

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Фізичний факультет
Кафедра квантової теорії поля та космофізики

На правах рукопису

Струм у квантових одновимірних системах з динамічним конформним дефектом

Галузь знань: 10 Природничі науки
Спеціальність: 104 Фізика та астрономія
Освітня програма: Фізика
Спеціалізація: Квантова теорія поля

Кваліфікаційна робота бакалавра
студента 4 курсу,
Андрія НАЙДЕНКА

Науковий керівник:
доктор фіз.-мат. наук, с.н.с.
Микола ІОРГОВ

Робота заслухана на засіданні кафедри квантової теорії поля та
космофізики та рекомендована до захисту на ЕК,
протокол № від 2022 р.

Зав. кафедрою

проф. Станіслав ВІЛЬЧИНСЬКИЙ

Київ 2022

ВИТЯГ
з протоколу № _____
засідання екзаменаційної комісії № _____

Визнати, що студент Андрій НАЙДЕНКО виконав та
захистив кваліфікаційну роботу бакалавра з оцінкою _____.

Голова ЕК _____
«__» _____ 2022 р.

Анотація

А. НАЙДЕНКО Струм у квантових одновимірних системах з динамічним конформним дефектом.

Кваліфікаційна робота бакалавра за спеціальністю 104 "Фізика та астрономія", освітня програма "Фізика". - Київський національний університет імені Тараса Шевченка, фізичний факультет, квантової теорії поля та космофізики. -Київ, 2022.

Науковий керівник: д.ф.-м.н., с.н.с. М. ІОРГОВ, завідувач лабораторії теорії інтегровних систем Інституту теоретичної фізики імені М.М. Боголюбова НАН України.

Одновимірна квантова система має дефект, що описується періодичним потенціалом і характеризується частотою та амплітудою переходу. У цій роботі ми проаналізуємо динамічну поведінку відлуння Лошмідта та струму через дефект в залежності від параметрів потенціалу та з'ясуємо чи має ця система особливості на кшталт особливих режимів роботи.

Abstract

A. NAIDENKO Current in quantum one-dimensional systems with dynamic conformal defect.

Bachelor qualification work in speciality 104 “Physics and astronomy”, educational programm “Physics”. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Faculty of Physics, Department of quantum field theory and astroparticle physics. - Kyiv, 2022.

Research supervisor: Dr. of Physics and Mathematics, Prof. M. IORGOV, Head of the Laboratory of Theory of Integrable Systems at Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

A one-dimensional quantum system has a defect described by periodic potential, which is characterized by the drive frequency and amplitude of the transition. In this paper, we analyze and investigate the dynamic behavior of Loschmidt echoes and current through the defect depending on the parameters of the potential and find out whether this system has features such as special dynamics regimes.

Зміст

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Аналітичні розв’язки | 7 |
| 1.1 | Постановка задачі | 7 |
| 1.2 | Рівняння Шредінгера | 8 |
| 1.3 | Власні числа і власні вектори H_0 | 10 |
| 1.4 | Власні числа і власні вектори H^ω | 13 |
| 2 | Струм та відлуння Лошмідта у термодинамічній границі | 16 |
| 2.1 | Корисні співвідношення | 16 |
| 2.2 | Розташування коренів $g(E)$ | 17 |
| 2.3 | Поведінка $u(E)$ та $w(E)$ у термодинамічній границі | 18 |
| 2.4 | Відлуння Лошмідта | 19 |
| 2.5 | Розподіл ферміонів по комірках та струм | 22 |
| 2.6 | Особливості підсумовування | 24 |
| 3 | Чисельні розв’язки | 26 |
| 3.1 | Відлуння Лошмідта | 26 |
| 3.2 | Струм | 28 |
| 4 | Висновок | 31 |

Вступ

У мікро- та наноелектроніці важливо мати квантові системи, якими ми можемо безпосередньо керувати. Одними з таких систем є різноманітні кристалічні ґратки, з дефектами, які описуються деяким потенціалом, параметри якого ми можемо контролювати.

У роботі [1] була розглянута одновимірна модель Ізінга з дефектом, що має потенціал у формі періодичної сходинки. Було виявлено, що ця система має декілька режимів роботи, що відрізнялася різною поведінкою таких величин як відлуння Лошмідта та ентропія заплутаності в залежності від частоти періодичного потенціала. Дана особливість зберігається і при наявності невеликого збурення, тому було висунуте припущення, що подібна поведінка характерна і для інших одновимірних квантових системах з періодичним дефектом.

У цій роботі ми розглянемо систему, що складається з двох щільно зв'язаних напівланцюгів вільних ферміонів з дефектом (див [2]). Дефект являє собою періодичний потенціал (драйвер), що характеризується двома параметрами: амплітудою переходу та циклічною частотою. Та обрахуємо відлуння Лошмідта та струм через дефект.

Мета і завдання роботи: Дослідити динамічну поведінку відлуння Лошмідта та струму через дефект та з'ясувати, чи має ця система особливості на кшталт особливих режимів роботи, що залежать від параметрів потенціалу.

Розділ 1

Аналітичні розв'язки

1.1 Постановка задачі

Розглянемо систему, що складається з двох однакових одновимірних ланцюгів з L ферміонними комірками в кожній. Гамільтоніани ланцюгів:

$$H_L = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{L-1} (a_i^\dagger a_{i+1} + a_i a_{i+1}^\dagger), \quad (1.1)$$

$$H_R = -\frac{1}{2} \sum_{i=L+1}^{2L-1} (a_i^\dagger a_{i+1} + a_i a_{i+1}^\dagger). \quad (1.2)$$

Тут a_i^\dagger та a_i - оператори народження та знищення ферміонів у i -ій комірці ланцюга (комірки “лівого” ланцюга нумеруються від 1 до L , “правого” – від $L+1$ до $2L$). Між кінцями ланцюгів присутня “взаємодія”, що описується потенціалом

$$V_0 = -\frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} a_L^\dagger & a_{L+1}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_L \\ a_{L+1} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

тут λ - амплітуда переходу.

Впродовж великого проміжку часу система знаходилась у певному власному стані гамільтоніана $H_0 = H_L + H_R + V_0$. У певний момент часу $t = 0$ “вмикається” періодичний (з періодом T) потенціал

(драйвер), що описується наступним потенціалом:

$$V_t = -\frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} a_L^\dagger & a_{L+1}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & -\cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_L \\ a_{L+1} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

тут $\omega = \frac{2\pi}{T}$ - частота драйвера.

Нехай до вмикання драйвера система заповнилася N_f ферміонами, починаючи з найнижчого енергетичного рівня H_0 . Обрахуємо струм в кожній комірці ланцюга ($J_n(t)$) та відлуння Лошмідта ($\Lambda(t)$):

$$J_n(t) = \frac{d}{dt} \langle \Phi(t) | N_n | \Phi(t) \rangle, \quad (1.5)$$

$$\Lambda(t) = |\langle \Phi_0 | \Phi(t) \rangle|^2, \quad (1.6)$$

де $N_n = a_n^\dagger a_n$ - оператор кількості частинок у n -ій комірці, $|\Phi_0\rangle$ та $|\Phi(t)\rangle$ - хвильова функція системи ферміонів у початковий момент часу та у момент часу t відповідно.

1.2 Рівняння Шредінгера

Знайдемо вирази для хвильової функції системи, що у початковий момент часу знаходилася у деякому власному стані H_0 . Гамільтоніан системи:

$$H_t = H_L + H_R + V_t. \quad (1.7)$$

Зручно перейти у матричне представлення:

$$H_L + H_R = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$V_t = -\frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sin(\omega t) & -\cos(\omega t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Тоді рівняння Шредінгера з початковою умовою (тут і далі $\hbar = 1$):

$$i\dot{\Phi}(t) = H_t\Phi(t), \quad (1.10)$$

$$\Phi(0) = \Phi_0, \quad (1.11)$$

тут Φ_0 - деякий власний вектор H_0 .

Введемо оператор Σ :

$$\Sigma = i\left(\sum_{j=1}^L a_j^\dagger a_{2L+1-j} - \sum_{j=L+1}^{2L} a_j^\dagger a_{2L+1-j}\right). \quad (1.12)$$

Або у матричному представленні:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma \\ -i\sigma & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } \sigma = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

За допомогою Σ гамільтоніан H_t може бути представлений у вигляді наступного перетворення:

$$H_t = T_\omega^{-1}(t)H_0T_\omega(t), \quad (1.14)$$

$$\tilde{\Phi}(t) = T_\omega(t)\Phi(t), \quad (1.15)$$

де оператори

$$T_\omega(t) = \cos\left(\frac{t\omega}{2}\right) - i\Sigma \sin\left(\frac{t\omega}{2}\right), \quad (1.16)$$

$$T_\omega^{-1}(t) = T_\omega^\dagger(t) = \cos\left(\frac{t\omega}{2}\right) + i\Sigma \sin\left(\frac{t\omega}{2}\right). \quad (1.17)$$

Тоді рівняння Шредінгера набуває вигляду:

$$i\left(\frac{d}{dt} + i\frac{\omega}{2}\Sigma\right)\tilde{\Phi}(t) = H_0\tilde{\Phi}(t). \quad (1.18)$$

Це рівняння має розв'язок:

$$\tilde{\Phi}(t) = e^{-i(H_0 + \frac{\omega}{2}\Sigma)t}C, \quad (1.19)$$

де C - деякий константний вектор-стовпчик.

