Методи аналізу в частотній області.

Гармонічні сигнали зручно представляти в комплексному просторі:

$$\dot{U} = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = U_0 e^{j\varphi} e^{j(\omega t)} = \dot{U}_0 e^{j(\omega t)},$$

$$\dot{I} = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = I_0 e^{j\varphi} e^{j(\omega t)} = \dot{I}_0 e^{j(\omega t)},$$

тут $\dot{U}_0$, $\dot{I}_0$ - комплексні амплітуди напруги і струму.

Для пасивних двополюсників зв'язок між струмом і напругою в комплексному просторі матиме наступний вигляд:

Резистор.

$$U = RI \quad \rightarrow \quad \dot{U}_0 e^{j(\omega t)} = R\dot{I}_0 e^{j(\omega t)} \quad \rightarrow \quad \dot{U}_0 = R\dot{I}_0$$

Методи аналізу в частотній області.

Ємність :

$$U_C = \frac{1}{C}\int I(t)dt \;\rightarrow\; \dot{U}_0 e^{j(\omega t)} = \frac{1}{C}\int \dot{I}_0 e^{j(\omega t)}dt \;\rightarrow$$

$$\dot{U}_0 = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_0 \;\rightarrow\; \dot{U}_0 = \dot{Z}_C \dot{I}_0$$

Індуктивність :

$$U_L = L\frac{dI(t)}{dt} \;\rightarrow\; \dot{U}_0 e^{j(\omega t)} = L\frac{d(\dot{I}_0 e^{j(\omega t)})}{dt} \;\rightarrow$$

$$\dot{U}_0 = j\omega L \dot{I}_0 \;\rightarrow\; \dot{U}_0 = \dot{Z}_L \dot{I}_0$$

Методи аналізу в частотній області.

В комплексному просторі зв'язок між струмом і напругою для ємності та індуктивності (для комплексних амплітуд) має такий же вигляд, як і закон Ома для резистора при постійному струмі, але комплексні опори $\dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$ та $\dot{Z}_L = j\omega L$ залежать від частоти струму.

Аналіз частотних властивостей електронних схем проводиться в комплексному просторі, де інтегро-дифференційні рівняння перетворюються в алгебраїчні.

В результаті розрахунків отримаємо результат у вигляді комплексного виразу. Для переходу в дійсний простір комплексний результат приводять до стандартної форми комплексного числа $\dot{c} = a + jb$. знаходять його модуль і фазу:

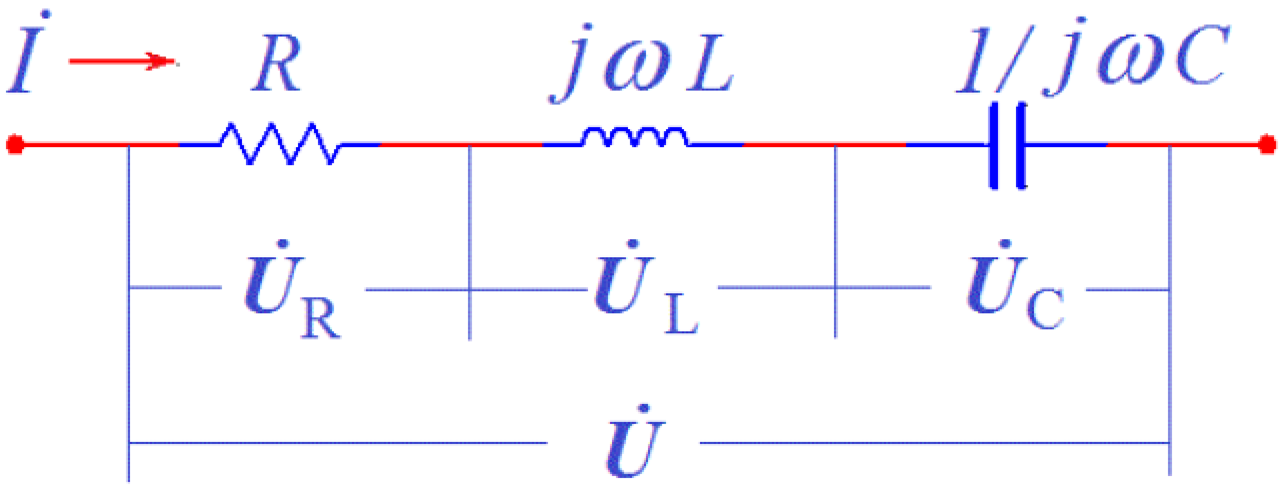
$$|\dot{c}| = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \varphi = arctg\frac{b}{a}$$

Методи аналізу в частотній області.

Таким чином схеми, що містять лінійні елементи (елементи, опір яких не залежить від прикладеної напруги або струму) можна розглядати аналогічно як для постійного струму:

- Лінійний зв'язок між комплексним струмом та комплексною напругою (закон Ома)
- Справедливі закони Кірхгофа
- Паралельне, послідовне з'єднання комплексних опорів

Послідовний коливальний контур.



$$|\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \;, \quad \varphi = arctg\,\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Резонансна частота $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Послідовний коливальний контур.

