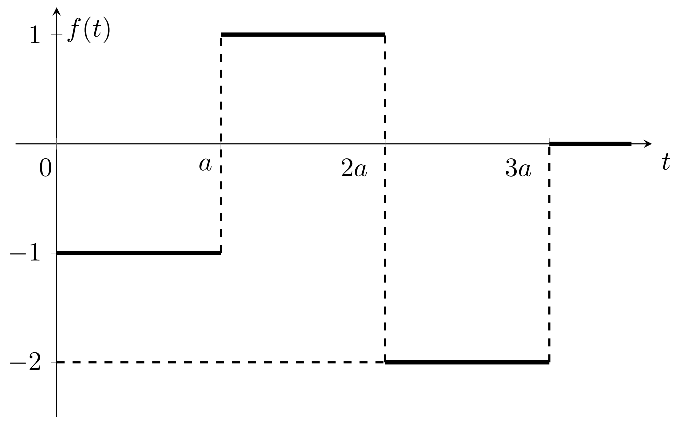
# Самостійна робота з гармонічного аналізу

## Варіант 4

КА-02 Козак Назар

**Задача 21.**

По даному графіку оригінала знайти зображення.




---

маємо:

$$f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t < a \\ 1, & a \leqslant t < 2a \\ -2, & 2a \leqslant t \leqslant 3a \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

Розпишемо функцію $f(t)$ через функції Хевісайда:

$$f(t) = -\eta(t) + 2\eta(t-a) - 3\eta(t-2a) + 2\eta(t-3a)$$

Нагадаємо перетворення Лапласа функції Хевісайда:

$$\mathcal{L}\{\eta(t)\}(p) = \frac{1}{p} \qquad \mathcal{L}\{\eta(t-T)\}(p) = \frac{e^{-Tp}}{p}$$

Оскільки перетворення Лапласа лінійне, маємо:

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = -\mathcal{L}\{\eta(t)\} + 2\mathcal{L}\{\eta(t-a)\} - 3\mathcal{L}\{\eta(t-2a)\} + 2\mathcal{L}\{\eta(t-3a)\} = -\frac{1}{p} + 2 \cdot \frac{e^{-ap}}{p} -$$

$$-3 \cdot \frac{e^{-2ap}}{p} + 2 \cdot \frac{e^{-3ap}}{p} = \frac{-1 + 2e^{-ap} - 3e^{-2ap} + 2e^{-3ap}}{p}$$

**Відповідь.** $\dfrac{-1 + 2e^{-ap} - 3e^{-2ap} + 2e^{-3ap}}{p}$

**Задача 22.**

Знайти оригінал по заданому зображенню: $\dfrac{1}{p(p^2+1)^2}$

---

Розкладемо $\frac{1}{p(p^2+1)^2}$ на прості дроби методом невизначених коєфіцієнтів:

$$\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+1} + \frac{Dp+E}{(p^2+1)^2} = \frac{A(p^2+1)^2 + (Bp+C)(p^3+p) + p(Dp+E)}{p(p^2+1)^2}$$

маємо:

$$A(p^2+1)^2 + (Bp+C)(p^3+p) + p(Dp+E) = 1$$

$$Ap^4 + 2Ap^2 + A + Bp^4 + Bp^2 + Cp^3 + Cp + Dp^2 + Ep = 1$$

$$(A+B)p^4 + Cp^3 + (2A+B+D)p^2 + (C+E)p + A = 1$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 2A+B+D=0 \\ C+E=0 \\ A=1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \\ D=-1 \\ E=0 \end{cases}$$

Отже:

$$\frac{1}{p(p^2+1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{(p^2+1)^2}$$

$\frac{1}{p} \risingdotseq \eta(t)$; $\quad -\frac{p}{p^2+1} \risingdotseq -\cos(t)$. Залишилось знайти оригінал: $\frac{p}{(p^2+1)^2}$. Покладемо: $F(p) = \frac{1}{p^2+1}$; $G(p) = \frac{p}{p^2+1}$; $f(t) = \sin(t)$; $g(t) = \cos(t)$. Оскільки $g(t) \fallingdotseq G(p)$ та $f(t) \fallingdotseq F(p)$, то за властивістю добутку зображень маємо:

$$f(t) * g(t) \fallingdotseq F(p) \cdot G(p) = \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1} = \frac{p}{(p^2+1)^2}$$

$$f(t) * g(t) = \int_o^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \sin\tau\cos(t-\tau)d\tau = \int_0^t = \frac{1}{2}\int_0^t (\sin(2\tau-t) + \sin t)d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \sin(2\tau-t)d(2\tau-t) + \frac{1}{2}t\cdot\sin t = -\frac{1}{4}\cos(2\tau-t)\Big|_0^t + \frac{1}{2}t\cdot\sin t = \frac{1}{2}t\sin t$$

