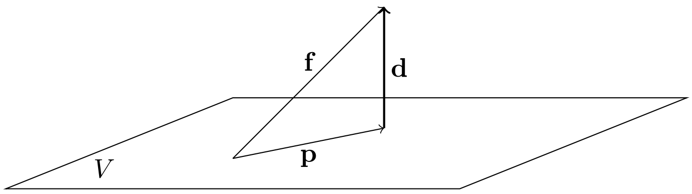
Самостійна робота 3 з функціонального аналізу

Варіант 4

КА-02 Козак Назар

Задача 1. В гільбертовому просторі $H = L^2_{\mathbb{R}}(\Omega,\mu)$ знайти відстань між функцією f та лінійним простором $V = \mathbb{R}\langle f_1, f_2, f_3\rangle$, якщо $\Omega = [-\pi,\pi]$, $d\mu(t) = dt$, $f(t) = \cos^2 t$, $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t, f_3(t) = t^2$

Перш за все зробимо малюнок



Вектор **p** - це проекція вектора **f** на простір V. Відстань між функцією $\mathbf{f} = \cos^2 t$ та простором V є $\|\mathbf{f}-\mathbf{p}\|$, в нашому випадку ми розглядаємо простір $H = L^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi],\mu)$, де $d\mu(t) = dt$, тому на нормою на ньому є:

$$\|g\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} (g(t))^2\, dt}$$

Знайдемо відстань, для цього спочатку ортоганалізуємо систему векторів $\left\{1, t, t^2\right\}$:

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = t - \left(t, \frac{P_0}{\|P_0\|}\right)\cdot \frac{P_0}{\|P_0\|} = t - (t, P_0)\cdot\frac{1}{\|P_0\|^2} = t - \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\cdot 1dt}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1dt} = t - \frac{\frac{t^2}{2}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi}}{t\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi}} = t$$

$$P_2(t) = t^2 - \left(t^2, \frac{P_0}{\|P_0\|}\right)\cdot\frac{P_0}{\|P_0\|} - \left(t^2, \frac{P_1}{\|P_1\|}\right)\cdot\frac{P_1}{\|P_1\|} = t^2 - \left(t^2, P_0\right)\cdot\frac{1}{\|P_0\|^2} - \left(t^2, P_1\right)\cdot\frac{t}{\|P_1\|^2} =$$

$$= t^2 - \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2\cdot 1dt}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1dt} - \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2\cdot tdt}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\cdot tdt}t = t^2 - \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2dt}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1dt} - \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^3dt}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2dt}t = t^2 - \frac{\frac{t^3}{3}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi}}{t\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi}} - 0 = t^2 - \frac{\pi^3-(-\pi)^3}{3\cdot 2\pi} = t^2 - \frac{\pi^2}{3}$$

Тепер знайдемо проекцію **p**:

$$\mathbf{p} = \left(\cos^2 t, \frac{P_0}{\|P_0\|}\right)\cdot\frac{P_0}{\|P_0\|} + \left(\cos^2 t, \frac{P_1}{\|P_1\|}\right)\cdot\frac{P_1}{\|P_1\|} + \left(\cos^2 t, \frac{P_2}{\|P_2\|}\right)\cdot\frac{P_2}{\|P_2\|} =$$

$$= \left(\cos^2 t, P_0\right)\cdot\frac{P_0}{\|P_0\|^2} + \left(\cos^2 t, P_1\right)\cdot\frac{P_1}{\|P_1\|^2} + \left(\cos^2 t, P_2\right)\cdot\frac{P_2}{\|P_2\|^2} \boxed{=}$$

Знайдемо скалярні добутки окремо:

$$\left(\cos^2 t, P_0\right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\cdot 1dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\cos 2t + 1)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2t + t\right)\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} = \frac{1}{2}\left(\pi - (-\pi)\right) = \pi$$

$$\left(\cos^2 t, P_1\right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} t\cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t(\cos 2t + 1)dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\cos 2tdt + \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} tdt = () = \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi} td(\sin 2t) + \frac{t^2}{4}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{4}t\sin 2t\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} - \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin 2tdt + 0 = 0 + \frac{1}{8}\cos 2t\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0$$

$$\left(\cos^2 t, P_2\right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(t^2 - \frac{\pi^2}{3}\right)\cos^2 tdt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2\cos^2 tdt - \frac{\pi^2}{3}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2(1+\cos 2t)dt -$$

