Позиционные и непозиционные системы счисления

Понятие числа возникло в глубокой древности, и тогда же возникла необходимость записи чисел. До возникновения письменности люди считали с помощью пальцев, палочек, ракушек, камешков, узелков на веревке и т. п. Но легко догадаться, что такой способ счета был неудобен, особенно когда приходилось иметь дело с большими числами, их сравнением и выполнением действий над ними.

Поэтому возникла необходимость в более рациональных способах счета. Его начали вести группами сложенных из одинакового количества элементов. Целую группу предметов (палочек, черточек, камней…) начали называть одним словом и обозначать одним знаком.

Этому содействовало развитие счета с помощью пальцев рук и ног. Переход человека к пальцевому и другому погрупповому счету привел к построению различных систем счисления: двоичной, пятеричной, восьмеричной, десятичной или десятеричной (10-ной), шестидесятеричной (60-ной) и др. Самая первая система была двоичная, когда человек считал при помощи рук. Следы этой системы счисления сохранились и до сегодняшних дней. И теперь часто считают парами.

Определение. Системой счисления называют совокупность правил наименования и изображения чисел с помощью конечного набора символов, называемых цифрами.

Кратко: система счисления – это способ записи чисел с помощью цифр.

В разные исторические периоды развития человечества для подсчетов и вычислений использовались те или иные системы счисления. Например, на Ближнем Востоке была распространена двенадцатеричная система: многие предметы (ножи, вилки, тарелки, носовые платки и т. д.) и сейчас считают дюжинами. Число месяцев в году двенадцать. Двенадцатеричная система счисления сохранилась в английской системе мер (например, 1 фут = 12 дюймам) и в денежной системе (1 шиллинг = 12 пенсам).

В древнем Вавилоне существовала весьма сложная шестидесятеричная система. Она, как и двенадцатеричная система, в какой-то степени сохранилась до наших дней (например, в системе измерения времени: 1 час = 60 минутам, 1 минута = 60 секундам, аналогично в системе измерения углов: 1 градус = 60 минутам, 1 минута = 60 секундам).

У некоторых африканских племен была распространена пятеричная система счисления, у ацтеков и народов майя, населявших в течение многих столетий обширные области американского континента, – двадцатеричная система. У некоторых племен Австралии и Полинезии встречалась двоичная система.

Все системы счисления на основе записи чисел делятся на *непозиционные* и *позиционные*.

1. *Непозиционные системы счисления*

Определение. Система счисления называется *непозиционной*, если значение цифры в записи числа не зависит от позиции, которую она занимает в последовательности цифр, изображающей число. Примеры непозиционных систем счисления: римская, древнегреческая и др.

Начиналось всё с единичной системы счисления.

Единичная система счисления. Простейшая, но абсолютно неудобная система счисления. Основана на единственной цифре – единице (палочке). Позволяет записывать только натуральные числа. Чтобы представить число в этой системе счисления, нужно записать столько палочек, каково само число (взаимно однозначное соответствие между конечными множествами A палочек и B предметов, олицетворяющих данное число). Уна́рная (единичная) система счисления – положительная суммарная целочисленная система счисления с основанием, равным 1. В качестве единственной «цифры» используется «1», черточка (|), камешек, костяшка счетов, узелок, зарубка и др. Данная система счисления – положительная система счисления с основанием, равным 1.

Использовалась нецивилизованными племенами, потребности которых в счете, как правило, не выходили за рамки первого десятка. Чисто формально единичную систему счисления можно отнести к числу основных (с основанием 1). Но, в отличие от остальных основных систем счисления, можно лишь с очень сильной натяжкой считать ее позиционной, а универсальной она вообще не является (в ней нельзя представить ноль, дроби и отрицательные числа).

Римская система счисления. С помощью семи цифр можно, причем относительно несложно и довольно выразительно представлять натуральные числа в диапазоне до нескольких тысяч:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Для записи числа в римской системе счисления, его необходимо разложить на сумму тысяч, полтысяч, сотен, полсотен, десятков, пятерок и единиц. Например, число 2367 в римской системе счисления запишется в виде MMCCCLXVII.

