Розрахункова робота №1

Козак Назар КА-02

1 завдання - 14 варіант, друге -15

16.11.2021

Завдання 1 За таблицею розподілу координат дискретного випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ знайти:

1. Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2.
2. Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ координат ξ_1 та ξ_2 відповідно та побудувати графіки цих функцій
3. Функцію розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ випадкового вектора.
4. Математичні сподівання координат та кореляційну матрицю.
5. Умовні ряди розподілу для кожної координати.
6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

ξ_1 \ ξ_2	-10	-6	-3	3
-2	0,1	0,04	0,1	0,08
0	0,09	0,01	0,09	0,05
3	0,09	0,14	0,05	0,16

Розв'язання

Бачимо, що $n = 3, m = 4, x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 3, y_1 = -10, y_2 = -6,$ $y_3 = -3, y_4 = 3$. Значення $p_{kj} = P\{\xi_1 = x_k, \xi_2 = y_1\}, k = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$.

1. Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2

Подія $A_k = \{\xi_1 = x_k\}, k = \overline{1,3}$ відбувається разом з гіпотезами $H_j = \{\xi_2 = y_j\}, j = \overline{1,4}$, причому B_1, B_2, B_3, B_4 утворюють повну группу подій, тобто $\bigcup_{j=1}^{4} B_j = \Omega, B_i \cap B_l = \varnothing, i \neq l$. Тоді за формулою повної ймовірності маємо:

$$P(A_k) = \sum_{j=1}^{4} P(H_j)P(A_k/H_j) = \sum_{j=1}^{4} P(A_k \cap H_j) = \sum_{j=1}^{4} p_{kj}$$

аналогічно:

$$P(H_j) = \sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(H_j/A_k) = \sum_{k=1}^{4} P(H_j \cap A_k) = \sum_{k=1}^{3} p_{jk}$$

Знайдемо ряд розподілу випадкової величини ξ_1 :

$$P(\xi_1 = -2) = P(A_1) = \sum_{j=1}^{4} p_{1j} = 0.1 + 0.04 + 0.1 + 0.08 = 0.32$$

$$P(\xi_1 = 0) = P(A_2) = \sum_{j=1}^{4} p_{2j} = 0.09 + +0.01 + 0.09 + 0.05 = 0.24$$

$$P(\xi_1 = 3) = P(A_3) = \sum_{j=1}^{4} p_{3j} = 0.09 + 0.14 + 0.05 + 0.16 = 0.44$$

Перевірка:

$$P(\xi_1 = -2) + P(\xi_1 = 0) + P(\xi_1 = 3) = 0.32 + 0.24 + 0.44 = 1$$

Отже ряд розподілу ξ_1 має вигляд:

ξ_1	-2	0	3
P	0.32	0.24	0.44

Знайдемо ряд розподілу випадкової величини ξ_2 :

$$P(\xi_2 = -10) = P(H_1) = \sum_{k=1}^{3} p_{1k} = 0.1 + 0.09 + 0.09 = 0.28$$
$$P(\xi_2 = -6) = P(H_2) = \sum_{k=1}^{3} p_{1k} = 0.04 + 0.01 + 0.14 = 0.19$$
$$P(\xi_2 = -3) = P(H_3) = \sum_{k=1}^{3} p_{1k} = 0.1 + 0.09 + 0.05 = 0.24$$
$$P(\xi_2 = 3) = P(H_4) = \sum_{k=1}^{3} p_{1k} = 0.08 + 0.05 + 0.16 = 0.29$$

Перевірка:

$$P(\xi_2 = -10) + P(\xi_2 = -6) + P(\xi_2 = -3) + P(\xi_2 = 3) =$$
$$= 0.28 + 0.19 + 0.24 + 0.29 = 1$$

Отже ряд розподілу ξ_2 має вигляд:

ξ_2	-10	-6	-3	3
P	0.28	0.19	0.24	0.29

2. Функції розподілу координат ξ_1 та ξ_2

За означенням $F_{\xi_i} = P\{\xi_i < x\}(i = 1, 2), x \in \mathbb{R}$

ξ_1	-2	0	3
P	0.32	0.24	0.44

Тоді маємо:
$F_{\xi_1}(x) = P\{\xi_1 < x\} =$

$$= \begin{cases} P(\varnothing) = 0, \quad x \leqslant -2 \\ P\{\xi_1 = -2\} = 0.32, \quad -2 < x \leqslant 0 \\ P\left\{\{\xi_1 = -2\} \cup \{\xi_1 = 0\}\right\} = P\{\xi_1 = -2\} + P\{\xi_1 = 0\} = \\ = 0.32 + 0.24 = 0.56, \quad 0 < x \leqslant 3 \\ P\left\{\{\xi_1 = -2\} \cup \{\xi_1 = 0\} \cup \{\xi_1 = 3\}\right\} = \\ = P\{\xi_1 = -2\} + P\{\xi_1 = 0\} + P\{\xi_1 = 3\} = 0.32 + 0.24 + 0.44 = 1, x > 3 \end{cases}$$

Отримуємо:

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \leqslant -2 \\ 0.32, \quad -2 < x \leqslant 0 \\ 0.56, \quad 0 < x \leqslant 3 \\ 1, \quad x > 3 \end{cases}$$

Аналогічно знаходимо функцію розподілу другої координати.

ξ_2	-10	-6	-3	3
P	0.28	0.19	0.24	0.29

$$F_{\xi_2}(y) = P\{\xi_2 < y\} =$$

$$= \begin{cases} P(\varnothing) = 0, \quad y \leqslant -10 \\ P\{\xi_2 = -10\} = 0.28, \quad -10 < y \leqslant -6 \\ P\left\{\{\xi_2 = -10\} \cup \{\xi_2 = -6\}\right\} = P\{\xi_2 = -10\} + P\{\xi_2 = -6\} = \\ = 0.28 + 0.19 = 0.47, \quad -6 < y \leqslant -3 \\ P\left\{\{\xi_2 = -10\} \cup \{\xi_2 = -6\} \cup \{\xi_2 = -3\}\right\} = P\{\xi_2 = -10\} + P\{\xi_2 = -6\} + \\ + P\{\xi_2 = -3\} = 0.28 + 0.19 + 0.24 = 0.71, \quad -3 < y \leqslant 3 \\ P\left\{\{\xi_2 = -10\} \cup \{\xi_2 = -6\} \cup \{\xi_2 = -3\} \cup \{\xi_2 = 3\}\right\} = P\{\xi_2 = -10\} + \\ + P\{\xi_2 = -6\} + P\{\xi_2 = -3\} + P\{\xi_2 = 3\} = \\ = 0.28 + 0.19 + 0.24 + 0.29 = 1, \quad y > 3 \end{cases}$$

Отримуємо:

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, \quad y \leqslant -10 \\ 0.28, \quad -10 < y \leqslant -6 \\ 0.47, \quad -6 < y \leqslant -3 \\ 0.71, \quad -3 < y \leqslant 3 \\ 1, \quad y > 3 \end{cases}$$

Графіки функцій розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ зображені на рис. 2.1 та рис. 2.2

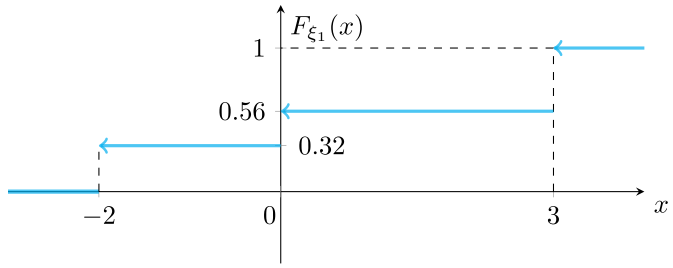


Рисунок 2.1 – Графік функції $F_{\xi_1(x)}$

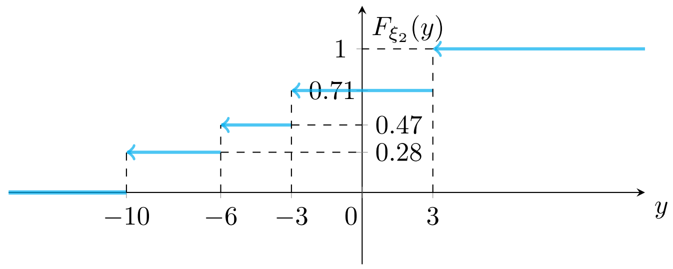


Рисунок 2.2 – Графік функції $F_{\xi_2(y)}$

3. Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$.

За означенням $F_{\vec{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$. Це ймовірність потрапляння випадкового вектора усередину нескінченного квадранта з вершиною у точці (x, y)

Використаємо формулу:

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \sum_{k: x_k < x} \sum_{j: y_j < y} p_{kj}$$

Зрозуміло, що значення сумісної функції розподілу в кожній точці координатної площини залежить від множини точок, які потрапили в квадрант. Зрозуміло, що $F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0$, якщо $x \leqslant x_1$, або $y \leqslant y_1$. Іншу частину координатної площини розіб'ємо на області виду:

$$D_{k,j} = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \begin{matrix} x_k < x \leqslant x_{k+1}, \\ y_j < y \leqslant y_{j+1} \end{matrix} \right\}, \; k = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}$$

При $k = n$ матимемо умову $x > x_n$, а при $j = m$ маємо $y > y_m$.

Щоб полегшити знаходження $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ намалюємо в декартовій системі координат усі точки, що відповідають значенню вектора $\vec{\xi}$ (рис. 2.3) та обчислимо значення сумісної функції розподілу в кожній області $D_{k,j}, k = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$. Для наочності кожен випадок супроводжується малюнком. (рис. 2.3 - 2.16)

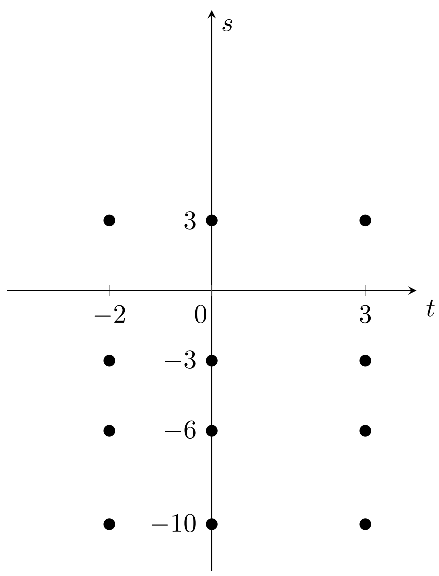


Рисунок 2.3

1. $(x \leqslant -2) \vee (y \leqslant -10)$ (рис. 2.4) $F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0$

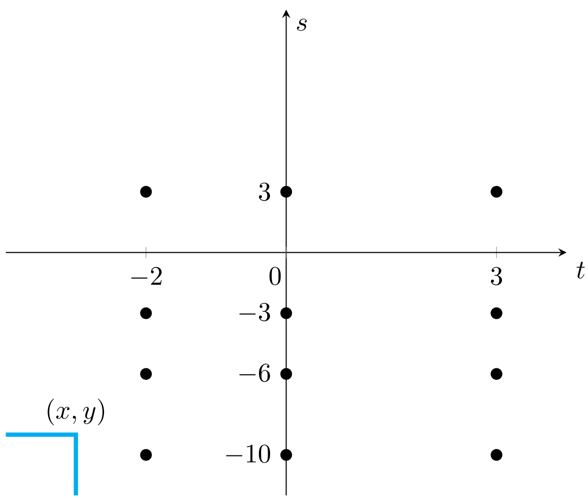


Рисунок 2.4

2. $D_{1,1} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{c} -2 < x \leqslant 0, \\ -10 < y \leqslant -6 \end{array} \right\}$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -10\} = 0.1$

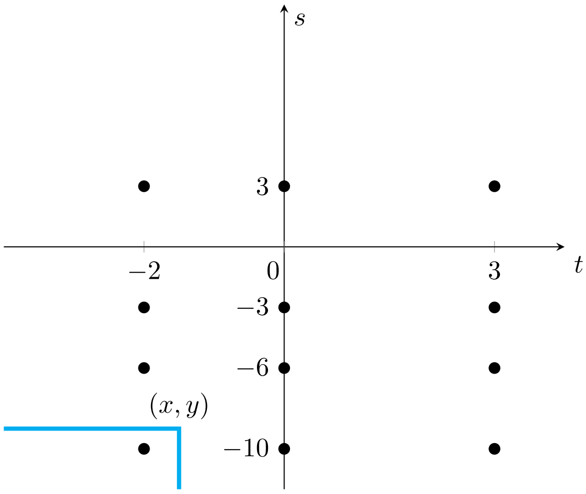


Рисунок 2.5

3. $D_{2,1} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 < x \leqslant 3, \\ -10 < y \leqslant -6 \end{array} \right\}$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -10\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -10\} = 0.1 + 0.09 =$
$= 0.19$

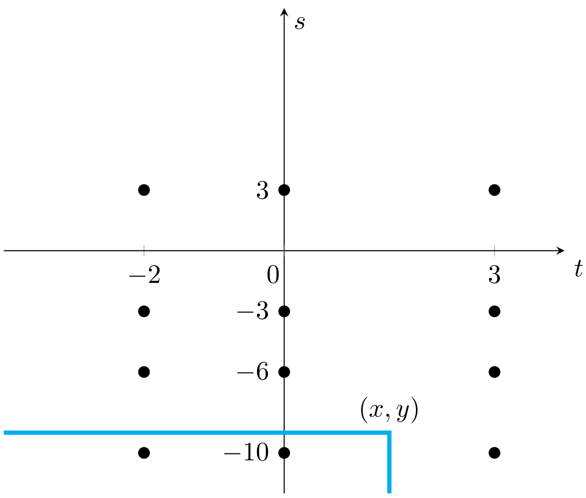


Рисунок 2.6

4. $D_{3,1} = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \begin{array}{c} x > 3, \\ -10 < y \leqslant -6 \end{array} \right\}$

$F_{\bar{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -10\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -10\} +$
$+ P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -10\} = 0.1 + 0.09 + 0.09 = 0.28$

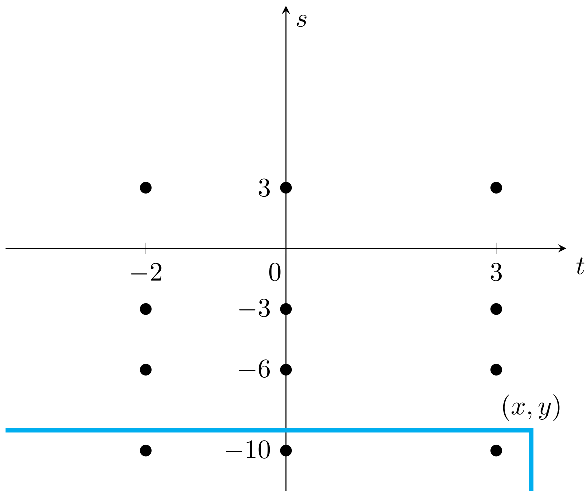


Рисунок 2.7

5. $D_{1,2} = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} -2 < x \leqslant 0, \\ -6 < y \leqslant -3 \end{array} \right\}$

$F_{\bar{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -10\} = 0.1 + 0.04 =$
$= 0.14$

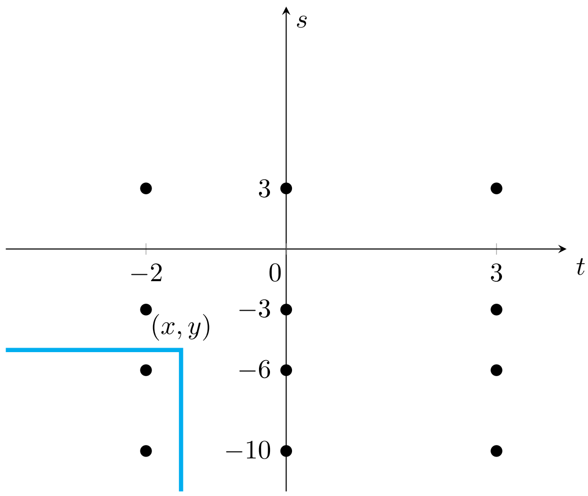


Рисунок 2.8

6. $D_{2,2} = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \begin{array}{c} 0 < x \leqslant 3, \\ -6 < y \leqslant -3 \end{array} \right\}$

