4.A-16(page-321):গাউসিয়ান অপসারণ পদ্ধতি (Gaussian Elimination) বা সরাসরি পদ্ধতি (Direct Method) হল সিস্টেম অব লিনিয়ার ইকুয়েশন সমাধানের একটি মৌলিক পদ্ধতি। এই পদ্ধতিতে ধাপে ধাপে এলিমিনেশন প্রক্রিয়া ব্যবহার করে একটি অগম্য (non-singular) ম্যাট্রিক্সকে আপার ট্রায়াঙ্গুলার ফর্মে রূপান্তরিত করা হয়, যাতে ব্যাক-সাবস্টিটিউশন (back-substitution) এর মাধ্যমে সমাধান সহজ হয়।

ধাপ ১: সমীকরণ সিস্টেম সেটআপ

প্রথম পেইজ অনুযায়ী, সমীকরণ সিস্টেমটি:

$$AX = B$$

যেখানে,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ধাপ ২: সম্প্রসারিত ম্যাট্রিক্স

প্রথম পেইজে দেখানো হয়েছে:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & | & b_n \end{bmatrix}$$

ধাপ ৩: প্রথম কলাম অপসারণ

- **Pivot:** প্রথম সারির প্রথম উপাদান a_{11}
- লক্ষ্য: প্রথম কলামের নিচের উপাদানগুলো শূন্য করা।

মাল্টিপ্লায়ার:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}, \ldots, m_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}}$$

রো অপারেশন:

$$R_2 \leftarrow R_2 - m_{21} \times R_1$$
$$R_3 \leftarrow R_3 - m_{31} \times R_1$$
$$\vdots$$
$$R_n \leftarrow R_n - m_{n1} \times R_1$$

ধাপ ৪: নতুন সম্প্রসারিত ম্যাট্রিক্স

প্রথম ধাপের পর ম্যাট্রিক্স:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & \cdots & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right]$$

এখানে,

$$a'_{ij} = a_{ij} - m_{i1} \times a_{1j}, \quad b'_i = b_i - m_{i1} \times b_1$$

ধাপ ৫: দ্বিতীয় কলাম অপসারণ

দ্বিতীয় পেইজ অনুযায়ী:

- **Pivot:** দ্বিতীয় সারির দ্বিতীয় উপাদান a'_{22}
- দ্বিতীয় কলামের নিচের উপাদানগুলো শূন্য করা হবে।

মাল্টিপ্লায়ার:

$$m_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}}, \quad m_{42} = \frac{a'_{42}}{a'_{22}}, \ldots, m_{n2} = \frac{a'_{n2}}{a'_{22}}$$

রো অপারেশন:

$$R_3 \leftarrow R_3 - m_{32} \times R_2$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - m_{42} \times R_2$$

$$\vdots$$

$$R_n \leftarrow R_n - m_{n2} \times R_2$$

ধাপ ৬: আপার ট্রায়াঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স

এভাবে ধারাবাহিকভাবে সব কলাম শূন্য করলে দ্বিতীয় পেইজে দেখানো শেষ ম্যাট্রিক্স হবে:

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} & | & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & | & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a'_{3n} & | & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & | & k_n \end{bmatrix}$$

ধাপ ৭: ব্যাক-সাবস্টিটিউশন

এখন উপরের আপার ট্রায়াঙ্গুলার সিস্টেম থেকে দ্বিতীয় পেইজে দেখানো সমীকরণগুলো পাওয়া যাবে:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = c_2 \\ \quad \vdots \\ x_n = k_n \end{cases}$$

ব্যাক-সাবস্টিটিউশন প্রয়োগ করে:

- $x_n = k_n$
- $x_{n-1} = c_{n-1} - a'_{n-1,n}x_n$
- $x_{n-2} = c_{n-2} - a'_{n-2,n-1}x_{n-1} - a'_{n-2,n}x_n$
- এভাবে x_1 পর্যন্ত সমাধান করা হয়।

ধাপ ৮: উপসংহার

- এই পদ্ধতিতে ধাপে ধাপে প্রত্যেক কলাম থেকে উপাদানগুলো শূন্য করা হয় এবং শেষ পর্যন্ত আপার ট্রায়াঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়।
- ব্যাক-সাবস্টিটিউশন প্রয়োগ করে সহজেই অজানা ভেরিয়েবলগুলোর মান নির্ণয় করা হয়।
- Partial Pivoting প্রয়োগ করার মাধ্যমে শূন্য পিভট থেকে এড়ানো যায়, যা গাণিতিকভাবে সঠিক সমাধান নিশ্চিত করে।

এইভাবে, প্রথম ও দ্বিতীয় পেইজের নিয়ম মেনে গাউসিয়ান অপসারণ পদ্ধতির সম্পূর্ণ গাণিতিক বিশ্লেষণ এবং ব্যাখ্যা প্রদান করা হলো।

Partial Pivoting কী?