$$-\frac{\pi^2}{6}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2dt + \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2d(\sin 2t) - \frac{\pi^2}{6}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1dt - \frac{\pi^2}{6}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos 2tdt =$$

$$= \frac{t^3}{6}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} + \frac{1}{4}t^2\sin 2t\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} - \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\sin 2t dt - \frac{\pi^2}{6}t\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} - \frac{\pi^2}{6}\sin 2t\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} =$$

$$= \frac{\pi^3}{3} + 0 - \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\sin 2t dt - \frac{\pi^3}{3} - 0 = \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi} td(\cos 2t) = \frac{1}{4}t\cos 2t\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} - \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos 2t dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\sin 2t\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Повернемось до $\mathbf{p}$:

$$\boxed{=}\ \pi \cdot \frac{1}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1 dt} + 0 + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{t^2}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2\cdot t^2 dt} = \frac{\pi}{t\big|_{t=-\pi}^{t=\pi}} + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{t^2}{\frac{t^5}{5}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi}} = \frac{\pi}{2\pi} + \frac{5t^2}{2\pi^5}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5t^2}{4\pi^4}$$

Тепер можемо знайти відстань:

$$\operatorname{dist}(\mathbf{f}; V) = \|\mathbf{f} - \mathbf{p}\| = \left\|\cos^2 t - \frac{1}{2} - \frac{5t^2}{4\pi^4}\right\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos^2 t - \frac{1}{2} - \frac{5t^2}{4\pi^4}\right)^2 dt}$$

Обчислимо інтеграл окремо:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos^2 t - \frac{1}{2} - \frac{5t^2}{4\pi^4}\right)^2 dt = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6, \quad \text{де}$$

$$\begin{cases} I_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^4 t dt \\ I_2 = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos^2 t dt \\ I_3 = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} 2\frac{5t^2}{4\pi^4}\cos^2 dt \\ I_4 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5t^2}{4\pi^4} dt \\ I_5 = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dt \\ I_6 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} t^4\left(\frac{5}{4\pi^4}\right)^2 dt \end{cases}$$

Обрахуємо їх:

$$I_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^4 t dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t)dt = \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(1 + 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1dt + \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos 2t dt + \frac{1}{8}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1dt + \frac{1}{8}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos 4t dt = \frac{1}{4}\ t\big|_{t=-\pi}^{t=\pi} + \frac{1}{4}\ \sin 2t\big|_{t=-\pi}^{t=\pi} + \frac{1}{8}\ t\big|_{t=-\pi}^{t=\pi} + \frac{1}{32}\ \sin 4t\big|_{t=-\pi}^{t=\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{3\pi}{4}$$

$$I_2 = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos^2 t dt = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1 + \cos 2t)dt = -\frac{1}{2}\ t\big|_{t=-\pi}^{t=\pi} - \frac{1}{4}\ \sin 2t\big|_{t=-\pi}^{t=\pi} = -\pi$$

$$I_3 = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} 2\frac{5t^2}{4\pi^4}\cos^2 t dt = -\frac{5}{4\pi^4}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2(1 + \cos 2t)dt = -\frac{5}{4\pi^4}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} - \frac{5}{4\pi^4}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2\cos 2t dt =$$

$$= -\frac{5}{6\pi} - \frac{5}{8\pi^4}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2 d(\sin 2t) = -\frac{5}{6\pi} - \frac{5}{8\pi^4}t^2\sin 2t\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} + \frac{5}{4\pi^4}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\sin 2t dt = -\frac{5}{6\pi} - 0 - \frac{5}{8\pi^4}\int\limits_{-\pi}^{\pi} td(\cos 2t) =$$

$$= -\frac{5}{6\pi} - \frac{5}{8\pi^4}t\cos 2t\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{5}{8\pi^4}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos 2t dt = -\frac{5}{6\pi} - \frac{5}{4\pi^3} + \frac{5}{16\pi^4}\sin 2t\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} = -\frac{5}{6\pi} - \frac{5}{4\pi^3} + 0 = -\frac{5}{6\pi} - \frac{5}{4\pi^3}$$

$$I_4 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 2\cdot\frac{1}{2}\cdot t^2\frac{5}{4\pi^4} dt = \frac{5}{4\pi^4}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{5}{4\pi^4}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} = \frac{5}{4\pi^4}\cdot\frac{2\pi^3}{3} = \frac{5}{6\pi}$$

$$I_5 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 dt = \tfrac{1}{4}\ t\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} = \tfrac{\pi}{2}$$

$$I_6 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} t^4 \left(\tfrac{5}{4\pi^4}\right)^2 dt = \tfrac{25}{16\pi^8} \cdot \tfrac{t^5}{5}\Bigg|_{t=-\pi}^{t=\pi} = \tfrac{5}{8\pi^3}$$