$F_{\vec{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -10\} +$
$+ P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -10\} = 0.04 + 0.1 + 0.01 + 0.09 =$
$= 0.24$

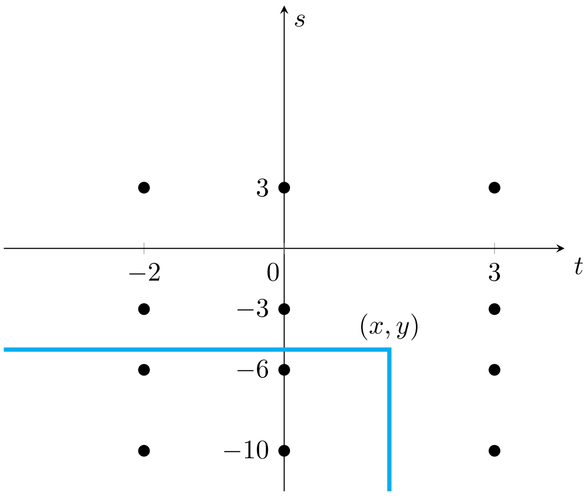


Рисунок 2.9

7. $D_{3,2} = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \begin{array}{c} x > 3, \\ -6 < y \leqslant -3 \end{array} \right\}$

$F_{\vec{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -10\} +$
$+ P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -10\} + P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -6\} +$
$+ P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -10\} = 0.04 + 0.1 + 0.01 + 0.09 + 0.14 + 0.09 = 0.47$

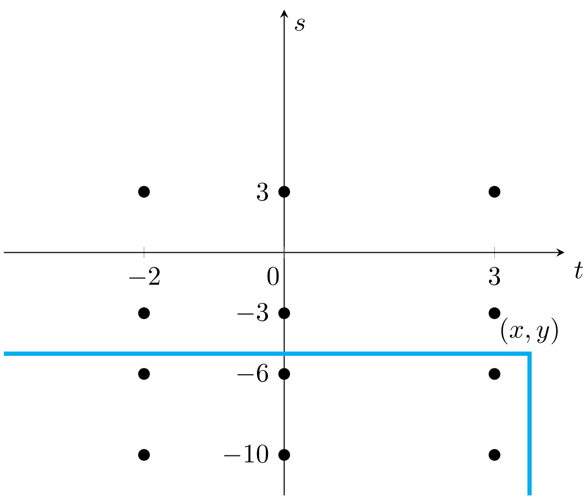


Рисунок 2.10

8. $D_{1,3} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{matrix} -2 < x \leqslant 0, \\ -6 < y \leqslant -3 \end{matrix} \right\}$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -3\} + P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} +$
$+ P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -10\} = 0.1 + 0.04 + 0.1 = 0.24$

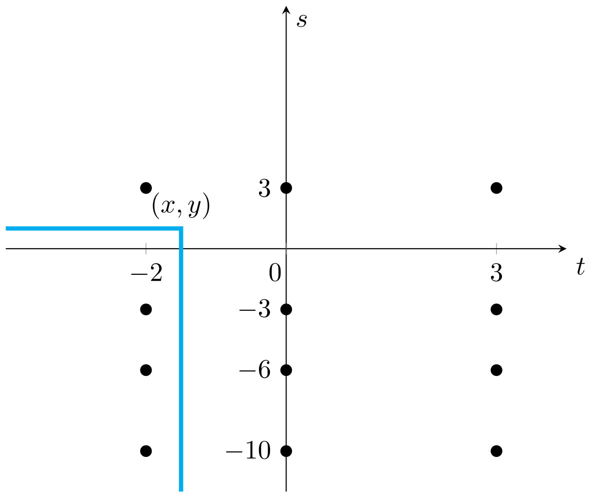


Рисунок 2.11

9. $D_{3,3} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{matrix} 0 < x \leqslant 3, \\ -6 < y \leqslant -3 \end{matrix} \right\}$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -3\} + P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} +$
$+ P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -10\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -3\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} +$
$+ P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -10\} = 0.1 + 0.04 + 0.1 + 0.09 + 0.01 + 0.09 = 0.43$

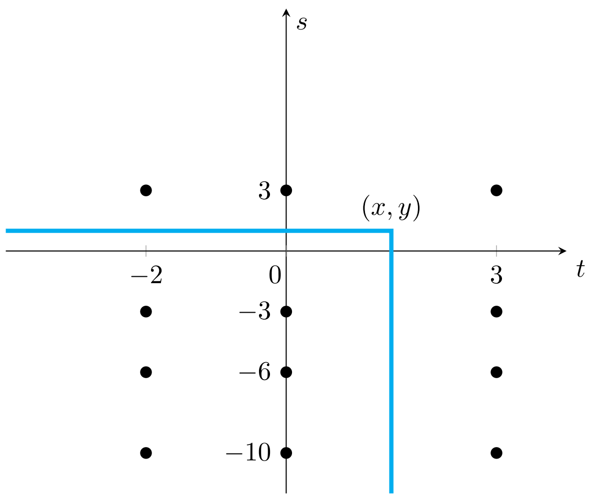


Рисунок 2.12

10. $D_{2,3} = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{c} x > 3, \\ -6 < y \leqslant -3 \end{array} \right\}$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -3\} + P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} +$
$+ P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -10\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -3\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} +$
$+ P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -10\} + P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -3\} + P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -6\} +$
$+ P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -10\} = 0.1 + 0.04 + 0.1 + 0.09 + 0.01 + 0.09 + 0.05 + 0.14 +$
$+ 0.09 = 0.71$

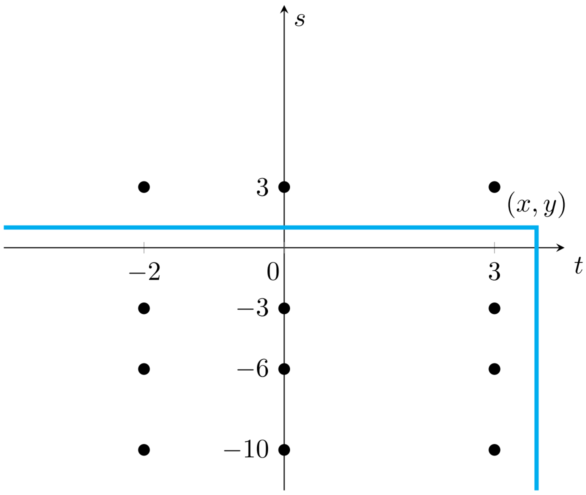


Рисунок 2.13

11. $D_{1,4} = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{c} -2 < x \leqslant 0, \\ y > 3 \end{array} \right\}$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = 3\} + P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -3\} +$
$+ P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -10\} = 0.08 + 0.1 + 0.04 + 0.1 =$
$= 0.32$

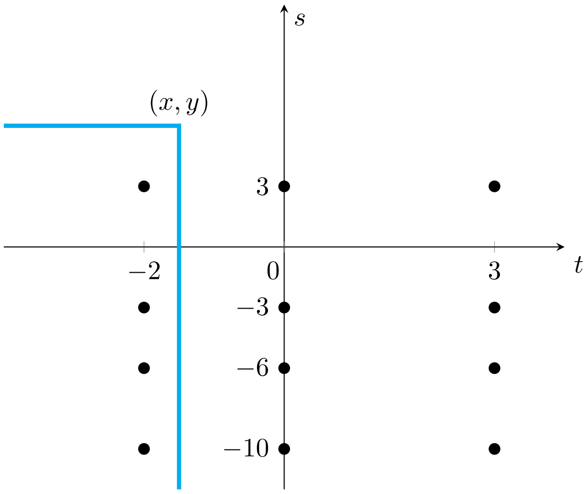


Рисунок 2.14

12. $D_{2,4} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 < x \leqslant 3, \\ y > 3 \end{array} \right\}$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = 3\} + P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -3\} +$$
$$+ P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -10\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 3\} +$$
$$+ P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -3\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -10\} =$$
$$= 0.08 + 0.1 + 0.04 + 0.1 + 0.05 + 0.09 + 0.01 + 0.09 = 0.56$$

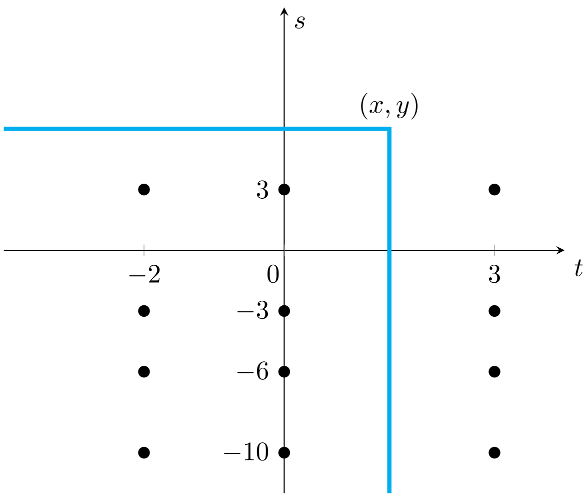


Рисунок 2.15

13. $D_{3,4} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{matrix} x > 3, \\ y > 3 \end{matrix} \right\}$

$F_{\bar{\xi}}(x,y) = P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = 3\} + P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -3\} +$
$+ P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -10\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 3\} +$
$+ P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -3\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 0, \xi_2 = -10\} +$
$+ P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 3\} + P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -3\} + P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -6\} +$
$+ P\{\xi_1 = 3, \xi_2 = -10\} = 0.08 + 0.1 + 0.04 + 0.1 + 0.05 + 0.09 +$
$+ 0.01 + 0.09 + 0.16 + 0.05 + 0.14 + 0.09 = 1$

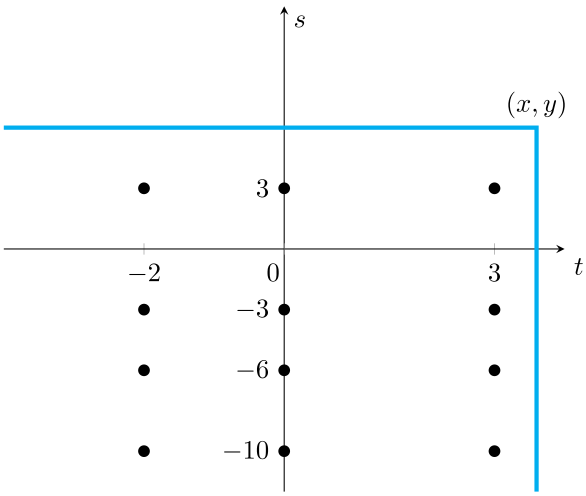


Рисунок 2.16

Отримали сумісну функцію розподілу, яку можна записати у вигляді таблиці:

$y \backslash x$	$x \leqslant -2$	$-2 < x \leqslant 0$	$0 < x \leqslant 3$	$x > 3$
$y \leqslant -10$	0	0	0	0
$-10 < y \leqslant -6$	0	0.1	0.19	0.28
$-6 < y \leqslant -3$	0	0.14	0.24	0.47
$-3 < y \leqslant 3$	0	0.24	0.43	0.71
$y > 3$	0	0.32	0.56	1

Також її можна записати у вигляді:

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{при } (x \leqslant -2) \vee (y \leqslant -10); \\ 0.1, & \text{при } (-2 < x \leqslant 0) \wedge (-10 < y \leqslant -6); \\ 0.19, & \text{при } (0 < x \leqslant 3) \wedge (-10 < y \leqslant -6); \\ 0.28, & \text{при } (x > 3) \wedge (-10 < y \leqslant -6); \\ 0.14, & \text{при } (-2 < x \leqslant 0) \wedge (-6 < y \leqslant -3); \\ 0.24, & \text{при } (0 < x \leqslant 3) \wedge (-6 < y \leqslant -3); \\ 0.47, & \text{при } (x > 3) \wedge (-6 < y \leqslant -3); \\ 0.24, & \text{при } (-2 < x \leqslant 0) \wedge (-3 < y \leqslant 3); \\ 0.43, & \text{при } (0 < x \leqslant 3) \wedge (-3 < y \leqslant 3); \\ 0.71, & \text{при } (x > 3) \wedge (3 < y \leqslant 3); \\ 0.32 & \text{при } (-2 < x \leqslant 0) \wedge (y > 3); \\ 0.56, & \text{при } (0 < x \leqslant 3) \wedge (y > 3); \\ 1, & \text{при } (x > 3) \wedge (y > 3); \end{cases}$$

Можна помітити що умови узгодженості $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_2}(y)$; $\lim\limits_{y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_1}(x)$ сумісної функції розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$ з функціями розподілу його координат виконуються.

4. Математичне сподівання координат та кореляційна матриця.

1. Знайдемо математичне сподівання координати ξ_1, яка має ряд розподілу:

ξ_1	-2	0	3
P	0.32	0.24	0.44

$$E\xi_1 = \sum_{k=1}^{3} x_k p_k = (-2)\cdot 0.32 + 0\cdot 0.24 + 3\cdot 0.44 = 0.68$$

Аналогічно для ξ_2 з рядом розподілу:

ξ_2	-10	-6	-3	3
P	0.28	0.19	0.24	0.29

$$E\xi_2 = \sum_{j=1}^{4} y_j p_j = (-10)\cdot 0.28 + (-6)\cdot 0.19 + (-3)\cdot 0.24 + 3\cdot 0.29 = -3.79$$

Центр розсіювання вектора $\vec{\xi}$ – точка $(0.68; -3.79)$

2. Побудуємо кореляційну та нормовану кореляційну матриці.

   Кореляційна матриця має вигляд:

$$K = \begin{pmatrix} D\xi_1 & K(\xi_1, \xi_2) \\ K(\xi_1, \xi_2) & D\xi_2 \end{pmatrix}$$

   де $D\xi_i$ - дисперсія випадкової величини $\xi_i, i = 1, 2$. $K(\xi_1, \xi_2)$ - кореляційний момент ξ_1 та ξ_2.

   $D\xi_1 = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = (-2)^2 \cdot 0.32 + 0^2 \cdot 0.24 + 3^2 \cdot 0.44 - (0.68)^2 = 4.7776$

   $D\xi_2 = E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2 = (-10)^2 \cdot 0.28 + (-6)^2 \cdot 0.19 + (-3)^2 \cdot 0.24 + 3^2 \cdot 0.29 =$
   $= 39.61$

   $K(\xi_1, \xi_2) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2$, обрахуємо $E\xi_1\xi_2$ окремо

   $E\xi_1\xi_2 = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} p_{k,j} = (-10) \cdot (-2) \cdot 0.1 + (-6) \cdot (-2) \cdot 0.04 +$
   $+ (-3) \cdot (-2) \cdot 0.1 + 3 \cdot (-2) \cdot 0.08 + (-10) \cdot 0 \cdot 0.09 + (-6) \cdot 0 \cdot 0.01 +$
   $+ (-3) \cdot 0 \cdot 0.09 + 3 \cdot 0 \cdot 0.05 + (-10) \cdot (3) \cdot 0.09 + (-6) \cdot 3 \cdot 0.14 +$
   $+ (-3) \cdot 3 \cdot 0.05 + 3 \cdot 3 \cdot 0.16 = 2.6 + 0 - 4.23 = -1.63$

   Тоді маємо:

   $K(\xi_1, \xi_2) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 = -1.63 - 0.68 \cdot (-3.79) = 0.9472$

   Отримуємо кореляційну матрицю:

$$\begin{pmatrix} 4.7776 & 0.9472 \\ 0.9472 & 39.61 \end{pmatrix}$$

   Оскільки $K(\xi_1, \xi_2) \neq 0$, то випадкові величини ξ_1 та ξ_2 є корельованими

   Перевіримо додатну визначеність K. За критерієм Сильвестра, для того щоб K була додатньо визначеною потрібно, щоб всі кутові мінори матриці K були строго додатні. Перший кутовий мінор дорівнює $4.7776 > 0$, другий дорівнює визначнику матриці:

$$\begin{vmatrix} 4.7776 & 0.9472 \\ 0.9472 & 39.61 \end{vmatrix} = 4.7776 \cdot 39.61 - 0.9472^2 = 188.343548 > 0$$

   Отже, оскільки всі кутові мінори матриці строго додатні, то за критерієм Сильвестра K – додатньо визначена.