Вначале в римской системе счисления цифры записывались в порядке уменьшения их значения (слева направо). Потом, чтобы уменьшить количество знаков для записи числа, были приняты некоторые уточнения: когда перед цифрой с большим значением стоит цифра с меньшим значением, то это меньшее число необходимо отнять от большего. Например, число 4 стали писать IV вместо IIII, число 9 – IX вместо VIIII, 1994 записывают как MCMXCIV.

Заметим, что уточненная римская система остается непозиционной (каждая цифра означает одно и то же число). В рассмотренной римской системе, как и в любой другой непозиционной системе, неудобно записывать большие числа и выполнять арифметические действия над ними. В наше время римская система счисления большого практического применения не имеет и употребляется только для нумерации разделов и параграфов в книгах, обозначений номеров томов книг, месяцев, года, классов и т. д.

Древнегреческая система счисления, также известная как ионийская или новогреческая – непозиционная система счисления, – алфавитная запись чисел, в которой в качестве символов для счета, употребляют буквы классического греческого алфавита, а также некоторые буквы доклассической эпохи, такие как ϝ (дигамма), ϟ (коппа) и ϡ (сампи). Одно из начертаний дигаммы внешне похоже на распространившуюся в византийскую эпоху лигатуру ϛ (στ), поэтому распространилось заблуждение, что для записи числа 6 использовалась стигма. Эта система пришла на смену аттической (старогреческой) системе, господствовавшей в Греции в III в. до н. э. Необходимость сохранять порядок букв ради сохранения их числовых значений привела к относительно ранней (IV в. до н. э.) стабилизации греческого алфавита. А в V в. до н. э. появилась *алфавитная нумерация* – новая система записи чисел. В этой системе числа записывались при помощи букв алфавита, над которыми рисовались черточки (рис. 6.10).

Рис. 6.10. Древнегреческая ионийская десятеричная алфавитная система счисления

2. *Позиционные системы счисления*

Определение. Система счисления называется *позиционной*, если значение каждой цифры в записи числа зависит от ее позиции. Примеры позиционных систем счисления: шестидесятеричная вавилонская, десятеричная индо-арабская, шестнадцатеричная, двоичная и др.

Позиционная система счисления определяется целым числом $h > 1$, называемым основанием системы счисления. Система счисления с основанием h называется h-ичной (в частности, двоичной, троичной, десятичной и т. п.).

В *позиционной системе счисления* один и тот же знак-цифра может обозначать разные числа в зависимости от места (позиции), которое он занимает в записи данного числа. Например, в числе 28 381 первая слева цифра 8 показывает количество тысяч, вторая – десятков, а в числе 28 восьмерка показывает количество единиц.

В настоящее время общепринята десятичная система счисления. Современная десятичная система счисления была создана в Индии в VI в. н. э. (хотя первоначально ее изобрел древнегреческий ученый Архимед в III в. до н. э.). С помощью этой системы удобно записывать очень большие числа. Позже система была заимствована арабами и в XII в. из арабских стран попала в Европу, где к XVI в. распространилась везде.

Для записи любого числа в этой системе счисления используются, как известно, только десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Древнее изображение десятичных цифр (рис. 6.11) не случайно: каждая цифра обозначает число по количеству углов в ней. Например, 0 – углов нет, 1 – один угол, 2 – два угла и т. д. Написание десятичных цифр претерпело существенные изменения. Форма, которой мы пользуемся, установилась в XVI веке.

Рис. 6.11. Развернутая форма записи чисел или число в виде суммы разрядных единиц

Всякое натуральное число в десятичной системе счисления можно записать в виде суммы степеней с основанием 10:

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Число a можно записать и в следующем виде: $a = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0}$.

Черта сверху показывает отличие записи числа a от произведения чисел a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... , a_2, a_1, a_0. Если вместо букв пишутся цифры, то черта сверху не ставится.

