$$aa_{11}+ba_{21}=\lambda a,$$
$$aa_{12}+ba_{22}=\lambda b,$$
$$ax_0+by_0+c=\lambda c.$$
令 $\boldsymbol{Y}=(a,b)^{\mathrm{T}}$，则有
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\lambda\boldsymbol{Y} \tag{2}$$
或
$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0},$$
和
$$ax_0+by_0=(\lambda-1)c. \tag{3}$$
解得 λ 和 $\boldsymbol{Y}=(a,b)^{\mathrm{T}}$，代入(3)式，得 c，则 $ax+by+c=0$ 为不变直线.

例 2 求把给定的三直线 l_1,l_2,l_3(不共点)依次变为给定的三直线 l_1',l_2',l_3'(不共点)的仿射变换.

解 解法 1 求三线 l_1,l_2,l_3交成的三角形的顶点 A,B,C 和 l_1',l_2',l_3'交成的三角形的顶点 A',B',C'. 用三点变三点的变换公式(《大学数学——代数与几何(第 2 版)》定理 10.3)得
$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}.$$

解法 2 利用直线 $ax+by+c=0$ 变为直线 $a'x'+b'y'+c'=0$，则
$$a'a_{11}+b'a_{21}=ka,$$
$$a'a_{12}+b'a_{22}=kb,$$
$$a'x_0+b'y_0+c'=kc.$$
将 l_1,l_2,l_3和 l_1',l_2',l_3'的方程代入，求得 $a_{ij}(i,j=1,2)$和 x_0,y_0.

例 3 把给定的三角形 ABC 变为给定的三角形$A'B'C'$的仿射变换共有几个？如何求三角形 $A'B'C'$的面积？

解 共有 6 个仿射变换把$\triangle ABC$ 变为$\triangle A'B'C'$. 因为 $A\to A'$，或 B'，或 C'有三个选法；选定 A 后，B 有两个选法；选定 A,B 后，C 只有一个选法. 所以，共有 $3\times2\times1=6$ 个仿射变换把给定的三角形 ABC 变为给定的三角形$A'B'C'$.

$A'B'C'$的面积为
$$S'=S\det\boldsymbol{D}=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\frac{|\boldsymbol{D}|}{2},$$
其中 $\boldsymbol{D}$ 是仿射变换的矩阵.

例 4 平面上，以原始坐标三角形的三个顶点为不动点的射影变换公式是什么？

解 设所求的射影变换公式为：$\rho\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，容易得到变换矩阵为对角矩阵，即
$$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a,b,c),$$

其中 a,b,c 为任意常数.

例 5 射影变换 $\rho\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{AX}$ 中,是否一定有不动点和不变直线?两者数量相等否?

解 一定有.设 $\boldsymbol{X}$ 为射影变换 $\rho\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{AX}$ 的不动点,则

$$\rho\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX},$$

即

$$(\rho\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}.$$

对于三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$,$|\rho\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 是三次方程,必有实根(实特征值)ρ.将其代入 $(\rho\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,解得 $\boldsymbol{X}$,为所求的不动点.

由对偶原理得:不动点和不动线的数量相等.

***例 6** 介绍一个最简单的有限射影平面 $PG(2,2)$.$PG(2,2)$ 上的点的坐标是有序三元组(x_1,x_2,x_3),其中 $x_i\in\{0,1\}$.在两点决定一条直线方程与两直线决定一点方程时,其加法与乘法运算的规律如下:

$$0+0=0,0+1=1,1+1=0,$$
$$0\times0=0\times1=0,1\times1=1,$$

且加法、乘法都适合交换律、结合律和分配律.

有限射影平面 $PG(2,2)$共有 7 个点、7 条直线.给出每个点、每条直线的齐次坐标.画图说明每条直线上有三个点,每个点位在三条直线上.

解 如图 10-2.设 $A=(1,0,0),B=(0,1,0),C=(0,0,1)$,则

$$D=(1,1,0),E=(1,0,1),F=(0,1,1),G=(1,1,1),$$

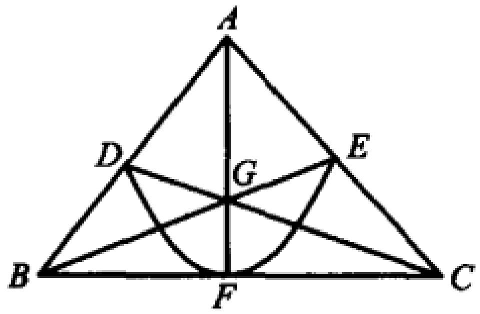


图 10-2

图 10-3

共 7 个点.其 7 条直线及其坐标分别为

$$ADB(0,0,1),BFC(1,0,0),AEC(0,1,0),AGF(0,1,1),$$
$$BGE(1,0,1),CGD(1,1,0),DFE(1,1,1).$$

例 7 一条直线上顺序的 4 个点,其相邻两点的距离相等.求各个交比.

解 设 4 个点的位置如图 10-3 所示,则交比分别为

$$(A,B;C,D)=\sigma=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}}\cdot\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}}=\frac{4}{3},$$

$$(B,A;C,D)=\frac{3}{4},$$

$$(A,C;B,D)=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3},$$

$$(B,C;A,D)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4},$$

$$(C,A;B,D)=\frac{1}{1-\sigma}=-3,$$

$$(C,B;A,D)=\frac{\sigma}{\sigma-1}=4.$$

例 8 A,B,C,D,E 为直线上的 5 个点，证明：
$(A,B;C,D)(A,B;D,E)(A,B;E,C)=1$.

证
$$\begin{aligned}&(A,B;C,D)(A,B;D,E)(A,B;E,C)\\=&\left(\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}}\right)\left(\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AE}}\right)\left(\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AC}}\right)\\=&1.\end{aligned}$$

例 9 A,B,C,D 为直线上的 4 个点，O 为 C,D 的中点，证明：$\overrightarrow{OC}^2=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的充分必要条件是$(A,B;C,D)=-1$.

证 如图 10－4，有

图 10－4

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA},$$
$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB},$$
$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA},$$
$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}.$$

由
$$(A,B;C,D)=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}},$$

得
$$(A,B;C,D)=-1\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA},$$

即 $(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}^2=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

例 10 欧氏平面上三角形 ABC 的三个内角平分线顺序交对边为 L,M,N. 设 LM 与 AB 的交点为 P, MN 与 BC 的交点为 Q, NL 与 AC 的交点为 R. 证明：P,Q,R 共线.

证 如图 10－5 所示. 设 AB,BC,CA 三边的方程分别为
$$\alpha=0,\beta=0,\gamma=0$$

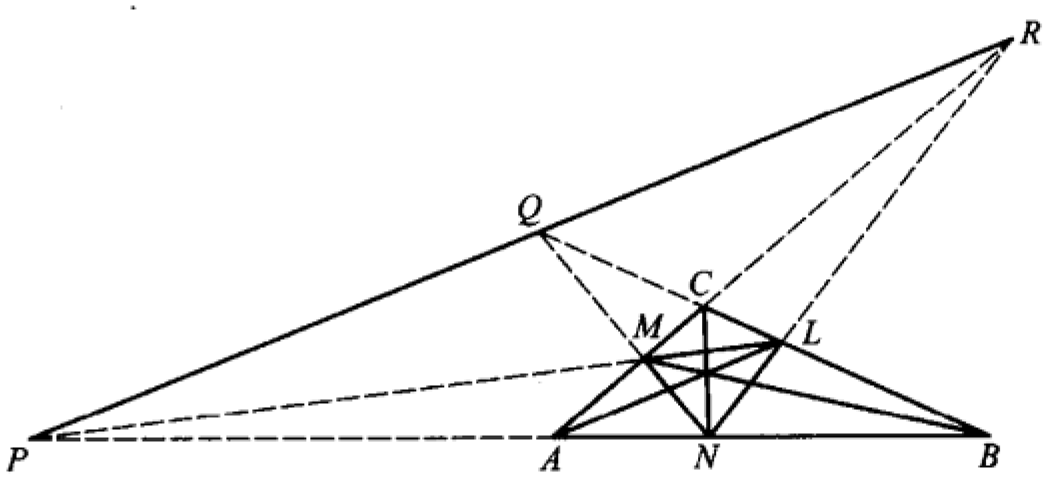


图 10－5

(其中 $\alpha=x_1,\beta=x_2,\gamma=x_3$)，则三条平分线 AL,BM,CN 的方程分别为

$$\beta-\gamma=0,\gamma-\alpha=0,\alpha-\beta=0.$$

M,N,L 三点的齐次坐标为

$$M=(1,0,1),N=(1,1,0),L=(0,1,1).$$

三线的齐次坐标为

$$ML=(-1,-1,1),LN=(1,-1,1),NM=(-1,1,1).$$

各交点的齐次坐标为

$$P=AB\times ML=(1,-1,0),$$
$$Q=NM\times BC=(0,1,-1),$$
$$R=LN\times AC=(-1,0,1).$$

于是，$$P+Q+R=(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)+(-\alpha+\gamma)=0,$$

所以 P,Q,R 共线.

例 11 已知在射影平面的原始基 $I_0[A_1,A_2,A_3;E]$ 中，A_1E 与 A_2A_3 的交点为 X，试在 A_1E 上求一点 Y，使 $(A_1,E;X,Y)=\frac{1}{2}$.

解 设原始基为

$$A_1(1,0,0),A_2(0,1,0),A_3(0,0,1),E(1,1,1),$$

求出下列各点、线的齐次坐标：

$$A_1E=(0,1,-1),A_2A_3=(1,0,0),X=(0,-1,-1)=A_1-E,$$

令 $Y=\lambda A_1+\mu E$，则

$$(A_1,E;X,Y)=\frac{-1\cdot\lambda}{1\cdot\mu}=\frac{1}{2},$$

得 $$\frac{\mu}{\lambda}=-2,$$

所以，$$Y=\rho(A_1-2E).$$

例 12(习题 24)　在射影平面上已知射影变换(点变换)σ 的公式为

$$\rho\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.\tag{1}$$

求把直线 $\boldsymbol{U}=(u_1,u_2,u_3)$变为直线 $\boldsymbol{U}'=(u_1',u_2',u_3')$的公式.

解　解法 1　由 $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{U}=0$ 和 $\boldsymbol{X}'\cdot\boldsymbol{U}'=0$,得

$$x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=0\tag{2}$$

和

$$x_1'u_1'+x_2'u_2'+x_3'u_3'=0.\tag{3}$$

将变换公式(1)代入(2)式,得

$$(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)u_1'+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)u_2'+(a_1x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)u_3'=0,$$

即

$$(a_{11}u_1'+a_{21}u_2'+a_{31}u_3')x_1+(a_{12}u_1'+a_{22}u_2'+a_{32}u_3')x_2+(a_{13}u_1'+a_{23}u_2'+a_{33}u_3')x_3=0,$$

与(2) 式比较,得

$$\rho u_1=a_{11}u_1'+a_{21}u_2'+a_{31}u_3',$$
$$\rho u_2=a_{12}u_1'+a_{22}u_2'+a_{32}u_3',$$
$$\rho u_3=a_{13}u_1'+a_{23}u_2'+a_{33}u_3',$$

于是,

$$\rho\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1'\\u_2'\\u_3'\end{bmatrix},$$

即线变换的公式为

$$\rho\boldsymbol{U}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}'$$

或

$$\rho\boldsymbol{U}'=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{U}.$$

解法 2　设点变换 σ 的公式为

$$\boldsymbol{X}'=\rho_1\boldsymbol{AX};$$

线变换 σ'的公式为

$$\boldsymbol{U}'=\rho_2\boldsymbol{BU}.$$

利用

$$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{U}=0,\boldsymbol{X}'\cdot\boldsymbol{U}'=0,$$

即

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=0,\boldsymbol{U}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}'=0,$$

得

$$\boldsymbol{U}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}'=(\rho_2\boldsymbol{BU})^{\mathrm{T}}(\rho_1\boldsymbol{AX})=\rho_1\rho_2\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=0,$$

即

$$\rho_1\rho_2\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0.$$

与式 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=0$ 比较,因为式子对任意的 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{U}$ 成立,所以

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1},$$

即 $\boldsymbol{U}'=\rho_2(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{U}$ 为把 $\boldsymbol{U}$ 变为 $\boldsymbol{U}'$的射影线变换公式.