Враховуючи (1.11) та (1.15) остаточно маємо хвильові функції системи:

$$\Phi(t) = T_{\omega}^{-1}(t)e^{-i(H_0 + \frac{\omega}{2}\Sigma)t}\Phi_0. \quad (1.20)$$

Для зручності також введемо наступні оператори:

$$H^{\omega} = -2H_0 - \omega\Sigma, \quad (1.21)$$

$$U(t) = T_{\omega}^{-1}(t)e^{\frac{i}{2}H^{\omega}t}, \quad U^{-1}(t) = U^{\dagger}(t). \quad (1.22)$$

Тоді хвильові функції матимуть вигляд:

$$\Phi(t) = U(t)\Phi_0. \quad (1.23)$$

1.3 Власні числа і власні вектори H_0

Знайдемо власні числа та власні вектори H_0 – початкового гамітоніану:

$$H_0 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} H_{0L} & 0 \\ 0 & H_{0R} \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

$$\text{де } H_{0L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \text{ та } H_{0R} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Зважаючи на блочно-діагональну структуру матриці прир'ядно шукаємо її власні вектори у наступному вигляді:

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ або } \Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

де $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_L \end{pmatrix}$ та $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_L \\ \vdots \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$ - це власні вектори H_{0L} та H_{0R} відповідно. Нехай \mathcal{E} - власне значення H_0 . Стани, за якими $\varphi = 0$ будемо

називати лівими, а $\phi = 0$ - правими. Спектральна задача має наступний вигляд:

$$\phi_{n+1} + \phi_{n-1} = -2\mathcal{E}\phi_n, \quad (1.27)$$

$$\phi_{L+1} = \lambda\phi_L, \quad (1.28)$$

$$\phi_0 = 0, \quad (1.29)$$

для лівих станів.

$$\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} = -2\mathcal{E}\varphi_n, \quad (1.30)$$

$$\varphi_{L+1} = -\lambda\varphi_L, \quad (1.31)$$

$$\varphi_0 = 0, \quad (1.32)$$

для правих станів.

Зробимо наступне перетворення $\varphi_n = Ae^{ink}$, $\phi_n = Be^{ink}$. Тоді для лівих і правих станів відповідне власне число \mathcal{E} виражається, з (1.27) та (1.30), через введений параметр k наступним чином:

$$\mathcal{E} = -\cos(k). \quad (1.33)$$

Зазначимо, що вираз не залежить від знаку k тому можливі наступні розв'язки:

$$\varphi_n = A_1e^{ink} + A_2e^{-ink}, \quad \phi_n = B_1e^{ink} + B_2e^{-ink}. \quad (1.34)$$

Враховуючи межові умови (1.29) та (1.32) маємо остаточний вигляд φ_n та ϕ_n :

$$\varphi_n = A \sin(nk), \quad \phi_n = B \sin(nk). \quad (1.35)$$

Враховуючи межові умови (1.28) та (1.31) маємо рівняння на k для лівих та правих власних станів відповідно:

$$\sin(k(L+1)) = \lambda \sin(kL), \quad (1.36)$$

$$\sin(k(L+1)) = -\lambda \sin(kL). \quad (1.37)$$

В загальному для H_0 :

$$\sin^2(k(L+1)) - \lambda^2 \sin^2(kL) = 0. \quad (1.38)$$

Враховуючи властивість поліномів Чебишева другого роду

$$U_L(\cos(x)) = \frac{\sin(x(L+1))}{\sin(x)}, \quad (1.39)$$

отримуємо рівняння на спектр \mathcal{E} :

$$U_L^2(\mathcal{E}) - \lambda^2 U_{L-1}^2(\mathcal{E}) = 0. \quad (1.40)$$

Тоді власні стани H_0 :

$$\begin{aligned} \Phi_{0k} = & \frac{1}{n_k} \left(\left(1 + \lambda \frac{\sin(kL)}{\sin(k(L+1))} \right) \sum_{j=1}^L \sin(kj) a_j^\dagger + \right. \\ & \left. + \left(1 - \lambda \frac{\sin(kL)}{\sin(k(L+1))} \right) \sum_{j=L+1}^{2L} \sin(k(2L+1-j)) a_j^\dagger \right) |0\rangle, \end{aligned} \quad (1.41)$$

де норма n_k :

$$n_k = \sqrt{2L+1 - \frac{\sin(k(2L+1))}{\sin(k)}}. \quad (1.42)$$

Далі для зручності введемо матрицю $P(0)$ з наступними матричними елементами:

$$\begin{aligned} P(0)_{ji} = & \frac{1}{n_{k_i}} \left(\left(1 + \lambda \frac{\sin(k_i L)}{\sin(k_i(L+1))} \right) \sin(k_i j) \right. \\ & \left. + \left(1 - \lambda \frac{\sin(k_i L)}{\sin(k_i(L+1))} \right) \sin(k_i(2L+1-j)) \right). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Тут нумерація $\{k_i\}$ іде від найменшого відповідного значення \mathcal{E} до найбільшого. Тоді стан ферміона, що знаходиться на i -ому енергетичному рівні системи до вмикання драйвера:

$$\Phi_{0i} = \sum_{j=1}^{2L} P(0)_{ji} a_j^\dagger |0\rangle. \quad (1.44)$$

Після вмикання драйвера:

$$\Phi_i(t) = U(t) \Phi_{0i} = \sum_{j=1}^{2L} P_{ji}(t) a_j^\dagger |0\rangle. \quad (1.45)$$

1.4 Власні числа і власні вектори H^ω

В подальшому для розрахунків нам знадобляться власні числа та власні стани ефективного гамільтоніана H^ω . У матричному представленні:

$$H^\omega = \begin{pmatrix} H_{0L} & -i\omega\sigma \\ i\omega\sigma & H_{0R} \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

де матриці H_{0L} , H_{0R} та σ були введені вище. Будемо шукати власні вектори у наступному вигляді:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ i\varsigma \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

$$\text{де } \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_L \end{pmatrix}, \quad \varsigma = \begin{pmatrix} \varsigma_L \\ \vdots \\ \varsigma_1 \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

Нехай E - власні числа H^ω . Тоді спектральна задача має вигляд наступної системи з межевими умовами:

$$\psi_{n-1} + \psi_{n+1} + \omega\varsigma_n = E\psi_n, \quad (1.49)$$

$$\varsigma_{n-1} + \varsigma_{n+1} + \omega\psi_n = E\varsigma_n, \quad (1.50)$$

$$\psi_0 = 0, \quad (1.51)$$

$$\varsigma_0 = 0, \quad (1.52)$$

$$\lambda\psi_L = \psi_{L+1}, \quad (1.53)$$

$$-\lambda\varsigma_L = \varsigma_{L+1}. \quad (1.54)$$

Будемо шукати розв'язок системи у вигляді $\psi_n = Ae^{nk}$, $\varsigma_n = Be^{nk}$. Після підстановки в (1.49) та (1.50):

$$2 \cosh(k) + \omega \frac{B}{A} = E, \quad (1.55)$$

$$2 \cosh(k) + \omega \frac{A}{B} = E. \quad (1.56)$$

Ця система є сумісною лише тоді коли $(\frac{B}{A})^2 = 1$. Отже, маємо два типи розв'язків, які відповідають наступним параметрам k_1 та k_2 :

$$2 \cosh(k_1) + \omega = E, \quad (1.57)$$

$$2 \cosh(k_2) - \omega = E. \quad (1.58)$$

Враховуючи межові умови (1.51) та (1.52) маємо наступний явний вигляд ψ_n та ς_n :

$$\psi_n = A \sinh(k_1 n) + B \sinh(k_2 n), \quad (1.59)$$

$$\varsigma_n = A \sinh(k_1 n) - B \sinh(k_2 n). \quad (1.60)$$

Врахуємо межові умови (1.53) та (1.54) отримуємо наступну систему:

$$A(\lambda \sinh(k_1 L) - \sinh(k_1(L+1))) + B(\lambda \sinh(k_2 L) - \sinh(k_2(L+1))) = 0, \quad (1.61)$$

$$A(-\lambda \sinh(k_1 L) - \sinh(k_1(L+1))) + B(\lambda \sinh(k_2 L) + \sinh(k_2(L+1))) = 0. \quad (1.62)$$

З умови нетривіальності розв'язку маємо наступне співвідношення:

$$\sinh(k_1(L+1)) \sinh(k_2(L+1)) - \lambda^2 \sinh(k_1 L) \sinh(k_2 L) = 0. \quad (1.63)$$

Звідки випливає рівняння на спектр:

$$U_L \left(\frac{E - \omega}{2} \right) U_L \left(\frac{E + \omega}{2} \right) - \lambda^2 U_{L-1} \left(\frac{E - \omega}{2} \right) U_{L-1} \left(\frac{E + \omega}{2} \right) = 0. \quad (1.64)$$