Отже, маємо: $-\frac{p}{(p^2+1)^2} \risingdotseq -\frac{1}{2}t\sin t$. Тоді, оскільки перетворення Лапласа - лінійне, маємо:

$$\frac{1}{p(p^2+1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{(p^2+1)^2} \risingdotseq \eta(t) - \cos t - \frac{1}{2}t\sin t$$

**Відповідь.** $\eta(t) - \cos t - \dfrac{1}{2} t \sin t$

**Задача 24.**

Операційним методом розв'язати задачу Коші: $y'' - y = \cos 3t, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1$

---

Нехай $y \risingdotseq Y(p)$, тоді $y'' \risingdotseq p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 \cdot Y(p) - p - 1$. Отже, маємо:

$$y'' - y \risingdotseq p^2 \cdot Y(p) - p - 1 - Y(p) = (p^2 - 1) \cdot Y(p) - p - 1$$

Оскільки $\cos 3t \risingdotseq \frac{p}{p^2+9}$, маємо:

$$(p^2 - 1) \cdot Y(p) - p - 1 = \frac{p}{p^2 + 9} \quad \Rightarrow \quad (p^2 - 1) \cdot Y(p) = \frac{p + (p+1) \cdot (p^2 + 9)}{p^2 + 9} = \frac{p^3 + p^2 + 10p + 9}{p^2 + 9}$$

Розкладемо останній дріб на прості дроби методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{p^3 + p^2 + 10p + 9}{(p^2 + 9)(p - 1)(p + 1)} = \frac{Ap + B}{p^2 + 9} + \frac{C}{p - 1} + \frac{D}{p + 1} = \frac{(Ap + B)(p^2 - 1) + C(p^2 + 9)(p + 1) + D(p^2 + 9)(p - 1)}{(p^2 + 9)(p - 1)(p + 1)}$$

$$Ap^3 - Ap + Bp^2 - B + Cp^3 + Cp^2 + 9Cp + 9C + Dp^3 - Dp^2 + 9Dp - 9D = p^3 + p^2 + 10p + 9$$

$$(A + C + D)p^3 + (B + C - D)p^2 + (-A + 9C + 9D)p - B + 9C - 9D = p^3 + p^2 + 10p + 9$$

$$\begin{cases} A + C + D = 1 \\ B + C - D = 1 \\ -A + 9C + 9D = 10 \\ -B + 9C - 9D = 9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{10} \\ B = 0 \\ C = \frac{21}{20} \\ D = \frac{1}{20} \end{cases}$$

Отже, маємо:

$$\frac{p^3 + p^2 + 10p + 9}{(p^2 + 9)(p - 1)(p + 1)} = -\frac{p}{10(p^2 + 9)} + \frac{21}{20(p - 1)} + \frac{1}{20(p + 1)}$$

Оскільки $-\frac{p}{10(P^2+9)} \fallingdotseq -\frac{1}{10}\cos(3t)$; $\quad \frac{21}{20(p-1)} = \frac{21}{20} \cdot \frac{1}{p-1} \fallingdotseq \frac{21}{20} e^t$; $\quad \frac{1}{20(p+1)} \fallingdotseq \frac{1}{20} e^{-t}$, маємо:

$$Y(p) = -\frac{p}{10(p^2 + 9)} + \frac{21}{20(p - 1)} + \frac{1}{20(p + 1)} \fallingdotseq -\frac{1}{10}\cos(3t) + \frac{21}{20} e^t + \frac{1}{20} e^{-t}$$

**Відповідь.** $y(t) = -\frac{1}{10}\cos(3t) + \frac{21}{20} e^t + \frac{1}{20} e^{-t}$

**Задача 26.** Розв'язати систему диференційних рівнянь. $\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 4x - y \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 1$