解法 3　如图 10－6 所示. 选射影坐标系 I:$[O_1,O_2,O_3;E]$,其中 $O_1(1,0,$

0), $O_2(0,1,0)$, $O_3(0,0,1)$, $E(1,1,1)$.

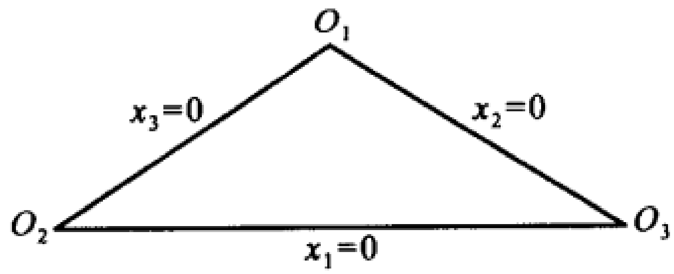


图 10 - 6

已知点变换公式:

$$\rho\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},$$

记作: $\rho\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{AX}$,其中 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$($\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量),则

$$\sigma(O_i)=O_i'=\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$$

或 $$\boldsymbol{A}=[\sigma(O_1),\sigma(O_2),\sigma(O_3)].$$

记 $\boldsymbol{u}_3=\overrightarrow{O_1O_2}$(方程为 $x_3=0$), $\boldsymbol{u}_1=\overrightarrow{O_2O_3}$(方程为 $x_1=0$), $\boldsymbol{u}_2=\overrightarrow{O_3O_1}$(方程为 $x_2=0$),则

$$\boldsymbol{u}_1'=\sigma(\boldsymbol{u}_1)=\sigma(1,0,0)=O_2'\times O_3'=\boldsymbol{\alpha}_2\times\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{u}_2'=\sigma(\boldsymbol{u}_2)=\sigma(0,1,0)=O_3'\times O_1'=\boldsymbol{\alpha}_3\times\boldsymbol{\alpha}_1,$$
$$\boldsymbol{u}_3'=\sigma(\boldsymbol{u}_3)=\sigma(0,0,1)=O_1'\times O_2'=\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2.$$

直线 $x_1+x_2+x_3=0$ 的坐标为

$$\boldsymbol{u}_E=(1,1,1),$$
$$\boldsymbol{u}_E'=\sigma(\boldsymbol{u}_E)=\sigma(1,1,1)=\boldsymbol{\alpha}_2\times\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_3\times\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2,$$

(已规范化)线坐标系

$$\mathrm{II}[\boldsymbol{U}_1',\boldsymbol{U}_2',\boldsymbol{U}_3';\boldsymbol{U}_E']$$
$$=\left[\frac{\boldsymbol{\alpha}_2\times\boldsymbol{\alpha}_3}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)},\frac{\boldsymbol{\alpha}_3\times\boldsymbol{\alpha}_1}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)},\frac{\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)};\boldsymbol{\alpha}_2\times\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_3\times\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2\right].$$

设线变换公式为

$$\rho_1\boldsymbol{U}'=\boldsymbol{BU},$$

其中 $$\boldsymbol{B}=[\sigma(\boldsymbol{U}_1)\quad\sigma(\boldsymbol{U}_2)\quad\sigma(\boldsymbol{U}_3)]=[\boldsymbol{U}_1'\quad\boldsymbol{U}_2'\quad\boldsymbol{U}_3']$$
$$=\left[\frac{\boldsymbol{\alpha}_2\times\boldsymbol{\alpha}_3}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)},\frac{\boldsymbol{\alpha}_3\times\boldsymbol{\alpha}_1}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)},\frac{\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)}\right].$$

由于

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}[\boldsymbol{\alpha}_2\times\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_3\times\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2]\frac{1}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)}$$

$$=\frac{1}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)}\begin{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) & 0 & 0\\ 0 & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1) & 0\\ 0 & 0 & (\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{E},$$

所以，
$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

10-5 习题提示与解答

1. 证明:如果平面的一个仿射变换 τ,有两个不动点 A,B,则直线 AB 上每一个点在这个仿射变换下都不变.

证 设 $A'=\tau(A)=A,B'=\tau(B)=B$.在直线 AB 上任取一点 C,令 $C'=\tau(C)$.由于仿射变换把共线的三点变成共线的三点,且保持共线三点的简单比不变,即

$$(A',C',B')=(A,C,B),$$

所以 $C'=C$,即直线 AB 上每一个点在这个仿射变换下都不变.

2. 求把三条直线 $x=0,x-y=0,y=1$ 依次变为 $3x-2y-3=0,x-1=0,4x-y-9=0$ 的仿射变换.

解 设三条直线 $x=0,x-y=0,y=1$ 交成的三角形的顶点为 A,B,C,则三个顶点的坐标为 $A(0,0),B(0,1),C(1,1)$.同理,三直线 $3x-2y-3=0,x-1=0,4x-y-9=0$ 交成的三角形对应的顶点为 $A'(1,0),B'(3,3),C'(1,-5)$.利用三点变三点的变换,把对应点坐标代入公式

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix},$$

得
$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ -8 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}.$$

3. 证明:仿射变换把任意一个仿射标架Ⅰ变成仿射标架Ⅱ,且任意一点 P 的坐标等于它的像 $P'=\tau(P)$ 的坐标.

证 由《大学数学——代数与几何(第2版)》定理10.3,显然,把仿射标架Ⅰ变成仿射标架Ⅱ的仿射变换是唯一存在的.

设点在标架Ⅰ下的坐标为$(x,y)^{\mathrm{T}}$,在标架Ⅱ下的坐标为$(x',y')^{\mathrm{T}}$,即

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{e}_1\quad \boldsymbol{e}_2]\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}'=[\boldsymbol{e}'_1\quad \boldsymbol{e}'_2]\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}.$$

由于
$$\boldsymbol{P}'=\tau(\boldsymbol{P})=\tau\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$$
$$=\tau(\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix})\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},$$
所以，
$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

4. 如果一条直线与它在仿射变换 τ 下的像重合，则称这条直线为不变直线，求下述仿射变换的不变直线：
$$\begin{cases}x'=7x-y+1,\\y'=4x+2y+4.\end{cases}$$

解 解法 1 利用直线 $ax+by+c=0$ 变为直线 $ax'+by'+c=0$ 得
$$a(a_{11}x+a_{12}y+x_0)+b(a_{21}x+a_{22}y+y_0)+c=0,$$
即
$$(aa_{11}+ba_{21})x+(aa_{12}+ba_{22})y+ax_0+by_0+c=0,$$
所以，
$$aa_{11}+ba_{21}=\lambda a,$$
$$aa_{12}+ba_{22}=\lambda b,$$
$$ax_0+by_0+c=\lambda c,$$
其中
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -1\\4 & 2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}.$$
令 $Y=(a,b)^{\mathrm{T}}$，则有
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\lambda\boldsymbol{Y}$$
或
$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$$
和
$$ax_0+by_0=(\lambda-1)c,$$
即
$$\begin{bmatrix}7-\lambda & 4\\-1 & 2-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$
和
$$a+4b=(\lambda-1)c,$$
解得
$$\lambda_1=3,\lambda_2=6.$$
当 $\lambda_1=3$ 时，有
$$a=1,b=-1,c=-\frac{3}{2}.$$
当 $\lambda_1=6$ 时，有
$$a=4,b=-1,c=0.$$
所求的不动直线为
$$x-y-\frac{3}{2}=0 \text{ 或 } 4x-y=0.$$

解法 2　先求不动点 $P(x,y)$. x,y 满足

$$\begin{cases} x=7x-y+1, \\ y=4x+2y+4, \end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix},$$

解得

$$x=-\frac{1}{2}, y=-2.$$

所以, $P\left(-\frac{1}{2},-2\right)$为一个不动点.

令不变直线为

$$y+2=k\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

在不变直线上取点

$$B=\left(0,-2+\frac{k}{2}\right)\text{和 } B'=(x',y')=\left(3-\frac{k}{2},k\right).$$

利用 PB, PB'的斜率都是 k, 或利用三点的单比不变, 得

$$\frac{k+2}{3-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}}=k,$$

所以,

$$k=1 \text{ 或 } 4.$$

故不动直线方程为

$$y+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)\text{和 } y=4x.$$

5. 设仿射变换 τ 在仿射标系 Ⅰ 中的公式为

$$\begin{cases} x'=x+2y, \\ y'=4x+3y. \end{cases}$$

(1) 求 τ 的不变直线;

(2) 以 τ 的两条不变直线为新坐标轴, 求 τ 在新坐标系中的公式.

解　(1) 同上题, 得不变直线为

$$e_1' : x+y=0,$$
$$e_2' : y-2x=0.$$

(2) 在仿射标系 Ⅰ 中取点 $A(1,0)$, $B(0,1)$. 变成新坐标系中 $A'(1,-1)$, $B'(1,2)$, 则过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

在新坐标系中, 设仿射变换的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 则

$$B = C^{-1}AC = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = 5y. \end{cases}$$

6. 设三角形△ABC 的边长 AB,BC 分别为 10 cm,6 cm,$\angle ABC = 30°$. 设仿射变换

$$\tau: \begin{cases} x' = 2x + y + 1, \\ y' = x - 4y + 2. \end{cases}$$

把 A,B,C 分别变成 A',B',C',求△$A'B'C'$的面积.

解 仿射变换的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

△ABC 的面积为

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\left(10 \cdot 6 \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) = 15.$$

△$A'B'C'$的面积为

$$S' = S\left|\det \mathbf{A}\right| = 15 \times 9 = 135.$$

7. 证明仿射变换的代数定义与几何定义等价.

证 由代数定义知,设 A,B,C 分别变成 A',B',C',若 A,B,C 三点共线,则 A',B',C'三点也共线. 再由公式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

得

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \end{bmatrix}.$$

仿射变换可逆,是一一对应的变换. 于是,满足几何定义.

反之,由几何定义得:τ 是平面到自身的一一对应变换,它把共线的三点变成共线的三点. 设 A,B,C 是不共线的三点,它构成仿射坐标系 Ⅰ = $\{A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$. Ⅰ 在仿射变换 τ 下的像 Ⅱ = $\{A';\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\}$ 也构成仿射坐标系. 将 A,B,C 和 A',B',C'的坐标分别代入

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

得到唯一解:$\mathbf{A}$ 和(x_0, y_0),就得到所求的代数变换.

8. 证明平面上任意两个平行四边形都仿射等价.