З системи (1.61) - (1.62) можна отримати наступне співвідношення між константами A та B :

$$B = \lambda \frac{\sinh(k_1 L)}{\sinh(k_2(L+1))} A. \quad (1.65)$$

Тоді константи:

$$A = \frac{1}{N_E \sinh(k_1 L)}, \quad B = \frac{\lambda}{N_E \sinh(k_2(L+1))}, \quad (1.66)$$

тут $\frac{1}{N_E}$ - нормуючий множник. Підставимо ці вирази у (1.59) та у (1.60) і остаточно отримуємо:

$$\begin{aligned} \Psi_E = & \frac{1}{N_E} \sum_{j=1}^L \left(\frac{\sinh(k_1 j)}{\sinh(k_1 L)} + \lambda \frac{\sinh(k_2 j)}{\sinh(k_2(L+1))} \right) |j\rangle + \\ & \frac{i}{N_E} \sum_{j=L+1}^{2L} \left(\frac{\sinh(k_1(2L+1-j))}{\sinh(k_1 L)} - \lambda \frac{\sinh(k_2(2L+1-j))}{\sinh(k_2(L+1))} \right) |j\rangle. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Для зручності введемо наступні функції:

$$u(E) = \frac{\sinh(k_1(L+1))}{\sinh(k_1 L)}, \quad (1.68)$$

$$w(E) = \lambda^2 \frac{\sinh(k_2(L))}{\sinh(k_2(L+1))}, \quad (1.69)$$

$$g(E) = u(E) - w(E). \quad (1.70)$$

Тоді рівняння на спектр H^ω набуває простого вигляду:

$$g(E) = 0. \quad (1.71)$$

Скалярний добуток двох власних векторів H^ω :

$$\langle \Psi_E | \Psi_{E'} \rangle = \frac{2}{N_E N_{E'}} \frac{g(E') - g(E)}{E' - E}. \quad (1.72)$$

Тоді норма N_E може бути визначена:

$$\langle \Psi_E | \Psi_E \rangle = \frac{2}{N_E^2} g'(E) = 1, \quad (1.73)$$

$$N_E = \sqrt{2g'(E)}. \quad (1.74)$$

Розділ 2

Струм та відлуння Лошмідта у термодинамічній границі

2.1 Корисні співвідношення

Виведемо деякі співвідношення, що будуть нам далі корисними. Нехай деяка $f(x)$ має лише корені 1-го порядку, $m(x)$ — деяка функція, яка не має особливостей в околі x_0 . Тоді справедливо:

$$m(x_0) = \operatorname{Res}_{x=x_0} \frac{f'(x)}{f(x)} m(x), \quad (2.1)$$

де x_0 — деякий корінь $f(x)$.

Розглянемо тепер інтеграл по напівколах $\gamma^+ = \{|x - x_0| = r, \operatorname{Im} x > 0\}$ та $\gamma^- = \{|x - x_0| = r, \operatorname{Im} x < 0\}$, де обхід в обох випадках ведеться проти годинникової стрілки. Тоді, якщо x_0 - полюс 1-го порядку справедливо:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma^+} f(x) dx = \pi i \operatorname{Res}_{x=x_0} f(x), \quad (2.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma^-} f(x) dx = \pi i \operatorname{Res}_{x=x_0} f(x). \quad (2.3)$$

Нехай $f(x)$ на проміжку $[a, b]$, $a < b$ має тільки полюси 1-го порядку. Розглянемо інтеграл по кривій $[b, a]$, де полюси $\{x_{0i}\}$ обходяться по

напівколах $\{|x - x_{0i}| = r, \operatorname{Im} x > 0\}$. Тоді, спрямувавши r до 0 маємо:

$$I = \operatorname{vp} \int_b^a f(x) dx + \pi i \sum_i \operatorname{Res}_{x=x_{0i}} f(x). \quad (2.4)$$

Вважаємо $f(x)$ має особливі точки лише на дійсній осі. Тоді деформування кривої в пряму $[b + hi, a + hi]$ не змінить інтеграл:

$$I = \int_{b+ih}^{a+ih} f(x) dx. \quad (2.5)$$

Аналогічно для від'ємної частини уявної вісі, розглянемо інтеграл по кривій $[b, a]$, де особливі точки обходяться по напівколах $\{|x - x_0| = r, \operatorname{Im} x < 0\}$ з подальшим деформуванням кривої в пряму $[a - hi, b - hi]$:

$$I = \operatorname{vp} \int_a^b f(x) dx + \pi i \sum_i \operatorname{Res}_{x=x_{0i}} f(x), \quad (2.6)$$

$$I = \int_{a-ih}^{b-ih} f(x) dx. \quad (2.7)$$

Тоді остаточно отримуємо:

$$\sum_i \operatorname{Res}_{x=x_{0i}} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b (f(x - ih) - f(x + ih)) dx. \quad (2.8)$$

2.2 Розташування коренів $g(E)$

З'ясуємо розташування коренів $g(E)$. А саме нас далі буде цікавити кількість коренів на проміжках $I_1 = [-2 - \omega, 2 - \omega]$, $I_2 = [-2 + \omega, 2 + \omega]$. Введемо критичний параметр λ_c :

$$\lambda_c^2 = \left| \frac{L+1}{L} \frac{U_L(1+\omega)}{U_{L-1}(1+\omega)} \right|, \quad (2.9)$$

або у термодинамічній границі (вважаємо $\omega > 0$):

$$\lambda_c^2 = 1 + \omega + \sqrt{(1 + \omega)^2 - 1}. \quad (2.10)$$

Розглянемо випадок $\lambda < \lambda_c$. Тоді на границі I_1, I_2 :

$$\left| U_L \left(\frac{E + \omega}{2} \right) U_L \left(\frac{E - \omega}{2} \right) \right| > \lambda^2 \left| U_{L-1} \left(\frac{E + \omega}{2} \right) U_{L-1} \left(\frac{E - \omega}{2} \right) \right|. \quad (2.11)$$

Всі корені полінома $U_L(\frac{E-\omega}{2})U_L(\frac{E+\omega}{2})$ знаходяться на даних проміжках, а отже, за теоремою Руше (див [3]), всі корені $g(E)$ також лежать на цих проміжках. Тепер розглянемо випадок $\lambda > \lambda_c$, тут:

$$\left| U_L \left(\frac{E + \omega}{2} \right) U_L \left(\frac{E - \omega}{2} \right) \right| < \lambda^2 \left| U_{L-1} \left(\frac{E + \omega}{2} \right) U_{L-1} \left(\frac{E - \omega}{2} \right) \right|. \quad (2.12)$$

На даних проміжках знаходяться корені полінома $U_{L-1}(\frac{E-\omega}{2})U_{L-1}(\frac{E+\omega}{2})$. Отже, за теоремою Руше, на цих проміжках лежать лише $2L - 2$ корені $g(E)$. Можна показати, що за межами I_1 та I_2 лежать саме найбільше та найменше власне число H^ω .

2.3 Поведінка $u(E)$ та $w(E)$ у термодинамічній границі

Для зручності введемо наступні функції:

$$u_\pm(E) = \frac{E + \omega}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{E + \omega}{2}\right)^2}, \quad (2.13)$$

$$w_\pm(E) = \lambda^2 \left(\frac{E - \omega}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{E - \omega}{2}\right)^2} \right), \quad (2.14)$$

$$\tilde{u}_\pm(E) = \frac{E + \omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{E + \omega}{2}\right)^2 - 1}, \quad (2.15)$$

$$\tilde{w}_\pm(E) = \lambda^2 \left(\frac{E - \omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{E - \omega}{2}\right)^2 - 1} \right), \quad (2.16)$$

та

$$\gamma_{1ij}(E \pm 0i) = \frac{\left(\frac{\sin(k_i(L+1))}{\sin(k_i L)} - u_\pm(E) \right) \left(\frac{\sin(k_j(L+1))}{\sin(k_j L)} - \tilde{w}_+(E) \right)}{u_\pm(E) - \tilde{w}_+(E)} e^{\frac{it}{2}E}, \quad (2.17)$$

$$\gamma_{2ij}(E \pm 0i) = \frac{(\frac{\sin(k_i(L+1))}{\sin(k_i L)} - \tilde{u}_+(E))(\frac{\sin(k_j(L+1))}{\sin(k_j L)} - w_{\mp}(E))}{\tilde{u}_+(E) - w_{\mp}(E)} e^{\frac{it}{2}E}, \quad (2.18)$$

$$\gamma_{3ij}(E \pm 0i) = \frac{(\frac{\sin(k_i(L+1))}{\sin(k_i L)} - u_{\pm}(E))(\frac{\sin(k_j(L+1))}{\sin(k_j L)} - w_{\mp}(E))}{u_{\pm}(E) - w_{\mp}(E)} e^{\frac{it}{2}E}. \quad (2.19)$$

Нас цікавитиме термодинамічна границя функцій $u(E)$ та $w(E)$ на проміжках I_1 та I_2 . Тоді:

$$u(E \pm 0i) = \begin{cases} \tilde{u}_+(E), & E \in I_2 \setminus (I_2 \cap I_1) \\ u_{\pm}(E), & E \in I_1 \end{cases} \quad (2.20)$$

$$w(E \pm 0i) = \begin{cases} w_{\mp}(E), & E \in I_2 \\ \tilde{w}_+(E), & E \in I_1 \setminus (I_2 \cap I_1) \end{cases} \quad (2.21)$$