Тоді маємо:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\cos^2 t - \tfrac{1}{2} - \tfrac{5t^2}{4\pi^4}\right)^2 dt = \tfrac{3\pi}{4} - \pi - \tfrac{5}{6\pi} - \tfrac{5}{4\pi^3} + \tfrac{5}{6\pi} + \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{5}{8\pi^3} = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{5}{8\pi^3}$$

Остаточно:

$$\operatorname{dist}(\mathbf{f}; V) = \left\|\cos^2 t - \tfrac{1}{2} - \tfrac{5t^2}{4\pi^4}\right\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\cos^2 t - \tfrac{1}{2} - \tfrac{5t^2}{4\pi^4}\right)^2 dt} = \sqrt{\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{5}{8\pi^3}}$$

Відповідь. $\sqrt{\frac{\pi}{4} - \frac{5}{8\pi^3}}$

Задача 2. Довести, що лінійний оператор $A : E \to E$, , що діє в банаховому просторі $E = \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ є обмежений і знайти його норму, якщо $\Omega = [0, \pi]$, $(Af)(t) = \int\limits_0^{\pi} \left(t + \sin \frac{s}{2}\right) f(s) ds$

Нагадаємо означення обмеженого лінійного оператора:

Означення. Нехай $(E_1, \|\cdot\|_1), (E_2, \|\cdot\|_2)$ – лінійні нормовані простори над полем $\mathbb{K}$. Оператор $A : E_1 \to E_2$ лінійний над полем $\mathbb{K}$ називається обмеженим на E_1, якщо існує таке $C \in \mathbb{R}_+$, що

$$\|A\mathbf{x}\|_2 \leqslant C\|\mathbf{x}\|_1, \quad \text{для всіх } \mathbf{x} \in E_1$$

У нашому випадку $E_1 = E_2 = \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$. $\mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$ - простір непервних дійснозначних функцій на відрізку $[0, \pi]$, нормою на цьому просторі є супремум-норма, тобто: $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup\limits_{t \in [0,\pi]} |\mathbf{x}(t)|$. Тоді нам треба довести, що

$$\exists C \in \mathbb{R}_+ : \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R}) : \|A\mathbf{x}\|_\infty \leqslant C\|\mathbf{x}\|_\infty$$

Нехай $\mathbf{x} \in \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$, тоді

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{t \in [0,\pi]} \left|\int\limits_0^{\pi} \left(t + \sin \tfrac{s}{2}\right) \mathbf{x}(s) ds\right| \leqslant \sup_{t \in [0,\pi]} \int\limits_0^{\pi} \left|\left(t + \sin \tfrac{s}{2}\right) \mathbf{x}(s)\right| ds$$

Оскільки $t \in [0, \pi], s \in [0, \pi]$, то $t + \sin \frac{s}{2} \geqslant 0$, тому $\left|\left(t + \sin \frac{s}{2}\right) \mathbf{x}(s)\right| = \left(t + \sin \frac{s}{2}\right) |\mathbf{x}(s)|$, тоді маємо:

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty \leqslant \sup_{t \in [0,\pi]} \int\limits_0^{\pi} \left|\left(t + \sin \tfrac{s}{2}\right) \mathbf{x}(s)\right| ds = \sup_{t \in [0,\pi]} \int\limits_0^{\pi} \left(t + \sin \tfrac{s}{2}\right) |\mathbf{x}(s)|\, ds \leqslant \sup_{t \in [0,\pi]} \int\limits_0^{\pi} \left(t + \sin \tfrac{s}{2}\right) \|\mathbf{x}(s)\|_\infty\, ds =$$

$$= \|\mathbf{x}(s)\|_\infty \cdot \sup_{t \in [0,\pi]} \int\limits_0^{\pi} \left(t + \sin \tfrac{s}{2}\right) ds = \|\mathbf{x}(s)\|_\infty \cdot \sup_{t \in [0,\pi]} \left(ts - 2\cos \tfrac{s}{2}\right)\Big|_{s=0}^{s=\pi} = \|\mathbf{x}(s)\|_\infty \cdot \sup_{t \in [0,\pi]} (t\pi + 2) =$$

$$= \|\mathbf{x}(s)\|_\infty \cdot (\pi^2 + 2)$$

Отже ми отримали що

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R}) : \|A\mathbf{x}\|_\infty \leqslant (\pi^2 + 2)\|\mathbf{x}\|_\infty$$