Нормована кореляційна матриця має наступний вигляд:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r(\xi_1, \xi_2) \\ r(\xi_1, \xi_2) & 1 \end{pmatrix}$$

де $r(\xi_1, \xi_2)$ – коефіцієнт кореляції

$$r(\xi_1, \xi_2) = \frac{K(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{D\xi_1 \cdot D\xi_2}} = \frac{0.9472}{\sqrt{4.7776 \cdot 39.61}} \approx 0.069$$

Отримуємо:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.069 \\ 0.069 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Умовні ряди розподілу для кожної координати.

Обчислимо умовні ймовірності $P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\}$ та $P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = x_k\}$ за наступними формулами:

$$\begin{cases} P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\} = \frac{P\{\xi_1 = x_k, \xi_2 = y_k\}}{P\{\xi_2 = y_j\}} = \frac{p_{kj}}{p_k} \\ \\ P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = x_k\} = \frac{P\{\xi_1 = x_k, \xi_2 = y_k\}}{P\{\xi_1 = x_k\}} = \frac{p_{kj}}{p_j} \end{cases} \quad (k = \overline{1,3}, j = \overline{1,4})$$

Отримані результати занесемо до таблиць 2.1 та 2.2 (Умовні ряди розподілу ξ_1 та ξ_2 відповідно).

1. Для ξ_1:

$$P\{\xi_1 = -2/\xi_2 = -10\} = \frac{0.1}{0.28} = \frac{10}{28}$$

$$P\{\xi_1 = 0/\xi_2 = -10\} = \frac{0.09}{0.28} = \frac{9}{28}$$

$$P\{\xi_1 = 3/\xi_2 = -10\} = \frac{0.09}{0.28} = \frac{9}{28}$$

$$P\{\xi_1 = -2/\xi_2 = -6\} = \frac{0.04}{0.19} = \frac{4}{19}$$

$$P\{\xi_1 = 0/\xi_2 = -6\} = \frac{0.01}{0.19} = \frac{1}{19}$$

$$P\{\xi_1 = 3/\xi_2 = -6\} = \frac{0.14}{0.19} = \frac{14}{19}$$

$$P\{\xi_1 = -2/\xi_2 = -3\} = \frac{0.1}{0.24} = \frac{10}{24}$$

$$P\{\xi_1 = 0/\xi_2 = -3\} = \frac{0.09}{0.24} = \frac{9}{24}$$

$$P\{\xi_1 = 3/\xi_2 = -3\} = \frac{0.05}{0.24} = \frac{5}{24}$$

$$P\{\xi_1 = -2/\xi_2 = 3\} = \frac{0.08}{0.29} = \frac{8}{29}$$

$$P\{\xi_1 = 0/\xi_2 = 3\} = \frac{0.05}{0.29} = \frac{5}{29}$$

$$P\{\xi_1 = 3/\xi_2 = 3\} = \frac{0.16}{0.29} = \frac{16}{29}$$

Отже, отримали:

ξ_1	-2	0	3
$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = -10\}$	$\frac{10}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{9}{28}$
$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = -6\}$	$\frac{4}{19}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{14}{19}$
$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = -3\}$	$\frac{10}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{5}{24}$
$P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 3\}$	$\frac{8}{29}$	$\frac{5}{29}$	$\frac{16}{29}$

Таблиця 2.1 - Умовні ряди розподілу ξ_1

Перевірка:

(a) $P\{\xi_1 = -2/\xi_2 = -10\} + P\{\xi_1 = 0/\xi_2 = -10\} + P\{\xi_1 = 3/\xi_2 = -10\} =$
$= \frac{10}{28} + \frac{9}{28} + \frac{9}{28} = 1$

(b) $P\{\xi_1 = -2/\xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 0/\xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = 3/\xi_2 = -6\} =$
$= \frac{4}{19} + \frac{1}{19} + \frac{14}{19} = 1$

(c) $P\{\xi_1 = -2/\xi_2 = -3\} + P\{\xi_1 = 0/\xi_2 = -3\} + P\{\xi_1 = 3/\xi_2 = -3\} =$
$= \frac{10}{24} + \frac{9}{24} + \frac{5}{24} = 1$

(d) $P\{\xi_1 = -2/\xi_2 = 3\} + P\{\xi_1 = 0/\xi_2 = 3\} + P\{\xi_1 = 3/\xi_2 = 3\} =$

$$= \frac{8}{29} + \frac{5}{29} + \frac{16}{29} = 1$$

2. Для ξ_2:

$$P\{\xi_2 = -10/\xi_1 = -2\} = \frac{0.1}{0.32} = \frac{10}{32}$$

$$P\{\xi_2 = -6/\xi_1 = -2\} = \frac{0.04}{0.32} = \frac{4}{32}$$

$$P\{\xi_2 = -3/\xi_1 = -2\} = \frac{0.1}{0.32} = \frac{10}{32}$$

$$P\{\xi_2 = 3/\xi_1 = -2\} = \frac{0.08}{0.32} = \frac{8}{32}$$

$$P\{\xi_2 = -10/\xi_1 = 0\} = \frac{0.09}{0.24} = \frac{9}{24}$$

$$P\{\xi_2 = -6/\xi_1 = 0\} = \frac{0.01}{0.24} = \frac{1}{24}$$

$$P\{\xi_2 = -3/\xi_1 = 0\} = \frac{0.09}{0.24} = \frac{9}{24}$$

$$P\{\xi_2 = 3/\xi_1 = 0\} = \frac{0.05}{0.24} = \frac{5}{24}$$

$$P\{\xi_2 = -10/\xi_1 = 3\} = \frac{0.09}{0.44} = \frac{9}{44}$$

$$P\{\xi_2 = -6/\xi_1 = 3\} = \frac{0.14}{0.44} = \frac{14}{44}$$

$$P\{\xi_2 = -3/\xi_1 = 3\} = \frac{0.05}{0.44} = \frac{5}{44}$$

$$P\{\xi_2 = 3/\xi_1 = 3\} = \frac{0.16}{0.44} = \frac{16}{44}$$

Отже, отримали:

ξ_2	-10	-6	-3	3
$P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = -2\}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{8}{32}$
$P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = 0\}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{5}{24}$
$P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = 3\}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{14}{44}$	$\frac{5}{44}$	$\frac{16}{44}$

Таблиця 2.2 - Умовні ряди розподілу ξ_2

Перевірка:

(a) $P\{\xi_2 = -10/\xi_1 = -2\} + P\{\xi_2 = -6/\xi_1 = -2\} + P\{\xi_2 = -3/\xi_1 = -2\} +$

$+P\{\xi_2 = 3/\xi_1 = -2\} = \frac{10}{32} + \frac{4}{32} + \frac{10}{31} + \frac{8}{32} = 1$

(b) $P\{\xi_2 = -10/\xi_1 = 0\} + P\{\xi_2 = -6/\xi_1 = 0\} + P\{\xi_2 = -3/\xi_1 = 0\} +$

$+P\{\xi_2 = 3/\xi_1 = 0\} = \frac{9}{24} + \frac{1}{24} + \frac{9}{24} + \frac{5}{24} = 1$

(c) $P\{\xi_2 = -10/\xi_1 = 3\} + P\{\xi_2 = -6/\xi_1 = 3\} + P\{\xi_2 = -3/\xi_1 = 3\} +$

$+P\{\xi_2 = 3/\xi_1 = 3\} = \frac{9}{44} + \frac{14}{44} + \frac{5}{44} + \frac{16}{44} = 1$

6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою

Умовне математичне сподівання дискретної випадкової величини ξ_1 відносно значення $\xi_2 = y_j, j = \overline{1,4}$ обчислюється за формулою:

$$E(\xi_1/\xi_2 = y_j) = \sum_{k=1}^{3} x_k P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\}$$

Аналогічно формула для обчислення умовного математичного сподівання ξ_2 відносно значення $\xi_1 = x_k, k = \overline{1,3}$ має вигляд:

$$E(\xi_2/\xi_1 = x_k) = \sum_{j=1}^{4} y_j P\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = x_k\}$$

Далі розглядається випадкова величина $E(\xi_1/\xi_2)$, яка приймає значення $E(\xi_1/\xi_2 = y_j)$ з ймовірностями $P\{\xi_2 = y_j\}, j = \overline{1,4}$, та випадкова величина $E(\xi_2/\xi_1)$, що приймає значення $E(\xi_2/\xi_1 = x_k)$ з ймовірностями $P\{\xi_1 = x_k\}$, $k = \overline{1,3}$.

1. Побудуємо ряд розподілу $E(\xi_1/\xi_2)$, для цього спочатку обчислимо умовні математичні сподівання для ξ_1:

$E(\xi_1/\xi_2 = -10) = -\frac{20}{28} + 0 + \frac{27}{28} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

$E(\xi_1/\xi_2 = -6) = -\frac{8}{19} + 0 + \frac{42}{19} = \frac{34}{19}$

$E(\xi_1/\xi_2 = -3) = -\frac{20}{24} + 0 + \frac{15}{24} = -\frac{5}{24}$

$E\left(\xi_1/\xi_2=3\right)=-\frac{16}{29}+0+\frac{48}{29}=\frac{32}{29}$

Отже, отримали:

$E(\xi_1/\xi_2)$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{32}{29}$	$\frac{34}{19}$
P	0.24	0.28	0.29	0.19

Таблиця 2.3 – ряд розподілу $E(\xi_1/\xi_2)$

Виконаємо перевірку, враховуючи формулу повного математичного сподівання: $E(E(\xi_1/\xi_2))=E\xi_1$

$$E(E(\xi_1/\xi_2))=-\frac{5}{24}\cdot 0.24+\frac{1}{4}\cdot 0.28+\frac{32}{29}\cdot 0.29+\frac{34}{19}\cdot 0.19=-0.05+0.07+$$
$$+0.32+0.34=0.68=E\xi_1$$

2. Побудуємо ряд розподілу $E(\xi_2/\xi_1)$, для цього спочатку обчислимо умовні математичні сподівання для ξ_2:

$$E(\xi_2/\xi_1=-2)=-\frac{100}{32}-\frac{24}{32}-\frac{30}{32}+\frac{24}{32}=-\frac{65}{16}$$
$$E(\xi_2/\xi_1=0)=-\frac{90}{24}-\frac{6}{24}-\frac{27}{24}+\frac{15}{24}=-\frac{108}{24}=-\frac{9}{2}$$
$$E(\xi_2/\xi_1=3)=-\frac{90}{44}-\frac{84}{44}-\frac{15}{44}+\frac{48}{44}=-\frac{141}{44}$$

Отже, отримали:

$E(\xi_2/\xi_1)$	$-\frac{65}{16}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{141}{44}$
P	0.32	0.24	0.44

Таблиця 2.4 – ряд розподілу $E(\xi_2/\xi_1)$

Виконаємо перевірку, враховуючи формулу повного математичного сподівання: $E(E(\xi_2/\xi_1))=E\xi_2$

$$E(\xi_2/\xi_1)=-\frac{65}{16}\cdot 0.32-\frac{9}{2}\cdot 0.24-\frac{141}{44}\cdot 0.44=-1.3-1.08-1.41=-3.79=E\xi_2$$

Завдання 2 Вважаючи, що неперервний випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ рівномірно розподілений в заданій області знайти:

1. Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2.
2. Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ координат ξ_1 та ξ_2 відповідно.
3. Функцію розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ випадкового вектора.
4. Математичні сподівання координат та кореляційну матрицю.
5. Умовні щільності розподілу для кожної координати.
6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

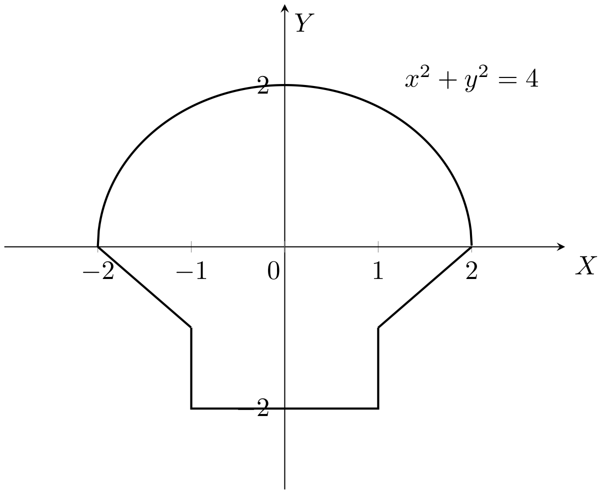


рис. 3.1

Розв'язання

Нехай неперервний випадковий вектор рівномірно розподілений в області G(див. рисунок 3.2). Фігура обмежена наступною кривою $y = \sqrt{4 - x^2}$, а також наступними прямими $x + y = -2, y - x = -2, x = -1, x = 1, y = -2$

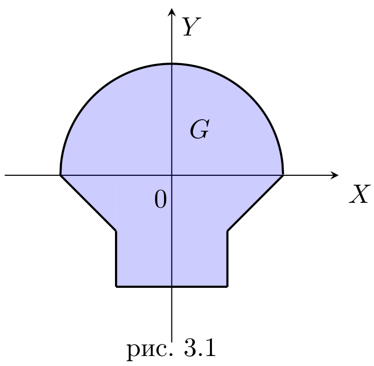


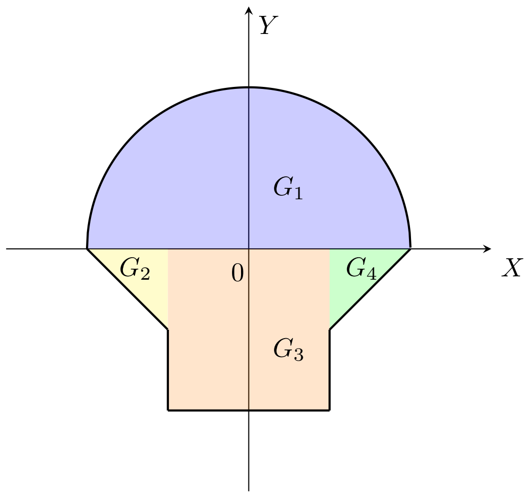
рис. 3.1

Саму область G можна подати у вигляді:

$$G = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{matrix} (((-2 \leqslant x \leqslant -1) \vee (1 \leqslant x \leqslant 2)) \wedge (|x| - 2 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2})) \vee \\ \vee((-1 \leqslant x \leqslant 1) \wedge (-2 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2})) \end{matrix} \right\}$$

1. Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2.

