Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

Курсовая работа

Оценка Var-риска в модели Белецкого-Плиски

Студент 404 группы
Гимаев Назар

Москва
2024

1 Введение

Var-риск – это выраженная в данных денежных единицах (базовой валюте) оценка величины, которую не превысят ожидаемые в течение данного периода времени потери с заданной вероятностью. Охарактеризуем Var-риск с математической точки зрения. Пусть зафиксирован портфель, состоящий из некоторых ценных бумаг. Var-риск портфеля для данного доверительного уровня $(1-\alpha)$ и данного периода позиций t определяется как такое значение, которое обеспечивает покрытие возможных потерь x держателя портфеля за время t с вероятностью $(1-\alpha)$, то есть $P(Var \geq x) = 1-\alpha$. В данной работе за падение капитала я считал разность между значением капитала в конечный момент времени, управляемым оптимально, и значением капитала в конечный момент времени, который сначала управляется оптимально, а потом в какой-то момент времени управление "замораживается".

2 Основная часть

2.1 Описание модели

Рассмотрим рынок, состоящий из $m \geq 2$ ценных бумаг и $n \geq 1$ факторов. Цена i-ой ценной бумаги в данной модели задается следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\begin{cases} \frac{dS_i}{S_i} = (\alpha + AX(t))_i dt + \sum\limits_{k=0}^{m+n} \sigma_{ik} dW_k, \\ S_i(0) = s_i, \quad i = 1, \dots m \end{cases} \tag{2.1}$$

а $X(t)$ удовлетворяет следующему СДУ:

$$\begin{cases} dX(t) = (\beta + BX(t))dt + \Lambda dW, \\ X(0) = x \end{cases} \tag{2.2}$$

Коэффициенты в этих уравнениях:

α – вектор длины m
A – матрица размера $m \times n$
Σ – матрица размера $m \times (m+n)$. σ_{ik} – её элементы
β – вектор длины n
B – матрица размера $n \times n$
Λ – матрица $n \times (m+n)$

Обозначим за $\overline{h(t)}$ процесс управления капиталом, где $\sum\limits_{i=1}^{m} h_i(t) = 1$.

Капитал $V(t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{cases} dV(t) = V(t)(\sum\limits_{i=1}^{m} h_i(t)(\alpha + AX(t))_i dt + \sum\limits_{i=1}^{m+n} \sigma_{ik} dW_k)), \\ V(0) = v_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Оптимальное уравнение должно максимизировать следующий функционал:

$$J_\theta(v, x, h(.)) = \liminf_{x \to \infty}(-\frac{2}{\theta} t^{-1} ln(E(e^{\frac{-\theta}{2} lnV(t)}))) \tag{2.4}$$

при условиях $V(0) = v$, $X(0) = x$. Параметр $\theta : (\theta = 1$ означает осторожного игрока, $\theta = -1$ – авантюрного, $\theta = 0$ – безразличного к риску).
Введем следующий функционал:

$$K_\theta(x,h) = \frac{1}{2}(\frac{\theta}{2} + 1)(h, \Sigma\Sigma^T h) - (h, \alpha + AX) \tag{2.5}$$

При фиксированном θ обозначим за $H_\theta(x)$ точку в которой достигается инфимум (2.5). Утверждается, что управление $h(t) = H_\theta(X(t))$ является оптимальным для задачи максимизации функционала (2.4).

2.2 Конкретный случай

Рассмотрим рынок с 2-мя ценными бумагами и 1-им фактором, задающимися следущими СДУ:

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{S_1} = (0.15 - X(t))dt + 0.2dW_1, \\ S_1(0) = s_1, \quad i = 1, \dots m, \\ \frac{dS_2}{S_2} = X(t)dt + dW_2, \\ S_2(0) = s_2, \quad i = 1, \dots m, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} dX(t) = (0.05 - X(t))dt + 0.02dW_3, \\ X(0) = x \end{cases} \tag{2.7}$$

Пусть $\theta = 0$.
Положим $h1 = h$, $h2 = 1 - h$. Найдем оптимальное управление:

$$K_\theta(x,h) = \frac{1}{2}(0.04h^2 + (1-h)^2) - (0.15 - x)h - (1-h)x = \frac{1}{2} * 1.04 * h^2 - (1.15 - x)h - x;$$

Это квадратичная функция с положительным старшим коэффициентом.Значит

$$H_\theta(x) = \frac{1.15 - 2x}{1.04} \tag{2.8}$$

Тогда, оптимальное управление выглядит так:

$$h_1(t) = \frac{1.15 - 2X(t)}{1.04}, \tag{2.9}$$

$$h_2(t) = 1 - h_1(t) \tag{2.10}$$

2.3 план численного оценивания var-риска

Оценка var-риска будет происходить численно.
Введем параметры:

$t0 = 0$ – начальный момент времени
$T = 0.6$ – конечный момент времени
$N_1 = 600$ – количество разбиений отрезка времени
$N_2 = 100$ – количество симуляций
$dt = \frac{(T - t0)}{N_1}$
$X0 = 1$ – значение X в начальный момент времени
$V0 = 1$ – значение V в начальный момент времени
$\alpha = 0.05$ – доверительный уровень

За $V(t)$ обозначим капитал с оптимальным управлением, а за $V2(t)$ – капитал с замороженным в точке $t = 0.3$ управлением. Обозначим за $Y = V(T) - V_2(T)$ падение капитала.

