Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

Практикум на ЭВМ

# Отчёт №3

# Вариант №3
# Численное решение задачи Дирихле в круге методом БДПФ и прогонки

*Студент 404 группы*
Гимаев Назар

Москва
2024

# 1 Постановка задачи

Решить следующую задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \triangle u = f, \\ u|_{\partial\Omega} = \alpha. \end{cases} \tag{1.1}$$

где $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $f \in C(\overline{\Omega})$, $\alpha \in C(\partial\Omega)$, а $\Omega$ – единичный круг.

# 2 Построение разностной схемы

Зададимся числами $N$ и $M$. Введем $\omega_r, \omega_\varphi, h_r$ и $h_\varphi$ :

$\omega_r = \{r_n = (n+0.5)h_r, n = 0, 1, \ldots, N,\ h_r = \frac{1}{N+0.5}\}$

$\omega_\varphi = \{r_\varphi = mh_\varphi, m = 0, 1, \ldots, M,\ h_\varphi = \frac{2\pi}{M}\}$

Введем сетку $\omega = \omega_r \times \omega_\varphi$

Узел сетки будем обозначать как $x_{n,m} = x_(r_n, \varphi_m)$, а сеточную функцию в этом узле как $y = y_{n,m}$. В дальнейшем один или оба индекса будем опускать.В силу периодичности, всегда далее будем считать, что:

$$\begin{cases} y_{n,M} = y_{n,0} \\ y_{n,M+1} = y_{n,1} \end{cases} \tag{2.1}$$

Введем разностные отношения:

$$y_{r,n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h_r} \tag{2.2}$$

$$y_{\overline{r},n} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_r} \tag{2.3}$$

$$y_{\varphi,m} = \frac{y_{m+1} - y_m}{h_\varphi} \tag{2.4}$$

$$y_{\overline{\varphi},n} = \frac{y_m - y_{m-1}}{h_\varphi} \tag{2.5}$$

$$\tag{2.6}$$

Положим:

$$\overline{r_n} = 0.5(r_n + r_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots, N \tag{2.7}$$

Дифференциальным операторам $L_r$ и $L_\varphi$ сопоставим разностные операторы $\Lambda_r$ и $\Lambda_\varphi$:

$$(\Lambda_r y) = \begin{cases} \frac{1}{r_n}(\overline{r} y_{\overline{r}})_{r,n}, & n = 1, 2, \ldots, N-1 \\ \frac{1}{r_0 h_r}(\overline{r_1} y_{\overline{r},1}), & n = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

$$(\Lambda_\phi y) = \frac{1}{r^2} y_{\overline{\varphi}\varphi} \tag{2.9}$$

В явном виде операторы выглядят как:

$$(\Lambda_r y) = \begin{cases} (\frac{1}{h_r^2} - \frac{1}{2r_n h_r})y_{n-1,m} - \frac{2}{h_r^2}y_{n,m} + (\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2r_n h_r})y_{n+1,m}, & n = 1, 2, \dots, N-1 \\ (\frac{1}{h_r^2} + \frac{2}{r_0 h_r})y_{1,m} - (\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2r_0 h_r})y_{0,m}, & n = 0 \end{cases}$$

$(\Lambda_\phi y) = \frac{1}{r_n^2 h_r^2} y_{n,m-1} - \frac{2}{r_n^2 h_r^2} y_{n,m} + \frac{1}{r_n^2 h_r^2} y_{n,m+1}$

В итоге, получим задачу:

$$\begin{cases} \Lambda_r(y) + \Lambda_\varphi(y) = f_{n,m}, & n = 0, \dots, N-1, \ \ m = 0, 1, ...M-1 \\ y_N, m = \alpha_N, m, & m = 0, 1, \dots, M-1 \end{cases}$$

