学习笔记

平安喜乐 [1]

Last update: 2022 年 *12* 月 *16* 日

[1]常怀感恩之心!

目录

8 有限元分析：理论和实现

8.1 静力线弹性有限元

8.1.5 有限元的简单一维实现

在描述一个完全通用的三维有限元实现之前，我们将用一个简单的一维例子来说明所有的关键思想。考虑一根长的线弹性杆，如图8.3所示。假设:

1. 杆的剪切模量为 μ，泊松比为 ν
2. 杆的横截面积为 $h \times h$，长度为 L
3. 杆的所有侧边都受到约束，所以 $u_2 = u_3 = 0$
4. 杆受到体力 $\boldsymbol{b} = b(x_1)\boldsymbol{e}_1$
5. 杆的两端或者有载荷或者被约束，因此，边界条件或者是 $t_1(0) = t^*(0), t_1(L) = t^*(L)$，或者是 $u_1(0) = u^*(0), u_1(L) = u^*(L)$，当 $x = 0$ 和 $x = L$ 时。

那么，对于这个一维例子，有限元方程退化为

$$K_{ab}u_1^b = F^a,$$

其中

$$K_{ab} = h^2 \int_0^L \frac{2\mu(1-v)}{1-2v} \frac{\partial N^a\left(x_1\right)}{\partial x_1} \frac{\partial N^b\left(x_1\right)}{\partial x_1} dx_1$$

$$F^a = h^2 \int_0^L bN^a\left(x_1\right) dx_1 + h^2 t_1^*(0) N^a(0) + h^2 t^*(L) N^a(L).$$

显然，我们可以选择任何插值方案，计算必要的积分，并求解得到的方程组来计算解。然而，使用分段拉格朗日插值格式和高斯数值积分格式，已被证明是极为方便的。

为了实现拉格朗日插值方案，我们将区域 $0 \leq x_1 \leq L$ 细分为一系列单元，如图8.4所示。每个单元以两个节点为界，也可以包含一个或多个内部节点。根据单元节点位移，插值得到

单元内部位移场。因此，我们将在两节点单元上使用线性插值，在三节点单元上使用二次插值，等等。

$$u_1\left(\xi_1\right)=\sum_{a=1}^{N_e} N^a\left(\xi_1\right) u_1^a$$

一般的线性和二次一维单元如表8.1所示。对于线性单元，单元上的节点被编号为1和2。对于二次单元，单元上的节点被编号为1,2,3。假设该单元位于 $-1 \leq \xi_1 \leq 1$ 的区域内。那么，单元内的位移被插值为

$$u_1\left(\xi_1\right)=\sum_{a=1}^{N_e} N^a\left(\xi_1\right) u_1^a u_1\left(\xi_1\right)=\sum_{a=1}^{N_e} N^a\left(\xi_1\right) u_1^a,$$

其中，N_e 表示单元上的节点数，u_1^a 表示每个节点上的位移值，形状函数在表中给出。

当然，对于所有单元，实际节点坐标并不位于 $-1,+1,0$。对于一个一般的单元，我们将这个特殊的单元映射到感兴趣的区域。一个特别方便的方法是设置

$$x_1\left(\xi_1\right)=\sum_{a=1}^{N_e} N^a\left(\xi_1\right) x_1^a$$

其中 x_1^a 表示单元上每个节点的坐标，N_e 是单元节点数（2或3）。使用相同形函数插值位移和位置的单元称为等参单元。

接下来，我们需要设计一种方法来对刚度矩阵和力矢量的表达式进行积分。显然，我们可以将积分进行分割，依次对每个元素积分:

$$K_{ab}=\sum_{l=1}^{N_{\mathrm{lmn}}} h^2 \int_{x0}^{x1} \frac{2\mu(1-v)}{1-2v} \frac{\partial N^a\left(x_1\right)}{\partial x_1} \frac{\partial N^b\left(x_1\right)}{\partial x_1} d x_1$$