2.4 Відлуння Лошмідта

Відлуння Лошмідта (див [4], [5]) задається виразом:

$$\Lambda(t) = |\langle \Phi_0 | \Phi(t) \rangle|^2. \quad (2.22)$$

Нехай хвильова функція системи:

$$|\Phi\rangle = \prod_{i=1}^{N_f} \Phi_{0i}. \quad (2.23)$$

Тут N_f - кількість заповнених енергетичних рівнів системи до вми-
кання драйвера. Використовуючи (1.44) та (1.45):

$$\langle \Phi | = P(0)_{1i_1}^{\dagger} \dots P(0)_{N_f i_{N_f}}^{\dagger} \langle 0 | a_{i_1} \dots a_{i_{N_f}}, \quad (2.24)$$

$$|\Phi(t)\rangle = P_{j_1 1}(t) \dots P_{j_{N_f} N_f}(t) a_{j_{N_f}}^{\dagger} \dots a_{j_1}^{\dagger} |0\rangle. \quad (2.25)$$

Де по однаковим індексам введеться підсумовування. В такому разі:

$$\langle \Phi_0 | \Phi(t) \rangle = \det(P(0)^{\dagger} P(t)).$$

Доведемо дане співвідношення за допомогою методу математичної індукції:

а) База:

Розглянемо випадок $N_f = 2$:

$$\begin{aligned} & P(0)_{1i_1}^\dagger P(0)_{2i_2}^\dagger P(t)_{j_11} P(t)_{j_22} \langle 0 | a_{i_1} a_{i_2} a_{j_2}^\dagger a_{j_1}^\dagger | 0 \rangle = \\ & = P(0)_{1i_1}^\dagger P(0)_{2i_2}^\dagger P(t)_{j_11} P(t)_{j_22} (\delta_{i_1j_1} \delta_{i_2j_2} - \delta_{i_1j_2} \delta_{i_2j_1}) = \\ & = \det \begin{pmatrix} (P(0)^\dagger P(t))_{11} & (P(0)^\dagger P(t))_{12} \\ (P(0)^\dagger P(t))_{21} & (P(0)^\dagger P(t))_{22} \end{pmatrix} = \det(P^\dagger(0)P(t)). \end{aligned}$$

б) Припущення:

$$\begin{aligned} & P(0)_{1i_1}^\dagger \dots P(0)_{N_f-1i_{N_f-1}}^\dagger P(t)_{j_11} \dots P(t)_{j_{N_f-1}N_f-1} \langle 0 | a_{i_1} \dots a_{i_{N_f-1}} a_{j_{N_f-1}}^\dagger \dots a_{j_1}^\dagger | 0 \rangle = \\ & = \det(P(0)^\dagger P(t)). \end{aligned}$$

в) Тоді:

$$\begin{aligned} & P(0)_{1i_1}^\dagger \dots P(0)_{N_f i_{N_f}}^\dagger P(t)_{j_11} \dots P(t)_{j_{N_f}N_f} \langle 0 | a_{i_1} \dots a_{i_{N_f}} a_{j_{N_f}}^\dagger \dots a_{j_1}^\dagger | 0 \rangle = \\ & = (P(0)^\dagger P(t))_{11} \det \begin{pmatrix} (P(0)^\dagger P(t))_{22} & \dots & (P(0)^\dagger P(t))_{2N_f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (P(0)^\dagger P(t))_{N_f2} & \dots & (P(0)^\dagger P(t))_{N_f N_f} \end{pmatrix} + \dots + \\ & + (-1)^{N_f} (P^\dagger P(t))_{1N_f} \det \begin{pmatrix} (P(0)^\dagger P(t))_{21} & \dots & (P(0)^\dagger P(t))_{2N_f-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (P(0)^\dagger P(t))_{N_f1} & \dots & (P(0)^\dagger P(t))_{N_f-1N_f-1} \end{pmatrix} \\ & = \det(P(0)^\dagger P(t)). \end{aligned}$$

Де була використана формула розкриття визначника за першим рядком.

Отже, в нашому випадку:

$$\Lambda(t) = |\det(P(0)^\dagger P(t))|^2. \quad (2.26)$$

Та явний вигляд матриці $P^\dagger P(t)$:

$$P^\dagger P(t) = \begin{pmatrix} \langle \Phi_{01} | U(t) | \Phi_{01} \rangle & \dots & \langle \Phi_{01} | U(t) | \Phi_{0N_f} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \Phi_{0N_f} | U(t) | \Phi_{01} \rangle & \dots & \langle \Phi_{0N_f} | U(t) | \Phi_{0N_f} \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Знайдемо явний вигляд матричного елемента:

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_{0i} | U(t) | \Phi_{0j} \rangle &= \\
&= \sum_{pp'p''} \langle \Phi_{0i} | \Psi_p \rangle \langle \Psi_p | T_\omega^{-1}(t) | \Psi_{p'} \rangle \langle \Psi_{p'} | e^{\frac{i}{2} H^\omega t} | \Psi_{p''} \rangle \langle \Psi_{p''} | \Phi_{0j} \rangle = \\
&= \sum_p \langle \Phi_{0i} | \Psi_p \rangle \langle \Psi_p | \Phi_{0j} \rangle \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) e^{\frac{i}{2} E_p t} + \\
&\quad + i \langle \Phi_{0i} | \Sigma | \Psi_p \rangle \langle \Psi_p | \Phi_{0j} \rangle \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) e^{\frac{i}{2} E_p t}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Введемо наступні функції:

$$A_1^\omega(\mathcal{E}, E) = \frac{\frac{\sin(k(L+1))}{\sin(kL)} - w(E)}{\mathcal{E} + \frac{E}{2} + \frac{\omega}{2}}, \tag{2.29}$$

$$A_2^\omega(\mathcal{E}, E) = \frac{\frac{\sin(k(L+1))}{\sin(kL)} - u(E)}{\mathcal{E} + \frac{E}{2} - \frac{\omega}{2}}. \tag{2.30}$$

Тоді $\langle \Phi_{0i} | \Psi_p \rangle$ та $\langle \Phi_{0i} | \Sigma | \Psi_p \rangle$ можуть бути виражені:

$$\langle \Phi_{0i} | \Psi_p \rangle = \begin{cases} \frac{\sin(k_i L)}{n_{k_i} N_{E_p}} (A_2^\omega(\mathcal{E}_i, E_p) - A_1^\omega(\mathcal{E}_i, E_p)) & \text{для лівих } \Phi_{0i} \\ i \frac{\sin(k_i L)}{n_{k_i} N_{E_p}} (A_2^\omega(\mathcal{E}_i, E_p) - A_1^\omega(\mathcal{E}_i, E_p)) & \text{для правих } \Phi_{0i} \end{cases} \tag{2.31}$$

$$\langle \Phi_{0i} | \Sigma | \Psi_p \rangle = \begin{cases} \frac{\sin(k_i L)}{n_{k_i} N_{E_p}} (A_2^\omega(\mathcal{E}_i, E_p) + A_1^\omega(\mathcal{E}_i, E_p)) & \text{для лівих } \Phi_{0i} \\ i \frac{\sin(k_i L)}{n_{k_i} N_{E_p}} (A_2^\omega(\mathcal{E}_i, E_p) + A_1^\omega(\mathcal{E}_i, E_p)) & \text{для правих } \Phi_{0i} \end{cases} \tag{2.32}$$

Тоді,

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_{0i} | U(t) | \Phi_{0j} \rangle &= \frac{\sin(k_i L) \sin(k_j L)}{n_{k_i} n_{k_j}} ((S_{11ij} + S_{22ij} - S_{12ij} - S_{12ji}) \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \\
&\quad + i(-S_{11ij} + S_{22ij} + S_{12ij} - S_{12ji}) \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)),
\end{aligned} \tag{2.33}$$

де

$$S_{11ij} = \sum_p \frac{A_1^\omega(\mathcal{E}_i, E_p) A_1^\omega(\mathcal{E}_j, E_p)}{N_{E_p}^2} e^{\frac{i}{2} E_p t}, \quad (2.34)$$

$$S_{22ij} = \sum_p \frac{A_2^\omega(\mathcal{E}_i, E_p) A_2^\omega(\mathcal{E}_j, E_p)}{N_{E_p}^2} e^{\frac{i}{2} E_p t}, \quad (2.35)$$

$$S_{12ij} = \sum_p \frac{A_1^\omega(\mathcal{E}_i, E_p) A_2^\omega(\mathcal{E}_j, E_p)}{N_{E_p}^2} e^{\frac{i}{2} E_p t}. \quad (2.36)$$