证 对任意的两个平行四边形 $OABC$ 和 $O'A'B'C'$,将 Ⅰ = $\{O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\}$

和Ⅱ $=\{O';\overrightarrow{O'A'},\overrightarrow{O'C'}\}$视为两个仿射坐标架，则存在唯一的仿射变换 τ 把Ⅰ变换Ⅱ. 设 $OC /\!/ AB$，$OA /\!/ CB$，则 $O'C' /\!/ A'B'$，$O'A' /\!/ C'B'$. 于是仿射变换 τ 把平行四边形 $OABC$ 变成平行四边形 $O'A'B'C'$，即平面上任意两个平行四边形都仿射等价.

9. 任给一个三角形$\triangle ABC$，设 D,E,F 分别是 AB,BC,CA 的中点. 证明：存在一个椭圆，它与$\triangle ABC$ 的三边分别切于D,E,F，并且求出这个椭圆的面积与$\triangle ABC$ 的面积的比值.

解 设仿射变换 σ 把三角形$\triangle ABC$ 变换为等边三角形$\triangle A'B'C'$. $\triangle A'B'C'$中存在一个内切圆 $D'E'F'$，分别切于$\triangle A'B'C'$各边的中点 D',E',F'(由于变换前后交比不变，所以$\triangle ABC$ 各边的中点仍然变为$\triangle A'B'C'$各边的中点). 因为仿射变换 σ 可逆，所以存在 σ^{-1} 把$\triangle A'B'C'$变换为$\triangle ABC$，且 σ^{-1} 把内切圆 $D'E'F'$变换为$\triangle ABC$ 的内切椭圆 DEF. 命题得证.

记椭圆 DEF 的面积为 S_0，圆 $D'E'F'$的面积为 S_0'，则

$$\frac{S_0'}{S_0}=|\det \boldsymbol{A}|,$$

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=|\det \boldsymbol{A}|.$$

所以，椭圆的面积与$\triangle ABC$ 的面积的比值等于等边三角形内切圆面积与等边三角形面积的比值，即

$$\begin{aligned}\frac{S_0}{S_{\triangle ABC}}&=\frac{S_0}{S_{\triangle A'B'C'}}\cdot\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}\\&=\frac{S'_0/|\det \boldsymbol{A}|}{S_{\triangle A'B'C'}}\cdot|\det \boldsymbol{A}|\\&=\frac{S'_0}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{\pi r^2}{\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}r\cdot 3r}\\&=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}.\end{aligned}$$

10. 在扩大的欧氏平面 π_0上，两点 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的齐次坐标分别为$(3,-1,2)$，$(2,0,1)$，求：

(1) 直线 AB 在齐次坐标中的普通方程和参数方程；

(2) 直线 AB 上的无穷远点的齐次坐标和它所对应的参数值.

解 (1) 直线 AB 的齐次方程为

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=-x_1+x_2+2x_3=0.$$

普通方程为

$$-\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_2}{x_3}+2=0,$$

即
$$x-y-2=0,$$

参数方程为

$$\boldsymbol{X}=(3,-1,2)+\lambda(1,-1,1).$$

(2) 直线 AB 上的无穷远点 $\boldsymbol{\rho}$ 的齐次坐标为 $\boldsymbol{\rho}=k(1,1,0)$,它所对应的参数值 $\lambda=-2$.

11. 在扩大的欧氏平面 π_0 上,给出下列欧氏直线在仿射坐标中的方程,求由它们所确定的射影直线在齐次坐标中的方程,并且求出它上面的无穷远点.

(1) $x+2y-1=0$;　　　　(2) $3x-2y=0$.

解　(1) $x+2y-1=0$ 在齐次坐标中的方程为

$$x_1+2x_2-x_3=0,$$

其上的无穷远点为 $k(-2,1,0)$.

(2) $3x-2y=0$ 在齐次坐标中的方程为

$$3x_1-2x_2=0,$$

其上的无穷远点为 $k(2,3,0)$.

12. 证明:射影平面上若三点 A,B,C 不共线,则三线 AB,BC,CA 不共点.

证　因为 A,B,C 三点不共线,令其坐标分别为

$$A(0,0,1),B(1,0,0),C(0,1,0).$$

则 AB 的方程为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=x_2=0,$$

即
$$\boldsymbol{U}_1=(0,1,0).$$

同理,BC 的方程为 $x_3=0$,即 $\boldsymbol{U}_2=(0,0,1)$;CA 的方程为 $x_1=0$,即 $\boldsymbol{U}_3=(1,0,0)$.所以,三线 AB,BC,CA 不共点(或混合积$(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{U}_3)\neq0$).

13. 设 A,B,C,D 为射影平面 π_0 上共线的四点,其中 A,B,C 各不相同,并且 D 与 A 不同.在此直线上取两点 P,Q,它们的齐次坐标分别为(p_1,p_2,p_3),(q_1,q_2,q_3),A,B,C,D 的齐次坐标分别为(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3),(d_1,d_2,d_3),并设

$$a_i=\lambda_1p_i+\mu_1q_i,\qquad b_i=\lambda_2p_i+\mu_2q_i,$$
$$c_i=\lambda_3p_i+\mu_3q_i,\qquad d_i=\lambda_4p_i+\mu_4q_i,$$

其中 $i=1,2,3$.

证明:

$$(A,B;C,D)=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_4\\ \mu_1 & \mu_4\end{vmatrix}}\cdot\frac{\begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_4\\ \mu_2 & \mu_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_3\\ \mu_2 & \mu_3\end{vmatrix}}.$$

证 由 $a_i=\lambda_1 p_i+\mu_1 q_i$ 和 $b_i=\lambda_2 p_i+\mu_2 q_i$ 解出 p_i,q_i,得

$$p_i=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}a_i & \mu_1\\ b_i & \mu_2\end{vmatrix},q_i=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\lambda_1 & a_i\\ \lambda_2 & b_i\end{vmatrix},$$

其中 $\Delta=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \mu_1\\ \lambda_2 & \mu_2\end{vmatrix}$.

代入 $c_i=\lambda_3 p_i+\mu_3 q_i$ 和 $d_i=\lambda_4 p_i+\mu_4 q_i$,得

$$\begin{aligned}c_i&=\frac{1}{\Delta}\left(\lambda_3\begin{vmatrix}a_i & \mu_1\\ b_i & \mu_2\end{vmatrix}+\mu_3\begin{vmatrix}\lambda_1 & a_i\\ \lambda_2 & b_i\end{vmatrix}\right)\\&=\frac{1}{\Delta}\left(\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_2\\ \mu_3 & \mu_2\end{vmatrix}a_i+\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_3\end{vmatrix}b_i\right),\\ d_i&=\frac{1}{\Delta}\left(\lambda_4\begin{vmatrix}a_i & \mu_1\\ b_i & \mu_2\end{vmatrix}+\mu_4\begin{vmatrix}\lambda_1 & a_i\\ \lambda_2 & b_i\end{vmatrix}\right)\\&=\frac{1}{\Delta}\left(\begin{vmatrix}\lambda_4 & \lambda_2\\ \mu_4 & \mu_2\end{vmatrix}a_i+\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_4\\ \mu_1 & \mu_4\end{vmatrix}b_i\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A,B;C,D)&=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_3\end{vmatrix}\cdot\frac{b_i}{\Delta}}{\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_2\\ \mu_3 & \mu_2\end{vmatrix}\cdot\frac{a_i}{\Delta}}\cdot\frac{\begin{vmatrix}\lambda_4 & \lambda_2\\ \mu_4 & \mu_2\end{vmatrix}\cdot\frac{a_i}{\Delta}}{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_4\\ \mu_1 & \mu_4\end{vmatrix}\cdot\frac{b_i}{\Delta}}\\&=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_4\\ \mu_1 & \mu_4\end{vmatrix}}\cdot\frac{\begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_4\\ \mu_2 & \mu_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_3\\ \mu_2 & \mu_3\end{vmatrix}}.\end{aligned}$$

14. 在射影平面 π_0 上,设共线三点 A,B,C 的齐次坐标分别为 $(1,2,5)$,$(1,0,3)$,$(-1,2,-1)$,在直线 AB 上求一点 D,使得交比 $(A,B;C,D)=5$.

解 设 $\boldsymbol{C}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{D}=\lambda'\boldsymbol{A}+\mu'\boldsymbol{B}$,即

$$(-1,2,-1)=\lambda(1,2,5)+\mu(1,0,3),$$

得

$$\lambda=1,\mu=-2.$$

由 $$(A,B;C,D)=\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{\lambda'}{\mu'}=\frac{-2\lambda'}{\mu'}=5,$$

得 $$\frac{\lambda'}{\mu'}=-\frac{5}{2},$$

即 $$\lambda'=-\frac{5}{2}\mu'.$$

于是，$$\boldsymbol{D}=\lambda'\boldsymbol{A}+\mu'\boldsymbol{B}=k(5\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B})=k(3,10,19)$$

为所求的点.

15. 证明《大学数学——代数与几何(第2版)》定理10.7：设四线 l_1,l_2,l_3,l_4 共点 O（O 为普通点）. 用 $\angle(l_i,l_j)$ 表示 l_i 绕 O 转到 l_j 的有向角（逆时针方向为正），则有

$$(l_1,l_2;l_3,l_4)=\frac{\dfrac{\sin\angle(l_1,l_3)}{\sin\angle(l_3,l_2)}}{\dfrac{\sin\angle(l_1,l_4)}{\sin\angle(l_4,l_2)}},$$

即共点四线的交比是四直线间有向角的正弦的复比.

证 如图10－7所示. $\triangle OP_1P_3$ 的面积为

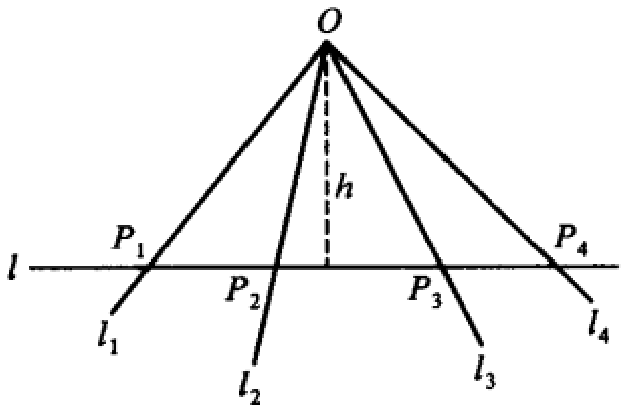


图 10－7

$$\frac{1}{2}|P_1P_3|h=\frac{1}{2}|OP_1||OP_3|\sin\angle(l_1,l_3).$$

同理，
$$\frac{1}{2}|P_1P_4|h=\frac{1}{2}|OP_1||OP_4|\sin\angle(l_1,l_4),$$
$$\frac{1}{2}|P_2P_4|h=\frac{1}{2}|OP_2||OP_4|\sin\angle(l_2,l_4).$$

所以，

$$(l_1,l_2;l_3,l_4)=(P_1,P_2;P_3,P_4)=\frac{\overrightarrow{P_1P_3}}{\overrightarrow{P_1P_4}}\cdot\frac{\overrightarrow{P_2P_4}}{\overrightarrow{P_2P_3}}$$

$$=\frac{|OP_1||OP_3|\sin\angle l_1,l_3}{|OP_1||OP_4|\sin\angle l_1,l_4}\cdot\frac{|OP_2||OP_4|\sin\angle l_2,l_4}{|OP_2||OP_3|\sin\angle l_2,l_3}$$

$$=\frac{\sin\angle l_1,l_3}{\sin\angle l_1,l_4}\cdot\frac{\sin\angle l_2,l_4}{\sin\angle l_2,l_3}$$

$$=\frac{\sin\angle l_1,l_3}{\sin\angle l_1,l_4}\cdot\frac{\sin\angle l_4,l_2}{\sin\angle l_3,l_2}.$$

16. 设 A,B,C,D,E 是共线五点,并且两两不同.证明:

$$(A,B;C,D)\cdot(A,B;D,E)=(A,B;C,E)$$

证 设 A,B,C,D,E 的齐次坐标满足:

$$\boldsymbol{C}=\lambda_1\boldsymbol{A}+\mu_1\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{D}=\lambda_2\boldsymbol{A}+\mu_2\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{E}=\lambda_3\boldsymbol{A}+\mu_3\boldsymbol{B},$$

则 $$(A,B;C,D)\cdot(A,B;D,E)=\frac{\mu_1\lambda_2}{\lambda_1\mu_2}\cdot\frac{\mu_2\lambda_3}{\lambda_2\mu_3}=\frac{\mu_1\lambda_3}{\lambda_1\mu_3}=(A,B;C,E).$$

18. 在射影平面上,求把点 $A(1,0,1)$,$B(2,1,1)$,$C(3,-1,0)$,$D(3,5,2)$ 分别变为点 $A'(-1,0,3)$,$B'(1,1,3)$,$C'(2,3,8)$,$D'(2,1,-2)$的射影坐标变换公式.