С помощью метода Эйлера-Маруямы численно найдем $X(t)$,$V(t)$ и $V_2(t)$. Произведем N_2 симуляций. Найдя в каждой симуляции значение величин $V(T)$ и $V2(T)$, получим эмпирическое распределение падения капитала Y.
Найдем α-квантиль распределения(это и есть var-риск) следующим образом:
1.Значения Y из всех симуляций упорядочим по неубыванию, т.е $Y_0 \leq Y_1 \leq \ldots \leq Y_{N_2-1}$
2.Положим $K = [\alpha(N_2 - 1)]$
3. Сравниваем K и αN_2:
Если $K + 1 < \alpha N$, то положим $Var = Y_{K+1}$
Если $K + 1 = \alpha N$, то положим $Var = \frac{Y_{K+1}+Y_K}{2}$
Если $K + 1 > \alpha N$, то положим $Var = Y_K$

3 Результаты

Приведем результаты:

3.1 графики

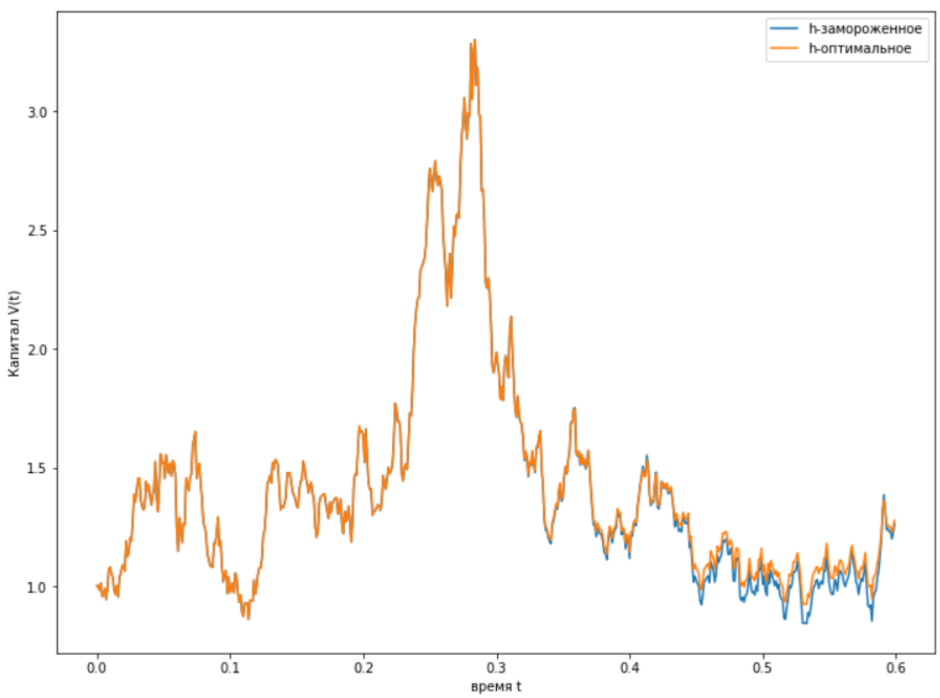

Рис. 1: Капиталы $V(t)$(оранжевый, с оптимальным управлением) и $V_2(t)$(синий, с управлением, замороженным в точке $t = 0.3$). Здесь была произведена одна симуляция

.

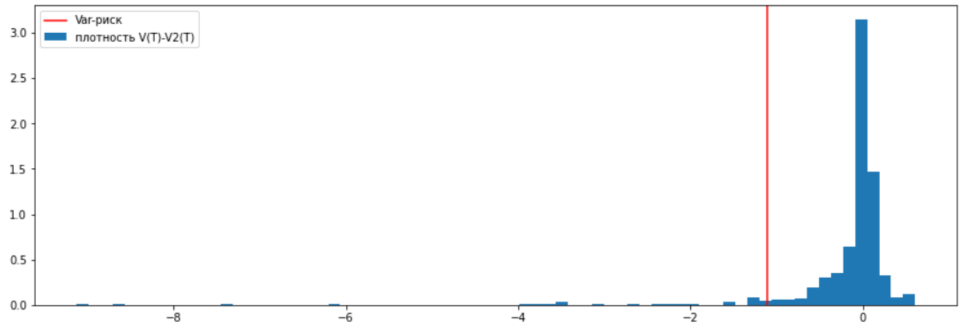

Рис. 2: Гистограмма распределения падения капитала. на картинке красным отмечен var-риск.

3.2 Числовые характеристики

В итоге получили:

Var-риск $Var = -1.1$
Медианное значение падения капитала равно 0.0083
Среднее значение падения капитала равно -0.19

4 Вывод

Исходя из полученных числовых характеристик, появилось сомнение, не было ли где-то допущено ошибок, так как значение капитала в конечный момент времени с оптимальным управлением не сильно лучше, чем капитал с замороженным в точке $t = 0.3$ управлением, а по среднему показателю падения капитала даже хуже.