Тому, оскільки $\pi^2 + 2 \in \mathbb{R}_+$, то лінійний оператор A є обмеженим на $\mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$.

Знайдемо норму оператора. З зауваження 2.2.5 з лекцій [1] випливає:

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty \leqslant \|A\|\|\mathbf{x}\|_\infty, \mathbf{x} \in \mathcal{C}\left([0,\pi],\mathbb{R}\right)$$

Візьмемо $\mathbf{x} = 1 \in \mathcal{C}\left([0,\pi],\mathbb{R}\right)$, тоді оскільки норма завжди $\geqslant 0$, маємо:

$$\|A1\|_\infty \leqslant \|A\|\|1\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \|A\| \geqslant \frac{\|A1\|_\infty}{\|1\|_\infty} \quad \Rightarrow \quad \|A\| \geqslant \frac{\sup\limits_{t\in[0,\pi]}\left|\int\limits_0^\pi \left(t+\sin\frac{s}{2}\right)ds\right|}{1} \quad \Rightarrow \quad \|A\| \geqslant \pi^2+2$$

В нашому випадку, згідно з теоремою 2.2.6 маємо [2]:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|A\mathbf{x}\|_\infty, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{C}\left([0,\pi],\mathbb{R}\right)$$

Візьмемо довільну функцію $\mathbf{y} \in \mathcal{C}\left([0,\pi],\mathbb{R}\right)$, таку що $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$, тоді:

$$\|A\mathbf{y}\|_\infty = \sup_{t\in[0,\pi]}\left|\int\limits_0^\pi \left(t+\sin\tfrac{s}{2}\right)\mathbf{y}(s)ds\right| \leqslant \sup_{t\in[0,\pi]}\int\limits_0^\pi \left|\left(t+\sin\tfrac{s}{2}\right)\mathbf{y}(s)\right|ds$$

Як вже було показано $\left|\left(t+\sin\frac{s}{2}\right)\mathbf{y}(s)\right| = \left(t+\sin\frac{s}{2}\right)|\mathbf{y}(s)|$, тоді :

$$\|A\mathbf{y}\|_\infty \leqslant \sup_{t\in[0,\pi]}\int\limits_0^\pi \left|\left(t+\sin\tfrac{s}{2}\right)\mathbf{y}(s)\right|ds = \sup_{t\in[0,\pi]}\int\limits_0^\pi \left(t+\sin\tfrac{s}{2}\right)|\mathbf{y}(s)|\,ds \leqslant \sup_{t\in[0,\pi]}\int\limits_0^\pi \left(t+\sin\tfrac{s}{2}\right)\|\mathbf{y}(s)\|_\infty\,ds =$$

$$= \|\mathbf{y}(s)\|_\infty \cdot \sup_{t\in[0,\pi]}\int\limits_0^\pi \left(t+\sin\tfrac{s}{2}\right)ds = 1\cdot \sup_{t\in[0,\pi]}\left(ts-2\cos\tfrac{s}{2}\right)\Big|_{s=0}^{s=\pi} = \cdot \sup_{t\in[0,\pi]}(t\pi+2) =$$

$$= (\pi^2+2)$$

З довільності вибору $\mathbf{y}$ маємо: $\mathbf{y} \in \mathcal{C}\left([0,\pi],\mathbb{R}\right), \|\mathbf{y}\|_\infty = 1 \ \Rightarrow \|A\mathbf{y}\|_\infty \leqslant \pi^2+2$. З цього випливає, що $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_\infty=1}\|A\mathbf{x}\|_\infty \leqslant \pi^2+2, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{C}\left([0,\pi],\mathbb{R}\right)$ Тоді маємо такий висновок:

$$\left.\begin{aligned}\|A\| \geqslant \pi^2+2\\ \|A\| \leqslant \pi^2+2\end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \|A\| = \pi^2+2$$

