Самостійна робота 2 з функціонального аналізу

Варіант 4

КА-02 Козак Назар

Задача 1. З'ясувати чи буде банаховим лінійний нормований простір $(E, \|\cdot\|)$, якщо $E = \left\{ f \in \mathcal{C}\left([0,1]\right); \mathbb{C} : f(0) = e^{-i\frac{\pi}{4}} f(1) \right\}, \|f\| = \|f\|_{\infty}$.

Спочатку нагадаємо твердження з лекцій:

Твердження. Нехай $(E, \|\cdot\|)$ – банаховий простір, а E_0 – замкнутий лінійний підпростір простору E. Тоді $(E_0, \|\cdot\|)$ – банаховий простір.

З нього випливає, що щоб довести, що $(E, \|\cdot\|_{\infty})$ - банаховий простір нам достатньо довести, що E – замкнутий лінійний підпростір простору $\bar{E}$, такого що $\left(\bar{E}, \|\cdot\|_{\infty}\right)$ – банаховий простір. Тому розділимо доведення на дві частини:

1. Як відомо з лекцій [1]: лінійний нормований простір $\mathcal{C}_b\left(\Omega, \mathbb{K}\right)$ є банаховим, коли $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. У нашому випадку $\Omega = [0,1] \subset \mathbb{R}$, тому $\left(\mathcal{C}_b\left([0,1], \mathbb{C}\right), \|\cdot\|_{\infty}\right)$ є банаховим простором.

   З іншого боку $f \in E \Rightarrow f \in C([0,1], \mathbb{C})$. Тобто кожна функція з лінійного простору E є неперервною на відрізку $[0,1]$ з чого за теоремою Вейєрштрасса випливає те, що вона є обмеженою на $[0,1]$. Отже, $E \subset \mathcal{C}_b\left([0,1], \mathbb{C}\right)$. Тепер доведемо, що E є лінійним підпростором простору $\mathcal{C}_b\left([0,1], \mathbb{C}\right)$, для цього достатньо перевірити дві умови:

   (a) Нехай $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, тобто $\mathbf{x}(0) = e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathbf{x}(1), \quad \mathbf{y}(0) = e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathbf{y}(1)$, тоді

   $$(\mathbf{x}+\mathbf{y})(0) = \mathbf{x}(0)+\mathbf{y}(0) = e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathbf{x}(1)+e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathbf{y}(1) = e^{-i\frac{\pi}{4}}(\mathbf{x}(1)+\mathbf{y}(1)) = e^{-i\frac{\pi}{4}}(\mathbf{x}+\mathbf{y})(1) \Rightarrow \quad \mathbf{x}+\mathbf{y} \in E$$

   (b) Нехай $\mathbf{x} \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, тоді

   $$(\lambda\mathbf{x})(0) = \lambda\mathbf{x}(0) = \lambda e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathbf{x}(1) = e^{-i\frac{\pi}{4}}(\lambda\mathbf{x}(1)) = e^{-i\frac{\pi}{4}}(\lambda\mathbf{x})(1) \quad \Rightarrow \quad (\lambda\mathbf{x}) \in E$$

   Отже, маємо: E є лінійним підпростором простору $\mathcal{C}_b\left([0,1], \mathbb{C}\right)$, такого що $\left(\mathcal{C}_b\left([0,1], \mathbb{C}\right), \|\cdot\|_{\infty}\right)$ є банаховим простом.

2. Тепер доведемо замкненість E:

   Нехай $f^* \in E'$. З цього випливає, що $\exists \left(f_n\right)_{n=1}^{\infty} \in E : \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f^*$відносно $\|\cdot\|_{\infty}$.
   Також маємо що $f_n \in E \Leftrightarrow f_n(0) = f_n(1)e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Тоді:

   $$\lim_{n\to\infty} f_n = f^* \text{відносно } \|\cdot\|_{\infty} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : \|f_n - f^*\|_{\infty} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : \sup_{t\in[0,1]} |f_n - f^*| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in [0,1] : \forall\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : |f_n - f^*| < \varepsilon \ (*)$$

   Оскільки остання умова виконується для $\forall t \in [0,1]$, то розглянемо випадок, коли $t = 0$:

   $$\forall\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : |f_n(0) - f^*(0)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : |f_n(1)e^{-i\frac{\pi}{4}} - f^*(0)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(f_n(1)e^{-i\frac{\pi}{4}}) = f^*(0) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-i\frac{\pi}{4}}\lim_{n\to\infty} f_n(1) = f^*(0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n(1) = e^{i\frac{\pi}{4}} f^*(0)$$