Например, $423071 = 4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 =$
$$= 4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10 + 1.$$

Обычно на практике имеют дело с числами, не превышающими 10^{12}. Существуют (и ранее ими пользовались) позиционные системы с основанием счета, отличным от 10.

В позиционной системе счисления числа разбиваются на классы, каждый класс – на три разряда, которые считаются справа налево. Каждая цифра числа обозначает количество единиц того разряда, в котором стоит (единица каждого следующего разряда в 10 раз больше единицы предыдущего).

Соответствующие названия имеют следующие разрядные единицы:

1 – единица	10^9 – миллиард
10^1 – десяток	10^{12} – триллион
10^2 – сотня	10^{15} – квадриллион
10^3 – тысяча	10^{18} – квинтильон
10^6 – миллион	10^{21} – секстильон

Числа, меньшие 1000, принято называть числами I класса;
числа, большие 103, но меньшие 106 – 1, – числами II класса;
числа, большие 106, но меньшие 109 – 1, – числами III класса и т. д.

Все позиционные системы счисления имеют одинаковую структуру.

1. Для записи чисел используют количество цифр, определяемое числом основания системы счисления. Так, в 10-ной системе счисления для записи чисел используют 10 знаков (цифр): 0, 1, 2, … , 9;

- в пятеричной – 5 цифр: 0, 1, 2;
- в шестеричной – 6 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5;
- в шестнадцатеричной – 16 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A_{16}, B_{16}, C_{16}, D_{16}.

2. Одна и та жа цифра имеет разные значения в зависимости от места, занимаемого ей в записи числа.

Основание	**Система**	**Алфавит**
$h = 2$	Двоичная	0 1
$h = 3$	Троичная	0 1 2
$h = 8$	Восьмеричная	0 1 2 3 4 5 6 7
$h = 16$	Шестнадцатеричная	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

Число a в системе счисления с основанием h можно записать в виде:

$$a = a_n \cdot h^n + a_{n-1} \cdot h^{n-1} + a_{n-2} \cdot h^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot h^2 + a_1 \cdot h + a_0,$$

где a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... , a_2, a_1, a_0 – цифры числа a.

Например, при $h = 5$ имеем следующую запись натурального числа в 5-ричной системе счисления:

$$a_5 = a_n \cdot 5^n + a_{n-1} \cdot 5^{n-1} + a_{n-2} \cdot 5^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 5^2 + a_1 \cdot 5 + a_0.$$

Таблица 6.2 – Записи чисел в некоторых системах счисления

Десятичное (DEC)	Двоичное (BIN)	Четверичное (QUAT)	Восьмеричное (OCT)	Шестнадцатеричное (HEX)
0	0000	0	0	0
1	0001	1	1	1
2	0010	2	2	2
3	0011	3	3	3
4	0100	10	4	4
5	0101	11	5	5
6	0110	12	6	6
7	0111	13	7	7
8	1000	20	10	8
9	1001	21	11	9
10	1010	22	12	A
11	1011	23	13	B
12	1100	30	14	C
13	1101	31	15	D
14	1110	32	16	E
15	1111	33	17	F
16	10000	40	20	10

Ответ на вопрос, возможна ли запись любого натурального числа в системе счисления с основанием h, где $h \in \mathbf{N}$ и $h > 1$ дает следующая теорема.

Теорема 1. Всякое натуральное число a может быть записано, причем однозначно, в системе счисления с основанием h, т. е.

$$a_h = a_n \cdot h^n + a_{n-1} \cdot h^{n-1} + a_{n-2} \cdot h^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot h^2 + a_1 \cdot h + a_0$$

или
$$a_h = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0}_{(h)},$$

где
$$h \in \mathbf{N}, h > 1, a_n \neq 0, a_i \in \mathbf{N} \ (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Развернутая форма записи чисел в двоичной и троичной системах счисления:

$$1101_2 = 1 \cdot 10_2^3 + 1 \cdot 10_2^2 + 1 \cdot 10_2^0 =$$
$$= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1;$$
$$12201_3 = 1 \cdot 10_3^4 + 2 \cdot 10_3^3 + 2 \cdot 10_3^2 + 0 \cdot 10_3^1 + 1 \cdot 10_3^0 =$$
$$= 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1.$$