## 3 Разложение в однократный ряд

переобозначим $\Lambda_\varphi = y_{\overline{\varphi}\varphi}$ Нам понадобятся собственные векторы и собственные значения этого оператора. Собственные вектора при $M = 2^{n+1}$ выглядят вот так:

$$\mu(q, i) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\pi}} cos(\frac{2q\pi i}{M}), & q = 0, \frac{M}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{2\pi}} cos(\frac{2q\pi i}{M}), & q = 1, \dots \frac{M}{2} - 1 \\ \sqrt{\frac{1}{2\pi}} sin(\frac{2(M-q)\pi i}{M}), & q = \frac{M}{2} + 1, \dots M-1 \end{cases}$$

Соответствующие собственные значения:

$$\lambda_q = \frac{4}{h_\varphi^2} sin^2(\frac{q h_\varphi}{2})$$

Разложим $u_{k,l}$ и $f_{k,l}$ в суммы по собственным векторам оператора $\Lambda_\varphi$:

$$u_{k,l} = \sum_{q=0}^{M-1} u_q(k)\mu_q(l) \tag{3.1}$$

$$f_{k,l} = \sum_{q=0}^{M-1} f_q(k)\mu_q(l) \tag{3.2}$$

Коэффициенты $f_q(k)$ вычисляется по формулам:

$$f_q(k) = h_\varphi \sum_{l=0}^{M-1} f_{k,l}\mu_q(l)$$

Подставим (4.1) и (4.2) в задачу, и учтем, что $\Lambda_\varphi \mu_q(l) = \lambda_q(l)\mu_q(l)$, получим:

$$\sum_{q=0}^{M-1} (\Lambda_r u_q(k) + \frac{1}{r_k^2}\lambda_q u_q(k))\mu_q(l) = \sum_{q=0}^{M-1} f_q(k)\mu_q(l) \qquad k = 0, \dots, N-1, \ l = 0, \dots M$$

Так как система векторов ортогональна, приравняем левые и правые части при $\mu_q(l)$. Зафиксируем $q$. Получим краевую задачу:

$$\begin{cases} \Lambda_r u_q(k) + \frac{1}{r_k^2}\lambda_q u_q(k) = f_q(k) & k = 0, \dots, N-1, \\ \mathrm{u}_q(N) = f_q(N) \end{cases}$$

Так как $q = 0, \dots, M-1$, то получили M краевых задач на нахождение $u_q(k)$.

В матричном виде система выглядит как:

$$\begin{pmatrix} -(\frac{1}{h_r^2}+\frac{1}{2r_0h_r})+\frac{1}{r_0^2}\lambda_q & \frac{1}{h_r^2}+\frac{1}{2r_0h_r} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ (\frac{1}{h_r^2}-\frac{1}{2r_1h_r}) & -\frac{2}{h_r^2}+\frac{1}{r_1^2}\lambda_q & (\frac{1}{h_r^2}+\frac{1}{2r_1h_r}) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{h_r^2}-\frac{1}{2r_2h_r}) & -\frac{2}{h_r^2}+\frac{1}{r_2^2}\lambda_q & (\frac{1}{h_r^2}+\frac{1}{2r_2h_r}) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (\frac{1}{h_r^2}-\frac{1}{2r_{N-1}h_r}) & -\frac{2}{h_r^2}+\frac{1}{r_{N-1}^2}\lambda_q & (\frac{1}{h_r^2}+\frac{1}{2r_{N-1}h_r}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

,

В силу трехдиагональности матрицы эту систему можно решать методом прогонки. Найдя $u_q(k)$, следом найдем $u_{kl}$ по формуле:

$$u_{k,l}=\sum_{q=0}^{M-1}u_q(k)\mu_q(l)$$

Суммы такого вида будут считаться с помощью алгоритма БДПФ.