解 设 A,B,C,D(规范化后)为坐标系Ⅰ,A',B',C',D'(规范化后)为坐标系Ⅱ.将 A,B,C,D 规范化:令

$$(3,5,2)=a(1,0,1)+b(2,1,1)+c(3,-1,0),$$

即 $$\begin{cases}a+2b+3c=3,\\ b-c=5,\\ a+b=2.\end{cases}$$

解得 $$a=-2,b=4,c=-1.$$

规范化后得

$$A(-2,0,-2),B(8,4,4),C(-3,1,0),D(3,5,2).$$

同理,规范化后有

$$A'\left(\frac{3}{2},0,-\frac{9}{2}\right),B'\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right),C'\left(1,\frac{3}{2},4\right),D'(2,1,-2).$$

设所求的变换矩阵为 $\boldsymbol{P}$,对于 $\boldsymbol{X}=\rho\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}'$,即

$$\begin{bmatrix}-2&8&-3\\0&4&1\\-2&4&0\end{bmatrix}=\rho\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&-1\\0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\-\frac{9}{2}&-\frac{3}{2}&4\end{bmatrix},$$

则
$$P=\begin{bmatrix}-2 & 8 & -3\\ 0 & 4 & 1\\ -2 & 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & 4\end{bmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}-2 & 8 & -3\\ 0 & 4 & 1\\ -2 & 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$
所以，
$$P=\begin{bmatrix}\frac{-47}{6} & \frac{39}{3} & -\frac{61}{6}\\ -\frac{39}{2} & 31 & -\frac{13}{2}\\ -\frac{55}{3} & \frac{82}{3} & -\frac{17}{3}\end{bmatrix},$$
所求的射影坐标变换公式为 $X=\rho PX'$(矩阵 P 见上式).

19. 在扩大的欧氏平面上，求把直线 $x_1=0,x_2=0,x_3=0$ 分别变为直线 $a_ix_1+b_ix_2+c_ix_3=0(i=1,2,3)$的射影变换公式的一般形式.

解 三直线 $x_1=0,x_2=0,x_3=0$ 的坐标分别为
$$U_1=(1,0,0),\quad U_2=(0,1,0),\quad U_3=(0,0,1).$$
三直线 $a_ix_1+b_ix_2+c_ix_3=0$ 的坐标分别为
$$U_1'=(a_1,b_1,c_1),\quad U_2'=(a_2,b_2,c_2),\quad U_3'=(a_3,b_3,c_3).$$
不妨设$(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)+(a_3,b_3,c_3)=(1,1,1)$，即已经规范化.设射影线变换公式为
$$\rho\begin{bmatrix}U_1'\\ U_2'\\ U_3'\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{bmatrix},$$
则
$$B=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}.$$

20. 给定二阶曲线 C(如图 10－8 所示，坐标分别为 $O_1(1,0,0)$,$O_2(0,1,0)$,$O_3(0,0,1)$)，选取三角形$\triangle O_1O_2O_3$(其中 O_1,O_3是切点)为坐标三角形.证明：在上述坐标三角形中，二阶曲线 C 的方程(10.11)(见《大学数学——代数

与几何(第 2 版)》)简化为

$$a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3=0.$$

证 如图 10－8 所示.曲线 C 的方程为

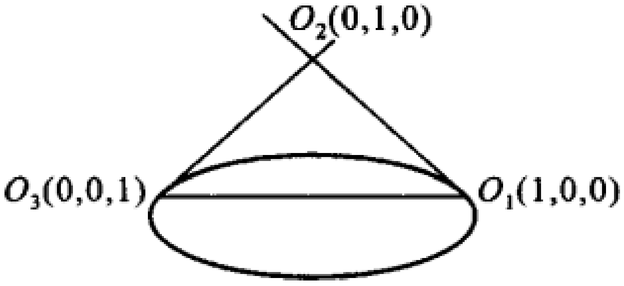


图 10－8

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=0.$$

记 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)$，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$(对称矩阵)，则上式可以表示为

$$\boldsymbol{XAX}^{\mathrm{T}}=0.$$

因为 $O_1(1,0,0)$，$O_3(0,0,1)$都在曲线 C 上，所以，

$$(1,0,0)\boldsymbol{A}(1,0,0)^{\mathrm{T}}=0,$$

即

$$a_{11}=0;$$

$$(0,0,1)\boldsymbol{A}(0,0,1)^{\mathrm{T}}=0,$$

即

$$a_{33}=0.$$

由于 $O_2(0,1,0)$ 的极线是 O_1O_3，所以，

$$(0,1,0)\boldsymbol{AX}^{\mathrm{T}}=0,$$

即

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0.$$

又 O_1O_3的方程是 $x_2=0$，于是

$$a_{21}=a_{23}=0,$$

故曲线 C 的方程 $\boldsymbol{XAX}^{\mathrm{T}}=0$ 简化为

$$a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3=0.$$

21. 正常成人的头长、体长、腿长与全身长之比分别为 14%，35%，51%.某甲天生体长腿短，腿长只占全身长的 45%.在照相中他想弥补这一缺陷：通过取一个合适的角度，使照片上的这一比例变为 50%.利用交比不变性，问这时他的头长所占的比例变成多少？

解 由题意可知，某甲的头长、体长、腿长与全身长之比分别为 14%，41%，45%.照片上的这些比例变为 x%，$(50-x)$%，50%(如图 10－9 所示).因为交比

$$\sigma=\frac{\overrightarrow{P_1P_3}}{\overrightarrow{P_1P_4}}\cdot\frac{\overrightarrow{P_2P_4}}{\overrightarrow{P_2P_3}}$$

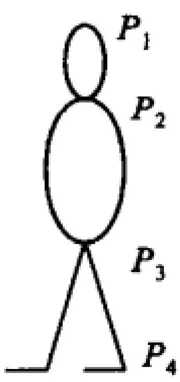


图 10－9

不变，则有

$$\frac{55}{100}\cdot\frac{86}{41}=\frac{50}{100}\cdot\frac{100-x}{50-x},$$

解得

$$x=11.754,$$

即头长所占的比例是 11.754％.

22. 设 A,B,C 和 A',B',C' 分别是直线 l_1,l_2 上的任意三点，试通过直线中心透视的乘积构造一个射影对应 $\tau:l_1\to l_2$，使得

$$\tau(A)=A',\tau(B)=B',\tau(C)=C'.$$

解 解法 1 如图 10－10 所示，记 AB' 和 $A'B$ 的交点为 p，BC' 和 $B'C$ 的交点为 q，并记 p 与 q 的连线为 l_0，BB' 和 l_0 的交点为 r.

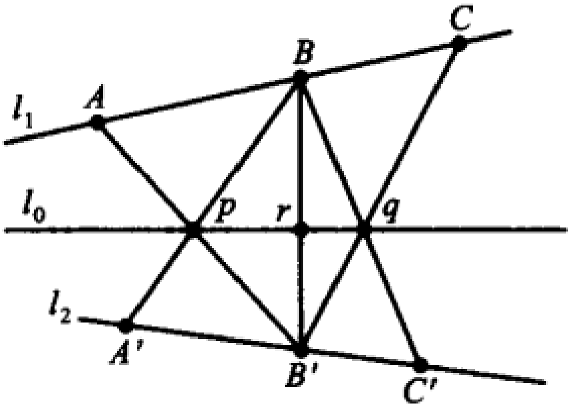


图 10－10

令 $\tau_1:l_1\to l_0$，使得

$$\tau_1(A)=p,\tau_1(B)=r,\tau_1(C)=q,$$

令 $\tau_2:l_0\to l_2$，使得

$$\tau_2(p)=A',\tau_2(r)=B',\tau_2(q)=C',$$

则所求的射影为

$$\tau=\tau_2\tau_1:l_1\to l_2.$$

解法 2 如图 10－11 所示，记 AA' 和 BB' 的交点为 O_1，作 $A'C''$（即 l_0）. l_0 与 O_1C 交于 C''，l_0 与 O_1B 交于 B''，记 $C'C''$ 与 $B'B''$ 的交点为 O_2，

令 $\tau_1:l_1\to l_0$，使得

$$\tau_1(A)=A',\tau_1(B)=B'',\tau_1(C)=C'',$$

令 $\tau_2:l_0\to l_2$，使得

$$\tau_2(A')=A',\tau_2(B'')=B',\tau_2(C'')=C',$$

则所求的射影为

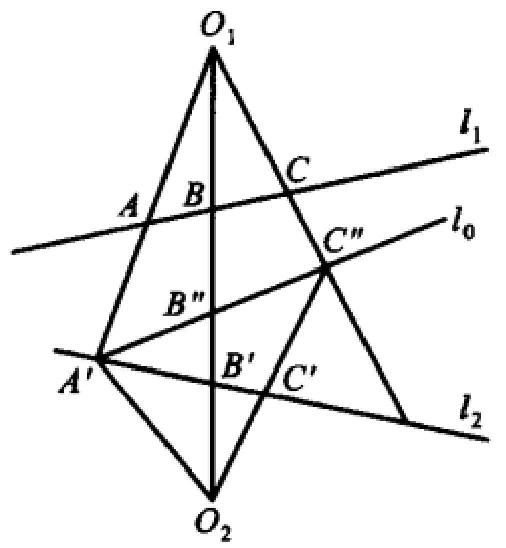


图 10－11

$$\tau = \tau_2 \tau_1 : l_1 \to l_2 .$$

23. 设射影平面 π_0 上取两个基底 Ⅰ $=[A_1, A_2, A_3; E]$ 和 Ⅱ $=[B_1, B_2, B_3; F]$，已知 B_1, B_2, B_3 和 F 在基底 Ⅰ 中的射影坐标分别为 $(1,-1,2)$，$(2,0,1)$，$(-1,2,4)$ 和 $(1,-1,0)$，求基底 Ⅰ 到基底 Ⅱ 的射影坐标变换公式.

解 坐标系 Ⅱ 规范化：令

$$(1,-1,0)=a(1,-1,2)+b(2,0,1)+c(-1,2,4),$$

即

$$\begin{cases} a+2b-c=1, \\ -a+2c=-1, \\ 2a+b+4c=0, \end{cases}$$

得

$$a=\frac{7}{15}, b=\frac{2}{15}, c=\frac{-4}{15},$$

规范化后，B_1, B_2, B_3 的坐标为

$$\frac{7}{15}(1,-1,2), \frac{2}{15}(2,0,1), \frac{-4}{15}(-1,2,4).$$

则基底 Ⅰ 到基底 Ⅱ 的射影坐标变换公式为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\rho}{15} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -7 & 0 & -8 \\ 14 & 2 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}.$$

25. 在射影平面上，射影变换 σ 的公式为

$$\lambda \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

求 σ 的不动点和不变直线.