Тепер доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = f^*(1)$, для цього в $(*)$ візьмемо $t = 1 \in [0,1]$. Маємо:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : |f_n(1) - f^*(1)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n(1) = f^*(1)$$

Отже, маємо:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = e^{i\frac{\pi}{4}} f^*(0) \quad \Leftrightarrow \quad f^*(1) = e^{i\frac{\pi}{4}} f^*(0) \quad \Leftrightarrow \quad f^*(0) = e^{-i\frac{\pi}{4}} f^*(1) \quad \Leftrightarrow \quad f^* \in E \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad E \text{ є замкнутим}$$

Остаточно маємо E – замкнутий лінійний підпростір простору $\mathcal{C}_b([0,1],\mathbb{C})$, такого, що $(\mathcal{C}_b([0,1],\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ є банаховим простором, а, отже, $(E, \|\cdot\|_\infty)$ є банаховим простором.

Відповідь. Так, $(E, \|\cdot\|_\infty)$ є банаховим простором.

Задача 2. Для відображення $\phi : \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ знайти а) значення λ, для яких ϕ є стиском; б) знайти розв'язок рівняння $f = \phi(f)$ для одного із знайдених значень $\lambda \neq 0$, якщо:
$\phi(f) = \lambda \int\limits_0^1 (t+s)^2 f(s) ds - 2t^2$.

---

1. Спочатку нагадаємо означення стиску:

   Означення. Нехай $(E, \|\cdot\|)$ - лінійний нормований простір та $X \subset E$. Відображення $\varphi : X \to X$ називається стиском на X, якщо існує таке $q \in (0,1)$, що

   $$\|\varphi(x') - \varphi(x'')\| \leqslant q\|x' - x''\|, \qquad \text{для всіх } x', x'' \in X.$$

   Нехай $f, g \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$. Оскільки даний лінійний простір - простір неперервних функцій, тоді розглядаємо супремум-норму, тобто $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f|$. Розглянемо вираз $\|\phi(f) - \phi(g)\|_\infty$:

$$\|\phi(f)-\phi(g)\|_\infty = \left\|\lambda \int\limits_0^1 (t+s)^2 f(s)ds - 2t^2 - \lambda \int\limits_0^1 (t+s)^2 g(s)ds + 2t^2\right\|_\infty = \left\|\lambda \int\limits_0^1 (t+s)^2 \left(f(s) - g(s)\right) ds\right\|_\infty =$$

$$= \sup_{t\in[0,1]} \left|\lambda \int\limits_0^1 (t+s)^2 \left(f(s) - g(s)\right) ds\right| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} \left|\int\limits_0^1 (t+s)^2 \left(f(s) - g(s)\right) ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 (t+s)^2 \left|(f(s) - g(s))\right| ds \leqslant |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 (t+s)^2 \|(f(s) - g(s))\|_\infty ds =$$

$$= |\lambda| \cdot \|(f(s) - g(s))\|_\infty \sup_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 (t+s)^2 ds = |\lambda| \cdot \|(f(s) - g(s))\|_\infty \sup_{t\in[0,1]} \left(\frac{(t+s)^3}{3}\Big|_{s=0}^{s=1} \right) =$$

$$= |\lambda| \cdot \|(f(s) - g(s))\|_\infty \sup_{t\in[0,1]} \left(\frac{(t+1)^3}{3} - \frac{t^3}{3} \right) = |\lambda| \cdot \|(f(s) - g(s))\|_\infty \sup_{t\in[0,1]} \left(\frac{3t^2+3t+1}{3} \right) =$$

$$= |\lambda| \cdot \|(f(s) - g(s))\|_\infty \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{3} \cdot |\lambda| \cdot \|(f(s) - g(s))\|_\infty$$

Отже, ми отримали:

$$\|\phi(f)-\phi(g)\|_\infty \leqslant \frac{7}{3}\cdot|\lambda|\cdot\|(f(s)-g(s))\|_\infty$$

Згідно з означення ϕ буде стиском тоді, коли $\frac{7}{3}\cdot|\lambda|\in(0,1)$. Тоді маємо:

$$\frac{7}{3}\cdot|\lambda|\in(0,1) \quad\Leftrightarrow\quad |\lambda|\in(0,\frac{3}{7}) \quad\Leftrightarrow\quad \lambda\in(-\frac{3}{7},0)\cup(0,\frac{3}{7})$$

Отже, ми отримали: якщо $\lambda\in(-\frac{3}{7},0)\cup(0,\frac{3}{7})$, то ϕ є стиском на $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$.

