

# 学习笔记

平安喜乐<sup>1</sup>

*Last update: 2022 年 12 月 15 日*

<sup>1</sup>常怀感恩之心!



# 目录



## 8 有限元分析：理论和实现

### 8.1 静力线弹性有限元

#### 8.1.5 有限元的简单一维实现

在描述一个完全通用的三维有限元实现之前，我们将用一个简单的一维例子来说明所有的关键思想。考虑一根长的线弹性杆，如图8.3所示。假设：

1. 杆的剪切模量为  $\mu$ ，泊松比为  $\nu$
2. 杆的横截面积为  $h \times h$ ，长度为  $L$
3. 杆的所有侧边都受到约束，所以  $u_2 = u_3 = 0$
4. 杆受到体力  $\mathbf{b} = b(x_1)\mathbf{e}_1$
5. 杆的两端或者有载荷或者被约束，因此，边界条件或者是  $t_1(0) = t^*(0), t_1(L) = t^*(L)$ ，或者是  $u_1(0) = u^*(0), u_1(L) = u^*(L)$ ，当  $x = 0$  和  $x = L$  时。

那么，对于这个一维例子，有限元方程退化为

$$K_{ab}u_1^b = F^a,$$

其中

$$K_{ab} = h^2 \int_0^L \frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N^a(x_1)}{\partial x_1} \frac{\partial N^b(x_1)}{\partial x_1} dx_1$$
$$F^a = h^2 \int_0^L b N^a(x_1) dx_1 + h^2 t_1^*(0) N^a(0) + h^2 t^*(L) N^a(L).$$

显然，我们可以选择任何插值方案，计算必要的积分，并求解得到的方程组来计算解。然而，使用分段拉格朗日插值格式和高斯数值积分格式，已被证明是极为方便的。

为了实现拉格朗日插值方案，我们将区域  $0 \leq x_1 \leq L$  细分为一系列单元，如图8.4所示。每个单元以两个节点为界，也可以包含一个或多个内部节点。根据单元节点位移，插值得到

单元内部位移场。因此，我们将在两节点单元上使用线性插值，在三节点单元上使用二次插值，等等。

$$u_1(\xi_1) = \sum_{a=1}^{N_e} N^a(\xi_1) u_1^a$$

一般的线性和二次一维单元如表8.1所示。对于线性单元，单元上的节点被编号为1和2。对于二次单元，单元上的节点被编号为1,2,3。假设该单元位于  $-1 \leq \xi_1 \leq 1$  的区域内。那么，单元内的位移被插值为

$$u_1(\xi_1) = \sum_{a=1}^{N_e} N^a(\xi_1) u_1^a, \quad u_1(\xi_1) = \sum_{a=1}^{N_e} N^a(\xi_1) u_1^a,$$

其中， $N_e$  表示单元上的节点数， $u_1^a$  表示每个节点上的位移值，形状函数在表中给出。

当然，对于所有单元，实际节点坐标并不位于  $-1, +1, 0$ 。对于一个一般的单元，我们将这个特殊的单元映射到感兴趣的区域。一个特别方便的方法是设置

$$x_1(\xi_1) = \sum_{a=1}^{N_e} N^a(\xi_1) x_1^a$$

其中  $x_1^a$  表示单元上每个节点的坐标， $N_e$  是单元节点数（2或3）。使用相同形函数插值位移和位置的单元称为等参单元。

接下来，我们需要设计一种方法来对刚度矩阵和力矢量的表达式进行积分。显然，我们可以将积分进行分割，依次对每个元素积分：

$$K_{ab} = \sum_{l=1}^{N_{\text{lmn}}} h^2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial N^a(x_1)}{\partial x_1} \frac{\partial N^b(x_1)}{\partial x_1} dx_1$$