Переход от записи чисел в десятеричной[1] системе счисления к их записи в системе счисления с основанием $h \neq 10$

Чтобы число, записанное в десятичной системе счисления, записать в системе счисления с другим основанием, необходимо данное число разделить на основание новой системы с остатком, полученное частное опять делить на основание новой системы с остатком и т. д. до тех пор, пока не получится частное, меньшее основания новой системы. Последнее частное и все остатки, начиная с последнего, будут разрядными единицами данного числа, записанного в новой системе счисления.

Пример 1.

1. Число 1876, заданное в десятичной системе счисления, в *восьмеричной* системе счисления будет иметь вид 3524_8 (рис. 6.12):

$$1876_{10} = 3524_8.$$

2. Число 145, заданное в десятичной системе счисления, в *троичной* системе счисления будет иметь вид 3524_8 (рис. 6.13):

$$145_{10} = 12101_3.$$

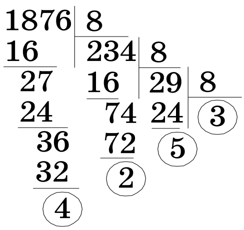


Рис. 6.12

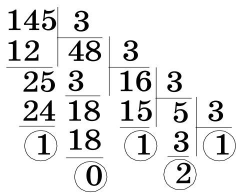


Рис. 6.13

Замечания. 1. Если основание системы счисления равно 10, то обычно его не указывают в записи числа: вместо 347_{10} пишут 347; если же число записано в недесятеричной системе счисления, то необходимо указать ее основание[2].

2. Чем меньше основание системы счисления, тем больше цифр в записи данного числа.

---

[1] Вместо слова «десятеричная» часто используется слово «десятичная».

[2] Для простоты допускается указывать основание системы 10 в случаях, когда в одной записи встречаются числа, записанные в разных системах счисления:

$$11_{10} = 1011_2 = 13_8 = B_{16}.$$

Переход от записи чисел в системе счисления с основанием, отличным от 10, к их записи в десятичной системе счисления

Для того чтобы перейти к записи числа a в десятичной системе счисления, необходимо основание h и цифры числа a записать в десятичной системе в виде суммы разрядных единиц.

Например:

1) $2437_8 = 2 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 7 = 8^2 \cdot (2 \cdot 8 + 4) + 24 + 7 =$
$= 64 \cdot 20 + 31 = 1280 + 31 = 1311;$

$$\mathbf{2437_8 = 1311_{10}.}$$

2) $30425_6 = 3 \cdot 6^4 + 0 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 5 = 3888 + 144 + 17 = 4049;$

$$\mathbf{30425_6 = 4049_{10}.}$$

Переход от записи чисел в одной недесятичной системе счисления к записи в другой недесятичной системе счисления

Теоретически указанный переход можно выполнять по тем же правилам, что и при переходе от недесятичной системы счисления к десятичной. Но на практике этим способом не пользуются потому, что в этом случае все вычисления пришлось бы выполнять в непривычной недесятичной системе счисления (необходимо знать таблицы сложения и умножения в конкретной системе счисления).

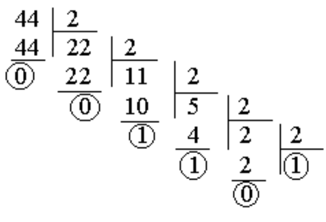
Перевод чисел из системы счисления с основанием $h \neq 10$ в другую систему счисления с основанием $q \neq 10$ счисления обычно совершают в два этапа следующим образом:

1) число, записанное в системе счисления с основанием h, записывают в десятичной системе счисления;
2) из десятичной системы счисления переходят к записи числа в системе счисления с требуемым основанием q.

Пример 2. Запишем число 134_5 в двоичной системе счисления:

1 этап) $134_5 = 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 = 25 + 15 + 4 = 44_{10}$;

2 этап) $44_{10} = 101100_2$.



