Самостійна робота № 2 з
гармонічного аналізу
4 варіант

Виконав: студент
групи КА-02
Козак Назар

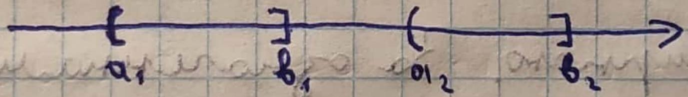
N1

$S = \{(a;b] : a, b \in Q, a < b\}$

Спочатку варто зазначити, що оскільки $a < b$, то напівінтервали виду $(a;a]$ та $(\tilde{a};\tilde{b}]$, де $\tilde{b} < \tilde{a}$ не входять до S, тому $\varnothing \notin S$.

1) кільце:

Візьмемо такі напівінтервали $A_1 = (a_1; b_1]$, $A_2 = (a_2; b_2]$, що $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, а також $a_2 > b_1$.



Зрозуміло, що $A_1 \in S$, $A_2 \in S$. Бачимо, що $A_1 \cup A_2 \notin S$, тому <u>S - не кільце</u> (не вик. умова: $A, B \in S \Rightarrow A \cup B \in S$).

2) Півкільце:

Візьмемо ті ж A_1, A_2. $A_1 \cap A_2 = \varnothing \notin S$ тому <u>S - не півкільце</u>

№2

$S = \{\{k\} : k \in \mathbb{N}\}$, $\Omega = \mathbb{N}$

1) З якості породженої алгебри візьмемо таку сім'ю множин:

$$A_s = \{\emptyset, A \subset \mathbb{N} \mid (|A| < \infty) \vee (|A^c| < \infty)\}$$

Тобто сім'я множин A_s складається з порожньої множини, а також з таких підмножин $\mathbb{N}$, які або скінченні, або їх доповнення скінченне.

Доведемо, що A_s - алгебра:

I) Візьмемо довільні $\tilde{A}, \tilde{B} \in A_s$, доведемо, що $\tilde{A} \cup \tilde{B} \in A_s$

Розглянемо різні випадки:

1) $\tilde{A}$ - зліченна мн. $\tilde{B}$ - скінченна.
($\tilde{A}^c$ - скінченна ; $\tilde{B}^c$ - зліченна - це вит. з того що $\tilde{A}, \tilde{B} \in A_s$)

Зрозуміло, що $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ - зліченна, як об'єднання зліченної та ск. множин. Розглянемо $(\tilde{A} \cup \tilde{B})^c$:

$(\tilde{A} \cup \tilde{B})^c = A^c \cap B^c$ – це скінченна множина оскільки це перетин скінченної та зліченної множин.

Тоді:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{A} \cup \tilde{B} \text{ - зліченна} \\ (\tilde{A} \cup \tilde{B})^c \text{ - скінченна} \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{A} \cup \tilde{B} \in A_s$$

2) $\hat{A}$ - зліченна, $\tilde{B}$ - зліченна.

Зрозуміло, що $\hat{A} \cup \tilde{B}$ - також зліченна. Розглянемо $(\tilde{A} \cup \tilde{B})^c$:

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ - перетин скінченних множин - множина скінченна, тоді маємо:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{A} \cup \hat{B} \text{ - зліченна} \\ (\tilde{A} \cup \tilde{B})^c \text{ - скінченна} \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{A} \cup \tilde{B} \in A_s$$

3) $\tilde{A}$ - скінченна, $\hat{B}$ - скінченна. 4

Зрозуміло, що $\tilde{A} \vee \hat{B}$ - також скінченна. Розглянемо $(\tilde{A} \vee \hat{B})^c$

$(\tilde{A} \vee \hat{B})^c = \tilde{A}^c \cap \hat{B}^c$ - перетин злічених множин. Доведемо, що при таких $\tilde{A}, \hat{B} \in A_s$, що $\tilde{A}^c, \hat{B}^c$ - злічені: $\tilde{A}^c \cap \hat{B}^c$ - також злічена множина:

Будемо доводити від супротивного: нехай $\tilde{A}^c \cap \hat{B}^c$ - скінченна.