解 由 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{X}$ 和 $\lambda\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,解

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},$$

得特征值 λ_i 和特征向量 $\boldsymbol{X}_i$,则 $\boldsymbol{X}_i$ 为不动点.

解
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ 1 & \lambda-2 & -1\\ 2 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)^2(\lambda-3)=0,$$

得
$$\lambda_1=1,\lambda_2=3.$$

当 $\lambda_1=1$ 时,对应的特征向量为

$$k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2=k_1(1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,1)^{\mathrm{T}}\quad(k_1,k_2\text{为任意常数});$$

当 $\lambda_2=3$ 时,对应的特征向量为

$$\boldsymbol{X}_3=(1,1,2)^{\mathrm{T}},$$

则 $\boldsymbol{X}_3=\rho(1,1,2)^{\mathrm{T}}$和直线 $\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2=k_1(1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,1)^{\mathrm{T}}$上点的坐标都是不动点的齐次坐标.

求不动直线.

解法 1 $\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{X}$(其中 $\boldsymbol{X}$ 是直线$\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2$上的任意一点)都是不动直线.

解法 2 利用上题的线射影变换矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$,求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值μ 和特征向量 $\boldsymbol{Y}$. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的特征值也是 λ,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$的特征值为 $\mu=\lambda^{-1}$.

解线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\lambda_i\boldsymbol{Y}$,即

$$[\lambda_i^{-1}\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}]\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0},$$

得特征向量 $\boldsymbol{Y}_i$为不动线的坐标.

当 $\lambda_1=1$ 时,解$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$,对应的特征向量为

$$k_1\boldsymbol{Y}_1+k_2\boldsymbol{Y}_2=k_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-2,0,1)^{\mathrm{T}}(\text{其中 }k_1,k_2\text{为任意常数});$$

$\lambda_2=3$ 对应的特征向量为

$$\boldsymbol{Y}_3=\rho(-1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

于是,
$$\boldsymbol{Y}_3=\rho(1,-1,-1)$$

和
$$\rho(k_1\boldsymbol{Y}_1+k_2\boldsymbol{Y}_2)=\rho[k_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-2,0,1)^{\mathrm{T}}]$$

上的任一个坐标都是所求的不动线的坐标.

第 11 章　非欧几何学简介

11－1　学时安排的建议

表 11－1

节	教 学 内 容	复习页数
44	11.1 球面几何	387—392
45	11.1 节中的平面极投影的应用，11.2 双曲几何的庞加莱模型	392—397

11－2　内容提要

1. 球面几何(主教材 11.1 节)

(1) 连接空间 X 中任意两点的最短曲线称为 X 中极小测地线. 用测地线连接 X 上三点 A,B,C 构成的图形称为测地三角形. 球面上两点之间的最短道路(球面上的测地线)就是球面 S 上的大圆弧("大圆"是过球心的平面与球面的交线).

球面几何里的大圆("直线")相似于平面几何中直线：球面上任意两个不在同一直径上的点决定唯一的一条"直线"；任意两条"直线"必交于在同一直径上的两点. 因而球面上没有"平行线".

(2) 球面三角形 $\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle B+\angle C=\pi+\dfrac{V}{R^2}$，其中 R 为球面半径，V 为 $\triangle ABC$ 的面积. 所以，球面三角形三内角之和 $\angle A+\angle B+\angle C>\pi$(平面三角形三内角之和等于 π). 于是，不存在球面上的三角形到平面上的三角形的保长映射.

(3) 空间球极投影. 设 Σ^2 为半球面，$N=(0,0,1)$，π 为平面 xOy，称映射

$$\tau:\Sigma^2\to\pi^*=\pi\cup\{\infty\}，且\ \tau(N)=\infty$$

为球极投影(见主教材图 11－5). 半球面 Σ^2 上的动点 $P(\xi,\eta,\zeta)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1)$ 映成平面 π 上的点 $\tau(P)=P'(x,y,0)$. 则 $P(\xi,\eta,\zeta)$ 和 $P'(x,y,0)$ 有如下关系：

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta},y=\frac{\eta}{1-\zeta},$$

$$\xi=\frac{2x}{1+x^2+y^2},\eta=\frac{2y}{1+x^2+y^2},\zeta=\frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}.$$

(4) 球极投影 $\tau:\Sigma^2\to\pi^*$ 具有下列重要性质：

① Γ 是 Σ^2 上的圆，且 $N\in\Gamma$ 当且仅当 $\tau(\Gamma)$ 为 π^* 上的直线；

② Γ 是 Σ^2 上的圆，且 $N\notin\Gamma$ 当且仅当 $\tau(\Gamma)$ 为 π^* 上的圆；

③ τ 保持角度不变.

(5) 平面极投影的应用

积分 $\int R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$（$R(x,y)$ 为有理函数）的万能变换公式的来源

设 $$x=\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},y=\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}.$$

则 $$t=\tan\frac{\theta}{2},\mathrm{d}\theta=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

于是， $$\int R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

2. 双曲几何的庞加莱模型（主教材 11.2 节）

(1) 设 S 是欧氏平面上的单位圆 $\hat{C}$ 的内部，S 中的"点"为欧氏平面的点；S 中的"直线"（双曲直线）为过圆心的直径或与 $\hat{C}$ 正交的圆弧；$\hat{C}$ 上的点称为无穷远点.

两条直线称为互相平行，如果它们交于无穷远点.

S 中任意两点必位于唯一的"直线"上.

欧氏平面中，与单位圆正交的圆方程必为

$$x^2+y^2+ax+by+1=0.$$

设两点的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，代入方程得

$$\begin{cases}x_1a+y_1b=-x_1^2-y_1^2-1,\\x_2a+y_2b=-x_2^2-y_2^2-1;\end{cases}$$

方程组有解的条件是

$$x_1y_2-x_2y_1\neq0,$$

即这两点与 $(0,0)$ 不共线. 所以，这两点或者位于同一直径上，或者位于某一"直线"上. 不论哪种情况，过这两点的直线都是唯一的.

(2) S 中任意两点 A,B 的距离（"双曲距离"）的定义为

$$d(A,B)=\begin{cases}0, & A=B,\\ \left|\ln\frac{|AM||BN|}{|AN||BM|}\right|, & A\neq B,\end{cases}$$

其中$|AB|$表示欧氏线段 AB 的长度；M,N 表示 A,B 所在直线与 $\hat{C}$ 的两个交点.

距离函数 d 满足对称性和三角不等式，即

$$d(A,B)=d(B,A);$$
$$d(A,B)+d(B,D)\geqslant d(A,D)$$

(如果 A,B 中有一点在 $\hat{C}$ 上，其距离为∞). 若两条双曲直线交于 A 点，定义它们的夹角就是两条曲线在这一点的切线的夹角.

S 中点 A 与圆心的欧氏距离 r 和双曲距离 r' 以下有关系：

$$\operatorname{sh} r'=\frac{2r}{1-r^2},\quad \operatorname{ch} r'=\frac{1+r^2}{1-r^2},\quad \operatorname{th} r'=\frac{2r}{1+r^2}.$$

(3) 庞加莱平面双曲几何的模型就是由以上构成的 S 中的几何模型. 几何公设 1 - 4 成立，公设 5 不成立(过直线外一点有无穷多条直线与此直线平行).

(4) 对于直角双曲三角形 ABC，有以下关系(r 表示欧氏距离，r'表示双曲距离)：

$$\sin A=\frac{\operatorname{sh} a'}{\operatorname{sh} c'},\quad \sin B=\frac{\operatorname{sh} b'}{\operatorname{sh} c'},\quad \cos A=\frac{\operatorname{th} b'}{\operatorname{th} c'},$$
$$\operatorname{ch} c'=\operatorname{ch} a' \operatorname{ch} b' \text{(勾股定理)}$$

和半角公式

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sh}(s'-c')\operatorname{sh}(s'-b')}{\operatorname{sh} c' \operatorname{sh} b'}} \left(\text{其中 } s'=\frac{1}{2}(a'+b'+c')\right)$$

对于一般的三角形 ABC，有(余弦定理)

$$\operatorname{ch} a'=\operatorname{ch} b' \operatorname{ch} c'-\operatorname{sh} b' \operatorname{sh} c' \cos A.$$

(5) S 内欧氏三角形 ABC 和双曲三角形 DEF 的对应边都相等(在各自长度的意义下)，则 DEF 的内角和小于 ABC 的内角和 π.

11 - 3 内容注析

1. 非欧几何的起源

公元前 3 世纪，希腊的欧几里得写成《几何原本》(共 13 卷)，所讲述的几何称为欧氏几何. 它是人类理性思维的一大成就. 它第一次系统地体现了“公理化”思维的模式，即一种从公认的定义和无须证明的公理和公设出发，经过合乎逻辑的推理，最后得出结论的模式.《几何原本》中用了23 个定义(如点无大小；线有长度无宽度；线的界是点；面的界是线；直线上的点同样放置；面只有长度和宽度等)，5 条公理(即对一切学科都通用的无须证明的命题：等于同量的量相等；等量加等量其和相等；等量减等量其差相等；可重合图形全等；整体大于部分)和 5

条公设(对几何学不需证明的命题:从任一点到另一点可以引直线;有限直线可以无限延长;以任意一点为圆心可用任意半径作圆;所有直角都相等;任两直线与另一直线相交所成同侧内角和小于两直角,则两线在这一侧必相交,或通过不在已知直线上的一点,至多有一条直线与已知直线平行,称此为平行公设.由此推出了一系列的平面和空间图形的性质.出于理性和对简洁美的追求,后人对其中第5公设的公设地位有所怀疑,认为它可能是其他4条公设的推论.1792—1813年,高斯决定丢掉第5公设,以相反的断言推出一系列定理.许多科学家也走上同一道路,结果都没有找到问题的答案.1826年罗巴切夫斯基(俄国)假设通过不在已知直线上的一点,至少有两条直线与已知直线平行,加上欧氏其他命题,导出非欧几何的起源.到了19世纪后期非欧几何才被人们接受.经过两千多年的探索,才证明了第5公设确实独立于其他4条公设之外,并创立了两门新的几何学——椭圆几何(满足公设1-4,但过直线外一点没有与之平行的直线)和双曲几何(满足公设1-4,但过直线外一点有无穷多与之平行的直线).

非欧几何的产生,源于对欧氏几何平行公设地位的怀疑,并不牵涉到欧氏几何本身的正确性.非欧几何的出现,引出了它们在物质空间的适用性问题.这个问题一直到爱因斯坦在相对论中用上了非欧几何才得到基本解决.非欧几何为物理学的发展提供了有力的工具.对非欧几何研究成就最大的是希尔伯特(Hilbert),他在1899年出版的名著《几何基础》中确立:几何的一切命题是若干基本假设(公理)用纯粹逻辑推导出来的.他还介绍公理系统的三个基本问题:公理系统的相容性(任两条公理没有矛盾)、独立性(每个公理不能用其余的公理推导出来)和完备性(一个公理系统中的任意两个模型都是同构的).