---

Нехай $x(t) \risingdotseq X(p); y(t) \risingdotseq Y(p)$, тоді $x' \risingdotseq p \cdot X(p) - x(0) = pX(p) - 1$; $y(t)-$ аналогічно. За лінійністю: $x + 2y + 1 \risingdotseq X(p) + 2Y(p) + \frac{1}{p}$; $4x - y \risingdotseq 4X(p) - Y(p)$. Тоді:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = X(p) + 2Y(p) + \frac{1}{p} \\ pY(p) - 1 = 4X(p) - Y(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p-1)X(p) - 2Y(p) = 1 + \frac{1}{p} \\ -4X(p) + (p+1)Y(p) = 1 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -2 \\ -4 & p+1 \end{vmatrix} = p^2 - 1 - 8 = p^2 - 9 = (p-3)(p+3)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{p} & -2 \\ 1 & p+1 \end{vmatrix} = \left(1 + \frac{1}{p}\right)(p+1) + 2 = p + 1 + 1 + \frac{1}{p} + 2 = \frac{p^2 + 4p + 1}{p}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-1 & 1+\frac{1}{p} \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = p - 1 + 4\left(1 + \frac{1}{p}\right) = p - 1 + 4 + \frac{4}{p} = \frac{p^2 + 3p + 4}{p}$$

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{p^2 + 4p + 1}{p(p-3)(p+3)}$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p^2 + 3p + 4}{p(p-3)(p+3)}$$

1. $Y(p) = \dfrac{p^2 + 3p + 4}{p(p-3)(p+3)} \fallingdotseq ?$

$$\frac{p^2 + 3p + 4}{p(p-3)(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p+3} = \frac{A(p^2 - 9) + B(p^2 + 3p) + C(p^2 - 3p)}{p(p-3)(p+3)}$$

$$Ap^2 - 9A + Bp^2 + 3Bp + Cp^2 - 3Cp = p^2 + 3p + 4$$

$$(A + B + C)p^2 + (3B - 3C)p - 9A = p^2 + 3p + 4$$

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ B - C = 1 \\ A = -\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B + C = \frac{13}{9} \\ B - C = 1 \\ A = -\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{4}{9} \\ B = \frac{11}{9} \\ C = \frac{2}{9} \end{cases}$$

Оскільки $\frac{1}{p} \risingdotseq \eta(t)$; $\frac{1}{p-3} \risingdotseq e^{3t}$; $\frac{1}{p+3} \risingdotseq e^{-3t}$, то за лінійністю перетворення Лапласа маємо:

$$Y(p) = -\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{p} + \frac{11}{9}\cdot\frac{1}{p-3} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{p+3} \risingdotseq -\frac{4}{9}\cdot\eta(t) + \frac{11}{9}\cdot e^{3t} + \frac{2}{9}\cdot e^{-3t} = y(t)$$

2. X(p) $= \dfrac{p^2+4p+1}{p(p-3)(p+3)} \risingdotseq ?$

$$\frac{p^2+4p+1}{p(p-3)(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p+3} = \frac{A(p^2-9)+B(p^2+3p)+C(p^2-3p)}{p(p-3)(p+3)}$$

$$Ap^2 - 9A + Bp^2 + 3Bp + Cp^2 - 3Cp = p^2 + 4p + 1$$

$$(A+B+C)p^2 + (3B-3C)p - 9A = p^2 + 4p + 1$$

$$\begin{cases} A+B+C = 1 \\ B-C = \frac{4}{3} \\ A = -\frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+C = \frac{10}{9} \\ B-C = \frac{4}{3} \\ A = -\frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{9} \\ B = \frac{11}{9} \\ C = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

Оскільки $\frac{1}{p} \risingdotseq \eta(t)$; $\frac{1}{p-3} \risingdotseq e^{3t}$; $\frac{1}{p+3} \risingdotseq e^{-3t}$, то за лінійністю перетворення Лапласа маємо:

$$X(p) = -\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{p} + \frac{11}{9}\cdot\frac{1}{p-3} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{p+3} \risingdotseq -\frac{1}{9}\eta(t) + \frac{11}{9}e^{3t} - \frac{1}{9}e^{-3t} = x(t)$$

Отримали:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{9}\eta(t) + \frac{11}{9}e^{3t} - \frac{1}{9}e^{-3t} \\ y(t) = -\frac{4}{9}\cdot\eta(t) + \frac{11}{9}\cdot e^{3t} + \frac{2}{9}\cdot e^{-3t} \end{cases}$$

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), \text{коли} f(x) > 0 \\ 0, \text{інакше} \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} |f(x)|, \text{коли} f(x) < 0 \\ 0, \text{інакше} \end{cases}$$