Ответ: $134_5 = 101100_2$.

Операции над целыми неотрицательными числами в позиционных системах счисления

Арифметические действия в произвольной позиционной системе счисления с основанием $h \neq 0$ выполняются по тем же правилам, что и в десятичной системе счисления, поскольку ни одна позиционная система с основанием $h \neq 10$ принципиально ничем не отличается от хорошо известной нам десятичной системы счисления.

Сложение. Сложение чисел в любой системе счисления сводится к сложению однозначных чисел при помощи таблицы сложения в данной системе счисления. При сложении чисел складываются цифры соответствующих разрядов, начиная с первого. Если в данном разряде получается сумма, которая не помещается в нем, то полученное превышение полных «десятков» переносится в следующий разряд, а остаток остается в данном разряде и т. д.

Для двух произвольных чисел, записанных в одной и той же системе счисления:

$$a_h = a_n h^n + a_{n-1} h^{n-1} + \ldots a_1 h + a_0$$

и

$$b_h = b_n h^n + b_{n-1} h^{n-1} + \ldots b_1 h + b_0$$

применим ассоциативный и коммутативный законы сложения и получим:

$$a + b = (a_n + b_n)h^n + (a_{n-1} + b_{n-1})h^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)h + (a_0 + b_0).$$

Этот способ сложения кажется удобным только теоретически. На практике для упрощения вычислений слагаемые записывают в столбик таким образом, чтобы единицы одинаковых разрядов стояли в одном столбике, и производят сложение «в столбик».

Подробнее сложение рассмотрим на примерах в двоичной и восьмеричной системах счисления.

Двоичная система счисления (h = 2)

В ней используются только две цифры: 0 и 1 и с их помощью любое натуральное число a можно записать следующим образом:

$$a = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^{n-2} + \ldots + a_2 2^2 + a_1 2 + a_0,$$

где $a_i = 0$ или $a_i = 1$.

Запись первых десяти чисел десятеричной системы счисления в двоичной системе счисления:

$0_{10} = 0_2$	$5_{10} = 101_2$
$1_{10} = 1_2$	$6_{10} = 110_2$
$2_{10} = 10_2$	$7_{10} = 111_2$
$3_{10} = 11_2$	$8_{10} = 1000_2$
$4_{10} = 100_2$	$9_{10} = 1001_2$

Таблица сложения в двоичной системе счисления:

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	10

Восьмеричная система счисления (*h* = 8)

В этой системе используется восемь цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и с их помощью любое натуральное число a можно записать в виде:

$$a = a_n 8^n + a_{n-1} 8^{n-1} + a_{n-2} 8^{n-2} + \ldots + a_2 8^2 + a_1 8 + a_0,$$

где $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Запись первых десяти чисел десятеричной системы в восьмеричной системе счисления:

$0_{10} = 0_8$	$5_{10} = 5_8$
$1_{10} = 1_8$	$6_{10} = 6_8$
$2_{10} = 2_8$	$7_{10} = 7_8$
$3_{10} = 3_8$	$8_{10} = 10_8$
$4_{10} = 4_8$	$9_{10} = 11_8$

Таблица сложения в восьмеричной системе счисления:

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Примеры сложения чисел

1. $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 1100001_2 \\ 101111_2 \end{array} \\ \hline 10010000_2 \end{array}$ ***2.*** $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 35421_8 \\ 6576_8 \end{array} \\ \hline 44217_8 \end{array}$ ***3.*** $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 5234_6 \\ 4053_6 \end{array} \\ \hline 13331_6 \end{array}$ ***4.*** $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 12012_3 \\ 22121_3 \end{array} \\ \hline 111210_3 \end{array}$

Таким образом, можно сформулировать алгоритм сложения чисел в произвольной позиционной системе счисления (он аналогичен алгоритму сложения в десятичной системе счисления):

1) записать второе слагаемое под первым так, чтобы соответствующие разряды были записаны один под другим;
2) сложить цифры 1-го разряда, при этом:
   – если их сумма меньше числа h, то записать ее в этот разряд и перейти к следующему;
   – если их сумма больше числа h (или равна ему), то единицу прибавить к цифре единиц 2-го разряда первого слагаемого и в первом разряде записать разность между полученной суммой единиц 1-го разряда и h, после этого сложить единицы 2-го разряда;
3) повторить те же операции с единицами всех следующих разрядов, включая старшие.