2.5 Розподіл ферміонів по комірках та струм

Знайдемо очікувану кількість ферміонів на n -ій комірці у момент часу t :

$$N_n(t) = \langle \Phi(t) | a_n^\dagger a_n | \Phi(t) \rangle \quad (2.37)$$

Зауважимо, що з ортонормованості Φ_{0i} та з унітарності $U(t)$ компоненти матриці $P_{ji}(t)$ мають наступну властивість:

$$P_{pj}^\dagger(t) P_{jq}(t) = \delta_{pq} \quad (2.38)$$

Розглянемо суму:

$$P^\dagger(t)_{1i_1} \dots P^\dagger(t)_{N_f i_{N_f}} P(t)_{j_1 1} \dots P(t)_{j_{N_f} N_f} \langle 0 | a_{i_1} \dots a_{i_{N_f}} a_n^\dagger a_n a_{j_{N_f}}^\dagger \dots a_{j_1}^\dagger | 0 \rangle =$$

Перенесемо a_n^\dagger вліво:

$$\begin{aligned} &= P^\dagger(t)_{1i_1} \dots P^\dagger(t)_{N_f i_{N_f}} P(t)_{j_1 1} \dots P(t)_{j_{N_f} N_f} (\delta_{i_{N_f} n} \langle 0 | a_{i_1} \dots a_{i_{N_f-1}} a_n a_{i_{N_f}}^\dagger \dots a_{j_1}^\dagger | 0 \rangle - \\ &\quad - \langle 0 | a_{i_1} \dots a_n^\dagger a_{i_{N_f}} a_n a_{i_{N_f}}^\dagger \dots a_{j_1}^\dagger | 0 \rangle) = \end{aligned}$$

Продовжимо переносити a_n^\dagger вліво. Зауважимо, що при перенесенні зважаючи на властивість (2.38) не зануляються лише доданки, що мають у своєму складі лише множники вигляду δ_{in} . Остаточно:

$$= P^\dagger(t)_{1n} P(t)_{n1} + \dots + P^\dagger(t)_{N_f n} P(t)_{n N_f}. \quad (2.39)$$

Або у зручнішому вигляді:

$$N_n(t) = \sum_{j=1}^{N_f} \langle n|U(t)|\Phi_{0j}\rangle \quad (2.40)$$

Тут $\langle n|$ - проектор на n -ту координату вектора. Явний вигляд $N_n(t)$:

$$\begin{aligned} N_n(t) = \sum_{pj} \langle n|\Psi_p\rangle \langle \Psi_p|\Phi_{0j}\rangle \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) e^{\frac{i}{2}E_p t} + \\ + i \langle n|\Sigma|\Psi_p\rangle \langle \Psi_p|\Phi_{0j}\rangle \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) e^{\frac{i}{2}E_p t}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

З явного вигляду Ψ_p :

$$\langle n|\Psi_p\rangle = \begin{cases} \frac{1}{N_{Ep}} \left(\frac{\sinh(k_{1p}n)}{\sinh(k_{1p}L)} + \lambda \frac{\sinh(k_{2p}n)}{\sinh(k_{2p}(L+1))} \right) & \text{для лівих } n \\ \frac{i}{N_{Ep}} \left(\frac{\sinh(k_{1p}(2L+1-n))}{\sinh(k_{1p}L)} - \lambda \frac{\sinh(k_{2p}(2L+1-n))}{\sinh(k_{2p}(L+1))} \right) & \text{для правих } n \end{cases} \quad (2.42)$$

$$\langle n|\Sigma|\Psi_p\rangle = \begin{cases} \frac{-1}{N_{Ep}} \left(\frac{\sinh(k_{1p}n)}{\sinh(k_{1p}L)} - \lambda \frac{\sinh(k_{2p}n)}{\sinh(k_{2p}(L+1))} \right) & \text{для лівих } n \\ \frac{-i}{N_{Ep}} \left(\frac{\sinh(k_{1p}(2L+1-n))}{\sinh(k_{1p}L)} + \lambda \frac{\sinh(k_{2p}(2L+1-n))}{\sinh(k_{2p}(L+1))} \right) & \text{для правих } n \end{cases} \quad (2.43)$$

Розглянемо для прикладу розподіл на лівому ланцюгу коли до вми-
кання драйвера на ланцюгу знаходився один лівий ферміон, тоді:

$$\begin{aligned} N_n(t) = \frac{\sin(kL)}{n_k} ((-s_{11n} + s_{22n} - s_{12n} - s_{21n}) \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \\ + (-s_{11n} + s_{22n} + s_{12n} - s_{21n}) \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)), \end{aligned} \quad (2.44)$$

де

$$s_{11n}(\mathcal{E}) = \sum_p \frac{A_1(\mathcal{E}, E_p) \frac{\sinh(k_{1p}n)}{\sinh(k_{1p}L)}}{N_{Ep}^2}, \quad (2.45)$$

$$s_{12n}(\mathcal{E}) = \sum_p \lambda \frac{A_1(\mathcal{E}, E_p) \frac{\sinh(k_{2p}n)}{\sinh(k_{2p}(L+1))}}{N_{Ep}^2}, \quad (2.46)$$

$$s_{21n}(\mathcal{E}) = \sum_p \frac{A_2(\mathcal{E}, E_p) \frac{\sinh(k_{1p}n)}{\sinh(k_{1p}L)}}{N_{E_p}^2}, \quad (2.47)$$

$$s_{22n}(\mathcal{E}) = \sum_p \lambda \frac{A_2(\mathcal{E}, E_p) \frac{\sinh(k_{2p}n)}{\sinh(k_{2p}(L+1))}}{N_{E_p}^2}. \quad (2.48)$$

Вирази (2.45)-(2.48) важко аналізувати, але зважаючи на те, що чисельники та знаменники виразів (2.45)-(2.48) та (2.34)-(2.36) мають однакові особливі точки можна зробити припущення, що якісно вони мають однакові особливості поведінки. Але аналізувати вирази (2.34)-(2.36) простіше тому далі ми будемо розглядати саме їх.

2.6 Особливості підсумовування

Розглянемо для прикладу суму (2.34):

$$\begin{aligned} S_{11ij} &= \sum_p \frac{A_1^\omega(\mathcal{E}_i, E_p) A_1^\omega(\mathcal{E}_j, E_p)}{N_{E_p}^2} e^{\frac{i}{2} E_p t} = \\ &= \sum_p \frac{e^{\frac{i}{2} E_p t}}{2g'(E_p)} \frac{(\frac{\sin(k_i(L+1))}{\sin(k_i L)} - u(E_p))(\frac{\sin(k_j(L+1))}{\sin(k_j L)} - u(E_p))}{(\mathcal{E}_i + \frac{E_p}{2} - \frac{\omega}{2})(\mathcal{E}_j + \frac{E_p}{2} - \frac{\omega}{2})}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Де було використано (1.74). Для простоти вважаймо, що k_i та k_j — відповідають лівим станам. Тоді з (1.28), (1.31) та (1.71):

$$S_{11ij} = \sum_p \frac{e^{\frac{i}{2} E_p t}}{2g'(E_p)} \frac{(\lambda - u(E_p))(\lambda - w(E_p))}{(\mathcal{E}_i + \frac{E_p}{2} - \frac{\omega}{2})(\mathcal{E}_j + \frac{E_p}{2} - \frac{\omega}{2})}.$$

Далі ми використаємо (2.1) та (2.8), тоді маємо:

$$\begin{aligned} S_{11ij} &= \int_I \frac{e^{\frac{i}{2} E t}}{2g(E)} \frac{(\lambda - u(E))(\lambda - w(E))}{(\mathcal{E}_i + \frac{E}{2} - \frac{\omega}{2})(\mathcal{E}_j + \frac{E}{2} - \frac{\omega}{2})} \Big|_{E=0i}^{E-0i} dE - \\ &\quad - \frac{\delta_{ij}}{4\pi i} \frac{e^{\frac{it}{2} E}}{g(E)} (\lambda - w(E))(1 - u'(E)) \Big|_{E=\omega-2E_i}^{E-0i}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Тут $E = \omega - 2\mathcal{E}_{i,j}$ є усувними особливими точками у випадку $i \neq j$ та полюсом першого порядку у випадку $i = j$ (у цьому випадку лишок в цій точці ми окремо відняли). Особливі точки $u(E)$ та $w(E)$ є також усувними особливими точками (з явного вигляду (1.70)). Отже, єдині особливі точки підінтегрального виразу є корені $g(E)$ тому використання (2.1) та (2.8) є справедливим.