Позначимо:

$$\tilde{A}^c = \{a_1, \ldots, a_k, \ldots\}$$

$$\hat{B}^c = \{b, \ldots, b_k, \ldots\}$$

Те що $\tilde{A}^c \cap \hat{B}^c$ - скінченна означає, що $\exists N: \forall k \geq N: a_k \neq b_k$. Зафіксуємо це N. Позначимо:

$$\tilde{\tilde{A}} = (a_k, a_{k+1}, \ldots), \underline{k \geq N}$$

Зрозуміло, що $\tilde{\tilde{A}}$ - <u>зліченна</u> множина

але починаючи з індексу k, $k \geq N$

Нема такого елемента множини $\tilde{B}^c$, що дорівнював будь-якому елементу множини $\tilde{\tilde{A}}$, тому

оскільки $\tilde{B}^c \subset \mathbb{N}$, $\tilde{\tilde{A}} \subset \tilde{A}^c \subset \mathbb{N}$, то

$\tilde{\tilde{A}} \subset (\tilde{B}^c)^c = \tilde{B}$. Тобто $\tilde{\tilde{A}} \subset \tilde{B}$ (*)

Оскільки $\tilde{B} \in A_s$, і $\tilde{B}^c$ - зліченна, то $\tilde{B}$ - має бути скінченною.

Тому маємо зліченна множина $\tilde{\tilde{A}}$ є підмножиною скінченної множини $\tilde{B}$ — а це <u>не можливо</u>

Тому маємо протиріччя. А, отже, $\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c$ - зліченна. ■

Отже, що ми отримали:

$\boxed{\text{Якщо } \tilde{A}, \tilde{B} \in A_s \text{ такі, що } \tilde{A}^c, \tilde{B}^c \text{ - зліченні, то } \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c \text{ - також зліченна множина}}$ (1)

Отже, маємо з (1): $(\tilde{A} \cup \tilde{B})^c$ – зліченна множина. Тоді:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{A} \cup \tilde{B} \text{ – скінченна} \\ (\tilde{A} \cup \tilde{B})^c \text{ – зліченна} \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{A} \cup \tilde{B} \in A_S$$

Отримали, що $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in A_S : \tilde{A} \cup \tilde{B} \in A_S$.

II) Доведемо, що $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in A_s : \tilde{A} \setminus \tilde{B} \in A_s$

1) $\tilde{A}$ - скінченна, $\tilde{B}$ - зліченна.

$\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}^c$ - перетин скінченних множин - множина скінченна.

$(\tilde{A} \setminus \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cup \tilde{B}$ - об'єднання зліченних множин - множина зліченна. Тому:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{A} \setminus \tilde{B} \text{ - скінченна} \\ (\tilde{A} \setminus \tilde{B})^c \text{ - зліченна} \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{A} \setminus \tilde{B} \in A_s$$

2) $\tilde{A}$ - зліченна, $\tilde{B}$ - скінченна.

$\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}^c$ - перетин зліченних множин, що належать A_s за (1) - є також зліченною множиною.

$(\tilde{A} \setminus \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cup \tilde{B}$ - об'єднання скінченних множин - множина скінченна. Тому

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{A} \setminus \tilde{B} \text{ - зліченна} \\ (\tilde{A} \setminus \tilde{B})^c \text{ - скінченна} \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{A} \setminus \tilde{B} \in A_s$$

8

3) $\tilde{A}, \tilde{B}$ - зліченні:

$\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}^c$ - скінченна, як перетин скінченної та зліченної.

$(\tilde{A} \setminus \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cup \tilde{B}$ - злічена, як об'єднання зліченної та скінченної

Тоді:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{A} \setminus \tilde{B} \text{ - скінченна} \\ (\tilde{A} \setminus \tilde{B})^c \text{ - злічена} \end{array}\right) \Rightarrow \tilde{A} \setminus \tilde{B} \in A_s$$

4) $\tilde{A}, \tilde{B}$ - скінченні

$\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}^c$ - скінченна, як перетин скінченної та зліч. множин.

$(\tilde{A} \setminus \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cup \tilde{B}$ - злічена, як об'єднання зліченної на скінченно

Тоді:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{A} \setminus \tilde{B} \text{ - скінченна} \\ \tilde{A}^c \cup \tilde{B} \text{ - злічена} \end{array}\right) \Rightarrow \tilde{A} \setminus \tilde{B} \in A_s$$

Отже, отримали, що для $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in A_s$:

$\tilde{A} \setminus \tilde{B} \in A$

9

III) Очевидно, що $\mathbb{N} \in A_s$.