Обчислимо площу G, для цього розіб'ємо її на 4 області:



$$G_1 = \left\{(x,y) \middle| (-2 \leqslant x \leqslant 2) \wedge (0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2})\right\}$$

$$G_2 = \left\{(x,y) \middle| (-2 \leqslant x \leqslant -1) \wedge (-x - 2 \leqslant y \leqslant 0)\right\}$$

$$G_3 = \left\{(x,y) \middle| (-1 \leqslant x \leqslant 1) \wedge (-2 \leqslant y \leqslant 0)\right\}$$

$$G_4 = \left\{(x,y) \middle| (1 \leqslant x \leqslant 2) \wedge (x - 2 \leqslant y \leqslant 0)\right\}$$

Знайдемо площі цих областей:

1. G_1 - половина кола, заданого рівнянням $x^2 + y^2 = 4$, з рівняння маємо радіус кола: $R = 2$. Отримуємо: $S_{G_1} = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi = 2\pi$

2. G_2, G_4 - рівнобедрені прямокутні трикутники. Довжини катетів у них дорівнюють 1, тому $S_{G_2} = S_{G_4} = \frac{1}{2}$

3. G_3 - квадрат з довжиною сторони 2, тому $S_{G_3} = 2^2 = 4$

Отже маємо:

$$S_G = S_{G_1} + S_{G_2} + S_{G_3} + S_{G_4} = 2\pi + \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{2} = 5 + 2\pi$$

Оскільки випадковий вектор рівномірно розподілений в області G, то його щільність визначається наступною формулою:

$$f_{\vec{\xi}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_G}, (x,y) \in G \\ 0, (x,y) \notin G \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{5+2\pi}, (x,y) \in G \\ 0, (x,y) \notin G \end{cases}$$

Використавши дві наступні формули знайдемо щільніс першої та другої координати випадкового вектора $\vec{\xi}$:

$$f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dy \qquad f_{\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dx$$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \leqslant -2 \\ \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-x-2}^{\sqrt{4-x^2}} dy = \frac{1}{5+2\pi}\left(\sqrt{4-x^2} + x + 2\right), \quad -2 < x \leqslant -1 \\ \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-2}^{\sqrt{4-x^2}} dy = \frac{1}{5+2\pi}\left(\sqrt{4-x^2} + 2\right), \quad -1 < x \leqslant 1 \\ \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{x-2}^{\sqrt{4-x^2}} dy = \frac{1}{5+2\pi}\left(\sqrt{4-x^2} - x + 2\right), \quad 1 < x \leqslant 2 \\ 0, \quad x > 2 \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, \quad y \leqslant -2 \\ \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-1}^{1} dx = \frac{2}{5+2\pi}, \quad -2 < y \leqslant -1 \\ \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-y-2}^{y+2} dx = \frac{2y+4}{5+2\pi}, \quad -1 < y \leqslant 0 \\ \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx = \frac{2\sqrt{4-y^2}}{5+2\pi}, \quad 0 < y \leqslant 2 \\ 0, \quad y > 2 \end{cases}$$

Перевірка умови нормування $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y)dy = 1$

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x)dx = \frac{1}{5+2\pi}\int\limits_{-2}^{-1}\left(\sqrt{4-x^2}+x+2\right)+\frac{1}{5+2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt{4-x^2}+2\right)+\frac{1}{5+2\pi}\int\limits_{1}^{2}\left(\sqrt{4-x^2}-x+2\right) =$

$= \frac{1}{5+2\pi}\left(\int\limits_{-2}^{-1}\sqrt{4-x^2}dx + \int\limits_{-2}^{-1}xdx + \int\limits_{-2}^{-1}2dx + \int\limits_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}dx + \int\limits_{-1}^{1}2dx + \int\limits_{1}^{2}\sqrt{4-x^2}dx - \int\limits_{1}^{2}xdx + \int\limits_{1}^{2}2dx\right) =$

$= \frac{1}{5+2\pi}\left(\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{-1} + 2x\Big|_{-2}^{-1} + \frac{2\pi+\sqrt{3}}{3} + 2x\Big|_{-1}^{1} + \frac{4\pi-\sqrt{3}}{6} - \frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{2} + 2x\Big|_{1}^{2}\right) =$

$= \frac{1}{5+2\pi}\left(\frac{4\pi-\sqrt{3}+4\pi+2\sqrt{3}+4\pi-\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{2} + 2 + 4 - \frac{3}{2} + 2\right) = \frac{1}{5+2\pi}(2\pi+5) = 1$

Зауваження. Визначені інтеграли: $\int\limits_{-2}^{1}\sqrt{4-x^2}dx, \int\limits_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}dx, \int\limits_{1}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$ розв'язані в додатку, сторінка

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y)dy = \int\limits_{-2}^{-1}\frac{2dy}{5+2\pi}+\int\limits_{-1}^{0}\frac{(2y+4)dy}{5+2\pi}+\int\limits_{0}^{2}\frac{2\sqrt{4-y^2}dy}{5+2\pi} = \frac{2}{5+2\pi}\int\limits_{-2}^{-1}dy+\frac{2}{5+2\pi}\int\limits_{-1}^{0}ydy+$
$\frac{2}{5+2\pi}\int\limits_{-1}^{0}2dy + \frac{2}{5+2\pi}\int\limits_{0}^{2}\sqrt{4-y^2}dy = \frac{2}{5+2\pi}\left(y\Big|_{-2}^{-1} + \frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + 2y\Big|_{-1}^{0} + \pi\right) =$
$= \frac{2}{5+2\pi}\left(3 - \frac{1}{2} + \pi\right) = \frac{2}{5+2\pi}\cdot\frac{5+2\pi}{2} = 1$

Зауваження. Визначений інтеграл: $\int\limits_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dy$ розв'язаний в додатку, сторінка

2. Функції розподілу координат ξ_1 та ξ_2.

Нехай $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ – функції розподілу координат вектора $\vec{\xi}$. Застосуємо формули:

$$\begin{cases} F_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_{\xi_1}(t)dt \\ F_{\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi_2}(s)ds \end{cases}$$

$$
F_{\xi_1}(x) = \begin{cases}
\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0, \quad x \leqslant -2 \\[2ex]
\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt + \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-2}^{x} \left(\sqrt{4-t^2} + t + 2\right) dt = \left|[1]\right| = \frac{1}{5+2\pi} \left((\sin(2\arcsin(\frac{t}{2})) + 2\arcsin(\frac{t}{2}))\Big|_{-2}^{x} \right) + \\
+ \frac{1}{5+2\pi} \left(\frac{t^2}{2}\Big|_{-2}^{x} + 2t\Big|_{-2}^{x} \right) = \frac{1}{5+2\pi} \left(\sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2}) + \pi)\right) + \\
+ \frac{1}{5+2\pi} \left(\frac{x^2}{2} - 2 + 2x + 4 \right) = \\
= \frac{1}{5+2\pi} \left(\sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2}) + \pi + \frac{x^2}{2} + 2 + 2x) \right), -2 < x \leqslant -1 \\[2ex]
\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt + \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-2}^{-1} \left(\sqrt{4-t^2} + t + 2\right) dt + \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-1}^{x} \left(\sqrt{4-t^2} + 2\right) dt = [1] = \\
= \frac{1}{5+2\pi} \left((\sin(2\arcsin(\frac{t}{2})) + 2\arcsin(\frac{t}{2}))\Big|_{-2}^{-1} + \frac{t^2}{2}\Big|_{-2}^{-1} + 2t\Big|_{-2}^{-1} \right) + \\
+ \frac{1}{5+2\pi} \left((\sin(2\arcsin(\frac{t}{2})) + 2\arcsin(\frac{t}{2}))\Big|_{-1}^{x} + 2t\Big|_{-1}^{x} \right) = \\
= \frac{1}{5+2\pi} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} + 2x + 2 \right) = \\
= \frac{1}{5+2\pi} \left(\pi + \frac{5}{2} + 2x + \sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2}) \right), -1 < x \leqslant 1 \\[2ex]
\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt + \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-2}^{-1} \left(\sqrt{4-t^2} + t + 2\right) dt + \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(\sqrt{4-t^2} + 2\right) dt + \int\limits_{1}^{x} (\sqrt{4-t^2} - t + 2) dt = \\
= [1] = \frac{1}{5+2\pi} \left((\sin(2\arcsin(\frac{t}{2})) + 2\arcsin(\frac{t}{2}))\Big|_{-2}^{-1} + \frac{t^2}{2}\Big|_{-2}^{-1} + 2t\Big|_{-2}^{-1} \right) + \\
+ \frac{1}{5+2\pi} \left((\sin(2\arcsin(\frac{t}{2})) + 2\arcsin(\frac{t}{2}))\Big|_{-1}^{1} + 2t\Big|_{-1}^{1} \right) + \\
+ \frac{1}{5+2\pi} \left((\sin(2\arcsin(\frac{t}{2})) + 2\arcsin(\frac{t}{2}))\Big|_{1}^{x} - \frac{t^2}{2}\Big|_{1}^{x} + 2t\Big|_{1}^{x} \right) = \\
= \frac{1}{5+2\pi} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{5+2\pi} \left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} + 4 \right) + \\
+ \frac{1}{5+2\pi} \left(\sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + 2x - 2 \right) = \\
= \frac{1}{5+2\pi} \left(\pi + 3 - \frac{x^2}{2} + 2x + (\sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2}) \right), 1 < x \leqslant 2 \\[2ex]
\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt + \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-2}^{-1} \left(\sqrt{4-t^2} + t + 2\right) dt + \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(\sqrt{4-t^2} + 2\right) dt + \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{1}^{x} (\sqrt{4-t^2} - t + 2) dt + \\
+ \int\limits_{2}^{x} 0dt = [1] = \frac{1}{5+2\pi} \left((\sin(2\arcsin(\frac{t}{2})) + 2\arcsin(\frac{t}{2}))\Big|_{-2}^{-1} + \frac{t^2}{2}\Big|_{-2}^{-1} + 2t\Big|_{-2}^{-1} \right) + \\
+ \frac{1}{5+2\pi} \left((\sin(2\arcsin(\frac{t}{2})) + 2\arcsin(\frac{t}{2}))\Big|_{-1}^{1} + 2t\Big|_{-1}^{1} \right) + \\
+ \frac{1}{5+2\pi} \left((\sin(2\arcsin(\frac{t}{2})) + 2\arcsin(\frac{t}{2}))\Big|_{1}^{2} - \frac{t^2}{2}\Big|_{1}^{2} + 2t\Big|_{1}^{2} \right) = \\
= \frac{1}{5+2\pi} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{5+2\pi} \left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} + 4 \right) + \frac{1}{5+2\pi} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \\
= \frac{1}{5+2\pi} (2\pi + 5) = 1, x > 2
\end{cases}
$$

Отже:

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \leqslant -1 \\ \frac{1}{5+2\pi}\left(\sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2}) + \pi + \frac{x^2}{2} + 2 + 2x)\right), -2 < x \leqslant -2 \\ \frac{1}{5+2\pi}\left(\pi + \frac{5}{2} + 2x + \sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2})\right), -1 < x \leqslant 1 \\ \frac{1}{5+2\pi}\left(\pi + 3 - \frac{x^2}{2} + 2x + (\sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2})\right), 1 < x \leqslant 2 \\ 1, \quad x > 2 \end{cases}$$

Перевірка:

Оскільки функція розподілу неперервної випадкової величини є неперервною, тому перевіримо неперервність отриманої функції розподілу. $D(F_{\xi_1}(x)) = \mathbb{R}$. Перевіримо неперервніть функції розподілу у ймовірних точках розриву(точках стику кривих, тобто точках з абсцисами $x = -2, x = -1$, $x = 1, x = 2$):

1. $x = -2$:

   $$\lim_{x\to -2-0} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to -2+0} 0 = 0$$

   $$\lim_{x\to -2+0} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 2-0} = \frac{1}{5+2\pi}\left(\sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2}) + \pi + \frac{x^2}{2} + 2 + 2x)\right) = \frac{1}{5+2\pi}\cdot\left(\sin(2\cdot(-\frac{\pi}{2})) - 2\cdot\frac{\pi}{2} + 2 + 2 - 4\right) = \frac{1}{5+2\pi}\cdot 0 = 0$$

   $\lim\limits_{x\to -2-0} F_{\xi_1}(x) = \lim\limits_{x\to -2+0} F_{\xi_1}(x)$, отже, точка $(-2; 0)$ - не є точкою розриву

2. $x = -1$:

   $$\lim_{x\to -1-0} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to -1-0} \frac{1}{5+2\pi}\left(\sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2}) + \pi + \frac{x^2}{2} + 2 + 2x)\right) =$$
   $$= \frac{1}{5+2\pi}\left(\sin(-2\cdot\frac{\pi}{6}) - 2\cdot\frac{\pi}{6} + \pi + \frac{1}{2} + 2 - 2\right) = \frac{1}{5+2\pi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\right)$$
   $$\lim_{x\to -1+0} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to -1+0} \frac{1}{5+2\pi}\left(\pi + \frac{5}{2} + 2x + \sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2})\right) =$$
   $$= \frac{1}{5+2\pi}\left(\pi + \frac{5}{2} - 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{5+2\pi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

   $\lim\limits_{x\to -1-0} F_{\xi_1}(x) = \lim\limits_{x\to -1+0} F_{\xi_1}(x)$, отже, точка $\left(-1; \frac{1}{5+2\pi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\right)\right)$ - не є точкою розриву

3. x = 1:

$$\lim_{x\to 1-0} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 1-0} \tfrac{1}{5+2\pi}\left(\pi + \tfrac{5}{2} + 2x + \sin(2\arcsin(\tfrac{x}{2})) + 2\arcsin(\tfrac{x}{2})\right) =$$
$$= \tfrac{1}{5+2\pi}\left(\pi + \tfrac{5}{2} + 2 + \sin(\tfrac{\pi}{3}) + \tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{5+2\pi}\left(\tfrac{4\pi}{3} + \tfrac{9}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to 1+0} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 1+0} \tfrac{1}{5+2\pi}\left(\pi + 3 - \tfrac{x^2}{2} + 2x + (\sin(2\arcsin(\tfrac{x}{2})) + 2\arcsin(\tfrac{x}{2})\right) =$$
$$= \tfrac{1}{5+2\pi}\left(\pi + 3 - \tfrac{1}{2} + 2 + \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{5+2\pi}\left(\tfrac{4\pi}{3} + \tfrac{9}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\lim\limits_{x\to 1-0} F_{\xi_1}(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} F_{\xi_1}(x)$, отже, точка $\left(1; \tfrac{1}{5+2\pi}\left(\tfrac{4\pi}{3} + \tfrac{9}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ - не є точкою розриву

4. x = 2:

$$\lim_{x\to 2-0} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 2-0} \tfrac{1}{5+2\pi}\left(\pi + 3 - \tfrac{x^2}{2} + 2x + (\sin(2\arcsin(\tfrac{x}{2})) + 2\arcsin(\tfrac{x}{2})\right) =$$
$$= \tfrac{1}{5+2\pi}(\pi + 3 - 2 + 4 + 0 + \pi) = \tfrac{1}{5+2\pi}(5 + 2\pi) = 1$$

$$\lim_{x\to 2+0} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 2+0} 1 = 1$$

$\lim\limits_{x\to 2-0} F_{\xi_1}(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} F_{\xi_1}(x)$, отже, точка $(2; 1)$ - не є точкою розриву

У всіх інших точках $F_{\xi_1}(x)$ - неперервна, оскільки в цих точках вона задана неперервними функціями.