2.“埃尔兰根纲领”

19世纪相继出现的各种几何之间有什么内在的联系呢?19世纪末,克莱因提出他的“埃尔兰根纲领”,即在几何对象的集合中,定义一种变换,集合对此变换(乘法)组成一个群.定义集合的元素在变换下的像或与原像相等,或等价,或合同.例如,在欧氏几何中,任意两个半径相等的圆都是相等的.

设有某类变换把元素A变为B(A的一些性质,B未必也有).在这类变换下不变的性质,如表现为某种量,就叫做“不变量”.在某变换群G下的一切不变性质叫做属于群G的性质.研究一切属于群G的性质叫做属于群G的几何,如研究度量性质(运动下不变)的就叫度量几何;研究仿射性质的就叫仿射几何;研究射影性质的就叫射影几何.

克莱因群论观点大体表示见图11-1.在射影平面上,射影几何的变换群由全体射影变换组成;仿射几何的变换群由所有保持无穷远直线不变的射影变换组成(仿射群是射影群的子群);欧氏几何的变换群(运动群)由所有保持无穷远直线上两点$(1,i,0)$,$(1,-i,0)$不变的仿射变换所组成(运动群是仿射群的子

群);椭圆几何的变换群由所有保持二次曲线 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ 不变的射影变换组成(也是射影群的子群);双曲几何的变换群由所有保持二次曲线 $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ 不变的射影变换组成(也是射影群的子群).

欧氏几何的变换是欧氏平面上的正交变换,距离、角度、面积、平行性、单比、共线性和交比都不变;在仿射变换下距离、角度和面积等一般都改变,但平行性、单比、共线性和交比等都不变;在射影变换下平行性和单比一般要改变,但共线性和交比都不变.群越大则其几何内容越少,这就是克莱因群论观点的主要思想.

以上所说的都是平面上的线性变换.一般曲面上的几何,是微分几何(见第9章)的范围了.

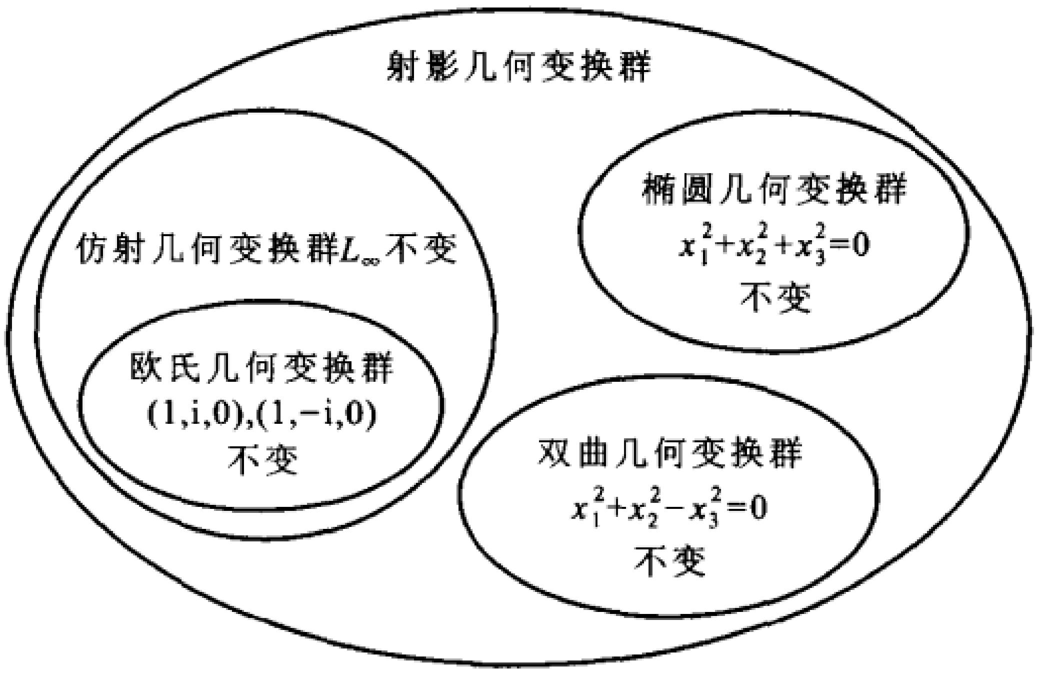


图 11－1

附录 1　清华大学试题选

试卷一

一、选择题(答案可以不唯一)(共 30 分)

1. 以下矩阵均为 n 阶矩阵,正确的命题是(　　).

(A) 若乘积 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{E}$

(B) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}$

(C) 若 $\boldsymbol{AB}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆

(D) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$

(E) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$

(F) 若 $\boldsymbol{ABCD}=\boldsymbol{E}$($n$ 阶单位矩阵),则 $\boldsymbol{CDBA}=\boldsymbol{E}$

2. 以下命题正确的是(　　).

(A) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

(B) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

(C) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量是 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}/|\boldsymbol{b}|^2$

(D) 向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则式子 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$ 和 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$ 都成立

3. 以下命题正确的是(　　).

(A) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解空间 S 与 $\boldsymbol{A}$ 的行空间 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$($A$ 的全部行向量张成的子空间)正交

(B) 设 W_1,W_2 是线性空间 V 的两个子空间,则 $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$

(C) 设 $W_i(i=1,2,3,4)$ 为线性空间 V 的子空间,$W_1\subset W_2=W_3+W_4$,则
$$W_1\cap W_2=(W_1\cap W_3)+(W_1\cap W_4)$$

(D) 设 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组单位正交基,若
$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$
则
$$k_i=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon}_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$$

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵。$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{A}$ 可化简为(　　).

(A) $(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{-1}$　　(B) $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}$　　(C) $(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$　　(D) $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})^{-1}$

5. 若 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=4$,则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+2\boldsymbol{\alpha}_1)$ =(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵($m\neq n$),已知线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,则有(　　).

(A) $r(\boldsymbol{A})=n$

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

(C) $n>m$

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关

(E) $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 m

二、填空题(共 30 分)

1. 设 $A(1,2,3)$,$B(-1,2,0)$,$C(1,1,1)$,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$__________,$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=$__________;$\triangle ABC$ 的面积为__________.

2. 过点 $P(2,-3,3)$和平面 $x+2y+4z-2=0$ 平行,且与 z 轴相交的直线方程是______________.

3. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-3,4,5)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-5,0,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,3,4)^{\mathrm{T}}$的极大线性无关组是__________.

4. 设 $f_1=1+x^2$,$f_2=1+x+x^2$,$f_3=1+x$,(f_1,f_2,f_3)是 $F[\mathbf{R}]_3$ 的一组基,则 $g(x)=2+3x+4x^2$ 关于这组基的坐标 $\boldsymbol{X}=$________________.

5. 在集合 $A=\{a,b,c\}$上定义一个自反性、对称性、反对称性和传递性都没有的尽量简单的二元关系 $R=$__________.

三、计算题(共 24 分)

1. $\sigma\in L(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$,$\sigma(\boldsymbol{\alpha})$是 $\boldsymbol{\alpha}$ 对平面 $x_1+x_2-x_3=0$ 的镜面反射.

(1) 求 σ 在自然基 B 下对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 给出基 B_1 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使 σ 在基 B_1 下对应的矩阵为 $\boldsymbol{\Lambda}$.

2. 线性映射 $\tau:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^4$ 定义为

$$\sigma\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2-x_3\\x_1-x_2+2x_3\\-x_2+x_3\end{bmatrix}.$$

求值域 $\operatorname{Im}\sigma$ 的一组基和核 $\operatorname{Ker}\tau$ 的一组基.

3. 设

$$A=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix},$$

A,B 满足关系式 $AB=A+2B$,求矩阵 B.

四、证明题(共 16 分)

1. 已知 $A\in M_n(\mathbf{R})$且 A 可逆,$a\in\mathbf{R}$,$B=\begin{bmatrix}A&\alpha\\\alpha^{\mathrm{T}}&c\end{bmatrix}$,证明:$B$ 可逆的充分必要条件是

$$c-\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha\neq 0.$$

2. 设 $\sigma\in L(V,V)$,证明:$\mathrm{Im}\ \sigma\subset\mathrm{Im}\ \sigma^2$ 的充分必要条件是 $V=\mathrm{Ker}\ \sigma+\mathrm{Im}\ \sigma$.

试卷二

一、填空与选择题(共 40 分)

1. 设 A,B 均为 n 阶可逆矩阵. $A=B^{\mathrm{T}}$,则 $A^{\mathrm{T}}(B^{-1}A^{-1}+E)^{\mathrm{T}}$($E$ 为 n 阶单位矩阵)可化简为(　　).

(A) $A+B$　　(B) $A^{\mathrm{T}}+A^{-1}$　　(C) $A^{\mathrm{T}}B$　　(D) $A+A^{-1}$

2. 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$. A 有三个二元关系:

$$R_1=\{(a,a),(a,b),(b,b),(c,c),(a,c),(d,d)\},$$
$$R_2=\{(b,b),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(d,d)\},$$
$$R_3=\{(a,a),(d,c),(b,b),(c,c),(c,d),(d,d)\},$$

其中二元关系__________是等价关系,它将 A 分成__________个等价类.

3. 过点 $P(2,-1,-1)$和直线$\begin{cases}2x+y-4=0,\\y+2z=0\end{cases}$的平面方程是____________________.

4. 过点 $A(2,-1,0)$且与 z 轴垂直相交的直线方程是____________.

5. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关,则$\{\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1\}$的线性相关性为__________.

6. 已知 $\alpha_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\alpha_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\alpha_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基,$A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]$.

(1) $\beta=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$关于这组基的坐标是__________.

(2) $A^{-1}=$__________.

7. 设 A,B 均为 n 阶矩阵,以下命题正确的是(　　).

(A) 若乘积 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(B) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

(C) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆,则乘积 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆

(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+2\boldsymbol{AB}$

(E) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为对称矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 也是对称矩阵

8. 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$. A 有 2 个二元运算“$*$”和“$\circ$”. 运算“$*$”和“$\circ$”的定义如附表 1-1 和附表 1-2 所示.

附表 1-1

$*$	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	d	b	c	a
c	b	c	b	d
d	c	d	a	b

附表 1-2

$\circ$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

这两个系统中构成群的系统是__________,其中 a 的逆元是__________.

9. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵,已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 均可逆,则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\qquad\qquad}.$$

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,已知线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解. 以下命题不正确的是(　　).

(A) 方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 对任意 $\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n$ 有唯一解

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列秩为 n

(C) $m\geqslant n$

(D) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

(E) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组中恰有 n 行线性无关

二、计算题与证明题(共 60 分)

1. (10 分)求方程组

$$\begin{cases} x_1-x_4=0, \\ x_1-x_3=0, \\ 2x_1-x_3-x_4=0 \end{cases}$$

的解空间 S 的正交补 $S^{\perp}$ 的一组单位正交基.

2. (12 分)已知 $\sigma\in L(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$,把$\triangle ABC$ 变换为$\triangle A'B'C'$,其中 $A(1,0,0),B(0,2,0),C\left(0,0,\sqrt{2}\right);A'(1,1,0),B'(-2,2,0),C'(0,0,-2)$.

(1) 求 $\sigma(x_1,x_2,x_3)$;

(2) 求 σ 在自然基下对应的矩阵 $\mathbf{A}$;

(3) 证明 σ 可逆,并求 $\sigma^{-1}(x_1,x_2,x_3)$.

3. (12 分)线性映射 $\tau:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^3$定义为

$$\tau\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1-x_2+x_3-x_4\\x_1-x_2+x_3-\dfrac{1}{2}x_4\\6x_1-4x_2+4x_3-3x_4\end{bmatrix},$$

求值域 $\operatorname{Im}\tau$ 和核 $\operatorname{Ker}\tau$ 的各一组基.