Розглянемо залежність наруг на елементах контуру від частоти. Якщо контур живиться від генератора напруги з частотою ω, то струм в контурі буде

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} = \frac{\dot{U}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

В дійсному просторі

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U/R}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Послідовний коливальний контур.

$$I(\omega) = \frac{I_{max}}{\sqrt{1+\frac{\omega_0^2 L^2}{R^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{I_{max}}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}},$$

де величина $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ - добротність контура при резонансній частоті. Вона визначається відношенням максимальної реактивної потужності до активної, що виділяється в контурі за умовою резонансу:

$$Q = \frac{P_{\text{max реакт}}}{P_{\text{акт}}} = \frac{\omega_0 L I_{max}^2}{R I_{max}^2} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

Послідовний коливальний контур.

Напруга на індуктивності

$$U_L = \omega L I = \frac{\omega L I_{max}}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}},$$

при ω→0, U_L→0, а при ω→∞, U_L→U.

Максимум можна знайти з умови $$\frac{dU_L(\omega)}{d\omega} = 0$$

$$\omega_{mL} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}.$$

$$U_{mL} = \frac{\omega_{mL} L I_{max}}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega_{mL}}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_{mL}}\right)^2}} = U\frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

Послідовний коливальний контур.

При умові резонансу $U_L(\omega_0) = Q\,U$, що в Q разів більше за напругу генератора, який живить контур.

Напруга на ємності

$$U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{I_{max}}{\omega C\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

при ω→0, $U_C \to U$, а при ω→∞, $U_C \to 0$. Як і для індуктивності знайдемо частоту на якій напруга на ємності має максимум:

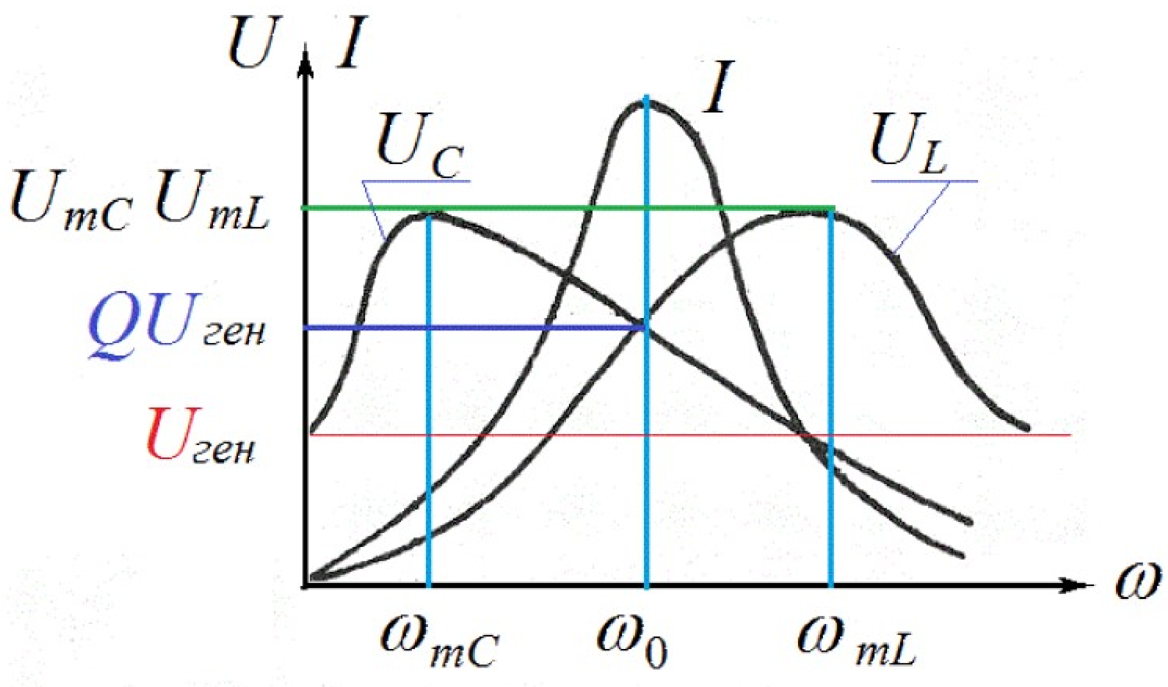
$$\omega_{mC} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