# 4 Метод Прогонки

Считаем, что матрица трехдиагональная. Рассмотрим СЛАУ:

$$AU=F,$$

где матрица A – матрица размера $n$ и имеет следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

,

$$F=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Метод прогонки основан на предположении, что искомые переменные связаны реккурентным соотношением:

$x_i=\alpha_{i+1}x_i+\beta_{i+1}$, где $i=n-1,n-2,...,1$

Коэффициенты $\alpha_i$ и $\beta_i$ выглядят следущим образом:

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\frac{c_1}{b_1} \\ \beta_2 = \frac{f_1}{b_1} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = -\frac{c_i}{a_i\alpha_i + b_i}, i = 2 \ldots ...n-1 \\ \beta_{i+1} = \frac{f_i - a_i\beta_i}{a_i\alpha_i + b_i} i = 2 \ldots ...n-1 \end{cases},$$

Далее, после получения коэффициентов $\alpha_i$ и $\beta_i$, найдем решениея системы по следущим формулам:

$$x_n = \frac{f_n - a_n\beta_n}{b_n + a_n\alpha_n},$$

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, i = n-1, \ldots, 1$$

# 5 Алгоритм БДПФ

Выпишем еще раз выражение для $f_q(k)$ и собственные функции оператора $\Lambda_\varphi$:

$$f_q(k) = \sum_0^{M-1} h_\varphi f(k,l)\mu_q(l)$$

$$\mu(q,i) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} cos(\frac{2q\pi i}{M}), & q = 0, \frac{M}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{\pi}} cos(\frac{2q\pi i}{M}), & q = 1, \ldots \frac{M}{2} - 1 \\ \sqrt{\frac{1}{\pi}} sin(\frac{2(M-q)\pi i}{M}), & q = \frac{M}{2} + 1, \ldots M-1 \end{cases}$$

Таким образом, возникает два случая, соответствующие разным значениям q(в зависимости от вида $\mu_q$) :

$$1 \text{ случай} : q = 0, \ldots \frac{M}{2},$$

$$2 \text{ случай} : q = \frac{M}{2} + 1, -1,$$

Рассмотрим отдельно эти два случая. Учитываем, что $M = 2^n$.

## 5.1 Разложение по косинусам

Рассмотрим 1-ый случай. Имеем:

$$f_q(k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \sum_{q=0}^{2^n} a_j^{(0)}(k) cos(\frac{2q\pi i}{M}), & q = 0, \frac{M}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sum_{q=0}^{2^n} a_j^{(0)}(k) cos(\frac{2q\pi i}{M}), & q = 1, \ldots \frac{M}{2} - 1 \end{cases},$$

$$\text{где } a_j^{(0)}(k) = \begin{cases} 0.5h_\varphi f(k,j), j = 0, \frac{M}{2} \\ 0.5h_\varphi f(k,j), j = 1, \ldots \frac{M}{2} - 1 \end{cases},$$

Чтобы не отвлекаться на множитель перед знаком суммы, под $f_q(k)$ будем иметь в виду:

$$f_q(k) = \sum_{q=0}^{2^n} a_j^{(0)}(k) cos(\frac{q\pi i}{2^n})$$

а после выполнения алгоритма умножим для каждого q полученный результат на соответствующий множитель. Также далее фиксируем k и опускаем его написание в формулах. То есть, проделываем алгоритм для каждого k=$0, \ldots, N$ Заметим, что:

$cos(\frac{q\pi(2^n-j)}{2^n}) = cos(q\pi - \frac{jq\pi}{2^n}) = (-1)^q cos(\frac{\pi qj}{2^n})$

Таким образом, с помощью этого равенства мы можем сгруппировать слагаемые с индексом j и $2^n - j,\ j = 0, \dots 2^{n-1} - 1$. Далее, определим коэффициенты:

$$\begin{cases} a_j^{(1)} = a_j^{(0)} + a_{2^{n-1}-j}^{(0)}, j = 1, \dots, 2^{n-1} - 1 \\ a_{2^n-j}^{(1)} = a_j^{(0)} - a_{2^{n-1}-j}^{(0)}, j = 1, \dots, 2^{n-1} - 1, \\ a_j^{(1)} = a_j^{(0)}, j = 2^n \end{cases}$$

Тогда, суммы $f_q$ делятся на два вида:

$$\begin{cases} f_{2q-1} = \sum_{j=0}^{2^{n-1}} a_{2^n-j}^{(1)}(k) cos(\frac{(2q-1)\pi j}{2^n}), \quad q = 1, 2, \dots, 2^{n-1} \\ f_{2q} = \sum_{j=0}^{2^{n-1}} a_j^{(1)}(k) cos(\frac{(q)\pi j}{2^{n-1}}), \quad q = 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1 \end{cases}$$

На этом, первый шаг алгоритма закончился. Далее,Суммы вида $f_{2q-1}$ менять не будем, а для сумм вида $f_{2q}$ заметим, что снова можно применить такой же алгоритм. Будем группировать слагаемые с индексами $j, ..., 2^{n-2} - j$ и т.д..