Отже, маємо $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in A_s$:

1) $\tilde{A} \cup \tilde{B} \in A_s$

2) $\tilde{A} \setminus \tilde{B} \in A_s$

також $\mathbb{N} \in A_s$, тому A_s - алгебра.

Доведемо, що A_s - не σ-алгебра:

Покладемо: $A_n = \{2n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}: A_n \in A_s$.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k$ - парне число$\}$

Як бачимо $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ - злічена множина

$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \{k \in \mathbb{N} \mid k$ - непарне число$\}$

Як бачимо $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c$ - також злічена множина, тоді:

$$\left.\begin{array}{l} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ - злічена} \\ (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c \text{ - злічена} \end{array}\right\} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin A_s, \text{ тому}$$

A_s - не σ-алгебра

У якості породженої σ-алгебри візьмемо таку множину:

$$\Sigma_s = \{\emptyset, A \mid A \in 2^{\mathbb{N}}\}$$ – $\emptyset$ + множина всіх підмножин $\mathbb{N}$.

Зрозуміло, що вона є замкненою відносно операцій взяття об'єднання, а також взяття різниці. Тому оскільки $\mathbb{N} \in \Sigma_s$, то Σ_s – є алгеброю. Також яку б послідовність множин A_n ми не взяли, у всіх випадках: $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \mathbb{N}$, а тому $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma_s$.

Отже, Σ_s – σ-алгебра.

№3

$$A = [0; \tfrac{\pi}{2}] \setminus \{x \in \mathbb{R} : \sin x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

$$A = [0; \tfrac{\pi}{2}] \setminus \{x \in \mathbb{R} : \sin x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} =$$
$$= [0; \tfrac{\pi}{2}] \setminus \left(\{x \in \mathbb{R} : \sin x \in \mathbb{R}\} \setminus \{x \in \mathbb{R} : \sin x \in \mathbb{Q}\} \right) =$$
$$= [0; \tfrac{\pi}{2}] \cap \left(\{x \in \mathbb{R} : \sin x \in \mathbb{R}\} \cap \{x \in \mathbb{R} : \sin x \in \mathbb{Q}\}^c \right)^c =$$
$$= [0; \tfrac{\pi}{2}] \cap \left(\{x \in \mathbb{R} : \sin x \in \mathbb{R}\}^c \cup \{x \in \mathbb{R} : \sin x \in \mathbb{Q}\} \right) =$$
$$= \varnothing \cup \{x \in [0; \tfrac{\pi}{2}] : \sin x \in \mathbb{Q}\} =$$
$$= \{x \in [0; \tfrac{\pi}{2}] : \sin x \in \mathbb{Q}\}.$$

Отже, $A = \{x \in [0; \frac{\pi}{2}] : \sin x \in \mathbb{Q}\}$

Розгл. ф-ю $f = \sin x$. Вона неперервна, тому вона є вимірною. За означенням вимірної ф-ї маємо те, що $f^{-1}(A) \in B$ для довільного $A \in B$ (B - борелівська σ-алгебра на $\mathbb{R}$).

Тому, оскільки $\mathbb{Q} \in B$, маємо: $f^{-1}(\mathbb{Q}) \in B$, тобто $f^{-1}(\mathbb{Q})$ - борелівська множина.

Відрізок $[0; \frac{\pi}{2}]$ - також борелівська множина, оскільки він є об'єднанням борелівських множин, а саме $\{0\} \cup (0; \frac{\pi}{2}) \cup \{\frac{\pi}{2}\}$

($(0; \frac{\pi}{2}) \in B$, бо вона відкрита, а те що одноелементна множина $\in B$ було доведено на лекціях.).

Множину A можна записати як $[0; \frac{\pi}{2}] \cap f^{-1}(\mathbb{Q})$. Як бачимо, A - це перетин борелівських множин, тому A - борелівська множина

Оскільки множина A - зліченна, то $\lambda(A) = 0$.

№4

$f(x;y) = x^2 \cdot 1_A(x; x-y)$, $A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$

$f = f_1 \cdot f_2$, де $f_1 = x^2$, $f_2 = 1_A(x; x-y)$.

f_1 - вимірна, бо вона неперервна.

f_2 - вимірна тоді і тільки тоді, коли A - вимірна.