Розглянемо інтеграл у термодинамічній границі. Розкладемо інтеграл на три інтеграли по відрізкам $I_1 \setminus (I_2 \cap I_1)$, $I_2 \setminus (I_2 \cap I_1)$ та $(I_2 \cap I_1)$. Проміжок $(I_2 \cap I_1)$ існує за умови $\omega < 2$. Також зауважимо, що при $\lambda > \lambda_c$ є два корені, що відповідають найнижчому (E_0) і найвищому (E_{N_f}) власному числу H^ω , які лежать за межами $I_1 \cup I_2$, в такому разі їх потрібно врахувати окремо. Остаточно:

$$\begin{aligned}
& \int_{I_1} \frac{e^{\frac{i}{2}Et}}{2g(E)} \frac{(\lambda - u(E))(\lambda - w(E))}{(\mathcal{E}_i + \frac{E}{2} - \frac{\omega}{2})(\mathcal{E}_j + \frac{E}{2} - \frac{\omega}{2})} \Big|_{E+0i}^{E-0i} dE \rightarrow \\
& \frac{1}{4\pi i} \int_{I_1 \setminus (I_2 \cap I_1)} \frac{\gamma_{1ij}(E)}{(\mathcal{E}_i + \frac{E}{2} - \frac{\omega}{2})(\mathcal{E}_j + \frac{E}{2} - \frac{\omega}{2})} \Big|_{E+0i}^{E-0i} dE + \\
& + \frac{1}{4\pi i} \int_{I_2 \setminus (I_2 \cap I_1)} \frac{\gamma_{2ij}(E)}{(\mathcal{E}_i + \frac{E}{2} - \frac{\omega}{2})(\mathcal{E}_j + \frac{E}{2} - \frac{\omega}{2})} \Big|_{E+0i}^{E-0i} dE + \\
& + \Theta(2 - \omega) \frac{1}{4\pi i} \int_{I_2 \cap I_1} \frac{\gamma_{3ij}(E)}{(\mathcal{E}_i + \frac{E}{2} - \frac{\omega}{2})(\mathcal{E}_j + \frac{E}{2} - \frac{\omega}{2})} \Big|_{E+0i}^{E-0i} dE + \\
& + \Theta(\lambda - \lambda_c) \left(\text{Res}_{E=E_0} \frac{e^{\frac{i}{2}Et}}{2(\tilde{u}_-(E) - \tilde{w}_+(E))} \frac{(\lambda - \tilde{u}_-(E))(\lambda - \tilde{w}_+(E))}{(\mathcal{E}_i + \frac{E}{2} - \frac{\omega}{2})(\mathcal{E}_j + \frac{E}{2} - \frac{\omega}{2})} + \right. \\
& \left. + \text{Res}_{E=E_{N_f}} \frac{e^{\frac{i}{2}Et}}{2(\tilde{u}_+(E) - \tilde{w}_-(E))} \frac{(\lambda - \tilde{u}_+(E))(\lambda - \tilde{w}_-(E))}{(\mathcal{E}_i + \frac{E}{2} - \frac{\omega}{2})(\mathcal{E}_j + \frac{E}{2} - \frac{\omega}{2})} \right). \quad (2.51)
\end{aligned}$$

Отже, явний вираз відлуння Лошмідта залежать від співвідношень між λ та ω . Для струму ситуація аналогічна.

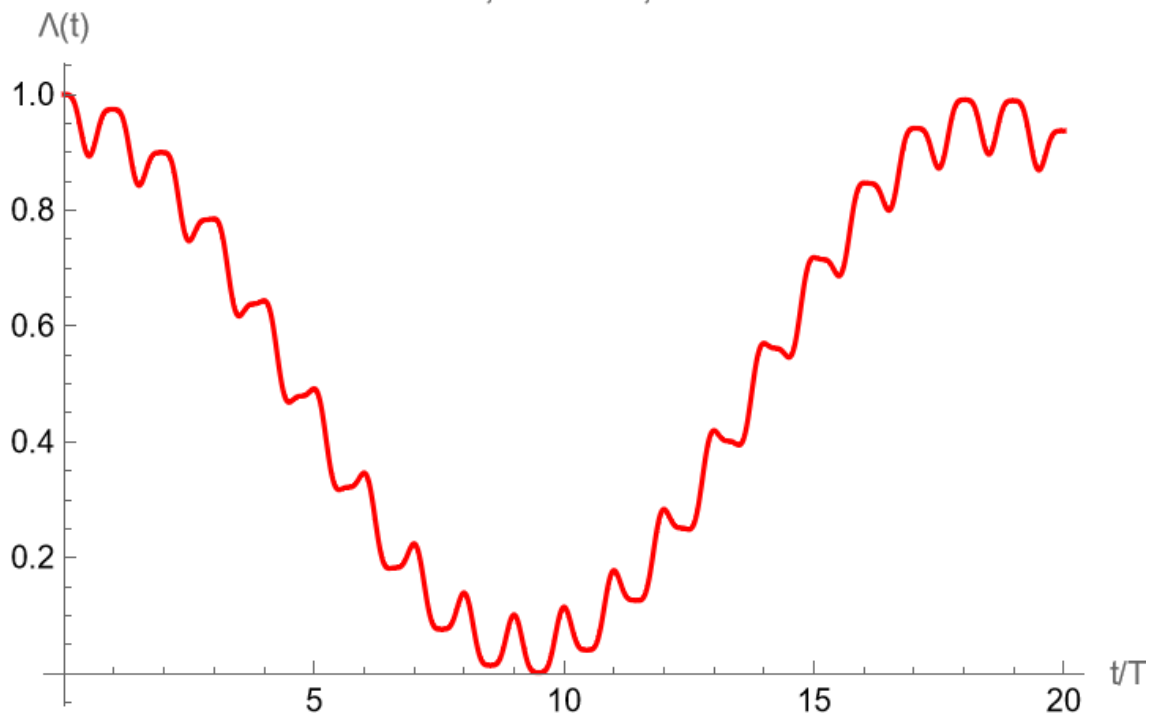
Розділ 3

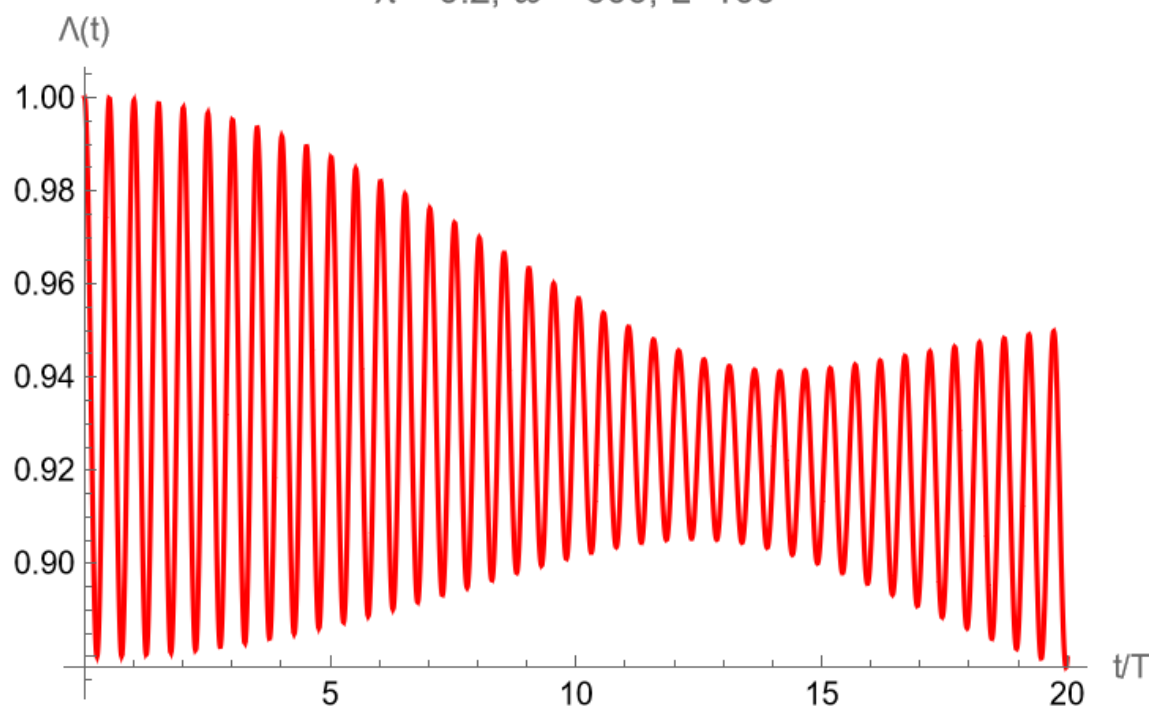
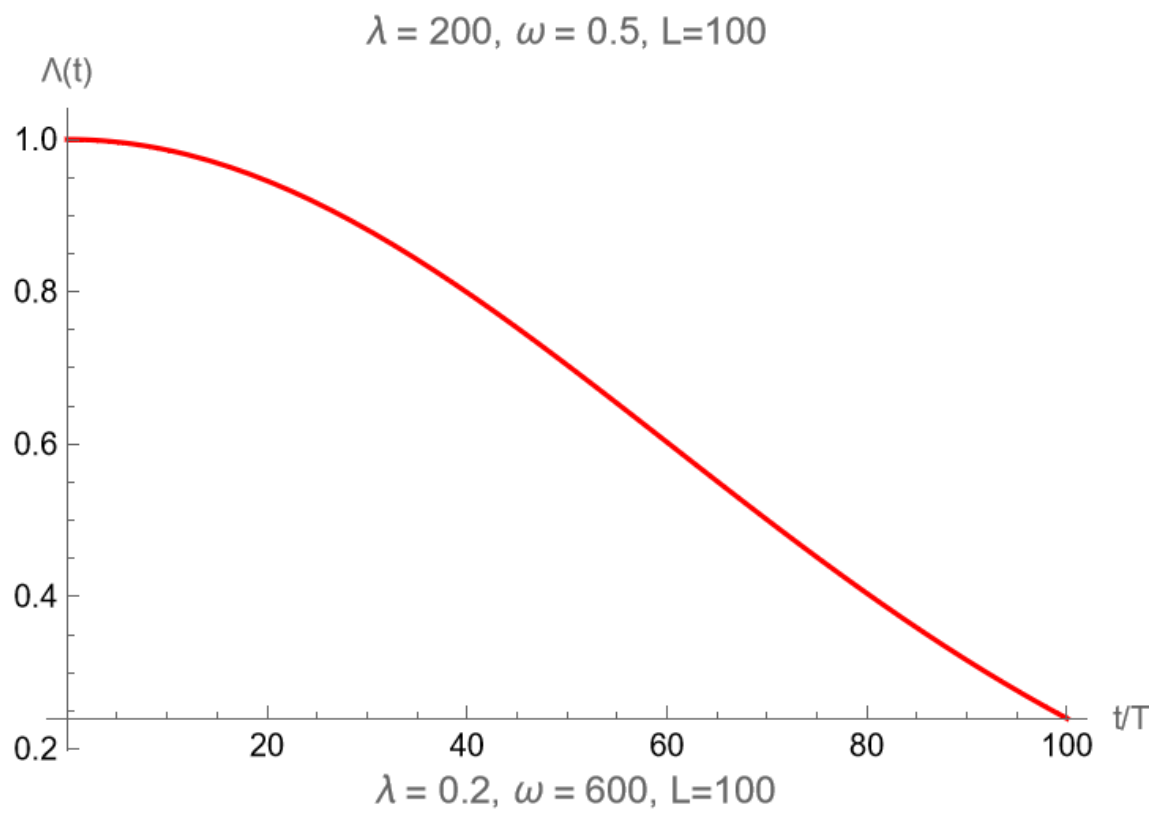
Чисельні розв'язки