2. Як відомо з лекцій [2]: коли $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ є компактною множиною – лінійний нормований простір $\mathcal{C}(\Omega;\mathbb{K})$ є банаховим. В нашому випадку $\Omega=[0,1]\subset\mathbb{R}$ - обмежена та замкнена множина, тому вона є компактною, а, отже, $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ - банаховий простір. З цього за теоремою Банаха маємо те, що стиск ϕ на $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ має єдину нерухому точку, тобто існує тільки один розв'язок даного рівняння: $f=\phi(f)$ в $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

   Візьмемо $\lambda=\frac{1}{4}\in(-\frac{3}{7},0)\cup(0,\frac{3}{7})$. Тоді маємо:

$$f=\frac{1}{4}\int\limits_0^1(t+s)^2f(s)ds-2t^2=\frac{1}{4}\int\limits_0^1(t^2+2st+s^2)f(s)ds-2t^2=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 t^2f(s)ds+\frac{1}{4}\int\limits_0^1 2stf(s)ds+\frac{1}{4}\int\limits_0^1 s^2f(s)ds-2t^2=$$

$$=\frac{1}{4}t^2\int\limits_0^1 f(s)ds+\frac{1}{2}t\int\limits_0^1 sf(s)ds+\frac{1}{4}\int\limits_0^1 s^2f(s)ds-2t^2=t^2\left(\frac{1}{4}\int\limits_0^1 f(s)ds-2\right)+\frac{1}{2}t\int\limits_0^1 sf(s)ds+\frac{1}{4}\int\limits_0^1 s^2f(s)ds$$

   Покладемо:

$$\begin{cases} A=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 f(s)ds-2 \\ B=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 sf(s)ds \\ C=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 s^2f(s)ds \end{cases}$$

   Бачимо, що $A,B,C\in\mathbb{R}$. Отримали:

$$f(t)=At^2+Bt+C$$

   Виразимо кожну з констант окремо:

   (a) A:

$$A=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 f(s)ds-2=\frac{1}{4}\int\limits_0^1(As^2+Bs+C)ds-2=\frac{1}{4}A\int\limits_0^1 s^2ds+\frac{1}{4}B\int\limits_0^1 sds+C\int_0^1 ds-2=$$

$$=\frac{1}{4}A\left.\frac{s^3}{3}\right|_{s=0}^{s=1}+\frac{1}{4}B\left.\frac{s^2}{2}\right|_{s=0}^{s=1}+\frac{1}{4}C\left.s\right|_{s=0}^{s=1}-2=\frac{1}{12}A+\frac{1}{8}B+\frac{1}{4}C-2$$

   (b) B:

$$B=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 sf(s)ds=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 s(As^2+Bs+C)ds=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(As^3+Bs^2+Cs)ds=\frac{1}{2}A\int\limits_0^1 s^3ds+\frac{1}{2}B\int\limits_0^1 s^2ds+\frac{1}{2}C\int\limits_0^1 sds=$$

$$=\frac{1}{2}A\left.\frac{s^4}{4}\right|_{s=0}^{s=1}+\frac{1}{2}B\left.\frac{s^3}{3}\right|_{s=0}^{s=1}+\frac{1}{2}C\left.\frac{s^2}{2}\right|_{s=0}^{s=1}=\frac{1}{8}A+\frac{1}{6}B+\frac{1}{4}C$$

(c) C:

$$C = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 s^2 f(s)ds = C = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 s^2(As^2+Bs+C)ds = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 (As^4+Bs^3+Cs^2)ds =$$

$$= \frac{1}{4}A\int\limits_0^1 s^4 ds + +\frac{1}{4}B\int\limits_0^1 s^3 ds + \frac{1}{4}C\int\limits_0^1 s^2 ds = \frac{1}{4}A\ \frac{s^5}{5}\Big|_{s=0}^{s=1} + \frac{1}{4}A\ \frac{s^4}{4}\Big|_{s=0}^{s=1} + \frac{1}{4}C\ \frac{s^3}{3}\Big|_{s=0}^{s=1} =$$

$$= \frac{1}{20}A + \frac{1}{16}B + \frac{1}{12}C$$

Отримали систему:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{12}A + \frac{1}{8}B + \frac{1}{4}C - 2 \\ B = \frac{1}{8}A + \frac{1}{6}B + \frac{1}{4}C \\ C = \frac{1}{20}A + \frac{1}{16}B + \frac{1}{12}C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11}{12} - \frac{1}{8}B - \frac{1}{4}C = 2 \\ \frac{1}{8}A - \frac{5}{6}B + \frac{1}{4}C = 0 \\ \frac{1}{20}A + \frac{1}{16}B - \frac{11}{12}C = 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{11}{12} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{16} & -\frac{11}{12} \end{vmatrix} = \frac{45457}{69120}; \qquad \Delta_A = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{11}{12} \end{vmatrix} = \frac{431}{288} \qquad \Delta_B = \begin{vmatrix} \frac{11}{12} & 2 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{20} & 0 & -\frac{11}{12} \end{vmatrix} = \frac{61}{240}$$