Вычитание. Вычитание одного числа из другого сводится к вычитанию единиц соответствующих разрядов и основывается на таблице сложения (она же – таблица вычитания).

Для двух произвольных чисел, записанных в одной и той же системе счисления:

$$a_h = a_n h^n + a_{n-1} h^{n-1} + \dots a_1 h + a_0 \text{ и } b_h = b_n h^n + b_{n-1} h^{n-1} + \dots b_1 h + b_0,$$

далее получаем:

$$a - b = (a_n - b_n)h^n + (a_{n-1} - b_{n-1})h^{n-1} + \dots + (a_1 - b_1)h + (a_0 - b_0).$$

На практике вычитание выполняется «в столбик»: вычитаемое подписывают под уменьшаемым так, чтобы цифры одинаковых разрядов стояли в одном столбике, и выполняют вычитание цифр вычитаемого от цифр уменьшаемого. Если вычитание чисел невозможно в каком-нибудь разряде, тогда «занимается» одна единица следующего (высшего) разряда и к единицам данного разряда уменьшаемого добавляется число h – основание системы счисления, а затем выполняется вычитание единиц данного разряда.

Примеры вычитания чисел

1. $$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 1100010_2 \\ 101111_2 \end{array} \\ \hline 110011_2 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 35441_8 \\ 16352_8 \end{array} \\ \hline 17067_8 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 3254_6 \\ 1412_6 \end{array} \\ \hline 1442_6 \end{array}$$

4. $$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 22023_4 \\ 3132_4 \end{array} \\ \hline 12231_4 \end{array}$$

Умножение. Умножение многозначных чисел в любой системе счисления основано, как и в десятичной системе счисления, на умножении однозначных чисел с использованием таблиц умножения в данной системе счисления с последующим сложением полученных неполных произведений.

Таблица умножения в двоичной системе счисления:

×	0	1
0	0	0
1	0	10

Легко видеть, что таблица умножения в двоичной системе счисления фактически состоит из одной строки 1 × 1 = 1, поскольку умножение на 0 во всякой системе счисления дает 0, а умножение на 1 не меняет числа. Поэтому умножение многозначных чисел в двоичной системе счисления фактически сводится к сдвигу (влево) и сложения – это свойство дает возможность удобно использовать двоичную систему счисления в ЭВМ.

Таблица умножения в восьмеричной системе счисления:

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Примеры умножения чисел

1.

$$\begin{array}{r} \times\ 1101_2 \\ 101_2 \\ \hline 1101 \\ +\ 0000 \\ 1101 \\ \hline 1000001_2 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r} \times\ 3574_8 \\ 52_8 \\ \hline 7370 \\ +\ 22554 \\ \hline 235130_8 \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{r} \times\ 1021_3 \\ 122_3 \\ \hline 12112 \\ +\ 2112 \\ 1021 \\ \hline 210102_3 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{r} \times\ 1021_5 \\ 124_5 \\ \hline 4134 \\ +\ 2042 \\ 1021 \\ \hline 132204_5 \end{array}$$

Деление. Деление – операция, обратная умножению. В основе деления многозначных чисел в любой системе счисления лежит операция деления с остатком и свойства деления с опорой на таблицу умножения (она же и таблица деления).

Примеры деления чисел:

1. $1312_8 : 25_8$; ***2.*** $312_4 : 12_4$; ***3.*** $21203_5 : 32_5$; ***4.*** $210102_3 : 122_3$.