Оскільки A - відкрита множина в $\mathbb{R}^2$, то

$A \in B_2$, тобто A - борелівська множина.

Тому A - вимірна, а, отже і вимірна.

Тому ф-ія $f_2 = 1_A(x; x-y)$ - вимірна ф-ія.

Оскільки f_1, f_2 - вимірні, то $f = f_1 \cdot f_2$ - також вимірна. Отже $x^2 \cdot 1_A(x; x-y)$ - вимірна.

№5

$f(x) = [3x] \cdot \text{sign}(\cos 3\pi x)$, $A = [-1; 2]$

Спочатку побудуємо графік ф-ії $f(x)$...

1) $x \in [-1; -\frac{2}{3}]$: $3x \in [-3; -2]$: $[3x] = -3$

$3\pi x \in [-3\pi; -2\pi]$

якщо $3\pi x \in [-3\pi; -\frac{5\pi}{2}]$: $\cos \le 0$

якщо $3\pi x \in [-\frac{5\pi}{2}; -2\pi]$: $\cos > 0$

2) $x \in [-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}]$: $3x \in [-2; -1]$: $[3x] = -2$

$3\pi x \in [-2\pi; -\pi]$:

якщо $3\pi x \in [-2\pi; -\frac{3\pi}{2}]$: $\cos \ge 0$

якщо $3\pi x \in [-\frac{3\pi}{2}; -\pi]$: $\cos < 0$

3) $x \in (-\frac{1}{3}; 0]$: $3x \in (-1; 0]$: $[3x] = -1$

$3\pi x \in (-\pi; 0]$

якщо $3\pi x \in (-\pi; -\frac{\pi}{2}]$: $\cos \le 0$

якщо $3\pi x \in (-\frac{\pi}{2}; 0]$: $\cos > 0$

4) $x \in (0; \frac{1}{3}]$: $3x \in (0; 1]$: $[3x] = 0$

5) $x \in (\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$: $3x \in (1; 2]$: $[3x] = 1$

$3\pi x \in (\pi; 2\pi]$:

якщо $3\pi x \in (\pi; \frac{3\pi}{2}]$: $\cos \le 0$

якщо $3\pi x \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$: $\cos > 0$

6) $x \in (\frac{2}{3}; 1]$: $3x \in [2; 3]$: $[3x] = 2$

$3\pi x \in (2\pi; 3\pi]$:

якщо $3\pi x \in (2\pi; \frac{5\pi}{2}]$: $\cos \ge 0$

якщо $3\pi x \in (\frac{5\pi}{2}; 3\pi]$: $\cos < 0$

7) $x \in (1; \frac{4}{3}]$: $3x \in (3; 4]$: $[3x] = 3$

$3\pi x \in (3\pi; 4\pi]$

якщо $3\pi x \in (3\pi; \frac{7\pi}{2}]$: $\cos \le 0$

якщо $3\pi x \in (\frac{7\pi}{2}; 4\pi]$: $\cos > 0$

8) $x \in \left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right]$: $3x \in (4; 5]$ $[3x] = 4$

$3\pi x \in (4\pi; 5\pi]$

якщо $3\pi x \in \left(4\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$: $\cos \geq 0$