4. (6 分)已知$\langle G,*\rangle$为群,且 $\forall\, x,y\in G$,有$(x*y)^2=x^2*y^2$.问:$\langle G,*\rangle$是否为交换群?证明你的结论.

5. (12 分)已知欧氏空间 $V(\mathbf{R})$中向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关,且 $\boldsymbol{\alpha}_i\neq\boldsymbol{O}$,内积$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_2)=0,i=1,2,\cdots,m$.证明:$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$线性无关的充分必要条件是$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$线性无关.

6. (8 分) 设 $\sigma\in L(V,V)$,$\dim V=n$,且 $\sigma^2=\sigma$,I 是 V 上的恒等变换,证明:

(1) $(I-\sigma)(V)\subset\operatorname{Ker}\sigma$;

(2) $r(I-\sigma)+r(\sigma)=n$.

试卷三

1. 判断下列命题是否成立?(每题 3 分)

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关,$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$线性无关.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$线性无关.

(3) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\gamma}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\alpha}$.

(4) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{2n}-\boldsymbol{\alpha}_{2n+1},\boldsymbol{\alpha}_{2n+1}-\boldsymbol{\alpha}_1$也线性无关.

(5) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性相关.

2. (5 分)写出命题“对任意不全为 0 的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,均有 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2$

$+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n\neq\mathbf{0}$."的逆否命题和否命题.

3.(10分)问 $\mathbf{Q}^*=\mathbf{Q}\setminus\{0\}$ 对数的乘法是否为交换群？若是，找一个子群 $H(\neq\mathbf{Q}^*)$.

4.(10分)求过点 $(1,2,-3)$ 且与 z 轴和向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$ 都平行的平面方程.

5.(12分) $L_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{4}$，$L_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{2}$，$L_1$ 与 L_2 是否相交？若是求交点.

6.(12分)设 $\begin{cases}x_1-2x_2+x_4=2,\\ x_1-x_2-x_3+x_4=2,\\ 3x_1-6x_2+px_3+qx_4=q+7,\\ 3x_1-6x_2+px_3+x_4=0.\end{cases}$

问：p,q 取哪些值时，方程组有唯一解和有无穷多解？有无穷多解时求全部解.

7.(12分)设

$W_1=\{(x_1,\cdots,x_4)\in F^4\mid x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0,\text{且 } x_2-x_3+x_4=0\}$,

$W_2=\{(x_1,\cdots,x_4)\in F^4\mid x_1+3x_2-3x_4=0,\text{且 } 7x_2-3x_3-x_4=0\}$.

(1) 求 W_1+W_2 的基和维数，以及 W_1+W_2 的单位正交基；

(2) 求 $W_1\cap W_2$ 的基和维数；

(3) 求 $W_1\cap W_2$ 的正交补.

8.(12分)已知：$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\eta}$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，问：$\boldsymbol{\delta}$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\eta}$ 线性表示？证明你的论断.

9.(6分)设 $I_{\mathbf{R}}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的恒等映射，映射 $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. 若有 $gf=I_{\mathbf{R}}$，是否有 $fg=I_{\mathbf{R}}$？若没有，试增加一个条件，使 f,g 均为双射.

10.(6分)在复空间 $V(\mathbf{C})$ 上定义一个二元运算，使 V 中元素 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 与一个复数相对应，记作 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，如果 $\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,\lambda\in\mathbf{C}$，满足：

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\overline{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}$ （$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 与 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$ 互为共轭复数）；

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ （(2),(3)为线性性）；

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant0$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$（正定性）.

则称实数 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积，定义了内积的 $V(\mathbf{C})$ 称为复内积空间，有限维复内积空间叫做酉空间(Unitary space). 全体 n 维复向量的集合记作 $\mathbf{C}^n$. 试列举与欧氏空间相似的复内积空间的若干性质.

试卷四

一、填空题(共 60 分)

1. $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\6&3&4&0\\3&4&0&0\\4&4&0&0\end{vmatrix}=(\quad)$.

2. 在半径为 R 的球面$\triangle ABC$ 中,设 V 为$\triangle ABC$ 的面积,则$\angle A+\angle B+\angle C=(\quad)$.

3. 在欧氏平面中把三点 $O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(2,1)$分别顺序变为 $O'(1,1)$,$A'(3,1)$,$B'(1,3)$的仿射变换公式是(　　),三角形$\triangle O'A'B'$和三角形$\triangle OAB$ 面积之比为(　　).

4. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解的一个充要条件为(　　).

5. 在射影平面上,设共线四点 A,B,C,D 的齐次坐标为 $A(1,0,0)$,$B(0,1,0)$,$C(3,1,0)$,$D(1,-2,0)$,则交比$(A,B;C,D)=(\quad)$

6. 已知:$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{bmatrix}$,已知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则 $x=(\quad)$,$y=(\quad)$.

7. 设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$,则 t 满足(　　)时,$\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵,$\boldsymbol{A}$ 的 4 个特征值为 $-2,-1,1,2$,则

(1) $\det(-\boldsymbol{A})=(\quad)$;

(2) $\det(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=(\quad)$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位方阵.

9. 如果 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解,并且 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\eta}_t$也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解,则 $k_1,k_2,\cdots,k_t$满足(　　).

10. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆,特征值为 λ,其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为(　　),其对应的特征向量为(　　).

11. 在三维欧式空间 $\mathbf{R}^3$ 中,过坐标原点$(0,0,0)$,且垂直于平面 $\pi: x-2y-2z+4=0$ 的直线方程是(　　),该直线于平面 π 的交点坐标是(　　).

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 为反对称实矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值必为(　　).

13. 椭圆$\begin{cases}x^2+4y^2=1,\\z=0\end{cases}$绕 x 轴旋转得到的旋转曲面方程为(　　).

14. 已知 n 阶实对称幂等矩阵 $\boldsymbol{A}$(即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$)的秩为 r,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

为(　　)，且行列式 $\det(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=$(　　).

二、计算题与证明题(共 40 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶正定矩阵，证明：存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 都为对角矩阵.

2. 在射影平面上，射影变换 σ 的公式为

$$\lambda\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&2&1\\-2&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},$$

求 σ 的不动点和不动直线.

3. 设二次型　$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$,

求正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，使 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 化为标准形.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$. 证明：存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}$.

试卷五

一、填空与选择题(共 53 分)

1. 已知 $\mathbf{R}^4$ 中的三个向量 $\boldsymbol{e}_1=[1,0,0,0],\boldsymbol{e}_2=[0,1,0,0],\boldsymbol{e}_3=[0,0,1,0]$ 是线性齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解，下列哪个成立？答：(　　).

(A) $r(\boldsymbol{A})=1$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不存在　　(B) $r(\boldsymbol{A})=2$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在

(C) $r(\boldsymbol{A})=3$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在　　(D) $r(\boldsymbol{A})=3$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不存在

2. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ 是(　　).

(A) 相似不相合　　(B) 相合不相似

(C) 既相似又相合　　(D) 既不相似又不相合

3. 设 $\boldsymbol{P}$ 是 n 阶正交矩阵，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶反对称矩阵，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是(　　).

(A) 对称矩阵　　(B) 反对称矩阵

(C) 既非对称矩阵又非反对称矩阵　　(D) 正交矩阵

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$0,1,-1$ 是其特征值，以下哪个成立？答：(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 都可逆　　(B) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 都不可逆

(C) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 都可逆　　(D) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}$ 都可逆

5. 已知矩阵 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{O}$，下列哪个成立？答：(　　).

(A) $\boldsymbol{B}$ 的列向量是线性齐次方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解

(B) $\boldsymbol{C}$ 的行向量是线性齐次方程 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解

(C) $\boldsymbol{C}$ 的列向量是线性齐次方程 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量是线性齐次方程 $(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解

6. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=-2$，则

$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ 2\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=$ ________；$|(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^k|=$ ________（k 为正整数）.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$，$|\boldsymbol{A}|=1$，

$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 λ_0，其对应的特征向量为 $(-1\quad -1\quad 1)^{\mathrm{T}}$，则 $\lambda_0=$ ________，$a=$ ________，$c=$ ________，$b=$ ________.

8. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=0$，则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|=$ ________. 理由是 ________

9. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系吗？

答：________ 理由：________

10. 椭圆 $\begin{cases} x+2z^2=1, \\ y=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转得到的旋转面方程为(　　).

二、计算题(共 27 分)

1. $\begin{vmatrix} x+1 & x & \cdots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}=$ ________.

2. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$.

(1) 求正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 化 f 为平方项的和.

(2) 给出 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(3) 求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2$（$a>0$ 为常数）上的最大值点和最大值.

三、证明题(共 20 分)

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n\ (n>1)$，$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及其对应的特征向量；

(2) 证明 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似。并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{B}$ 正定,令 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|$,证明 $f(\lambda)=0$的根都是实数.

试卷六

一、填空与选择题(共 53 分)

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=$________$\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|$________$\Leftrightarrow \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解________$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量线性________关$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的相抵标准型为________(矩阵).

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的单特征值(单根),$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{X}_1\neq\boldsymbol{X}_2)$都是 $\boldsymbol{A}$ 对应于λ 的特征向量.则 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$有什么关系?答:________.

3. 设 $f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&-2&4&-8\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}$,则 $f(3)=$________.

4. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\sqrt{5}&&\\&-\sqrt{5}&\\&&2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&4&0\\4&-3&0\\0&0&5\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&-1\\0&-1&-2\end{bmatrix}$中,彼此相似的矩阵是________;彼此相合的矩阵是________.

5. 若 $r(\boldsymbol{A})=2$,$\boldsymbol{A}_{3\times4}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$,有三个解:$\boldsymbol{X}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{X}_2=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{X}_3=(-1,1,1,-1)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{A}_{3\times4}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 的一般解是________.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,行列式$|\boldsymbol{A}|=2$,特征值为 λ,则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$的特征值为________.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵,$\boldsymbol{A}$ 的 4 个特征值为 $-2,-1,1,2$,则

(1) $|-\boldsymbol{A}|=($　　$)$,

(2) $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=($　　$)$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位方阵.

8. 已知 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$是线性齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,$\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_4$是非齐次方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解,下列哪个不成立?答:(　　).

(A) $\boldsymbol{AX}=0$ 的解空间为 $L(X_1,\boldsymbol{X}_2)$

(B) $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_2$也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系

(C) $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_3+\boldsymbol{X}_4)$是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一般解(k_1,k_2为任意常数)

(D) $\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{X}_1+k_2(\boldsymbol{X}_3-\boldsymbol{X}_4)+\boldsymbol{X}_3$是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一般解(k_1,k_2为任意常数)

9. 椭圆$\begin{cases}4x^2+z^2=1,\\y=0\end{cases}$绕 x 轴旋转得到的旋转面方程为(　　).

10. 当 t 满足条件________时，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2t&1\\2t&1&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ 是正定矩阵.

二、计算题(共 27 分)

1. $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$.

(1) 求正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，化 f 为平方项的和；

(2) 给出 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$；

(3) 求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2$，($a>0$ 为常数)上的最小值点和最小值.

2. 问：a 取什么值时，方程组 $\begin{cases}x_1-x_2-ax_3=-(a+1),\\-x_1+ax_2+x_3=2,\\-ax_1+x_2+x_3=2\end{cases}$

(1) 有唯一解； (2) 无解； (3) 有无穷解，并求其一般解.