1.
$$\begin{array}{r|l} -1312_8 & 25_8 \\ \underline{124} & \overline{42_8} \\ -52 & \\ \underline{52} & \\ 0 & \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r|l} -312_4 & 12_4 \\ \underline{30} & \overline{21_4} \\ -12 & \\ \underline{12} & \\ 0 & \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r|l} -21203_5 & 32_5 \\ \underline{201} & \overline{314_5} \\ -110 & \\ \underline{32} & \\ -233 & \\ \underline{233} & \\ 0 & \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r|l} -210102_3 & 122_3 \\ \underline{122} & \overline{1021_3} \\ -1110 & \\ \underline{1021} & \\ -122 & \\ \underline{122} & \\ 0 & \end{array}$$

$$h = \frac{-2 \pm 52}{4}, \quad \begin{array}{l} h_1 = -5{,}4 \ (\text{но } -5{,}4 \notin \mathbf{N}); \\ h_2 = 5. \end{array}$$

Ответ: 6; 5.

Задача 14. Запишите число:

1) 1876_{10} в восьмеричной системе счисления;

2) 145_{10} в троичной системе счисления.

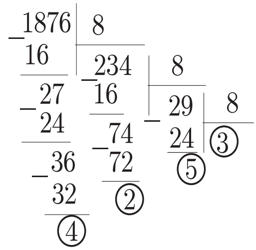
Решение. ***1)*** Во-первых, надо определить, сколько единиц второго разряда в новой системе счисления получается в данном числе (определить, сколько в нем восьмерок). Для этого разделим 1876 на 8:

$$1876 = 8 \cdot 234 + 4,$$

получим 4 единицы первого разряда и 234 единицы второго.

Далее выясним, сколько единиц третьего разряда содержится в полученном частном и т. д.:

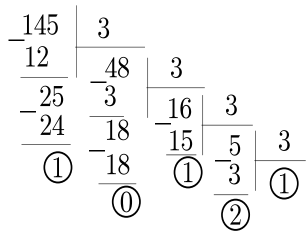
$$\begin{aligned} \mathbf{1876_{10}} &= 234 \cdot 8 + 4 = \\ &= (29 \cdot 8 + 2) \cdot 8 + 4 = \\ &= 29 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 4 = \\ &= (3 \cdot 8 + 5) \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 4 = \\ &= 3 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 4 = \mathbf{3524_8}. \end{aligned}$$



На практике эта операция обычно выполняется в виде цепочки деления в «столбик».

2) Для ответа на вопрос задачи выполним деление на 3 с остатком.

Получим: $145_{10} = 12101_3$.



Ответ: $1876_{10} = 3524_8$; $145_{10} = 12101_3$.

Задача 15. Запишите в десятичной системе счисления числа

1) 4753_8; *2)* $\overline{A47}_{12}$ $(A = 11_{12})$.

Решение. ***1)*** $4753_8 = 4 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 3 =$
$= 2048 + 448 + 40 + 3 = 2539_{10}$;

2) $\overline{A47}_{12} = A \cdot 12^2 + 4 \cdot 12 + 7 = 11 \cdot 12^2 + 4 \cdot 12 + 7 = 1639_{10}$.

Ответ: ***1)*** $4753_8 = 2539$; ***2)*** $\overline{A47}_{12} = 1639_{10}$.

Задача 16. Запишите число 134_5 в двоичной системе счисления.

Решение. Вначале запишем число 134_5 в десятичной системе счисления:

$134_5 = 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 =$
$= 25 + 15 + 4 = 44_{10}$.

Теперь число 44 запишем в двоичной системе счисления.

$$\begin{array}{r|l} 44 & 2 \\ \underline{44} & 22 \\ 0 & \end{array}\quad \begin{array}{r|l} 22 & 2 \\ \underline{22} & 11 \\ 0 & \end{array}\quad \begin{array}{r|l} 11 & 2 \\ \underline{10} & 5 \\ 1 & \end{array}\quad \begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \underline{4} & 2 \\ 1 & \end{array}\quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \underline{2} & 1 \\ 0 & \end{array}$$

Ответ: $134_5 = 101100_2$.