якщо $3\pi x \in \left(\frac{9\pi}{2}; 5\pi\right]$: $\cos < 0$

9) $x \in \left(\frac{5}{3}; 2\right]$ $3x \in (5; 6]$ $[3x] = 5$

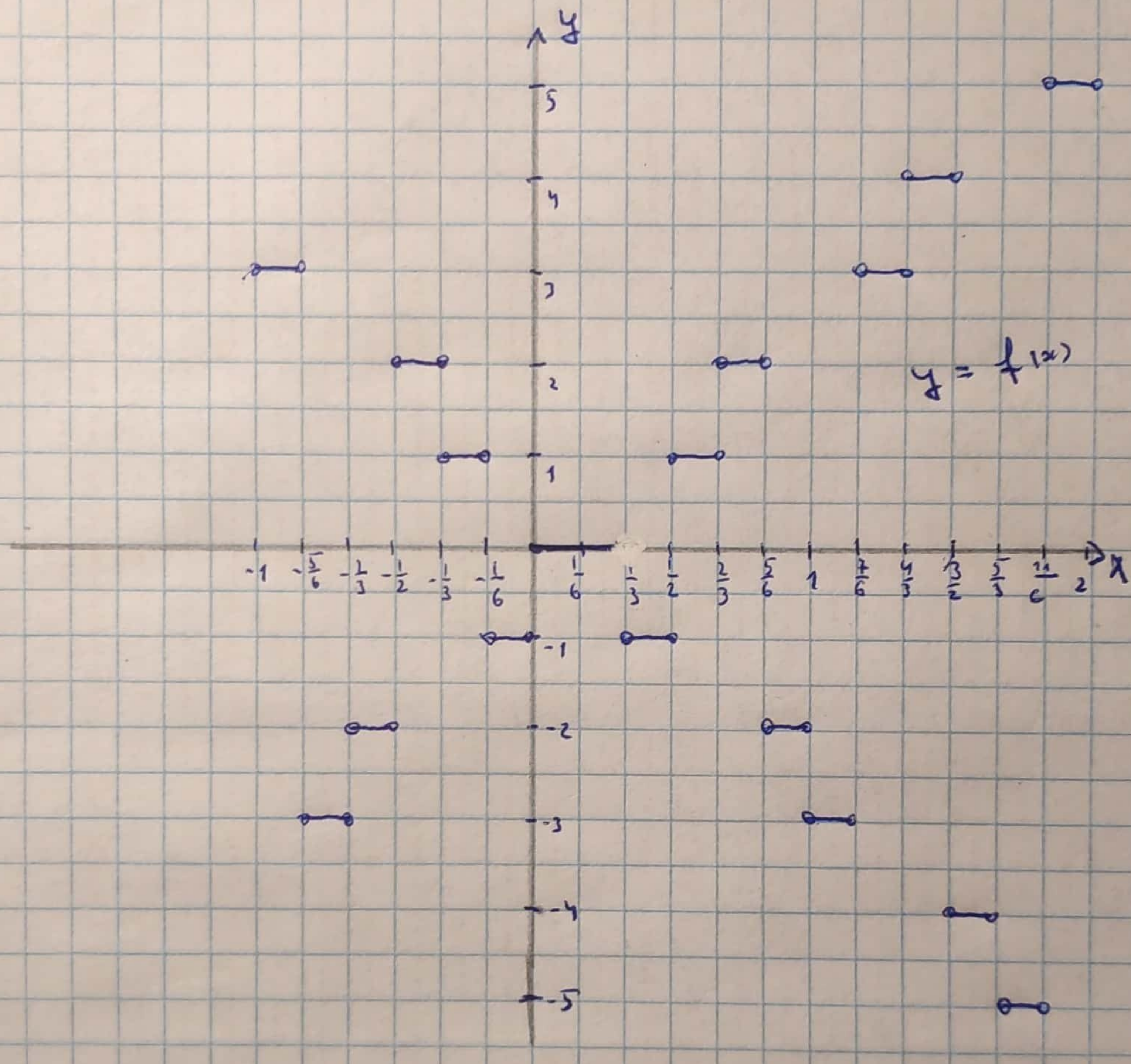
$3\pi x \in (5\pi; 6\pi]$

якщо $3\pi x \in \left(5\pi; \frac{11\pi}{2}\right]$: $\cos \leq 0$

якщо $3\pi x \in \left(\frac{11\pi}{2}; 6\pi\right]$: $\cos > 0$

Остаточно:

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x \in \left[-1; -\frac{5}{6}\right] \\ -3, & x \in \left(-\frac{5}{6}; -\frac{2}{3}\right] \\ -2, & x \in \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right] \\ 2, & x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \\ 1, & x \in \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}\right] \\ -1, & x \in \left(-\frac{1}{6}; 0\right] \\ 0, & x \in \left(0; \frac{1}{3}\right] \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right] \\ 1, & x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right] \\ 2, & x \in \left(\frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right] \\ -2, & x \in \left(\frac{5}{6}; 1\right] \\ -3, & x \in \left(1; \frac{7}{6}\right] \\ 3, & x \in \left(\frac{7}{6}; \frac{4}{3}\right] \\ 4, & x \in \left(\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right] \\ -4, & x \in \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right] \\ -5, & x \in \left(\frac{5}{3}; \frac{11}{6}\right] \\ 5, & x \in \left(\frac{11}{6}; 2\right] \end{cases}$$


y
x
y = f(x)
-1
$-\frac{5}{6}$
$-\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$
$\frac{5}{6}$
1
$\frac{7}{6}$
$\frac{4}{3}$
$\frac{3}{2}$
$\frac{5}{3}$
$\frac{11}{6}$
2
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5