В итоге, к p-ому шагу получим следущие группы сумм:

$$\begin{cases} f_{2^{s-1}(2r-1)} = \sum_{j=0}^{2^{n-s}-1} a_{2^{n-s+1}-j}^{(s)}(k) cos(\frac{(2r-1)\pi j}{2^{n-s+1}}), \quad r = 1, 2, \dots, 2^{n-s}, \quad , s = 1, \dots, p \\ f_{2^p r} = \sum_{j=0}^{2^{n-p}} a_j^{(s)}(k)(cos(\frac{r\pi j}{2^{n-p}}), \quad r = 1, 2, \dots, 2^{n-p} \end{cases}$$
$$, \text{где } p = 1, \dots, n$$

$a_j^{(p)}$ определяются следущими реккурентными формулами:

$$\begin{cases} a_j^{(p)} = a_j^{(p-1)} + a_{2^{n-p+1}-j}^{(p-1)}, \\ a_{2^{n-p+1}-j}^{(p)} = a_j^{(p-1)} - a_{2^{n-p+1}-j}^{(p-1)}, \\ a_{2^{n-p}}^{(p)} = a_{2^{n-p}}^{(p-1)}, \end{cases} ,$$
$$\text{где } j = 1, \dots, 2^{n-p} - 1,$$
$$p = 1, \dots, n-1$$

Полагая $p = n - 1$, получим:

$$f_{2^{n-1}} = a_1^{(n-1)}$$
$$f_{2^{s-1}(2r-1)} = \sum_{j=0}^{2^{n-s}-1} a_{2^{n-s+1}-j}^{(s)}(k) cos(\frac{(2r-1)\pi j}{2^{n-s+1}}), \quad r = 1, 2, \dots, 2^{n-s}, \quad , s = 1, \dots, n-1$$

В итоге, задача сводится к вычислению $n - 1$ групп сумм.

На втором шаге алгоритма будем группировать слагаемые в суммах вида $f_{2^{s-1}(2r-1)}$

Для этого зафиксируем $s$ и обозначим:

$$z_r^{(0)}(1) = f_{2^{s-1}(2r-1)}, r = 1 \dots 2^{n-s}$$
$$b_j^{(0)}(1) = a_{2^{n-s+1}-j}^{(s)}, j = 0 \dots 2^{n-s} - 1$$
$$l = n - s, s = 1 - 1$$

В новых обозначениях суммы запишутся как:

$$z_r^{(0)}(1)=\sum_{j=0}^{2^l} b_j^{(0)}(1)cos(\tfrac{(2r-1)\pi j}{2^{l+1}}),\quad r=1,2,\dots,2^l,\quad l=1\dots n-1$$

Разобъем сумму на две сумму: по четным j и по нечетным j:

$$z_r^{(0)}(1)=\sum_{j=0}^{2^{l-1}} b_{2j}^{(0)}(1)cos(\tfrac{(2r-1)\pi j}{2^l})+\sum_{j=0}^{2^{l-1}} b_{2j-1}^{(0)}(1)cos(\tfrac{(2r-1)\pi(2j-1)}{2^l})$$

Воспользуемся равенством:

$$cos(\tfrac{(2r-1)(2j-2)\pi}{2^{l+1}})+cos(\tfrac{(2r-1)2j\pi}{2^{l+1}})=2cos(\tfrac{(2r-1)(4j-2)\pi}{2^{l+1}})cos(\tfrac{-(2r-1)2\pi}{2^{l+1}})=2cos(\tfrac{(2r-1)(2j-1)\pi}{2^l})cos(\tfrac{(2r-1)\pi}{2^l})$$