Також перевіримо поведінку функції розподілу при $x \to -\infty$, та $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to -\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to +\infty} 1 = 1$$

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{y} 0ds = 0, y \leqslant -2 \\ \int\limits_{-\infty}^{-2} 0ds + \int\limits_{-2}^{y} \frac{2}{5+2\pi} ds = \frac{2(y+2)}{5+2\pi}, -2 < y \leqslant -1 \\ \int\limits_{-\infty}^{-2} 0ds + \int\limits_{-2}^{-1} \frac{2}{5+2\pi} ds + \int\limits_{-1}^{y} \frac{2s+4}{5+2\pi} ds = \frac{2}{5+2\pi} + \frac{2}{5+2\pi} \left(\int\limits_{-1}^{y} sds + \int\limits_{-1}^{y} 2dy \right) = \\ = \frac{2}{5+2\pi} + \frac{2}{5+2\pi} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} + 2y + 2 \right) = \frac{2}{5+2\pi} \left(\frac{y^2}{2} + \frac{5}{2} + 2y \right), -1 < y \leqslant 0 \\ \int\limits_{-\infty}^{-2} 0ds + \int\limits_{-2}^{-1} \frac{2}{5+2\pi} ds + \int\limits_{-1}^{0} \frac{2s+4}{5+2\pi} ds + \frac{2}{5+2\pi} \int\limits_{0}^{y} \sqrt{4-s^2} ds = [1] = \\ = \frac{2}{5+2\pi} + \frac{3}{5+2\pi} + \frac{2}{5+2\pi} \left(\sin(2\arcsin(\frac{s}{2})) + 2\arcsin(\frac{s}{2}) \Big|_0^y \right) = \\ = \frac{1}{5+2\pi} \left(5 + 2\sin(2\arcsin(\frac{y}{2})) + 4\arcsin(\frac{y}{2}) \right), 0 < y \leqslant 2 \\ \int\limits_{-\infty}^{-2} 0ds + \int\limits_{-2}^{-1} \frac{2}{5+2\pi} ds + \int\limits_{-1}^{0} \frac{2s+4}{5+2\pi} ds + \frac{2}{5+2\pi} \int\limits_{0}^{2} \sqrt{4-y^2} dy + \int\limits_{2}^{y} 0ds = [1] = \\ = \frac{2}{5+2\pi} + \frac{3}{5+2\pi} + \frac{2}{5+2\pi} \left(\sin(2\arcsin(\frac{s}{2})) + 2\arcsin(\frac{s}{2}) \Big|_0^2 \right) = \\ = \frac{1}{5+2\pi} \left(5 + 2\sin(2\arcsin(\frac{s}{2})) + 4\arcsin(\frac{s}{2}) \right) = \frac{1}{5+2\pi}(5+2\pi) = 1, y > 2 \end{cases}$$

Отже:

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, y \leqslant -2 \\ \frac{2(y+2)}{5+2\pi}, -2 < y \leqslant -1 \\ \frac{2}{5+2\pi} \left(\frac{y^2}{2} + \frac{5}{2} + 2y \right), -1 < y \leqslant 0 \\ \frac{1}{5+2\pi} \left(5 + 2\sin(2\arcsin(\frac{y}{2})) + 4\arcsin(\frac{y}{2}) \right), 0 < y \leqslant 2 \\ 1, y > 2 \end{cases}$$

Перевірка:

Оскільки функція розподілу неперервної випадкової величини є неперервною, тому перевіримо неперервність отриманої функції розподілу. $D(F_{\xi_2}(y)) = \mathbb{R}$. Перевіримо неперервніть функції розподілу у ймовірних точках розриву(точках стику кривих, тобто точках з абсцисами $y = -2, y = -1, y = 0, y = 2$):

1. $y = -2$

   $$\lim_{y \to -2-0} F_{\xi_2}(y) = \lim_{y \to -2-0} 0 = 0$$

$\lim\limits_{y\to -2+0} F_{\xi_2}(y) = \lim\limits_{y\to -2+0} \frac{2(y+2)}{5+2\pi} = \frac{0}{5+2\pi} = 0$

$\lim\limits_{y\to -2-0} F_{\xi_2}(y) = \lim\limits_{y\to -2+0} F_{\xi_2}(y)$, тому точка $(-2, 0)$ не є точкою розриву

2. $y = -1$

   $\lim\limits_{y\to -1-0} F_{\xi_2}(y) = \lim\limits_{y\to -2-0} \frac{2(y+2)}{5+2\pi} = \frac{2}{5+2\pi}$

   $\lim\limits_{y\to -1+0} F_{\xi_2}(y) = \lim\limits_{y\to -2+0} \frac{2}{5+2\pi}\left(\frac{y^2}{2} + \frac{5}{2} + 2y\right) = \frac{2}{5+2\pi}$

   $\lim\limits_{y\to -1-0} F_{\xi_2}(y) = \lim\limits_{y\to -1+0} F_{\xi_2}(y)$, тому точка $(-1, \frac{2}{5+2\pi})$ не є точкою розриву

3. $y = 0$

   $\lim\limits_{y\to 0-0} F_{\xi_2}(y) = \lim\limits_{y\to 0-0} \frac{2}{5+2\pi}\left(\frac{y^2}{2} + \frac{5}{2} + 2y\right) = \frac{5}{5+2\pi}$

   $\lim\limits_{y\to 0+0} F_{\xi_2}(y) = \lim\limits_{y\to 0+0} \frac{1}{5+2\pi}\left(5 + 2\sin(2\arcsin(\frac{s}{2})) + 2\arcsin(\frac{s}{2})\right) = \frac{5}{5+2\pi}$

   $\lim\limits_{y\to 0-0} F_{\xi_2}(y) = \lim\limits_{y\to 0+0} F_{\xi_2}(y)$, тому точка $(0, \frac{5}{5+2\pi})$ не є точкою розриву

4. $y = 2$

   $\lim\limits_{y\to 2-0} F_{\xi_2}(y) = \lim\limits_{y\to 2-0} \frac{1}{5+2\pi}\left(5 + 2\sin(2\arcsin(\frac{s}{2})) + 2\arcsin(\frac{s}{2})\right) =$
   $= \frac{1}{5+2\pi}(5+2\pi) = 1$

   $\lim\limits_{y\to 2+0} F_{\xi_2}(y) = \lim\limits_{y\to 2+0} 1 = 1$

   $\lim\limits_{y\to 2-0} F_{\xi_2}(y) = \lim\limits_{y\to 2+0} F_{\xi_2}(y)$, тому точка $(2, 1)$ не є точкою розриву

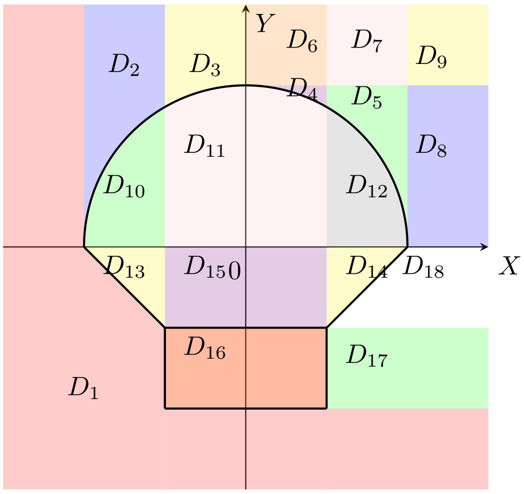
   Також перевіримо поведінку функції розподілу при $x \to -\infty$, та $x \to +\infty$

   $\lim\limits_{x\to -\infty} F_{\xi_1}(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} 0 = 0$

   $\lim\limits_{x\to +\infty} F_{\xi_1}(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 1 = 1$

3. Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$

Координатну площину xOy розіб'ємо на області які між собою попарно не перетинаються та в об'єднанні дають $\mathbb{R}^2$



$$D_1 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; ((x \leqslant -2) \vee (y \leqslant -2)) \vee ((-2 < x \leqslant -1) \wedge (-2 < y \leqslant -2 - x)) \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; (-2 < x \leqslant -1) \wedge (y \geqslant \sqrt{4 - x^2}) \right\}$$

$$D_3 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; (-1 < x \leqslant 0) \wedge (y \geqslant \sqrt{4 - x^2}) \right\}$$

$$D_4 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; (0 < x \leqslant 1) \wedge (\sqrt{4 - x^2}) \leqslant y \leqslant 2 \right\}$$

$$D_5 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; (1 < x \leqslant 2) \wedge (\sqrt{4 - x^2}) \leqslant y \leqslant 2 \right\}$$

$$D_6 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; (0 < x \leqslant 1) \wedge (y > 2) \right\}$$

$$D_7 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; (1 < x \leqslant 2) \wedge (y > 2) \right\}$$

$$D_8 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; (x > 2) \wedge (0 \leqslant y < 2) \right\}$$

$$D_9 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; (x > 2) \wedge (y \geqslant 2) \right\}$$

$$D_{10} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; (-2 < x \leqslant -1) \wedge (0 \leqslant y < \sqrt{4 - x^2}) \right\}$$

$$D_{11} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; (-1 < x \leqslant 1) \wedge (0 \leqslant y < \sqrt{4 - x^2}) \right\}$$

$$D_{12} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; (1 < x \leqslant 2) \wedge (0 \leqslant y < \sqrt{4 - x^2}) \right\}$$

$$D_{13} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; (-2 < x \leqslant -1) \wedge (-x - 2 < y < 0) \right\}$$

$$D_{14} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; (-1 < x \leqslant 2) \wedge (x - 2 < y < 0) \right\}$$

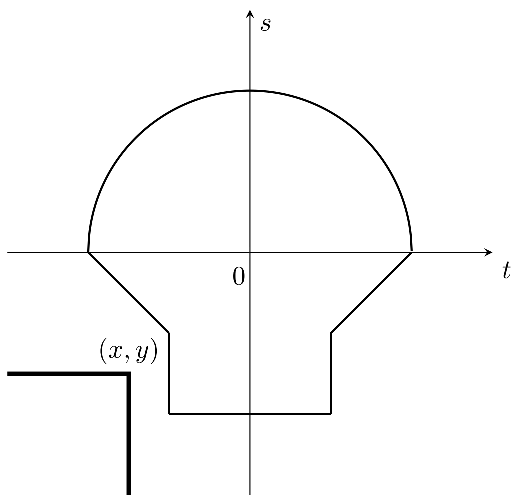
$$D_{15} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; (-1 < x \leqslant 1) \wedge (-1 < y < 0) \right\}$$

$$D_{16} = \left\{(x,y) \;\middle|\; (-1 < x \leqslant 1) \wedge (-2 < y \leqslant -1)\right\}$$
$$D_{17} = \left\{(x,y) \;\middle|\; (x > 1) \wedge (-2 < y \leqslant -1)\right\}$$
$$D_{18} = \left\{(x,y) \;\middle|\; (x > 1) \wedge ((-1 < y < 0) \vee (-1 < y \leqslant x-2))\right\}$$

Перейдемо до системи координат tOs, оскільки x та y тут є параметрами. Позначимо:

$$G_i = G \cap \{(t,s)|(t < x) \wedge (s < y)\}$$

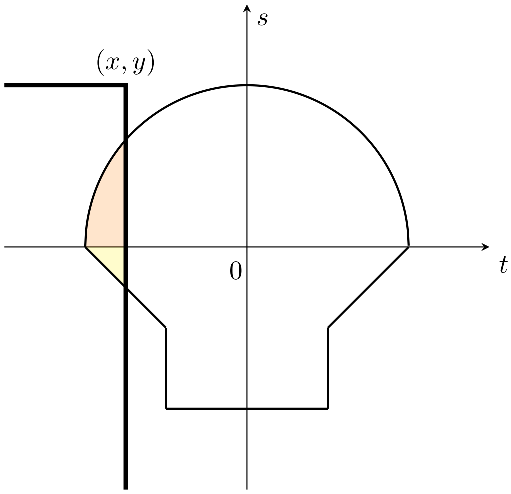
1. $(x,y) \in D_1$



$G_1 = \varnothing$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} 0 ds = 0$

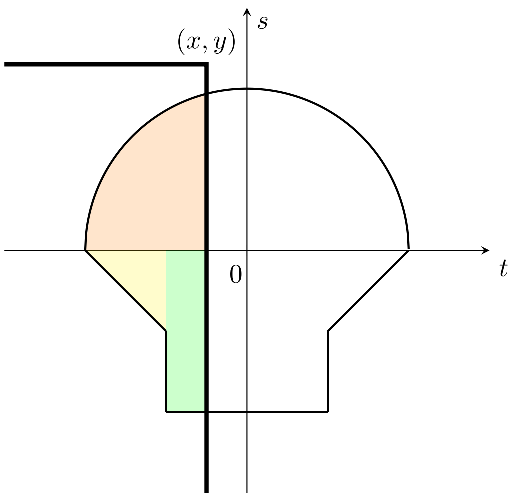
2. $(x,y) \in D_2$



$$G_2 = G_2' \cup G_2'' = \left\{ (t,s) \;\middle|\; \begin{matrix} (-2 < t \leqslant x) \wedge \\ (0 \leqslant s < \sqrt{4-x^2}) \end{matrix} \right\} \cup \left\{ (t,s) \;\middle|\; \begin{matrix} (-2 < t \leqslant x) \wedge \\ (\leqslant s < 0) \end{matrix} \right\}$$

$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \frac{1}{5+2\pi} \iint_{G_2} = \frac{1}{5+2\pi} \iint_{G_2'} dtds + \frac{1}{5+2\pi} \iint_{G_2''} dtds = \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-2}^{x} dt \int\limits_{-2-t}^{0} ds +$
$\frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-2}^{x} dt \int\limits_{0}^{\sqrt{4-t^2}} ds = \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-2}^{x} (2+t)dt + \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{\sqrt{4-x^2}}^{x} \sqrt{4-t^2} dt = +[1] =$
$\frac{1}{5+2\pi} \left(2x + \frac{x^2}{2} + 2 \right) + \frac{1}{5+2\pi} \left(\sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2}) + \pi \right)$

3. $(x,y) \in D_3$



$$G_3 = G_3' \cup G_3'' \cup G_3''' = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{matrix} (-2 < t \leqslant 0) \wedge \\ (0 \leqslant s \leqslant \sqrt{4-x^2}) \end{matrix} \right\} \cup \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{matrix} (-2 < t \leqslant -1) \wedge \\ (-2-x \leqslant s \leqslant 0) \end{matrix} \right\} \cup$$

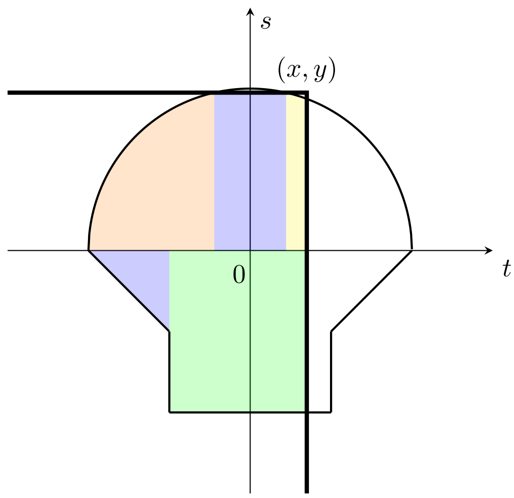
$$\cup \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} (-1 < t \leqslant 0) \wedge \\ (-2 \leqslant s \leqslant 0) \end{array} \right\}$$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) \;=\; \tfrac{1}{5+2\pi} \iint_{G_3} \;=\; \tfrac{1}{5+2\pi} \left(\iint_{G_3'} dtds + \iint_{G_3''} dtds + \iint_{G_3'''} dtds \right) \;=$$

$$\tfrac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-2}^{x} dt \int\limits_{0}^{\sqrt{4-t^2}} ds + \quad + \tfrac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-2}^{-1} dt \int\limits_{-t-2}^{0} ds + \tfrac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-1}^{x} dt \int\limits_{-2}^{0} ds = \tfrac{1}{5+2\pi} \left(\sin(2 \arcsin(\tfrac{x}{2})) + 2 \arcsin(\tfrac{x}{2}) + \pi \right)$$

$$+ \tfrac{0.5}{5+2\pi} + \tfrac{2(x+1)}{5+2\pi}$$

4. $(x, y) \in D_4$



$$G_4 = G_4^{(1)} \cup G_4^{(2)} \cup G_4^{(3)} \cup G_4^{(4)} \cup G_4^{(5)} = \left\{ (t,s) \;\middle|\; \begin{array}{c} (-2 < t \leqslant -\sqrt{4-y^2}) \wedge \\ (0 \leqslant s \leqslant \sqrt{4-t^2}) \end{array} \right\} \cup$$