Відповідь. $\|A\| = \pi^2+2$

Задача 3. Знайти спектр, його структуру, та резольвенту оператора $A : E \to E, E = \mathcal{C}(\Omega,\mathbb{C})$, якщо $\Omega = [-1,0], (Af)(t) = \int\limits_{-1}^{t}\tau f(\tau)d\tau - f(t)$

Спочатку знайдемо спектр оператора та його структу. Спектр оператора A можна записати як:

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A), \quad \text{де:}$$

1. $\lambda \in \sigma_p(A)$ - власні числа оператора A
2. $\lambda \in \sigma_c(A)$ - точки неперервного спектру
3. $\lambda \in \sigma_r(A)$ - точки залишкового спектру

Знайдемо всі власні значення оператора A. Власні значення оператора A, це такі λ, що $\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I}) \neq \{\mathbf{0}\}$ Знайдемо $\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I})$, нехай $f(t) \in \mathcal{C}\left([-1,0],\mathbb{C}\right)$, тоді

$$(A-\lambda \mathrm{I})f=0 \quad\Rightarrow\quad (Af)(t)-\lambda f(t)=0 \quad\Rightarrow\quad \int\limits_{-1}^{t}\tau f(\tau)d\tau - f(t)-\lambda f(t)=0$$

Нехай $z(t)=\int\limits_{-1}^{t}\tau f(\tau)d\tau$, тоді

$$z(t)-f(t)-\lambda f(t)=0$$

Оскільки, $f(t)\in\mathcal{C}\left([-1,0],\mathbb{C}\right)$, то $z\in\mathcal{C}^1\left([-1,0],\mathbb{C}\right)$. Тоді маємо:

$$z'(t)=tf(t) \quad\Rightarrow\quad f(t)=\frac{z'(t)}{t}$$

Бачимо, що $z(-1)=0$. Тоді підставивши $f(t)=\frac{z'(t)}{t}$ у початкове рівняння отримуємо таку задачу Коші:

$$\begin{cases} z(t)-\frac{z'(t)}{t}-\lambda f(t)\frac{z'(t)}{t}=0 \\ z(-1)=0 \end{cases}$$

Розв'яжемо її:

$$z(t)-\frac{z'(t)}{t}-\lambda f(t)\frac{z'(t)}{t}=0 \quad\Leftrightarrow\quad z(t)-(1+\lambda)\,\frac{z'(t)}{t}=0$$

Маємо два випадки:

1. $\lambda=-1 \quad\Rightarrow\quad z(t)=0, \forall t\in[-1,0] \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Ker}(A+\mathrm{I})=\{\mathbf{0}\}$, з цього випливає, що $\lambda=-1$ не є власним значенням оператора A.

2. $\lambda\neq -1$. Тоді маємо:

$$\begin{cases} z'(t)-\frac{t}{1+\lambda}z(t)=0 \\ z(-1)=0 \end{cases}$$

Розв'яжемо задачу Коші методом Бернуллі. Нехай $z(t)=U\cdot V,\ U=U(t), V=V(t)$, тоді маємо:

$$U'V+UV'-\frac{t}{1+\lambda}UV=0 \quad\Leftrightarrow\quad U'V+U\left(V'-\frac{t}{1+\lambda}V\right)=0$$

Знайдемо таку функцію V, що $V'-\frac{t}{1+\lambda}V=0$:

$$V'-\frac{t}{1+\lambda}V=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dV}{dt}=\frac{t}{1+\lambda}V \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dV}{V}=\int\frac{tdt}{1+\lambda} \quad\Rightarrow\quad V=e^{\frac{1}{2(1+\lambda)}t^2}$$

Підставвимо $V=e^{\frac{1}{2(1+\lambda)}t^2}$ в наше рівняння:

$$U'e^{\frac{1}{2(1+\lambda)}t^2}-0=0 \quad\Rightarrow\quad U'=0 \quad\Rightarrow\quad U=C,\ C=\mathrm{const}$$

Отримали, що $z(t) = U \cdot V = Ce^{\frac{1}{2(1+\lambda)}t^2}$. Оскільки $z(-1) = 0$, маємо:

$$z(-1) = Ce^{\frac{1}{2(1+\lambda)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow \quad z(t) = 0, \ \forall t \in [-1, 0]$$

Таким чином отримали, що для будь-якого $\lambda \neq -1 : \lambda$ – не є власним значенням оператору A.
З того, що $\lambda = -1$ також не є власним значенням оператору A випливає те, що оператор A не має власних значень, тобто $\sigma_p(A) = \varnothing$.