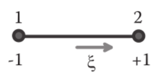
$$F^a=\sum_{l=1}^{N_{lmn}} h^2 \int_{x0}^{x1} b N^a\left(x_1\right) d x_1+h^2 t_i^* N^a(0)+h^2 t_i^* N^a(L)$$

TABLE 8.1 Shape Functions for 1D Finite Elements

Linear 1D Element

$N^1(\xi) = 0.5(1-\xi)$

$N^2(\xi) = 0.5(1+\xi)$

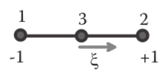


Quadratic 1D Element

$N^1(\xi) = -0.5\xi(1-\xi)$

$N^2(\xi) = 0.5\xi(1+\xi)$

$N^3(\xi) = (1-\xi)(1+\xi)$



其中 N_{lmn} 是单元的总数，x_0 和 x_1 表示第 l 个单元端点的坐标。我们现在注意到我们的

插值方案的一个吸引人的特点。因为第 l 个单元所在区域的位移完全由该单元上的节点值决定，所以第 l 个单元上的积分只取决于与该单元的节点相关的形函数。因此，对于每个单元，我们可以定义单元刚度矩阵和单元力矩阵，

$$k_{ab}=h^2\int_{x0}^{x1}\frac{2\mu(1-v)}{1-2v}\frac{\partial N^a\left(x_1\right)}{\partial x_1}\frac{\partial N^b\left(x_1\right)}{\partial x_1}dx_1 \qquad f^a=h^2\int_{x0}^{x1}bN^a\left(x_1\right)dx_1,$$

其取决于几何，插值函数和单元的材料属性。第一个和最后一个单元对单元力向量有来自边界项 $h^2t^*N^a(0), h^2t^*N^a(L)$ 额外的贡献。全局刚度矩阵由所有单元刚度矩阵之和计算:

$$K_{ab}=\sum_{l=1}^{N_{lmn}}k_{ab} \qquad F^a=\sum_{l=1}^{N_{\mathrm{lmn}}}f^a+h^2t^*N^a(0)+h^2t^*N^a(L)$$

最后，我们需要设计一种计算每个单元刚度矩阵积分的方法。将积分域映射到 $[-1,+1]$ 并根据无量纲化坐标 ξ 积分是很方便的。因此,

$$k_{ab}=h^2\int_{-1}^{+1}\frac{2\mu(1-v)}{1-2v}\frac{\partial N^a(x)}{\partial x}\frac{\partial N^b(x)}{\partial x}Jd\xi \quad f^a=h^2\int_{-1}^{+1}bN^a\left(x_1\right)Jd\xi,$$

其中 $J=|\partial x/d\xi|$ 是与映射相关的雅克比矩阵，可被计算为

$$\frac{\partial x}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\xi}\sum_{a=1}^{N_e}N^a(\xi)x^a=\sum_{a=1}^{N_e}\frac{\partial N^a}{\partial\xi}x^a$$

请注意，映射也使我们能够计算单元刚度矩阵中形函数的导数

$$\frac{\partial N^a}{\partial x}=\frac{\partial N^a}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial N^a}{\partial\xi}\left[\frac{\partial x}{\partial\xi}\right]^{-1}$$

最后，请注意，可以使用数值求积公式计算积分，如下所示

$$\int_{-1}^{+1}g(\xi)d\xi\approx\sum_{I=1}^{M}w_Ig\left(\xi^{(I)}\right)$$

其中 $\xi^{(I)}=1...M$ 表示区域 $[-1,+1]$ 中的积分点集合，w_I 是积分权重的集合，选择积分权重是为了使近似尽可能准确。表8.2给出了 $M=1,2,3$ 的值。存在高阶积分方案，但只对高阶单元有要求。对于上述线性一维单元，单个积分点足以准确地计算其刚度。类似地，对于二次单元，两个积分点就足够了。