三、证明题(共 20 分)

1. $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称正定矩阵，对 $\forall\ \boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^n$ ($\boldsymbol{Y}\neq\boldsymbol{0}$)，证明矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{Y}\\\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\text{相合于}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&-1\end{bmatrix}$$

2. 若行列式各行，各列的元素之和都为 0，证明：此行列式所有元素的代数余子式都相等.

清华大学试题选参考答案①

试卷一

一、选择题

1. C,E　　2. C　　3. A,D　　4. A　　5. D　　6. A,B

二、填空题

1. $-7,(-3,-4,2),\frac{1}{2}\sqrt{29}$　　2. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-3}{0}$

3. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，或任意 2 个　　4. $(-1,5,-2)^{\mathrm{T}}$

5. $\{(a,b),(a,c),(c,a)\}$

① 部分证明题答案略.

三、计算题

1. (1) $\boldsymbol{A}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$； (2) $B_1=\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

2. $\mathrm{Im}\,\sigma=L\{(1,0,1,0)^{\mathrm{T}},(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}\}$, $\mathrm{Ker}\,\sigma=L\{(-1,1,1)^{\mathrm{T}}\}$

3. $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & -2 & -2\\ 4 & -3 & -2\\ -2 & 2 & 3\end{bmatrix}$

试卷二

一、填空与选择题

1. B　　2. R_3, 3　　3. $3x+y-z=6$　　4. $x=2t, y=-t, z=0$

5. 当 n 为偶数时线性相关;当 n 为奇数时线性无关

6. (1) $(-1,5,-2)^{\mathrm{T}}$； (2) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$

7. C　　8. $\langle A,\circ\rangle, a$　　9. $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1}\end{bmatrix}$　　10. A

二、计算题与证明题

1. $S^{\perp}=L\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},\left(\frac{1}{\sqrt{6}},0,-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}\right)$

2. (1) $(x_1-x_2, x_1+x_2, -\sqrt{2}x_3)$； (2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\end{bmatrix}$；

(3) $\sigma^{-1}(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{-x_1+x_2}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}x_3\right)$

3. $\mathrm{Im}\,\sigma=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$, $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,6)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-1,-4)^{\mathrm{T}}$；
$\mathrm{Ker}\,\sigma=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$, $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,0,2)^{\mathrm{T}}$

4. 是

试卷三

4. $3x+2y-7=0$

5. 交点：$(0,-3,0)$

7. $W_1+W_2=L((-1,1,1,0)^{T},(2,-1,0,1)^{T},(18,1,0,7)^{T})$，单位正交基为

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1,0)^{T},\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,1)^{T},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{39}}(3,5,-2,-1)^{T};$$

$W_1\cap W_2=L((0,1,2,1)^{T});(W_1\cap W_2)^{\perp}=L((1,-2,3,-4)^{T},(0,1,-1,1)^{T},(1,3,0,-3)^{T})$.

10. (1) 零向量与任何向量的内积等于零；

(2) $(\alpha,\lambda\beta)=\bar{\lambda}(\alpha,\beta)$；

(3) 如下定义的 α 的长度为非负实数

$$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)};$$

(4) $\forall\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbf{C}^n$，

$$(\alpha,\beta)=a_1\bar{b}_1+a_2\bar{b}_2+\cdots+a_n\bar{b}_n,$$

验证它是 $\mathbf{C}^n$ 的一个内积，并称之为 $\mathbf{C}^n$ 的标准内积.此时向量 α 的长度为

$$\|\alpha\|=\sqrt{a_1\overline{a}_1+a_2\overline{a}_2+\cdots+a_n\overline{a}_n};$$

(5) 设 $V(\mathbf{C})$是一个复内积空间，则 $\forall\alpha,\beta\in V$ 和 $\lambda\in\mathbf{R}$，有

① $\|\lambda\alpha\|=|\lambda|\|\alpha\|$，

② $|(\alpha,\beta)|\leqslant\|\alpha\|\|\beta\|$，

③ $\|\alpha+\beta\|\leqslant\|\alpha\|+\|\beta\|$，

其中②称为柯西－施瓦茨(Cauchy－Schwarz)不等式，③称为三角不等式.

(6) α 与 β 正交当且仅当$(\alpha,\beta)=0$.

试卷四

一、填空题

1. 64　　2. $\pi+V/R$　　3. $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-4\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$；4:1

4. $r(\mathbf{A},\boldsymbol{b})=r(\mathbf{A})$　　5. $-1/6$　　6. 0；-2　　7. $t>-\lambda_1$　　8. 4;40

9. $k_1+k_2+\cdots+k_t=1$　　10. $\frac{|\mathbf{A}|}{\lambda}$；$\boldsymbol{\alpha}$

11. $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-2}$；$\left(\frac{-4}{9}\quad\frac{8}{9}\quad\frac{8}{9}\right)$，

12. $b\mathrm{i}$(0 或纯虚数)　　13. $x^2+4y^2+4z^2=1$　　14. r 个 1；$n-r$ 个 0

二、计算与证明题

1. $\exists\ |\boldsymbol{C}_1|\neq 0$, $\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{E}$, $(\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1$，存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1)\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_1)\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$. 令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Q}$，则 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

2. 不动点：$A(1,1,0)$，$B(1,0,1)$，$C(1,1,2)$及 AB 直线上的任意一点；

不动线：$1A(1,-1,-1)$，$1B(-1,1,0)$，$1C(-2,0,1)$及过 C 和 AB 直线上的任意一点的连线(线束)

3. $$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{\sqrt5} & \dfrac{2}{3\sqrt5} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{-1}{\sqrt5} & \dfrac{4}{3\sqrt5} & \dfrac{2}{3}\\ 0 & 3\sqrt5 & \dfrac{-2}{3}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 10\end{bmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，则 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$.

4. 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$，$\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，所以，$\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1^{-1}=\boldsymbol{C}$，令 $\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}=\boldsymbol{Q}$(为正交矩阵)，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}$.

试卷五

一、填空与选择题

1. A　　2. C　　3. B　　4. B　　5. D　　6. $-48;(-48)^k$　　7. $\lambda_0=-1$；$a=c=4$，$b=-3$.　　8. $2/\lambda$　　9. $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_1+k_1(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)+k_2(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_3)=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+k_1(0,2,2,0)^{\mathrm{T}}+k_2(2,0,0,2)^{\mathrm{T}}$　　10. $x+2(y^2+z^2)=1$；

二、计算题

1. $\left(1+x\sum i\right)\dfrac{1}{n!}$

2. $$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{\sqrt5} & \dfrac{2}{3\sqrt5} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{-1}{\sqrt5} & \dfrac{4}{3\sqrt5} & \dfrac{2}{3}\\ 0 & 3\sqrt5 & \dfrac{-2}{3}\end{bmatrix};\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 10\end{bmatrix}，令\ \boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=y_1^2+$$

$$y_2^2+10y_3^2;\ \boldsymbol{X}_{\max}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}0\\0\\\pm1\end{bmatrix}=\pm\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix},\ f_{\max}=10a^2$$

三、证明题

1. 令 $B=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，存在 $P=(\alpha,X_2,\cdots,X_n)$，$P^{-1}BP=\mathrm{diag}(k,0,\cdots,0)$，其中 $k=\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$.

$X_2=[1,-a_1/a_2,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$，$X_3=[1,0,-a_1/a_3,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$X_n=[1,0,\cdots,0,-a_1/a_n]^{\mathrm{T}}$.

$P^{-1}AP=P^{-1}(2E+B)P=2E+\mathrm{diag}(k,0,\cdots,0)=\mathrm{diag}(k+2,2,\cdots,2)$

2. A，B 都是 n 阶实对称矩阵，且 B 正定，令 $f(\lambda)=|\lambda B-A|$，证明 $f(\lambda)=0$ 的根都是实数.

存在可逆阵 P，$P^{\mathrm{T}}BP=E$. $P^{\mathrm{T}}AP$ 是实对称矩阵，存在正交阵 Q，

$Q^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)Q=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$（$\lambda_i$ 是 $P^{\mathrm{T}}AP$ 的特征值，为实数），$Q^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}BP)Q=E$.

$|\lambda B-A|=0\Rightarrow|Q^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}(\lambda B-A)PQ|=0$，$|\lambda E-\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)|=0$，$\lambda=\lambda_i$ 为实数

试卷六

一、填空与选择题

1. n;≠0;只有 0 解;无;E　　2. 成比例　　3. -240　　4. A，C 相似；A，B，C 相合　　6. $\lambda/2$　　7. 4;40　　8. D　　9. $4x^2+y^2+z^2=1$

10. $|t|<\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

二、计算题

1. $Q=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$，$\Lambda=\begin{bmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & -3\end{bmatrix}$，$X_{\min}=Q\begin{bmatrix}0\\0\\\pm1\end{bmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，

$f_{\min}=-3a^2$

2. (1) $a\neq-2,1$；　(2) $a=-2$；　(3) $a=1$，$x=k[1,1,0]^{\mathrm{T}}+[1,0,1]^{\mathrm{T}}+[-2,0,0]^{\mathrm{T}}$

三、证明题

1. $C=\begin{bmatrix}E & A^{-1}Y\\ O & 1\end{bmatrix}$，$C^{\mathrm{T}}AC=\begin{bmatrix}A & \\ & -Y^{\mathrm{T}}A^{-1}Y\end{bmatrix}$ 相合于 $\begin{bmatrix}E & O\\ O & -1\end{bmatrix}$

2. 若行列式各行，各列的元素之和都为 0，证明：此行列式所有元素的代数

余子式都相等. 证明: $|\boldsymbol{A}|=0$, 如果 $r(\boldsymbol{A})<n-1, r(\boldsymbol{A}^*)=0, \boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}, A_{ij}=0$;

如果 $r(\boldsymbol{A})=n-1, r(\boldsymbol{A}^*)=1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}^*$ 的每一列都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解. $\boldsymbol{A}$ 对应特征值 0 的特征向量. 由 $r(\boldsymbol{A})=n-1$ 对应特征值 0 的线性无关的特征向量只有一个. $\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{0}$($\boldsymbol{I}$ 为元素全部为 1 的 n 元向量), $\boldsymbol{A}^*$ 任意一列都与 $\boldsymbol{I}$ 成比, 所以 $[A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}]=k[1,1,\cdots,1]$. $A_{i1}=A_{i2}=\cdots=A_{in}$

附录2　对高等数学教学内容和方法改革的一些看法

1　居余马.更新工科基础数学教学内容体系的初步实践与体会.工科数学,1993,9(2):1～7

2　林翠琴,居余马.更新工科微积分与线性代数教学内容与体系的实践与体会.工科数学,1995,11(1):125～130

3　林翠琴.高等数学教学的起点.工科数学,1995,11(4):126～129

4　林翠琴.以线性空间和线性映射为核心的线性代数体系.工科数学,1997,13(2):84～87

5　林翠琴.n 阶行列式——n 维向量的 n 重反对称线性函数.工科数学,1998,14(4):83～86

6　林翠琴.更新工科微积分与线性代数教学内容与体系的体会.数学通报,1996,(3):25～27

7　居余马.关于工科数学课程建设的实践和体会.清华大学教育研究,1993,36(2):40～44

8　居余马.关于工科数学课程建设的实践和体会.中国高等教育,1998,77(1):9～10

参 考 文 献

1 萧树铁,居余马.高等数学(第1卷)基础与代数.北京:清华大学出版社,1999

2 居余马.线性代数.第2版.北京:清华大学出版社,1999

3 居余马,林翠琴.线性代数学习指南.北京:清华大学出版社,2003