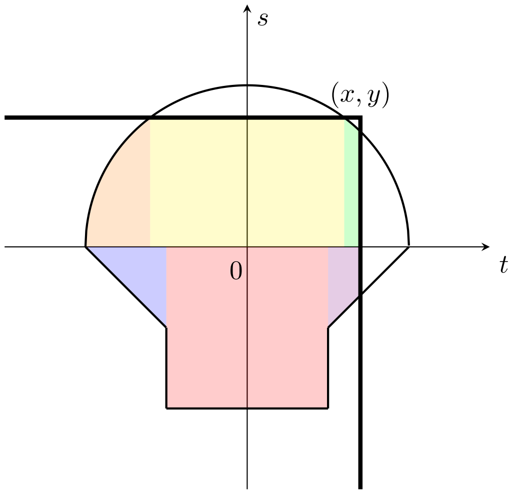
$$\cup \left\{ (t,s) \;\middle|\; \begin{array}{c} (-\sqrt{4-y^2} < t \leqslant \sqrt{4-y^2}) \wedge \\ (0 \leqslant s \leqslant y) \end{array} \right\} \cup \left\{ (t,s) \;\middle|\; \begin{array}{c} (\sqrt{4-y^2} < t \leqslant x) \wedge \\ (0 \leqslant s \leqslant \sqrt{4-t^2}) \end{array} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (t,s) \;\middle|\; \begin{array}{c} (-2 < t \leqslant -1) \wedge \\ (-t-2 < s \leqslant 0) \end{array} \right\} \cup \left\{ (t,s) \;\middle|\; \begin{array}{c} (-1 < t \leqslant x) \wedge \\ (-2 < s \leqslant 0) \end{array} \right\}$$

$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \frac{1}{5+2\pi} \iint_{G_4} = \frac{1}{5+2\pi} \Bigg(\iint_{G_4^{(1)}} dtds + \iint_{G_4^{(2)}} dtds + \iint_{G_4^{(3)}} dtds + \iint_{G_4^{(4)}} dtds + \iint_{G_4^{(5)}} dtds \Bigg) = \frac{1}{5+2\pi} \Bigg(\int_{-2}^{-\sqrt{4-y^2}} dt \int_{0}^{\sqrt{4-t^2}} ds + \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dt \int_{0}^{y} ds + \int_{\sqrt{4-y^2}}^{x} dt \int_{0}^{\sqrt{4-t^2}} ds + \int_{-2}^{-1} ds \int_{-t-2}^{0} ds + \int_{-1}^{x} dt \int_{-2}^{0} ds \Bigg) = \frac{1}{5+2\pi} \Bigg(\int_{-2}^{-\sqrt{4-y^2}} \sqrt{4-t^2} dt + 2y\sqrt{4-y^2} + \int_{\sqrt{4-y^2}}^{x} \sqrt{4-t^2} dt + \frac{1}{2} + 2(x+1) \Bigg) = [1] = \frac{1}{5+2\pi} \Bigg(\sin\left(2\arcsin(-\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})\right) + 2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + \pi + 2y\sqrt{4-y^2} + \sin\left(2\arcsin(\tfrac{x}{2})\right) + 2\arcsin(\tfrac{x}{2}) - \sin(2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})) - 2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}) + \frac{1}{2} + 2(x+1) \Bigg) = \frac{1}{5+2\pi} \Bigg(2\sin\left(2\arcsin(-\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})\right) + 4\arcsin\left(-\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + 2\sin\left(2\arcsin(\tfrac{x}{2})\right) + 2\arcsin(\tfrac{x}{2}) + \pi + 2y\sqrt{4-y^2} +$$

$\frac{1}{2} + 2(x+1)\Bigg)$

5. $(x, y) \in D_5$



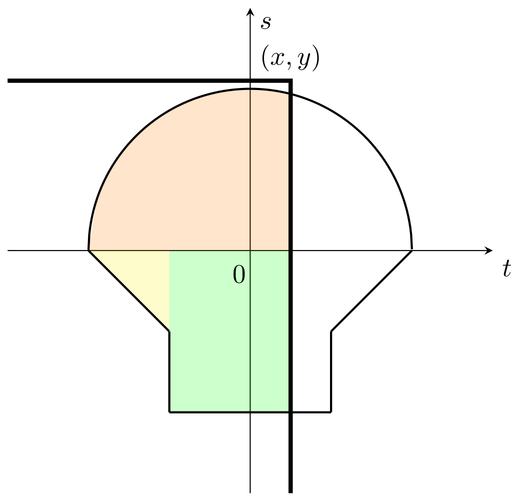
$$G_5 = G_5^{(1)} \cup G_5^{(2)} \cup G_5^{(3)} \cup G_5^{(4)} \cup G_5^{(5)} \cup G_5^{(6)} = \left\{ (t,s) \;\middle|\; \begin{array}{c} (-2 < t \leqslant -\sqrt{4-y^2}) \wedge \\ (0 \leqslant s \leqslant \sqrt{4-t^2}) \end{array} \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ (t,s) \;\middle|\; \begin{array}{c} (-\sqrt{4-y^2} < t \leqslant \sqrt{4-y^2}) \wedge \\ (0 \leqslant s \leqslant y) \end{array} \right\} \cup \left\{ (t,s) \;\middle|\; \begin{array}{c} (\sqrt{4-y^2} < t \leqslant x) \wedge \\ (0 \leqslant s \leqslant \sqrt{4-t^2}) \end{array} \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ (t,s) \;\middle|\; \begin{array}{c} (-2 < t \leqslant -1) \wedge \\ (-t-2 \leqslant s \leqslant 0) \end{array} \right\} \cup \left\{ (t,s) \;\middle|\; \begin{array}{c} (-1 < t \leqslant 1) \wedge \\ (-2 \leqslant s \leqslant 0) \end{array} \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ (t,s) \;\middle|\; \begin{array}{c} (1 < t \leqslant x) \wedge \\ (t-2 \leqslant s \leqslant 0) \end{array} \right\}$$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{5+2\pi} \iint_{G_5} dtds = \frac{1}{5+2\pi} \Bigg(\iint_{G_5^{(1)}} dtds + \iint_{G_5^{(2)}} dtds + \iint_{G_5^{(3)}} dtds +$$
$$\iint_{G_5^{(4)}} dtds + \iint_{G_5^{(5)}} dtds + \iint_{G_5^{(6)}} dtds \Bigg) = \frac{1}{5+2\pi} \Bigg(\int\limits_{-2}^{-\sqrt{4-y^2}} dt \int\limits_{0}^{\sqrt{4-t^2}} ds + \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dt \int\limits_{0}^{y} ds +$$
$$\int\limits_{\sqrt{4-y^2}}^{x} dt \int\limits_{0}^{\sqrt{4-t^2}} ds + \int\limits_{-2}^{-1} dt \int\limits_{-t-2}^{0} ds + \int\limits_{-1}^{1} dt \int\limits_{-2}^{0} ds + \int\limits_{1}^{x} dt \int\limits_{t-2}^{0} ds \Bigg) = \frac{1}{5+2\pi} \Bigg(\int\limits_{-2}^{-\sqrt{4-y^2}} \sqrt{4-t^2} dt +$$
$$2y\sqrt{4-y^2} + \int\limits_{\sqrt{4-y^2}}^{x} \sqrt{4-t^2} dt + \frac{1}{2} + 4 + 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} \Bigg) = [1] =$$

$= \frac{1}{5+2\pi}\Bigg(2\sin(2\arcsin(-\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}))+4\arcsin(-\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})+\pi+\sin(2\arcsin(\frac{x}{2}))+$

$2\arcsin(\frac{x}{2}) + 3 + 2x - \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{4-y^2}\Bigg)$

6. $(x, y) \in D_6$



$G_6 = G_6^{(1)} \cup G_6^{(2)} \cup G_6^{(3)} = \left\{(t,s) \,\middle|\, (-2 < t \leqslant x) \wedge (0 \leqslant \quad s \leqslant \sqrt{4-t^2})\right\} \cup$

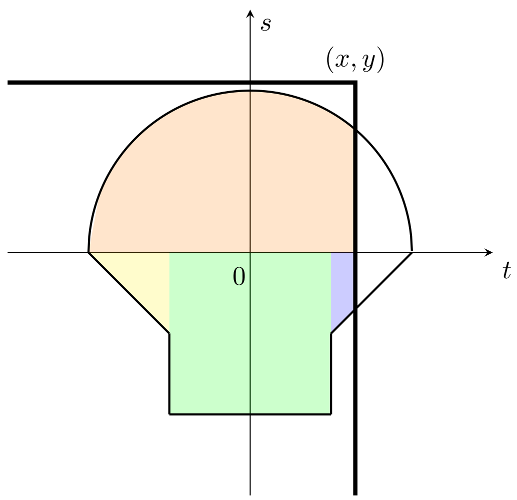
$\cup \left\{(t,s) \,\middle|\, (-2 < t \leqslant -1) \wedge (-t-2 \leqslant \quad s \leqslant 0)\right\} \cup \left\{(t,s) \,\middle|\, (-1 < t \leqslant x) \wedge (-2 \leqslant \quad s \leqslant 0)\right\}$

$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \frac{1}{5+2\pi}\iint_{G_6} = \frac{1}{5+2\pi}\left(\iint_{G_6^{(1)}} dtds + \iint_{G_6^{(2)}} dtds + \iint_{G_6^{(3)}} dtds\right) =$

$\frac{1}{5+2\pi}\left(\int\limits_{-2}^{x} dt \int\limits_{0}^{\sqrt{4-t^2}} ds + \int\limits_{-2}^{-1} dt \int\limits_{-t-2}^{0} ds + \int\limits_{-1}^{x} dt \int\limits_{-2}^{0} ds\right) = \frac{1}{5+2\pi}\Bigg(\sin(2\arcsin(\frac{x}{2}))+$

$2\arcsin(\frac{x}{2}) + \pi + \frac{1}{2} + 2(x+1)\Bigg)$

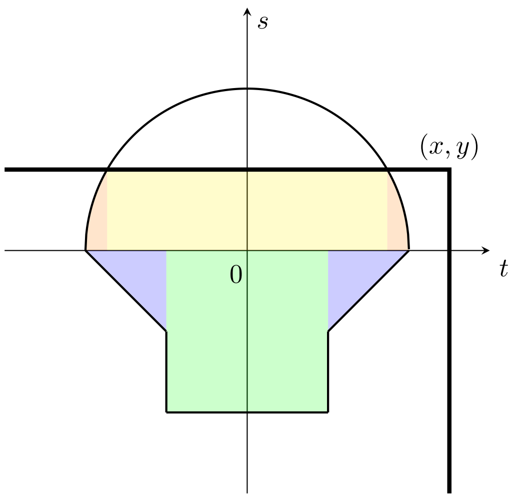
7. $(x, y) \in D_7$



$$G_7 = G_7^{(1)} \cup G_7^{(2)} \cup G_7^{(3)} \cup G_7^{(4)} = \left\{ (t,s) \,\middle|\, (-2 < t \leqslant x) \wedge (0 \leqslant \quad s \leqslant \sqrt{4-t^2}) \right\} \cup$$
$$\left\{ (t,s) \,\middle|\, (-2 < t \leqslant -1) \wedge (-t-2 \leqslant \quad s \leqslant 0) \right\} \cup \left\{ (t,s) \,\middle|\, (-1 < t \leqslant 1) \wedge (-2 \leqslant \quad s \leqslant 0) \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ (t,s) \,\middle|\, (-1 < t \leqslant x) \wedge (t-2 \leqslant \quad s \leqslant 0) \right\}$$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{5+2\pi} \iint_{G_7} = \frac{1}{5+2\pi} \left(\iint_{G_7^{(1)}} dtds + \iint_{G_7^{(2)}} dtds + \iint_{G_7^{(3)}} dtds + \right.$$
$$\left. \iint_{G_7^{(4)}} dtds \right) = \frac{1}{5+2\pi} \left(\int\limits_{-2}^{x} dt \int\limits_{0}^{\sqrt{4-t^2}} ds + \int\limits_{-2}^{-1} dt \int\limits_{-t-2}^{0} ds + \int\limits_{-1}^{1} dt \int\limits_{0}^{2} ds + \int\limits_{1}^{x} dt \int\limits_{t-2}^{0} ds \right) =$$
$$\frac{1}{5+2\pi} \left(\int\limits_{-2}^{x} \sqrt{4-t^2} dt - \frac{1}{2} + 4 + 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - 2 \right) = [1] = \frac{1}{5+2\pi} \left(\sin(2 \arcsin(\tfrac{x}{2})) + \right.$$
$$\left. 2 \arcsin(\tfrac{x}{2}) + \pi + 3 + 2x - \frac{x^2}{2} \right)$$

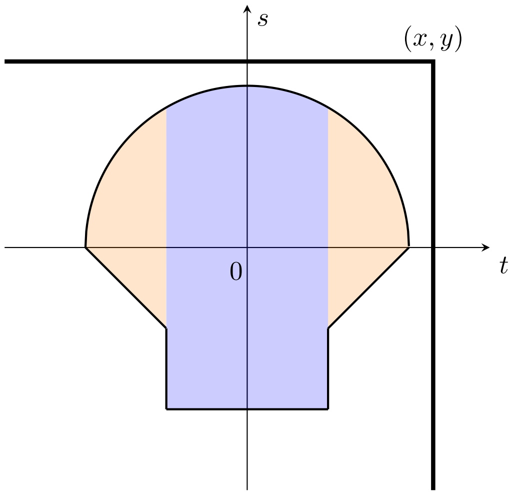
8. $(x, y) \in D_8$



$$G_8 = G_8^{(1)} \cup G_8^{(2)} \cup G_8^{(3)} \cup G_8^{(4)} \cup G_8^{(5)} \cup G_8^{(6)} = \left\{(t,s) \,\middle|\, (-2 < t \leqslant -\sqrt{4-y^2}) \wedge (0 \leqslant \quad s \leqslant \sqrt{4-t^2})\right\} \cup$$
$$\left\{(t,s) \,\middle|\, (-\sqrt{4-y^2} < t \leqslant \sqrt{4-y^2}) \wedge (0 \leqslant \quad s \leqslant y)\right\} \cup$$
$$\cup \left\{(t,s) \,\middle|\, (\sqrt{4-y^2} < t \leqslant 2) \wedge (0 \leqslant \quad s \leqslant \sqrt{4-t^2})\right\} \cup \left\{(t,s) \,\middle|\, (-2 < t \leqslant -1) \wedge (t-2 \leqslant \quad s \leqslant 0)\right\} \cup$$
$$\cup \left\{(t,s) \,\middle|\, (-1 < t \leqslant 1) \wedge (-2 \leqslant \quad s \leqslant 0)\right\} \cup \left\{(t,s) \,\middle|\, (1 < t \leqslant 2) \wedge (-2+t \leqslant \quad s \leqslant 0)\right\}$$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \tfrac{1}{5+2\pi} \iint_{G_8} = [1] = \tfrac{1}{5+2\pi} \left(\int\limits_0^y ds \int\limits_{-\sqrt{4-s^2}}^{\sqrt{4-s^2}} dt + 5 \right) = \tfrac{1}{5+2\pi} \Bigg(2\sin(2\arcsin(\tfrac{y}{2})) +$$
$$4\arcsin(\tfrac{y}{2}) + 5 \Bigg)$$