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} \frac{11}{12} & -\frac{1}{8} & 2 \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{16} & 0 \end{vmatrix} = \frac{19}{192}$$

Тоді:

$$\begin{cases} A = \frac{\Delta_A}{\Delta} = \frac{45457}{69120} \cdot \frac{288}{431} \\ B = \frac{\Delta_B}{\Delta} = \frac{45457}{69120} \cdot \frac{240}{61} \\ C = \frac{\Delta_C}{\Delta} = \frac{45457}{69120} \cdot \frac{192}{19} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{45457}{103440} \\ B = \frac{45457}{17568} \\ C = \frac{45457}{6840} \end{cases}$$

Отже, отримуємо функцію f, яка і буде єдиним розв'язком заданого рівняння:

$$f(t) = \frac{45457}{103440}t^2 + \frac{45457}{17568}t + \frac{45457}{6840}$$

Відповідь. а) $\lambda \in (-\frac{3}{7}, 0) \cup (0, \frac{3}{7})$

б) $f(t) = \frac{45457}{103440}t^2 + \frac{45457}{17568}t + \frac{45457}{6840}$.

Задача 3. Встановити чи буде множина X предкомпактною в лінійному нормованому просторі $(E, \|\cdot\|)$ якщо $X = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_1 : |x_n| \leqslant \frac{1}{n^2}\right\}, E = \ell_1$.

Нагадаємо теорему з лекцій:

Теорема. Нехай $p \in [1, +\infty)$. Підмножина $F \subset \ell_p$ є предкомпактною тоді і тільки тоді, коли

1. підмножина F є обмеженою за нормою простору ℓ_p;
2. для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $n \in \mathbb{N}$, що для всіх $\mathbf{x} \in F, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$,

$$\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Зазначимо, що, оскільки нам заданий лінійний нормований простір ℓ_1, то нормою на ньому буде $\|\cdot\|_1$. Тобто для $\mathbf{x} \in \ell_1, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) : \|\mathbf{x}\|_1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_k|$. Розділимо доведення на дві частини згідно з теоремою наведеною вище:

1. Нехай $\mathbf{x} \in X, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$, тоді:

   $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ – нерівність випливає з означення множини X

   З курсу математичного аналізу відомо, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Отже, з довільності вибору $\mathbf{x}$ ми отримали те, що $\forall \mathbf{x} \in X : \|\mathbf{x}\|_1 \leqslant \frac{\pi^2}{6}$, що означає обмеженість множини X за нормою простору ℓ_1.

2. Нехай $\mathbf{x} \in X, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$. З умови маємо: $\forall \mathbf{x} \in X : |x_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$, тому, оскільки $\forall k \in \mathbb{N} : |x_k| \geqslant 0, \frac{1}{k^2} > 0$, а також оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ - збіжний, то за першою теоремою порівняння отримуємо те, що ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_k|$ - збіжний.

   Осільки ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_k|$ - збіжний, то з курсу математичного аналізу нам відомо, що збігаються всі його залшики, при чому:

   $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |x_k| = 0 \quad [3]$$

   Розпишемо останню рівність:

   $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |x_k| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : \left|\sum_{k=n}^{\infty} |x_k| - 0\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N : \sum_{k=n}^{\infty} |x_k| < \varepsilon$$

   Отже, ми отримали, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $n \in \mathbb{N}$, що для всіх $\mathbf{x} \in F, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$:

   $$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| < \varepsilon$$

Підсумуємо:

1. Підмножина X є обмеженою за нормою простору ℓ_1
2. Для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $n \in \mathbb{N}$, що для всіх $\mathbf{x} \in F, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| < \varepsilon$$

Отже, за теоремою наведеною вище ми маємо те, що множина X є предкомпактною в лінійному нормованому просторі $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$

Відповідь. множина X є предкомпактною в лінійному нормованому просторі $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$

Додаток

[1] - Чаповський Ю.А. - конспект лекцій з функціонального аналізу ст. 128 Теорема 1.6.17

[2] - Чаповський Ю.А. - конспект лекцій з функціонального аналізу ст. 128 Наслідок 1.6.18

[3] - Воробйов Н.Н. - теорія рядів ст. 34 теорема внизу сторінки