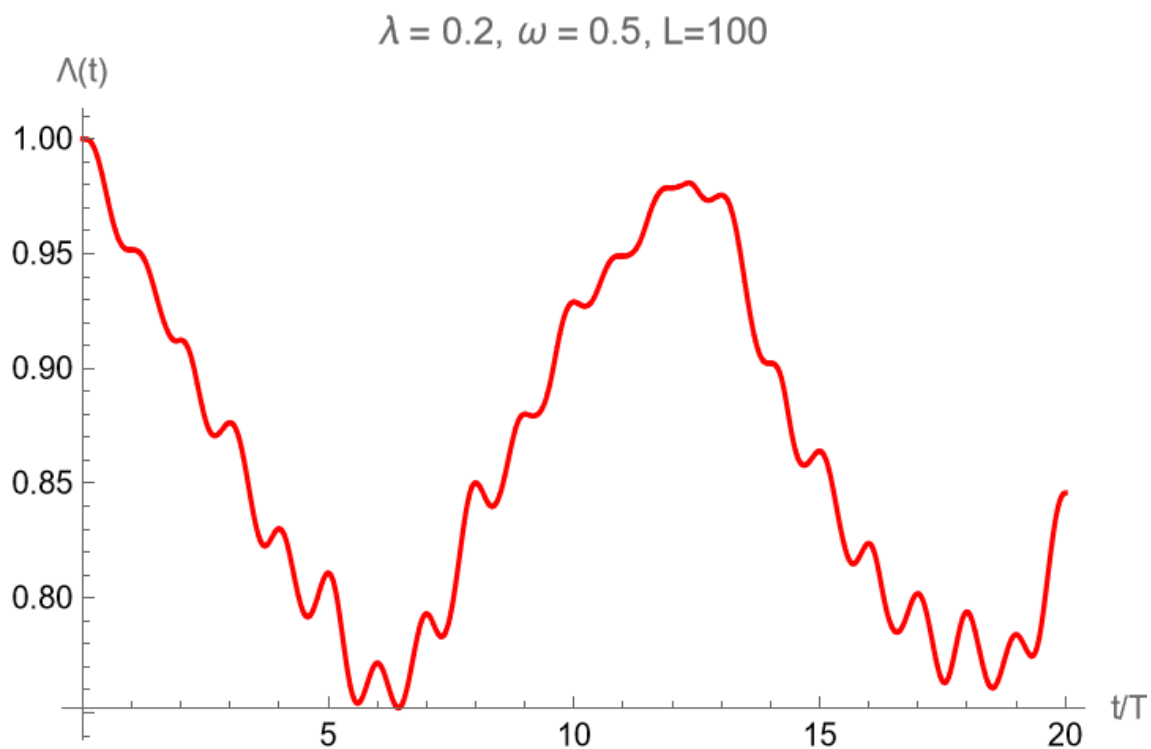
3.1 Відлуння Лошмідта

Нам не вдалося аналітично порахувати відлуння Лошмідта. Тому наведемо чисельні вирази для відлуння Лошмідта ланцюга, розміром в 100 комірок у випадку коли до вмикання драйвера в системі були заповнені два енергетичні рівні для різних ω та λ , що відповідають різним теоретичним режимам роботи драйвера:

$$\lambda = 200, \omega = 600, L=100$$



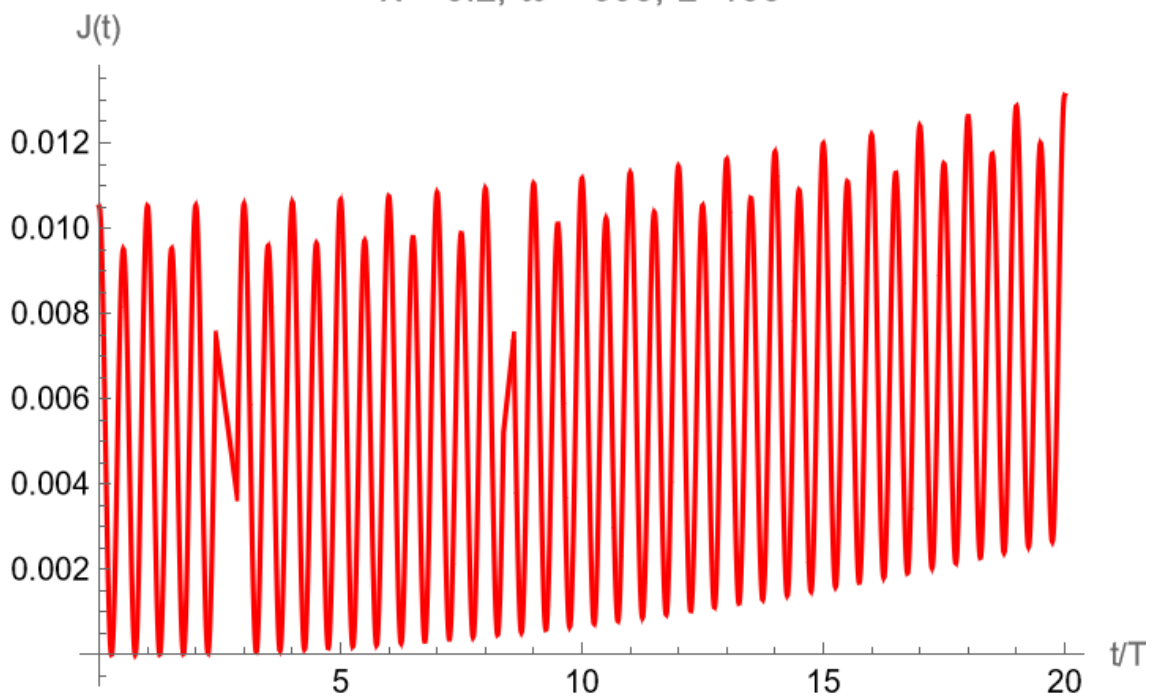
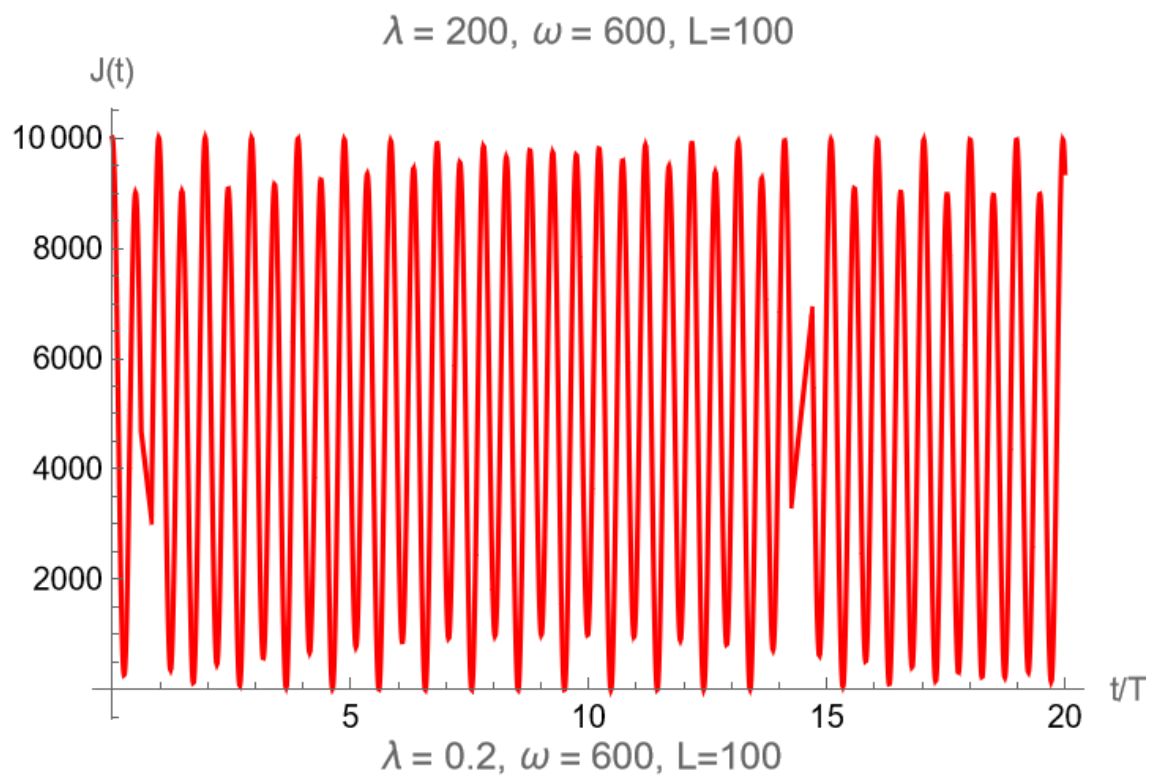