Тепер спробуємо знайти точки неперервного спектру. В нашому випадку це такі λ для яких виконується: $\overline{\mathrm{Im}(A - \lambda \mathrm{I})} = \mathcal{C}\left([-1, 0], \mathbb{C}\right)$. Почнемо з $\lambda = -1$, нехай $f \in \mathcal{C}\left([-1, 0], \mathbb{C}\right)$ тоді:

$$(A - \lambda \mathrm{I})f = \int\limits_{-1}^{t} \tau f(\tau) d\tau - f(t) + f(t) \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda \mathrm{I})f = \int\limits_{-1}^{t} \tau f(\tau) d\tau$$

Підставивши в останній рівності значення $t = -1$, отримаємо, що, якщо $y \in \mathrm{Im}(A + \mathrm{I})$, то $y(-1) = 0$. Образ оператора $A + I$ не буде $\mathcal{C}\left([-1, 0], \mathbb{C}\right)$, наведемо контрприклад. Візьмемо $x(t) = 1 \in \mathcal{C}\left([-1, 0], \mathbb{C}\right)$. Оскільки $x(-1) = 1 \neq 0$, то $x(t) \notin \mathrm{Im}(A + \mathrm{I})$. Доведемо також, що $x(t) = 1$ не є граничною точкою множини $\mathrm{Im}(A + \mathrm{I})$. Для цього нагадаємо означення граничної точки:

Означення. Нехай $(E, \|\cdot\|)$ – лінійний нормований простір, і $X \subset E$ – підмножина E. Точка $x^0 \in E$ називається граничною точкою множини X, якщо $\mathring{B}(x^0; r) \cap X \neq \varnothing$ для всіх $r > 0$,
де $\mathring{B}(x^0; r) = B(x^0; r) \backslash \{x^0\}, \ B(x^0, r) = \left\{\mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x} - x^0\| < r\right\}$.

Нехай $y(t) \in \mathrm{Im}(A + I)$, оскільки E в нашому випадку це $\mathcal{C}\left([-1, 0], \mathbb{C}\right)$, то ми розглядаємо супремум-норму. Тоді розглянемо вираз $\|y - x\|_\infty$:

$$\|y - x\|_\infty \geqslant |y(0) - x(0)| \quad \Rightarrow \quad \|y - x\|_\infty \geqslant 1$$

З довільності вибору функції $y(t)$ ми отримали те, що для $r \in (0; 1)$ перетин відкритої кулі в $\mathcal{C}\left([-1, 0], \mathbb{C}\right)$ навколо точки $x(t)$ радіуса r з множиною $\mathrm{Im}(A+I)$ не містить жодної функції окрім $x(t)$. З чого випливає, що перетин відкритої виколотої куля в в $\mathcal{C}\left([-1, 0], \mathbb{C}\right)$ навколо точки $x(t)$ радіуса r та множини $\mathrm{Im}(A+I)$ це порожня множина для $r \in (0, 1)$. З чого, за означенням граничної точки випливає те, що точка $x(t) = 1$ не є граничною точкою множини $\mathrm{Im}(A + \mathrm{I})$. Тоді маємо:

$$\left.\begin{aligned} & x(t) = 1 \in \mathcal{C}\left([-1, 0], \mathbb{C}\right) \\ & x(t) = 1 \notin \mathrm{Im}(A + \mathrm{I}) \\ & x(t) \text{ – не є граничною точкою множини } \mathrm{Im}(A + \mathrm{I}) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{Im}(A - \lambda \mathrm{I})} \neq \mathcal{C}\left([-1, 0], \mathbb{C}\right)$$

Таким чином ми отримали, що при $\lambda = -1 : \overline{\mathrm{Im}(A - \lambda \mathrm{I})} \neq \mathcal{C}\left([-1, 0], \mathbb{C}\right)$. Тобто за означенням[3] $\lambda = -1$ це точка залишкового спектру.