$$U_{mC} = U\frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

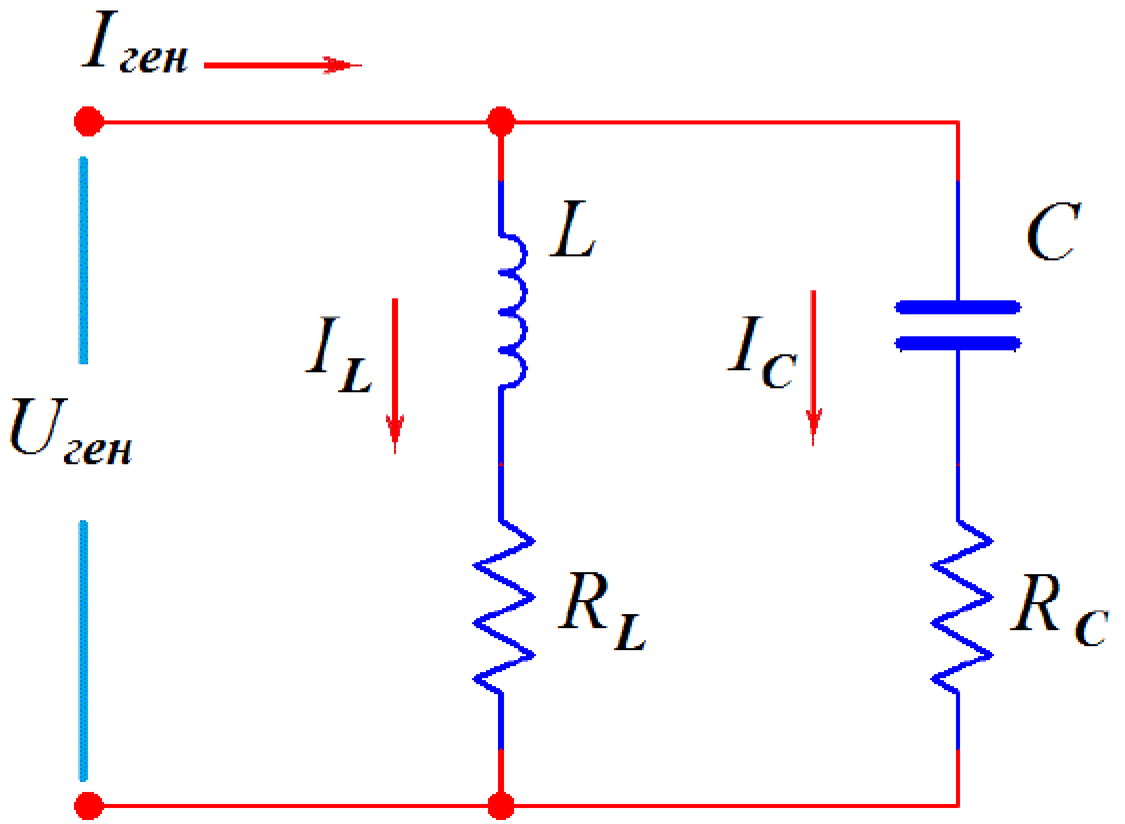
Послідовний коливальний контур.

При умові резонансу $U_C(\omega_0) = QU$, що також в Q разів більше за напругу генератора, який живить контур. Оскільки Q може бути набагато більше одиниці

($1 < Q < 10^4$), то резонанс такого типу називають резонанс напруг.



Паралельний коливальний контур.



Паралельний коливальний контур.

для паралельного контуру резонанс наступає на частоті (з умови рівності нулю реактивного опору)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1-\frac{R_L^2 C}{L}}{LC-R_C^2 C^2}}$$

В ідеальному контурі R_L=0 , R_C=0 тому $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ як і в послідовному контурі.

Паралельний коливальний контур.

Залежність опору і струмів в гілках паралельного контуру знайдемо в наближенні $R_C=0$, $R_L \ll \omega L$. В такому разі провідність контуру набуває вигляду:

$$\dot{Y} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{R_L + j\omega L} = \frac{R_L + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\frac{1}{j\omega C}(R_L + j\omega L)} \approx \frac{R_L + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\frac{L}{C}}$$

$$\dot{Z} = \frac{1}{\dot{Y}} = \frac{\frac{L}{C}}{R_L + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Паралельний коливальний контур.

В дійсному просторі маємо:

$$Z = \frac{\frac{L}{C}}{\sqrt{R_L^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\ , \qquad tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_L}$$

Величина $\sqrt{L/C}$ має розмірність опору, її називають характеристичним опором контуру і позначають літерою $\boldsymbol{\rho}$

$$Z = \frac{\rho^2}{R_L\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{Z_m}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Паралельний коливальний контур.

Якщо паралельний контур живиться від генератора струму $I_{ген}$=const , то струми в гілках:

$$I_C = \omega C U = \omega C Z I_{ген} = \frac{\omega C Z_m I_{ген}}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

При зміні частоти від 0 до ∞ струм в гілці ємності змінюється від 0 , набуває максимуму при частоті $\omega_{mC} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$ і наближається до $I_{ген}$ при $\omega \to \infty$.

$$I_L \approx \frac{Z I_{ген}}{\omega L} = \frac{Z_m I_{ген}}{\omega L\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Сила струму, що проходить по індуктивності змінюється від $I_{ген}$ при ω=0, проходить через максимум при $\omega_{mL} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ і наближається до 0 при $\omega \to \infty$.

Паралельний коливальний контур.

Максимальне значення струмів в гілках ємності та індуктивності однакове:
$$I_{mC} = I_{mL} = QI_{\text{ген}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}},$$

а при частоті резонансу $I_{0C} = I_{0L} = QI_{\text{ген}}$

Тому такий резонанс має назву

резонанс струмів.