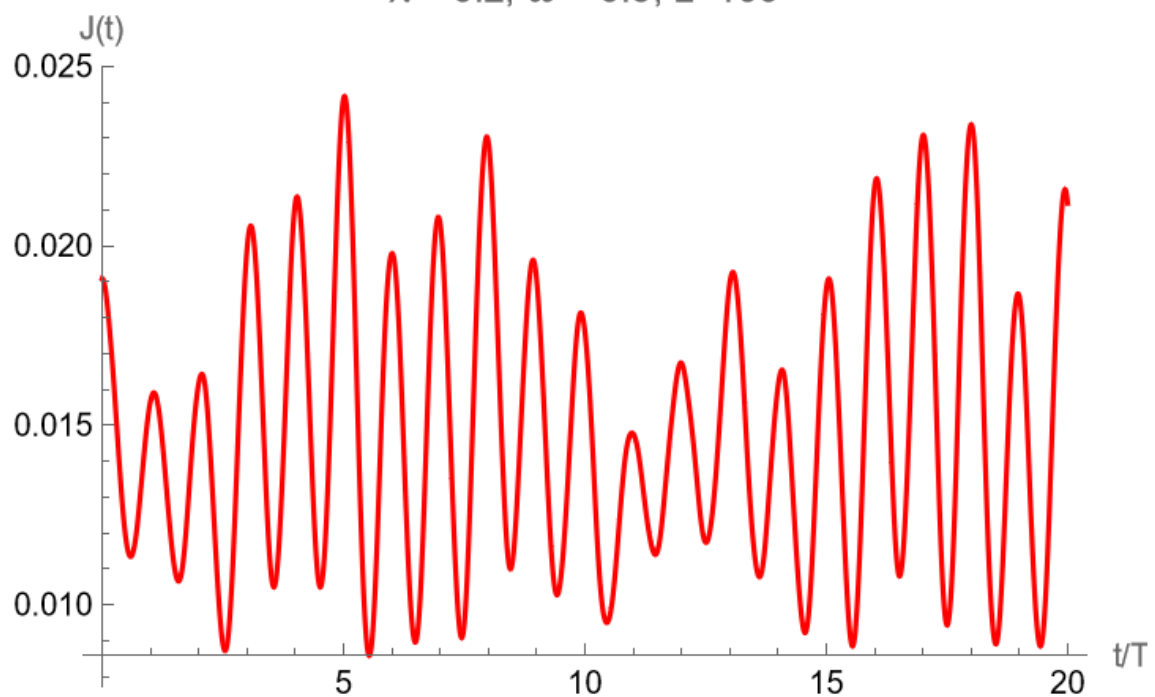
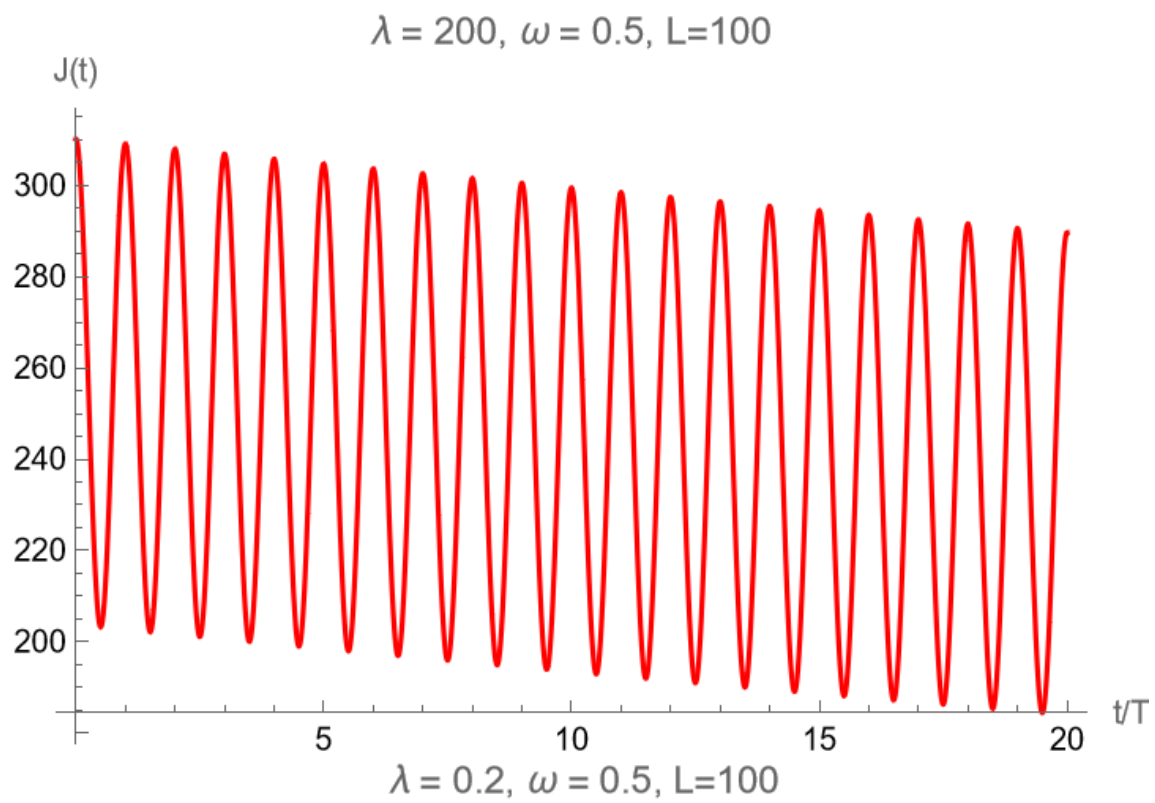


Бачимо, що форма відлуння відрізняється для різних режимів.

3.2 Струм

Перевіримо, чи має струм на дефекті цієї системи також відмінності у поведінці на різних режимах роботи драйвера:





Бачимо, що струм також залежить від режиму роботи драйвера.

Розділ 4

Висновок

У першому розділі дипломної роботи ми знайшли точний розв’язок для квантово-механічної задачі з динамічним дефектом, а саме знайшли хвильові функції системи та спектр початкового та ефективного гамільтоніанів.

У другому розділі, використавши точні розв’язки для цієї системи, ми знайшли аналітичні вирази для відлуння Лошмідта та струму. Виявилось, що вирази для струму та відлуння мають однакові особливі точки, тому було висунуте припущення, що струм та відлуння Лошмідта мають однакові особливості часової залежності. Аналіз отриманої формули для відлуння Лошмідта виявив відмінність її часової залежності для різних параметрів потенціала.

У третьому розділі ми чисельно обрахували для конкретного ланцюга відлуння Лошмідта та струм і підтвердили наявність різних режимів роботи у данного драйвера, що відрізняються різною часовою залежністю струму та відлуння Лошмідта.

Литература

- [1] William Berdanier, Michael Kolodrubetz, Romain Vasseur, Joel E. Moore, Floquet Dynamics of Boundary-Driven Systems at Criticality, Phys. Rev. Lett. 118, 260602 (2017); <https://arxiv.org/abs/1701.05899>
- [2] Oleksandr Gamayun, Artur Slobodeniuk, Jean-Sébastien Caux, Oleg Lychkovskiy, Nonequilibrium phase transition in transport through a driven quantum point contact, Phys. Rev. B 103, 041405 (2021); <https://arxiv.org/abs/2006.02400>
- [3] Daniel Alpay, A Complex Analysis Problem Book;
- [4] N. Ares and D. A. Wisniacki. "Loschmidt echo and the local density of states". Phys. Rev. E, Vol. 80, p. 046216;
- [5] H. J. Stöckmann. "Quantum Chaos: An Introduction". Cambridge University Press (1999);