Тепер розглянемо випадок, коли $\lambda \neq -1$. Нехай $y \in \mathcal{C}\left([-1, 0], \mathbb{C}\right)$. Тоді:

$$\mathbf{y} \in \mathrm{Im}(A - \lambda \mathrm{I}) \Rightarrow \exists x \in \mathcal{C}\left([-1, 0], \mathbb{C}\right) : \ (A - \lambda \mathrm{I})x = y$$

Спробуємо розв'язати рівняння $(A - \lambda \mathrm{I})x = y$ відносно x, маємо:

$$(A - \lambda \mathrm{I})x = y \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{-1}^{t} \tau x(\tau) d\tau - x(t) - \lambda x(t) = y(t)$$

Нехай $z(t) = \int\limits_{-1}^{t} \tau x(\tau) d\tau$. Бачимо, що $z(-1) = 0$. Тоді підставивиши $z(t)$ в наше рівняння отримуємо рівняння: $z(t) - x(t) - \lambda x(t) = y$. Оскільки, $x(t), y(t) \in \mathcal{C}\left([-1, 0], \mathbb{C}\right)$, то $z \in \mathcal{C}^1\left([-1, 0], \mathbb{C}\right)$, то маємо $z'(t) = tx(t)$, тоді $x(t) = \frac{z'(t)}{t}$. Отримуємо задачу Коші:

$$\begin{cases} z(t) - \frac{z'(t)}{t} - \lambda \frac{z'(t)}{t} = y(t) \\ z(-1) = 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо її:

$$z(t) - \frac{z'(t)}{t} - \lambda \frac{z'(t)}{t} = y(t) \quad \Rightarrow \quad z(t) - \frac{z'(t)}{t}(1 + \lambda) = y(t) \quad \Rightarrow \quad z'(t) - \frac{t \cdot z(t)}{1 + \lambda} + \frac{t \cdot y(t)}{1 + \lambda} = 0$$

Тоді:

$$z'(t) - \frac{t \cdot z(t)}{1 + \lambda} + \frac{t \cdot y(t)}{1 + \lambda} = 0 \left| \cdot e^{-\frac{t^2}{2(1+\lambda)}} \right.$$

$$z'(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2(1+\lambda)}} - \frac{t \cdot z(t)}{1 + \lambda} \cdot e^{-\frac{t^2}{2(1+\lambda)}} + \frac{t \cdot y(t)}{1 + \lambda} \cdot e^{-\frac{t^2}{2(1+\lambda)}} = 0$$

$$\left(z(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2(1+\lambda)}}\right)' = -\frac{t \cdot y(t)}{1 + \lambda} \cdot e^{-\frac{t^2}{2(1+\lambda)}}$$

$$\int\limits_{-1}^{t} \left(z(s) \cdot e^{-\frac{s^2}{2(1+\lambda)}}\right)' ds = -\int\limits_{-1}^{t} \frac{s \cdot y(s)}{1 + \lambda} \cdot e^{-\frac{s^2}{2(1+\lambda)}} ds$$

$$\left(z(s) \cdot e^{-\frac{s^2}{2(1+\lambda)}}\right)\Bigg|_{s=-1}^{s=t} = -\int\limits_{-1}^{t} \frac{s \cdot y(s)}{1 + \lambda} \cdot e^{-\frac{s^2}{2(1+\lambda)}} ds$$

Оскільки $z(-1) = 0$, то маємо:

$$z(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2(1+\lambda)}} - 0 = -\int\limits_{-1}^{t} \frac{s \cdot y(s)}{1 + \lambda} \cdot e^{-\frac{s^2}{2(1+\lambda)}} ds \quad \Rightarrow \quad z(t) = -e^{\frac{t^2}{2(1+\lambda)}} \int\limits_{-1}^{t} \frac{t \cdot y(s)}{1 + \lambda} \cdot e^{-\frac{s^2}{2(1+\lambda)}} ds$$

З рівняння $z(t) - x(t) - \lambda x(t) = y(t)$ маємо $x(t) = \frac{1}{1+\lambda}\left(z(t) - y(t)\right)$, тоді:

$$x(t) = \frac{1}{1 + \lambda} \left(-e^{\frac{t^2}{2(1+\lambda)}} \int\limits_{-1}^{t} \frac{s \cdot y(s)}{1 + \lambda} \cdot e^{-\frac{s^2}{2(1+\lambda)}} ds - y(t) \right)$$