Зауваження. Можливо, в окремих точках ф-ії f набуває не тих значення, що написані в системі, але, оскільки к-сть цих точок скінченна, то міра Лебега на них $= 0$, тому це не вплине на знач. інтегралів. Тому надалі не втрачаючи загальності будемо вважати, що функція f набуває значення на інтервалах, наприклад при $x \in (-1; -\frac{5}{6})$: $f(x) = 3$ і т.д. (це зроблено для полегшення наст. записів):

Позначимо:

$$A_+ = (-1; -\tfrac{5}{6}) \cup (-\tfrac{1}{2}; -\tfrac{1}{3}) \cup (-\tfrac{1}{3}; -\tfrac{1}{6}) \cup (\tfrac{1}{2}; \tfrac{2}{3}) \cup$$
$$\cup (\tfrac{2}{3}; \tfrac{5}{6}) \cup (\tfrac{7}{6}; \tfrac{4}{3}) \cup (\tfrac{4}{3}; \tfrac{3}{2}) \cup (\tfrac{11}{6}; 2)$$

$$A_- = (-\tfrac{5}{6}; -\tfrac{2}{3}) \cup (-\tfrac{2}{3}; -\tfrac{1}{2}) \cup (-\tfrac{1}{6}; 0) \cup (\tfrac{1}{3}; \tfrac{1}{2}) \cup$$
$$\cup (\tfrac{5}{6}; 1) \cup (1; \tfrac{7}{6}) \cup (\tfrac{3}{2}; \tfrac{5}{3}) \cup (\tfrac{5}{3}; \tfrac{11}{6})$$

Тоді:

$$\int_A f^+(x)\,d\lambda = \int [3x]\cdot \operatorname{sign}(\cos 3\pi x)\, 1_{A_+}(x)\,d\lambda =$$

$$= (3+2+1+1+2+3+4+5)\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{3}$$

$$\int_A f^-(x)\,d\lambda = \int |[3x]\operatorname{sign}(\cos 3\pi x)|\, 1_{A_-}(x)\,d\lambda =$$

$$= (3+2+1+1+2+3+4+5)\cdot\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{3}$$

$$\int_A f\,d\lambda = \int_A f^+ d\lambda - \int_A f^- d\lambda = \frac{7}{3} - \frac{7}{3} = 0$$

$$\int_A |f|\,d\lambda = \int_A f^+ d\lambda + \int_A f^- d\lambda = \frac{7}{3} + \frac{7}{3} = \frac{14}{3}.$$

N 6

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2+\sin^{2n} 2x)^2}, \quad A = \mathbb{R}_+$$

розглянемо два випадки:

I) $\sin 2x \neq \pm 1$:

Візьмемо таку ф-ію: $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Оскільки в знаменнику ф-ії $f(x)$ – синус у парній степені, то $|f_n(x)| \leq g(x)$

тоді маємо:

1) $|f_n(x)| \leq g(x)$

2) $f_n(x) \to g(x), \; n \to \infty$

тоді за теоремою про мажоранту збіжність маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\lambda(x) = \int_A g(x) \, d\lambda(x)$$

II) У випадку, коли $\sin 2x = \pm 1$ маємо множину $C = \{x \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}\}, m \in \mathbb{Z}$.

Ця множина зліченна, тому $\lambda(C) = 0$

Отже, маємо:

$$\int_{[0;+\infty)} \frac{x}{(1+x^2)^2} \, d\lambda(x) = \int_{[0;+\infty)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{(1+x^2)^2} \cdot 1_{[0;n]} \right) d\lambda(x) =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{За теоремою} \\ \text{Беппо Леві} \end{matrix} \right\} = \lim_{n\to\infty} \int_{[0;+\infty)} \frac{x}{(1+x^2)^2} \cdot 1_{[0;n]} \, d\lambda(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{[0;n]} \frac{x}{(1+x^2)^2} \, d\lambda(x) = \left\{ \begin{matrix} \text{За теоремою 2.6.12 [1]} \\ \text{переходимо до інтеграла} \\ \text{Рімана} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{1+x^2} \Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{2} (0 - (-1)) = \frac{1}{2}$$