Распишем второе слагаемое в виде двух сумм:

$$\sum_{j=0}^{2^{l-1}} b_{2j-1}^{(0)}(1)cos(\tfrac{(2r-1)\pi(2j-1)}{2^l})=\frac{1}{2cos(\frac{(2r-1)\pi}{2^l})}(\sum_{j=0}^{2^{l-1}} b_{2j-1}^{(0)}(1)cos(\tfrac{(2r-1)\pi(j-1)}{2^{l-1}})+\sum_{j=0}^{2^{l-1}} b_{2j-1}^{(0)}(1)cos(\tfrac{(2r-1)\pi j}{2^{l-1}}))=$$
$$\frac{1}{2cos(\frac{(2r-1)\pi}{2^l})}(b_{2^{l-1}}^{(0)}(l)cos(\tfrac{(2r-1)\pi}{2})+\sum_{j=0}^{2^{l-1}-1}(b_{2j-1}^{(0)}(1)+b_{2j+1}^{(0)})cos(\tfrac{(2r-1)\pi j}{2^{l-1}}))$$

Обозначим:

$$\begin{cases} b_j^{(1)}(1)=b_{2j-1}^{(0)}(1)+b_{2j+1}^{(0)}(1), & j=1,2,\dots 2^{l-1}-1\\ b_{2^l-1}^{(1)}(1)=b_{2^l-1}^{(0)}(1)) \\ b_j^{(1)}(2)=b_{2j}^{(0)}(1), & j=1,2,\dots,2^{l-1}\end{cases}$$

Тогда, получим следущие выражение для $z_r^{(0)}(1)$:

$$z_r^{(0)}(1)=\sum_{j=0}^{2^{l-1}} b_j^{(1)}(2)cos(\tfrac{(2r-1)\pi j}{2^l})+\frac{1}{2cos(\frac{(2r-1)\pi}{2^l})}\sum_{j=0}^{2^{l-1}} b_j^{(1)}(1)cos(\tfrac{(2r-1)\pi(j)}{2^l})$$

Заметим, что $z_{2^l-r+1}=z_r$ Если обозначить:

$$z_r^{(1)}(p)=\sum_{j=0}^{2^{l-1}} b_j^{(1)}(p)cos(\tfrac{(2r-1)\pi j}{2^l}),\quad p=1,2$$

, то получим реккурентные соотношения:

$$z_r^{(0)}(1)=z_r^{(1)}(2)+\frac{1}{2cos(\frac{(2r-1)\pi}{2^l})}z_r^{(1)}(1)$$
$$z_{2^l-r+1}^{(0)}(1)=z_r^{(1)}(2)+\frac{1}{2cos(\frac{(2r-1)\pi}{2^l})}z_r^{(1)}(1)$$

На этом первый шаг закончился.Он привел к появлению сумм $z_r^{(1)}(1)$ и $z_r^{(1)}(2)$, которые имеют вдвое меньше слагаемых и ту же структуру. Поэтому к этим суммам будем применять такой же алгоритм. Продолжая процесс преобразований, на $m$-ом шаге получим:

$$z_r^{(m)}(p)=\sum_{j=0}^{2^{l-m}} b_j^{(m)}(p)cos(\tfrac{(2r-1)\pi j}{2^{l-m+1}}),\ r=1,2,\dots,2^{l-m},\quad p=1,2,\dots,2^m$$

, для каждого $m=0,1,\dots,l$, где коэффициенты $b_j^{(m)}(p)$ для $p=1,2,\dots,2^{m-1}$ определяются реккурентно по формулам:

$$\begin{cases} b_j^{(m)}(2p-1)=b_{2j-1}^{(m-1)}(p)+b_{2j+1}^{(m-1)}(p), & j=1,2,\dots 2^{l-m}-1\\ b_{2^{l-m}}^{(m-1)}(2p-1)=b_{2^{l-m+1}-1}^{(m-1)}(p)) \\ b_j^{(m)}(2p)=b_{2j}^{(m)}(p), & j=1,2,\dots,2^{l-m}\end{cases} \tag{5.1}$$