Підсумуємо, ми знайшли такий оператор $By = \frac{1}{1+\lambda}\left(-e^{\frac{t^2}{2(1+\lambda)}} \int\limits_{-1}^{t} \frac{t \cdot y(s)}{1+\lambda} \cdot e^{-\frac{s^2}{2(1+\lambda)}} ds - y(t)\right) = x(t)$. Якщо ми доведемо, що цей оператор є обмеженим, можна буде вважати, що оператор B є оберненим до оператору $A - \lambda \mathrm{I}, \ \ \lambda \neq -1$. Доведемо обмеженість:

$$\|By\|_\infty = \sup_{t \in [-1,0]} \left| \frac{1}{1+\lambda} \left(-e^{\frac{t^2}{2(1+\lambda)}} \int\limits_{-1}^{t} \frac{s \cdot y(s)}{1+\lambda} \cdot e^{-\frac{s^2}{2(1+\lambda)}} ds - y(t) \right) \right| = \sup_{t \in [-1,0]} \left| \frac{1}{1+\lambda} \left(e^{\frac{t^2}{2(1+\lambda)}} \int\limits_{-1}^{t} \frac{s \cdot y(s)}{1+\lambda} \cdot e^{-\frac{s^2}{2(1+\lambda)}} ds + y(t) \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t \in [-1,0]} \left| \frac{1}{1+\lambda} e^{\frac{t^2}{2(1+\lambda)}} \int\limits_{-1}^{t} \frac{s \cdot y(s)}{1+\lambda} \cdot e^{-\frac{s^2}{2(1+\lambda)}} ds \right| + \sup_{t \in [-1,0]} \left| \frac{1}{1+\lambda} y(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in[-1,0]} \left| \frac{1}{1+\lambda} e^{\frac{t^2}{2(1+\lambda)}} \int\limits_{-1}^{t} \frac{s\cdot\|y\|_\infty}{1+\lambda} \cdot e^{-\frac{s^2}{2(1+\lambda)}} ds \right| + \sup_{t\in[-1,0]} \left| \frac{1}{1+\lambda} \|y\|_\infty \right| =$$

$$= \|y\|_\infty \cdot \left(\sup_{t\in[-1,0]} \left| \frac{1}{1+\lambda} e^{\frac{t^2}{2(1+\lambda)}} \int\limits_{-1}^{t} \frac{s}{1+\lambda} \cdot e^{-\frac{s^2}{2(1+\lambda)}} ds \right| + \sup_{t\in[-1,0]} \left| \frac{1}{1+\lambda} \right| \right) =$$

$$= \|y\|_\infty \cdot \left(\sup_{t\in[-1,0]} \left| \frac{1}{1+\lambda} e^{\frac{t^2}{2(1+\lambda)}} \int\limits_{-1}^{t} \frac{s}{1+\lambda} \cdot e^{-\frac{s^2}{2(1+\lambda)}} ds \right| + \left| \frac{1}{1+\lambda} \right| \right) =$$

$\sup\limits_{t\in[-1,0]} \left| \frac{1}{1+\lambda} e^{\frac{t^2}{2(1+\lambda)}} \int\limits_{-1}^{t} \frac{s}{1+\lambda} \cdot e^{-\frac{s^2}{2(1+\lambda)}} ds \right| + \left| \frac{1}{1+\lambda} \right|$ це якесь число, позначимо його через K. Тоді маємо:

$$\|By\|_\infty \leqslant K\|y\|_\infty, \;\; K = \text{const}$$

З чого виплває обмеженість оператора B. Отже, маємо, оператор B є оберененим до оператору $A - \lambda \mathrm{I}$ при $\lambda \neq -1$, тому $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ - регулярні значення оператору A, а оператор B є резольвентою оператора A.

Відповідь. $\sigma(A) = \sigma_r(A) = \{-1\}$, $R_\lambda(A)y = \frac{1}{1+\lambda} \left(-e^{\frac{t^2}{2(1+\lambda)}} \int\limits_{-1}^{t} \frac{s\cdot y(s)}{1+\lambda} \cdot e^{-\frac{s^2}{2(1+\lambda)}} ds - y(t) \right)$

Додаток

[1] - Чаповський Ю.А. - конспект лекцій з функціонального аналізу ст. 340 Зауваження 2.2.5

[2] - Чаповський Ю.А. - конспект лекцій з функціонального аналізу ст. 340 Теорема 2.2.6