Partial Pivoting হলো গাউসিয়ান অপসারণ পদ্ধতিতে এমন একটি কৌশল, যেখানে প্রতিটি ধাপে মেট্রিক্সের নির্দিষ্ট কলাম থেকে সর্বোচ্চ মানের উপাদানটি পিভট (pivot) হিসেবে নির্বাচন করা হয় এবং সেই সারিটি উপরের দিকে নিয়ে আসা হয়। এর ফলে শূন্য পিভটের সমস্যা এড়ানো যায় এবং গণনাগত স্থিতিশীলতা (numerical stability) বৃদ্ধি পায়।

শূন্য পিভটের সমস্যা কী?

যদি কোনো ধাপে পিভট এলিমেন্ট শূন্য হয় (যেমন: $a_{kk} = 0$), তবে ঐ সারি দিয়ে অন্যান্য সারি শূন্য করা সম্ভব হয় না, ফলে গাণিতিকভাবে বিভাজন (division by zero) ত্রুটি দেখা দিতে পারে। এছাড়াও, খুব ছোট পিভট মান থাকলে floating-point ত্রুটি দেখা দিতে পারে।

Partial Pivoting কিভাবে কাজ করে?

1. **বর্তমান কলাম থেকে সর্বোচ্চ মান নির্বাচন:**
   প্রতিটি ধাপে, বর্তমান কলাম থেকে $|a_{ik}|$ এর সর্বোচ্চ মান খোঁজা হয়, যেখানে i বর্তমান সারি থেকে নিচের সারি পর্যন্ত হতে পারে। অর্থাৎ, $i = k, k+1, \ldots, n$।
2. **সারি অদলবদল:**
   যদি সর্বোচ্চ মানের উপাদানটি বর্তমান সারিতে না থাকে, তবে সেই সারির সাথে বর্তমান সারিটি অদলবদল (row swap) করা হয়।
3. **গাণিতিক অপারেশন:**
   এরপর সাধারণ গাউসিয়ান অপসারণের মতো পিভট এলিমেন্ট ব্যবহার করে নিচের সারি শূন্য করা হয়।

উদাহরণ:

ধরা যাক, আমাদের কাছে নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্স আছে:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ধাপ ১: প্রথম কলামে পিভট নির্বাচন

- প্রথম কলাম: $\{0, 4, 7\}$
- সর্বোচ্চ মান: $|7|$ (তৃতীয় সারিতে)
- বর্তমান পিভট 0 হওয়ায়, division by zero এর সমস্যা হতে পারে।

ধাপ ২: সারি অদলবদল

- প্রথম সারির সাথে তৃতীয় সারি অদলবদল:

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ধাপ ৩: পিভট এলিমিনেশন

- $m_{21} = \frac{4}{7}$ এবং $m_{31} = \frac{0}{7}$ ব্যবহার করে, প্রথম কলামের নিচের উপাদানগুলো শূন্য করা হয়:

$$R_2 \leftarrow R_2 - m_{21} \times R_1$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - m_{31} \times R_1$$

- ফলাফল:

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Partial Pivoting এর সুবিধা:

1. **শূন্য পিভট এড়ানো:** শূন্য পিভট এড়ানো যায়, ফলে division by zero সমস্যা হয় না।
2. **গণনাগত স্থিতিশীলতা:** বড় মানকে পিভট হিসেবে নিয়ে আসায় floating-point error কমে যায়।
3. **সঠিক সমাধান নিশ্চিতকরণ:** নির্ভুল এবং সঠিক সমাধান পাওয়া যায়।

উপসংহার:

Partial Pivoting এর মাধ্যমে শূন্য পিভট এড়িয়ে গাউসিয়ান অপসারণ পদ্ধতি আরও কার্যকর এবং স্থিতিশীল হয়। এটি সংখ্যাগত বিশ্লেষণে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে, বিশেষ করে যখন বড় বা জটিল মেট্রিক্স নিয়ে কাজ করা হয়।