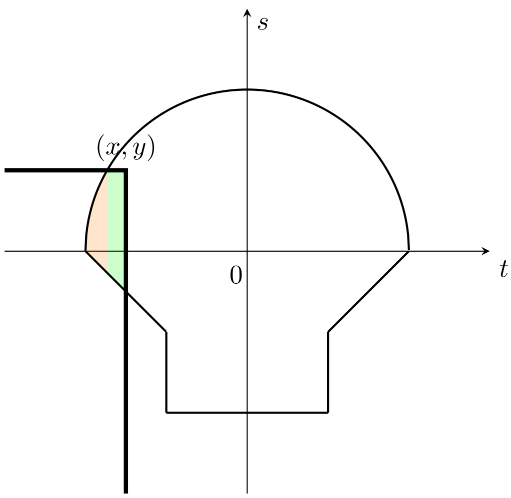
9. $(x, y) \in D_9$



$$G_8 = G_9^{(1)} \cup G_9^{(2)} \cup G_9^{(3)} = \left\{ (t,s) \,\middle|\, (-2 < t \leqslant -1) \wedge (-t-2 \leqslant \quad s \leqslant \sqrt{4-t^2}) \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ (t,s) \,\middle|\, (-1 < t \leqslant 1) \wedge (-2 \leqslant \quad s \leqslant \sqrt{4-t^2}) \right\} \cup \left\{ (t,s) \,\middle|\, (1 < t \leqslant 2) \wedge (t-2 \leqslant \quad s \leqslant \sqrt{4-t^2}) \right\}$$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \tfrac{1}{5+2\pi} \iint_{G_9} = \tfrac{1}{5+2\pi} \left(\int\limits_{-2}^{-1} dt \int\limits_{-t-2}^{\sqrt{4-t^2}} ds + \int\limits_{-1}^{1} dt \int\limits_{-2}^{\sqrt{4-t^2}} ds + \int\limits_{1}^{2} dt \int\limits_{-2+t}^{\sqrt{4-t^2}} ds \right) =$$
$$\tfrac{1}{5+2\pi} \left(\tfrac{2\pi}{3} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2\pi}{3} + \sqrt{3} + 4 + \tfrac{2\pi}{3} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2} \right) = \tfrac{1}{5+2\pi}(2 + \pi 5) = 1$$

10. $(x, y) \in D_{10}$

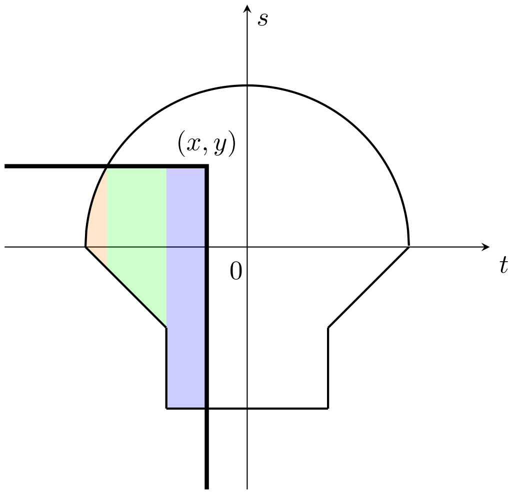


$G_{10} = G_{10}^{(1)} \cup G_{10}^{(2)} = \left\{ (t,s) \;\middle|\; (-2 < t \leqslant -\sqrt{4-y^2}) \wedge (-t-2 \leqslant \quad s \leqslant \sqrt{4-t^2}) \right\} \cup$
$\left\{ (t,s) \;\middle|\; (-\sqrt{4-y^2} < t \leqslant x) \wedge (-t-2 \leqslant \quad s \leqslant y) \right\}$

$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \frac{1}{5+2\pi} \iint_{G_{10}} = \frac{1}{5+2\pi} \left(\int\limits_{-2}^{-\sqrt{4-y^2}} dt \int\limits_{-t-2}^{\sqrt{4-t^2}} ds + \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{x} dt \int\limits_{-t-2}^{y} ds \right) \frac{1}{5+2\pi} +$

$+ \left(\int\limits_{-2}^{-\sqrt{4-y^2}} (\sqrt{4-t^2}+t+2)dt + \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{x} (y+t+2)dt \right) = \frac{1}{5+2\pi} \Bigg(-\sin(2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})) -$
$2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}) + \pi + \frac{1}{2}(4-y^2) - 2\sqrt{4-y^2} + 2 + yx + \frac{x^2}{2} + 2x + y\sqrt{4-y^2} -$
$\frac{1}{2}(4-y^2) + 2\sqrt{4-y^2} \Bigg) \frac{1}{5+2\pi} = \frac{1}{5+2\pi} \Bigg(-\sin(2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})) - 2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}) +$
$\pi + 2 + yx + \frac{x^2}{2} + 2x + y\sqrt{4-y^2} \Bigg)$

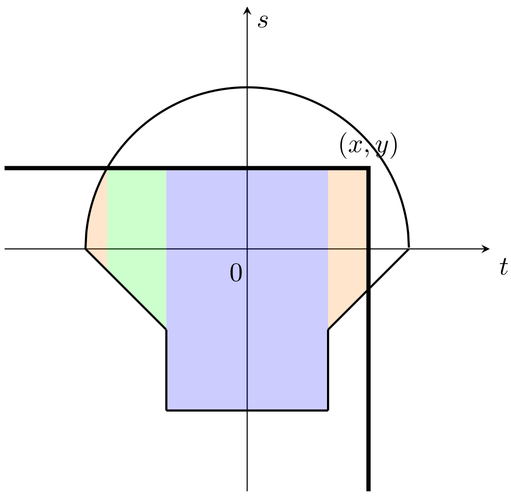
11. $(x,y) \in D_{11}$



$G_{11} = G_{11}^{(1)} \cup G_{11}^{(2)} \cup G_{11}^{(3)} = \left\{ (t,s) \;\middle|\; (-2 < t \leqslant -\sqrt{4-y^2}) \wedge (-t-2 \leqslant \quad s \leqslant \sqrt{4-t^2}) \right\} \cup$
$\left\{ (t,s) \;\middle|\; (-\sqrt{4-y^2} < t \leqslant -1) \wedge (-t-2 \leqslant \quad s \leqslant y) \right\} \cup \left\{ (t,s) \;\middle|\; (-1 < t \leqslant x) \wedge (-2 \leqslant \quad s \leqslant y) \right\}$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{5+2\pi}\iint_{G_{11}} = \frac{1}{5+2\pi}\left(\int\limits_{-2}^{-\sqrt{4-y^2}} dt \int\limits_{-t-2}^{\sqrt{4-t^2}} ds + \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-1} dt \int\limits_{-t-2}^{y} ds + \int\limits_{-1}^{x} dt \int\limits_{-2}^{y} ds\right) = \frac{1}{5+2\pi}\left(\int\limits_{-2}^{-\sqrt{4-y^2}} (\sqrt{4-y^2}+t+2)dt + \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-1} (y+t+2)dt + (y+2)(x+1)\right) = [1] = \frac{1}{5+2\pi}\left(-\sin(2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})) - 2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}) + \pi + \frac{1}{2}(4-y^2) - 2\sqrt{4-y^2} + 2 - y + \frac{1}{2} - 2 + y\sqrt{4-y^2} - \frac{1}{2}(4-y^2) + 2\sqrt{4-y^2} + (y+2)(x+1)\right) = \frac{1}{5+2\pi}\left(-\sin(2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})) - 2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}) + \pi - y + \frac{1}{2} + y\sqrt{4-y^2} + xy + 2x + y + 2\right) = \frac{1}{5+2\pi}\left(-\sin(2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})) - 2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}) + \pi + y\sqrt{4-y^2} + xy + 2x + \frac{5}{2}\right)$

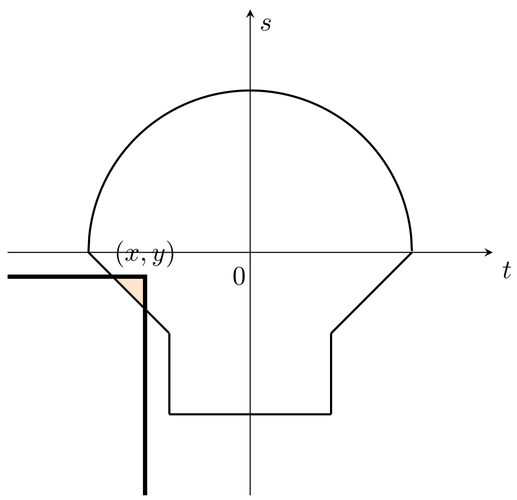
12. $(x,y) \in D_{12}$



$G_{11} = G_{12}^{(1)} \cup G_{12}^{(2)} \cup G_{12}^{(3)} \cup G_{12}^{(3)} = \left\{(t,s) \;\middle|\; (-2 < t \leqslant -\sqrt{4-y^2}) \wedge (-t-2 \leqslant \quad s \leqslant \sqrt{4-t^2})\right\} \cup \left\{(t,s) \;\middle|\; (-\sqrt{4-y^2} < t \leqslant -1) \wedge (-t-2 \leqslant \quad s \leqslant y)\right\} \cup \left\{(t,s) \;\middle|\; (-1 < t \leqslant 1) \wedge (-2 \quad s \leqslant y)\right\} \cup \left\{(t,s) \;\middle|\; (1 < t \leqslant x) \wedge (t-2 \leqslant \quad s \leqslant \sqrt{4-t^2})\right\}$

$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \frac{1}{5+2\pi}\iint_{G_{12}} = \frac{1}{5+2\pi}\left(\int\limits_{-2}^{-\sqrt{4-y^2}} dt \int\limits_{-t-2}^{\sqrt{4-t^2}} ds + \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-1} dt \int\limits_{-t-2}^{y} ds + \int\limits_{-1}^{1} dt \int\limits_{-2}^{y} ds + \int\limits_{1}^{x} dt \int\limits_{t-2}^{y} ds\right) = \frac{1}{5+2\pi}\left(-\sin(2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})) - 2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}) + \pi + \frac{1}{2}(4-y^2) - 2\sqrt{4-y^2} + 2 - y + \frac{1}{2} - 2 + y\sqrt{4-y^2} - \frac{1}{2}(4-y^2) + 2\sqrt{4-y^2} + 2(y+2) + yx - \frac{x^2}{2} + 2x - y + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{1}{5+2\pi}\left(-\sin(2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})) - 2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}) + \pi + 3 + y\sqrt{4-y^2} + yx - \frac{x^2}{2} + 2x\right)$

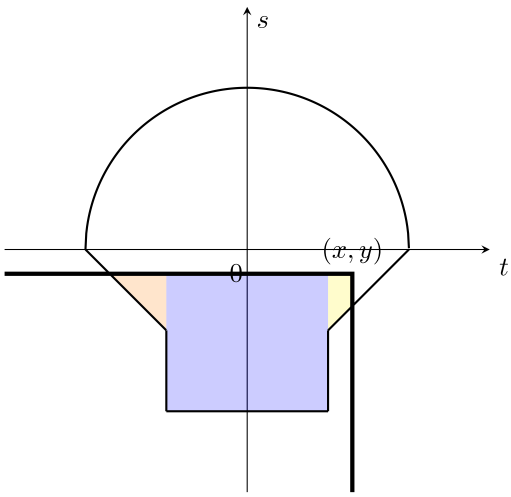
13. $(x,y) \in D_{13}$



$G_{13} = \left\{(t,s) \,\middle|\, (-2-y < t \leqslant x) \wedge (-t-2 \leqslant s \leqslant y)\right\}$

$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \frac{1}{5+2\pi}\iint_{G_{13}} = \frac{1}{5+2\pi}\int\limits_{-2-y}^{x} dt \int\limits_{-t-2}^{y} ds = \int\limits_{-2-y}^{x}(yt + \frac{t^2}{2} + 2t)dt = \frac{1}{5+2\pi}(\frac{x^2}{2} + (y+2)x + \frac{y^2}{2} + 2x + 2)$

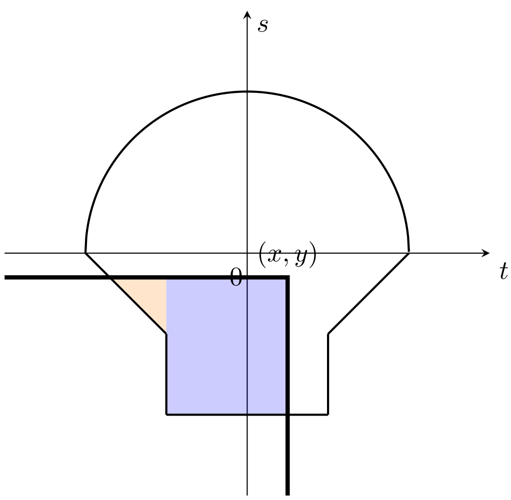
14. $(x,y) \in D_{14}$



$$G_{14} = \left\{ (t,s) \;\middle|\; (-2-y < t \leqslant -1) \wedge (-t-2 \leqslant \quad s \leqslant y) \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ (t,s) \;\middle|\; (-1 < t \leqslant 1) \wedge (-2 \leqslant \quad s \leqslant y) \right\} \cup \left\{ (t,s) \;\middle|\; (1 < t \leqslant 2+y) \wedge (t-2 \leqslant \quad s \leqslant y) \right\}$$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{5+2\pi} \iint_{G_{14}} = \frac{1}{5+2\pi} \left(\int\limits_{-2-y}^{-1} dt \int\limits_{t-2}^{y} ds + \int\limits_{-1}^{1} dt \int\limits_{-2}^{y} ds + \int\limits_{1}^{x} dt \int\limits_{-t-2}^{y} ds \right) =$$
$$\frac{1}{5+2\pi} \left(\frac{y^2+2y+1}{2} + 2(y+2) - \frac{x^2}{2} + (y+2)x + y - \frac{3}{2} \right)$$

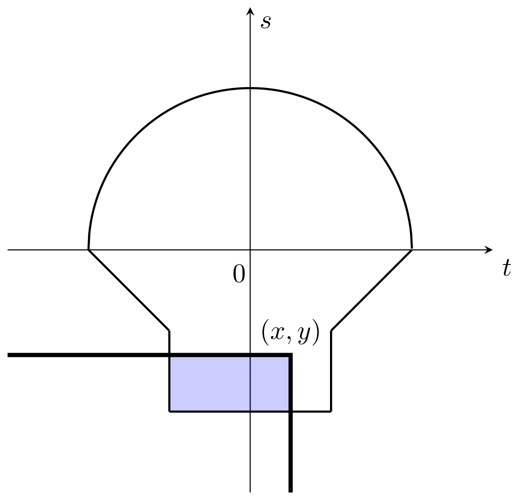
15. $(x,y) \in D_{15}$



$$G_{15} = \left\{ (t,s) \;\middle|\; (-2-y < t \leqslant -1) \wedge (-t-2 \leqslant \quad s \leqslant y) \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ (t,s) \;\middle|\; (-1 < t \leqslant x) \wedge (-2 \leqslant \quad s \leqslant y) \right\}$$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \tfrac{1}{5+2\pi} \iint_{G_{15}} = \tfrac{1}{5+2\pi} \left(\tfrac{y^2+2y+1}{2} + (x+1)(y+2) \right)$$

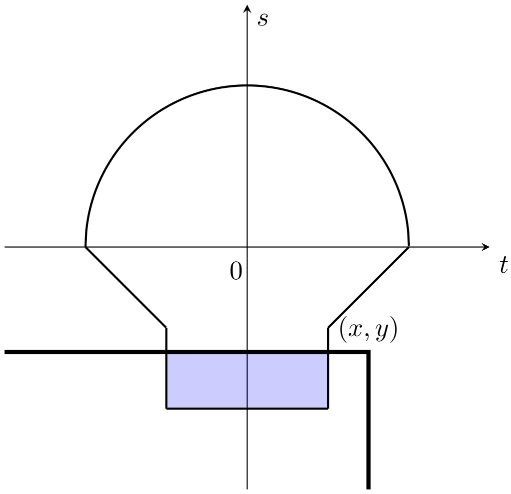
16. $(x,y) \in D_{16}$



$$G_{16} = \left\{ (t,s) \;\middle|\; (-1 < t \leqslant x) \wedge (-2 \leqslant \quad s \leqslant y) \right\}$$

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \tfrac{1}{5+2\pi} \iint_{G_{16}} = \tfrac{1}{5+2\pi}(x+1)(y+2)$$