, При этом, суммы m-го шага связаны с суммами $m-1$-го шага следущим образом:

$$\begin{cases} z_r^{(m-1)}(p) = z_r^{(m)}(2p) + \frac{1}{2cos(\frac{(2r-1)\pi}{2^(l-m+2)})} z_r^{(m)}(p) \\ z_{2^{l-m+1}-r+1}^{(m-1)}(p) = z_r^{(m)}(2s) + \frac{1}{2cos(\frac{(2r-1)\pi}{2^(l-m+2)})} z_r^{(m)}(p) \end{cases} \tag{5.2}$$

Полагая $m = l$, получим:

$$z_1^{(l)}(p) = b_1^{(l)}(p) \tag{5.3}$$

В итоге, суммы $z_r^{(0)}(1)$ вычисляются следущим образом. Исходя из заданных коэффициентов $b_j^{(0)}(1), \;\; j = 1, \dots, 2^l$, по формулам (6.1) вычисляются коэффициенты $b_1^{(l)}(s)$. Они используются в качестве начальных условий в силу (6.3). Далее, полагая в (6.2) последовательно $m = l, l-1, \dots, 1$, в итоге найдем $z_r^{(0)}(1)$,а значит нашли коэффициент Фурье $f_{2^{s-1}(2r-1)}(k)$.

## 5.2 Разложение по синусам

Алгорим аналогичный. Поэтому, просто опишем формулы, нужные для вычисления коэффициента Фурье:

$$f_q(k) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sum_{q=0}^{2^n} a_j^{(0)}(k) sin(\frac{2q\pi i}{M}), \qquad q = \frac{M}{2} + 1, \dots M-1$$

$$, \text{где } a_j^{(0)}(k) = \begin{cases} -0.5 h_\varphi f(k,j), j = 0, \frac{M}{2} \\ -0.5 h_\varphi f(k,j), j = 1, \dots \frac{M}{2} - 1 \end{cases},$$

Коэффициенты $a$ связаны следущими соотношениями:

$$\begin{cases} a_j^{(p)} = a_j^{(p-1)} - a_{2^{n-p+1}-j}^{(p-1)}, \\ a_{2^{n-p+1}-j}^{(p)} + a_j^{(p-1)} + a_{2^{n-p+1}-j}^{(p-1)}, \\ a_{2^{n-p}}^{(p)} = a_{2^{n-p}}^{(p-1)}, \end{cases},$$

$$\text{где } j = 1, \dots, 2^{n-p} - 1,$$

$$p = 1, \dots, n-1$$

Коэффициенты $b$ связаны следущими соотношениями:

$$b_j^{(m)}(2p-1) = b_{2j-1}^{(m-1)}(p) + b_{2j+1}^{(m-1)}(p), \quad j = 1, 2, \dots 2^{l-m} - 1$$

$$\mathrm{b}_{2^{l-m}}^{(m-1)}(2p-1) = b_{2^{l-m+1}-1}^{(m-1)}(p))$$

$$\mathrm{b}_j^{(m)}(2p) = b_{2j}^{(m)}(p), \quad j = 1, 2, \dots, 2^{l-m}$$

,

Коэффициенты $z$ связаны следущим соотношением

$$z_r^{(m-1)}(p) = z_r^{(m)}(2p) + \frac{1}{2cos(\frac{(2r-1)\pi}{2^(l-m+2)})} z_r^{(m)}(p)$$

$$\mathrm{z}_{2^{l-m+1}-r+1}^{(m-1)}(p) = -z_r^{(m)}(2p) + \frac{1}{2cos(\frac{(2r-1)\pi}{2^(l-m+2)})} z_r^{(m)}(p)$$

Начальные условия для нахождения $z$:

$$z_1^{(l)}(p) = b_1^{(l)}(p)$$

# 6 Результаты

Исправность программы проверялась с помощью сравнения с аналитическими решениями. Так же были проведены тесты для некоторых других правых частей.

Приведем результаты при различных $f$ и $\alpha$. Вывод реализовался как 3D график, а так же в виде тепловой карты.