Задача 17. Выполните деление в указанных системах счисления:
1) $312_4 : 12_4$; ***2)*** $1312_8 : 25_8$; ***3)*** $21203_5 : 32_5$.

Решение.

1)
$$\begin{array}{r|l} 312_4 & 12_4 \\ \underline{30} & 21_4 \\ 12 & \\ \underline{12} & \\ 0 & \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r|l} 1312_8 & 25_8 \\ \underline{124} & 42_8 \\ 52 & \\ \underline{52} & \\ 0 & \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r|l} 21203_5 & 32_5 \\ \underline{201} & 314_5 \\ 110 & \\ \underline{32} & \\ 233 & \\ \underline{233} & \\ 0 & \end{array}$$

Ответ: 1) 21_4; ***2)*** 42_8; ***3)*** 3144_5.

Задача 18. В примере $13102_5 + 1331_5 \cdot 24_5 - 23043_5 : 403_5$ необходимо:

1) выполните действия в 5-ной системе счисления;

2) каждое число переведите в 10-ную систему счисления и выполните действия в 10-ной системе счисления;

3) запишите полученный в 10-ной системе счисления результат в пятеричную и сравните с результатом, полученным в п. 1.

Решение. ***1)*** Для вычислений в 5-ной системе счисления сначала составим таблицы сложения и умножения и выполним действия.

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

×	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

1. $$\begin{array}{r} \times\ 1331_5 \\ 24_5 \\ \hline 11424 \\ +\ 3212 \\ \hline 44044_5 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{r|l} -23043_5 & 403_5 \\ \cline{2-2} 214 & 31_5 \\ \cline{1-1} -403 & \\ 403 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

3. $$\begin{array}{r} +\ 13102_5 \\ 44044_5 \\ \hline 112201_5 \end{array}$$

4. $$\begin{array}{r} -\ 112201_5 \\ 31_5 \\ \hline 112120_5 \end{array}$$

2) $13102_5 = 1 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 2 = 1027_{10}$;
$1331_5 = 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 = 216_{10}$;
$24_5 = 2 \cdot 5 + 4 = 14_{10}$;
$23043_5 = 2 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5 + 3 = 1648_{10}$;
$403_5 = 4 \cdot 5^2 + 3 = 103_{10}$.

Получим пример: $1027 + 216 \cdot 14 - 1648 : 103$.

Выполним действия в 10-ной системе счисления:

1) $216 \cdot 14 = 3024$; 2) $1648 : 103 = 16$;
3) $1027 + 3024 = 4051$; 4) $4051 - 16 = 4035$.

3)

$$\begin{array}{llllll} -4035 & \vert\ 5 & & & & \\ 40 & \vert -807 & \vert\ 5 & & & \\ -35 & 5 & \vert\ 161 & \vert\ 5 & & \\ 35 & -30 & -15 & \vert -32 & \vert\ 5 & \\ 0 & 30 & -11 & 30 & -6 & \vert\ 5 \\ & -7 & 10 & 2 & 5 & 1 \\ & 5 & 1 & & 1 & \\ & 2 & & & & \end{array}$$

Ответы совпали: $4035_{10} = 112120_5$.

Задача 19. В саду посадили 106_h кустов, из которых 31_h – ежевика, 25_h – крыжовник – и 30_h – голубика. Найдите h – основание системы счисления, в которой составлена задача.

Решение. Поскольку в саду всего 106_h кустов, составим уравнение:

$$106_h = 31_h + 25_h + 30_h$$

и преобразуем его, представив каждое число в развернутом виде:

$$1 \cdot h^2 + 0 \cdot h + 6 = (3 \cdot h + 1) + (2 \cdot h + 5) + (3 \cdot h + 0).$$

Решаем полученное уравнение:

$$h^2 + 6 = 8h + 6;$$
$$h^2 - 8h = 0,$$

откуда $h_1 = 0$ (не является натуральным числом) и $h_2 = 8$.

Ответ: $h = 8$.