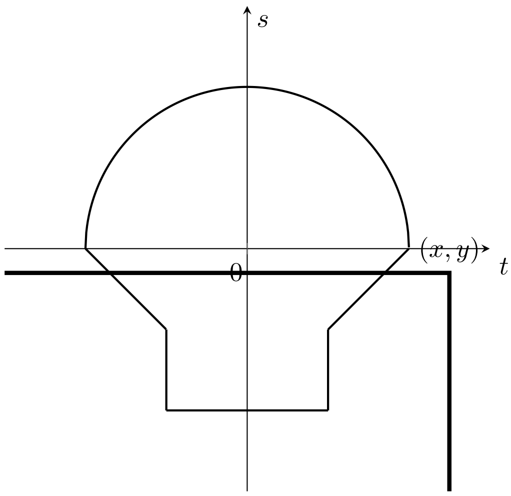
17. $(x, y) \in D_{17}$



$$G_{17} = \left\{ (t, s) \;\middle|\; (-1 < t \leqslant 1) \wedge (-2 \leqslant \quad s \leqslant y) \right\}$$

$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{5+2\pi} \iint_{G_{17}} = \frac{2}{5+2\pi}(y + 2)$

18. $(x, y) \in D_{18}$



$$G_{18} = \left\{ (t, s) \;\middle|\; (-1 < t \leqslant 1) \wedge (-2 \leqslant \quad s \leqslant y) \right\} \cup \left\{ (t, s) \;\middle|\; (-1 < s \leqslant y) \wedge (-2 - s \leqslant \quad t \leqslant s + 2) \right\}$$

$$F_{\bar{\xi}}(x,y) = \frac{1}{5+2\pi}\iint_{G_{18}} = \frac{1}{5+2\pi}\left(2 + \int\limits_{-1}^{y}(2s+4)ds\right) = \frac{1}{5+2\pi}(y^2+4y+5)$$

Отримуємо:

$$
F_{\vec{\xi}}(x,y) = \begin{cases}
0, (x,y) \in D_1 \\
\frac{1}{5+2\pi}\left(2x + \frac{x^2}{2} + 2\right) + \frac{1}{5+2\pi}\left(\sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2}) + \pi\right), (x,y) \in D_2 \\
\frac{1}{5+2\pi}\left(\sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2}) + \pi\right) + \frac{0.5}{5+2\pi} + \frac{2(x+1)}{5+2\pi}, (x,y) \in D_3 \\
\frac{1}{5+2\pi}\left(2\sin\left(2\arcsin(-\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})\right) + 4\arcsin\left(-\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + 2\sin\left(2\arcsin(\frac{x}{2})\right) + 2\arcsin(\frac{x}{2}) + \right. \\
\frac{1}{5+2\pi}\left(2\sin(2\arcsin(-\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})) + 4\arcsin(-\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}) + \pi + \sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2}) + 3 \right. \\
\frac{1}{5+2\pi}\left(\sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2}) + \pi + \frac{1}{2} + 2(x+1)\right), (x,y) \in D_6 \\
\frac{1}{5+2\pi}\left(\sin(2\arcsin(\frac{x}{2})) + 2\arcsin(\frac{x}{2}) + \pi + 3 + 2x - \frac{x^2}{2}\right), (x,y) \in D_7 \\
\frac{1}{5+2\pi}\left(2\sin(2\arcsin(\frac{y}{2})) + 4\arcsin(\frac{y}{2}) + 5\right), (x,y) \in D_8 \\
1, (x,y) \in D_9 \\
\frac{1}{5+2\pi}\left(-\sin(2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})) - 2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}) + \pi + 2 + yx + \frac{x^2}{2} + 2x + y\sqrt{4-y^2}\right), (x, y \\
\frac{1}{5+2\pi}\left(-\sin(2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})) - 2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}) + \pi + y\sqrt{4-y^2} + xy + 2x + \frac{5}{2}\right), (x,y) \in D \\
\frac{1}{5+2\pi}\left(-\sin(2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})) - 2\arcsin(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}) + \pi + 3 + y\sqrt{4-y^2} + yx - \frac{x^2}{2} + 2x\right), (x, y \\
\frac{1}{5+2\pi}(\frac{x^2}{2} + (y+2)x + \frac{y^2}{2} + 2x + 2), (x,y) \in D_{13} \\
\frac{1}{5+2\pi}\left(\frac{y^2+2y+1}{2} + 2(y+2) - \frac{x^2}{2} + (y+2)x + y - \frac{3}{2}\right), (x,y) \in D_{14} \\
\frac{1}{5+2\pi}\left(\frac{y^2+2y+1}{2} + (x+1)(y+2)\right), (x,y) \in D_{15} \\
\frac{1}{5+2\pi}(x+1)(y+2), \qquad (x,y) \in D_{16} \\
\frac{2}{5+2\pi}(y+2), (x,y) \in D_{17} \\
\frac{1}{5+2\pi}\left(2 + \int\limits_{-1}^{y}(2s+4)ds\right) = \frac{1}{5+2\pi}(y^2+4y+5), (x,y) \in D_{18}
\end{cases}
$$

Математичні сподівання координат та кореляційна матриця.

Обчислимо математичні сподівання координат ξ_1 та ξ_2:
$E\xi_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x)dx = \frac{1}{2\pi+5}\left(\int\limits_{-2}^{-1}(x\sqrt{4-x^2})dx + \int\limits_{-2}^{-1}(x^2+2x) + + \int\limits_{-1}^{1} x\sqrt{4-x^2}dx + \int\limits_{-1}^{1} 2xdx + \int\limits_{1}^{2} x\sqrt{4-x^2}dx + \int\limits_{1}^{2}(2x-x^2)dx\right) = \frac{1}{2\pi+5}\left(-\sqrt{3} - \frac{2}{3} + 0 + 0 + \sqrt{3} + \frac{2}{3}\right) = 0$

$E\xi_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y)dy = \frac{2}{2\pi+5}\left(\int\limits_{-2}^{-1} ydy + \int\limits_{-1}^{0}(y^2+2y)dy + \int\limits_{0}^{2} y\sqrt{4-y^2}dy\right) = \frac{2}{2\pi+5}\left(-\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{2\pi+5}$

Отже, центр розсіювання випадкового вектора $\vec{\xi}$ має координати $(0, \frac{1}{5+2\pi})$

Побудуємо кореляційну та нормовану кореляційну матриці. Спочатку побудуємо кореляційну матрицю:

$$K = \begin{pmatrix} D\xi_1 & K(\xi_1,\xi_2) \\ K(\xi_1,\xi_2) & D\xi_2 \end{pmatrix}$$

де $D\xi_i$ - диспресія випадкової величини $\xi_i, i = 1,2$. $K(\xi_1,\xi_2)$ - кореляційний момент ξ_1 та ξ_2.
$E\xi_1^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi_1}(x)dx = \frac{1}{5+2\pi}\left(\int\limits_{-2}^{-1} x^2\sqrt{4-x^2}dx + \int\limits_{-2}^{-1}(x^3+2x^2)dx + \int\limits_{-1}^{1} x^2\sqrt{4-x^2}dx + \int\limits_{-1}^{1} 2x^2dx + \int\limits_{1}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}dx + \int\limits_{1}^{2} 2x^2 - x^3\right) = \frac{1}{5+2\pi}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{11}{12} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{11}{12}\right) = \frac{1}{5+2\pi}\left(2\pi + \frac{38}{12}\right)$

$E\xi_2^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi_2}(y)dy = \frac{2}{5+2\pi}\left(\int\limits_{-2}^{-1} y^2dy + \int\limits_{-1}^{0}(y^3+2y^2)dy + \int\limits_{0}^{2} y^2\sqrt{4-y^2}dy\right) = \frac{2}{5+2\pi}\left(\frac{7}{3} + \frac{5}{12} + \pi\right) = \frac{2}{5+2\pi}\left(\frac{11}{4} + \pi\right)$

$$E\xi_1\xi_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf_{\bar{\xi}}(x,y) = \frac{1}{5+2\pi}\left(\int\limits_{-2}^{-1} ydy \int\limits_{-1}^{1} xdx + \int\limits_{-1}^{0} ydy \int\limits_{-y-2}^{y+2} xdx + \int\limits_{0}^{2} ydy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xdx = \right.$$

$$\left. \frac{1}{5+2\pi}\left(\int\limits_{-2}^{-1} 0dy + \int\limits_{-1}^{0} 0dy + \int\limits_{0}^{2} 0dy\right) = 0\right.$$

$$D\xi_1 = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = \frac{1}{5+2\pi}\left(2\pi + \frac{38}{12}\right) \approx 0.8375$$

$$D\xi_2 = E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2 = \frac{2}{5+2\pi}\left(\frac{11}{4} + \pi\right) - \frac{1}{(2\pi+5)^2} = \frac{1}{(5+2\pi)^2}\left((\frac{11}{2} + 2\pi)(2\pi + 5) - 1\right) \approx 1.0365$$

$$K(\xi_1, \xi_2) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 \cdot E\xi_2 = 0$$

Бачимо, що випадкові величини є некорельованими

Отже кореляційна матриця має вигляд:

$$K = \begin{pmatrix} 0.8375 & 0 \\ 0 & 1.0365 \end{pmatrix}$$

Перевіримо матрицю на додатну визначеність:

$$0.8375 > 0; \qquad \begin{vmatrix} 0.8375 & 0 \\ 0 & 1.0365 \end{vmatrix} = 0.8375 \cdot 1.0365 > 0$$

Отже за критерієм Сильвестра - матриця додатньо визначена Обчислимо коєфіцієнт кореляції:

$$r(\xi_1, \xi_2) = \frac{K(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{D\xi_1 \cdot D\xi_2}} = 0$$

Тоді побудуємо нормовану кореляційну матрицю:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Умовні щільності розподілу для кожної координати. За допомогою формул $f_{\xi_1}(x/y) = \frac{f_{\vec{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_2}(y)}$ та $f_{\xi_2}(y/x) = \frac{f_{\vec{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_1}(x)}$ обчислимо умовні щільності

$$f_{\vec{\xi}}(x;y) = \begin{cases} \frac{1}{5+2\pi} & , \quad (x;y) \in G, \\ 0 & , \quad (x;y) \notin G. \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \leqslant -2 \\ \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-x-2}^{\sqrt{4-x^2}} dy = \frac{1}{5+2\pi} \left(\sqrt{4-x^2} + x + 2\right), \quad -2 < x \leqslant -1 \\ \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-2}^{\sqrt{4-x^2}} dy = \frac{1}{5+2\pi} \left(\sqrt{4-x^2} + 2\right), \quad -1 < x \leqslant 1 \\ \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{x-2}^{\sqrt{4-x^2}} dy = \frac{1}{5+2\pi} \left(\sqrt{4-x^2} - x + 2\right), \quad 1 < x \leqslant 2 \\ 0, \quad x > 2 \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, \quad y \leqslant -2 \\ \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-1}^{1} dx = \frac{2}{5+2\pi}, \quad -2 < y \leqslant -1 \\ \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-y-2}^{y+2} dx = \frac{2y+4}{5+2\pi}, \quad -1 < y \leqslant 0 \\ \frac{1}{5+2\pi} \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx = \frac{2\sqrt{4-y^2}}{5+2\pi}, \quad 0 < y \leqslant 2 \\ 0, \quad y > 2 \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x/y) = \begin{cases} 0, & y \le -2, \\ \frac{1}{2}, & y \in (-2;-1], x \in [-1;1], \\ 0, & y \in (-2;-1], x \notin [-1;1], \\ \frac{1}{2y+4}, & y \in (-1,0], x \in [-y-2; y+2] \\ 0, & y \in (-1;0], x \notin [-y-2; y+2], \\ \frac{1}{2\sqrt{4-y^2}}, & y \in (0,2], x \in [-\sqrt{4-y^2}; \sqrt{4-y^2}] \\ 0, & y \in (0,2], x \notin [-\sqrt{4-y^2}; \sqrt{4-y^2}] \\ 0, & y > 2. \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y/x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ \frac{1}{\sqrt{4-x^2}+x+2}, & x \in (-2;-1], y \in [-x-2; \sqrt{4-x^2}], \\ 0, & x \in (-2;-1], y \notin [-x-2; \sqrt{4-x^2}], \\ \frac{1}{\sqrt{4-x^2}+2}, & x \in (-1,1], y \in [-2; \sqrt{4-x^2}] \\ 0, & x \in (-1;1], y \notin [-2; \sqrt{4-x^2}], \\ \frac{1}{\sqrt{4-x^2}-x+2}, & x \in (1,2], y \in [x-2; \sqrt{4-x^2}] \\ 0, & x \in (1,2], y \notin [x-2; \sqrt{4-x^2}] \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Перевіримо чи виконуються умови нормування

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x/y)dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x,y)dx}{f_{\xi_2}(y)} = \frac{f_{\xi_2}(y)}{f_{\xi_2}(y)} = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y/x)dy = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{\xi}}(x,y)dy}{f_{\xi_1}(x)} = \frac{f_{\xi_1}(x)}{f_{\xi_1}(x)} = 1.$$

У нашому випадку очевидно, що

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}dx = \int_{-y-2}^{y+2} \frac{1}{2y+4}dx = \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{2\sqrt{4-y^2}}dx = 1$$

$$\int_{-x-2}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}+x+2}dy = \int_{-2}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}+2}dy =$$

$$= \int_{x-2}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}-x+2} dy = 1$$

6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Для пошуку умовних математичних сподівань скористаємося формулами:

$$E(\xi_2/\xi_1 = x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y/x) dy$$

$$E(\xi_1/\xi_2 = y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_1}(x/y) dx$$

$$E(\xi_2/\xi_1 = x) = \begin{cases} 0, \quad x \le -2 \\ \int\limits_{-x-2}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{ydy}{\sqrt{4-x^2}+x+2} = \frac{-x^2-2x}{\sqrt{4-x^2}+x+2}, x \in (-2;-1] \\ \int\limits_{-2}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{ydy}{\sqrt{4-x^2}+2} = \frac{-\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{4-x^2}+2}, x \in (-1;1] \\ \int\limits_{x-2}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{ydy}{\sqrt{4-x^2}-x+2} = \frac{-x^2+2x}{\sqrt{4-x^2}-x+2}, x \in (1;2] \\ 0, \quad x > 2 \end{cases}$$

$$E(\xi_1/\xi_2 = y) = \begin{cases} 0, \quad y \le -2 \\ \int\limits_{-1}^{1} \frac{xdx}{2} = 0, y \in (-2;-1] \\ \int\limits_{-y-2}^{y+2} \frac{xdx}{2y+4} = 0, y \in (-1;0] \\ \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{xdx}{2\sqrt{4-y^2}} = 0, y \in (0;2] \\ 0, y > 2 \end{cases}$$

Виконаємо перевірку, використовуючи формули повного мат сподівання

$$\begin{cases} E(E(\xi_1/\xi_2)) = E\xi_1 \\ E(E(\xi_2/\xi_1)) = E\xi_2 \end{cases}$$

Перша рівність очевидна. Друга:

$E(E(\xi_2/\xi_1)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (E(\xi_2)/\xi_1 = x) f_{\xi_1}(x)) dx = \frac{1}{5+2\pi} \left(\int\limits_{-2}^{-1} \frac{-x^2-2x}{\sqrt{4-x^2}+x+2} \cdot (\sqrt{4-x^2} + x + 2) dx + \int\limits_{-1}^{1} \frac{-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{4-x^2}+2} (\sqrt{4-x^2}+2) + \int\limits_{1}^{2} (-x^2+2x) \right) = \frac{1}{5+2\pi} \cdot (\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}) = \frac{1}{5+2\pi} = E\xi_2$

додаток 1:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{4-x^2}dx =$$

Заміна $x = 2\sin t; \quad dx = 2\cos t\ dt$

x	x_1	x_2
t	t_1	t_2

$$= 4\int_{t_1}^{t_2} \cos^2 t dt = 2\int_{t_1}^{t_2} (1+\cos 2t)dt = 2(t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \cos 2t d(2t) =$$

$$= \sin 2t_2 - \sin 2t_1 + 2(t_2 - t_1) = \sin\left(2\arcsin\frac{x_2}{2}\right) - \sin\left(2\arcsin\frac{x_1}{2}\right) +$$

$$+2\arcsin\frac{x_2}{2} - 2\arcsin\frac{x_1}{2}.$$