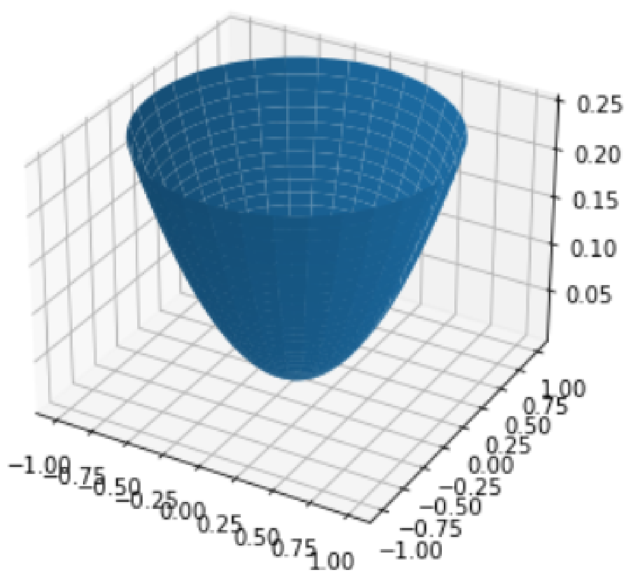


Рис. 1: $f = 1, \alpha = \frac{1}{4}$. В данном случае, должно получится $u = \frac{1}{4}r^2$

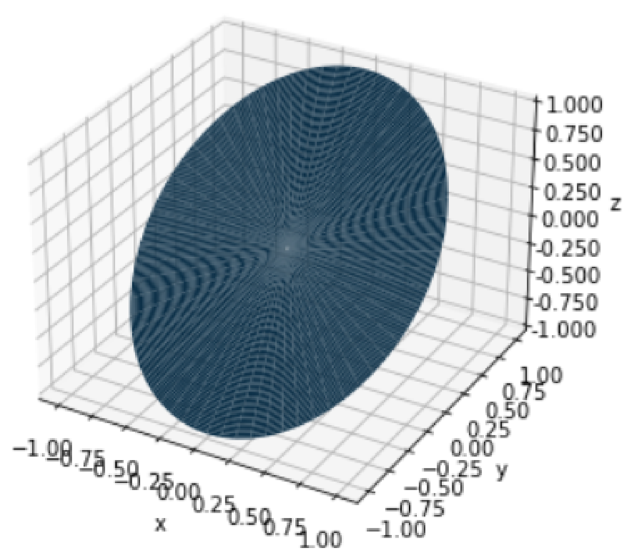


Рис. 2: $f = 0, \alpha = sin(\varphi)$. В данном случае, должно получится $u = y$.

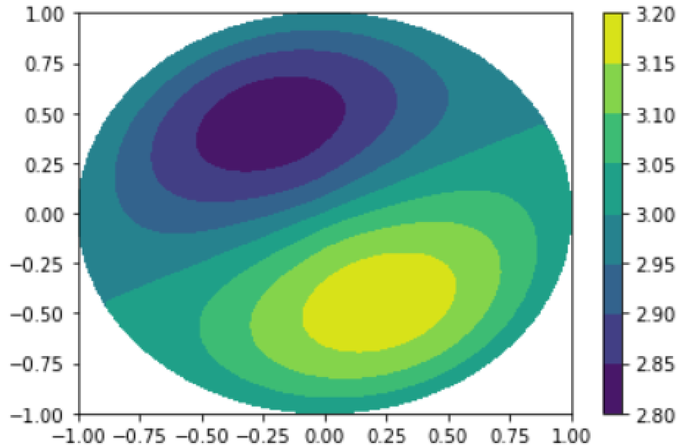


Рис. 3: $f = 2sin(\varphi) - cos(\varphi), \alpha = 3$.

# 7 Вывод

Была решена поставленная задача, программа работает исправно. Произошло ознакомление с методом БДПФ.

# 8 Библиография

## Список литературы

[1] *Самарский А.А, Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений.

[2] *Фрязинов И.В.* О разностных схемах для уравнения Пуассона в полярной, цилиндрической и сферической системах координат.