学习笔记

Last update: 2022 年 *12* 月 *15* 日

目录

8 有限元分析：理论和实现

8.1 静力线弹性有限元

8.1.5 有限元的简单一维实现

在描述一个完全通用的三维有限元实现之前，我们将用一个简单的一维例子来说明所有的关键思想。考虑一根长的线弹性杆，如图8.3所示。假设:

1. 杆的剪切模量为 μ，泊松比为 ν
2. 杆的横截面积为 $h \times h$，长度为 L
3. 杆的所有侧边都受到约束，所以 $u_2 = u_3 = 0$
4. 杆受到体力 $\boldsymbol{b} = b(x_1)\boldsymbol{e}_1$
5. 杆的两端或者有载荷或者被约束，因此，边界条件或者是 $t_1(0) = t^*(0), t_1(L) = t^*(L)$，或者是 $u_1(0) = u^*(0), u_1(L) = u^*(L)$，当 $x = 0$ 和 $x = L$ 时。

那么，对于这个一维例子，有限元方程退化为

$$K_{ab}u_1^b = F^a,$$

其中

$$K_{ab} = h^2 \int_0^L \frac{2\mu(1-v)}{1-2v} \frac{\partial N^a(x_1)}{\partial x_1} \frac{\partial N^b(x_1)}{\partial x_1} dx_1$$

$$F^a = h^2 \int_0^L bN^a(x_1)\, dx_1 + h^2 t_1^*(0) N^a(0) + h^2 t^*(L) N^a(L).$$

显然，我们可以选择任何插值方案，计算必要的积分，并求解得到的方程组来计算解。然而，使用分段拉格朗日插值格式和高斯数值积分格式，已被证明是极为方便的。

为了实现拉格朗日插值方案，我们将区域 $0 \leq x_1 \leq L$ 细分为一系列单元，如图8.4所示。每个单元以两个节点为界，也可以包含一个或多个内部节点。根据单元节点位移，插值得到

单元内部位移场。因此，我们将在两节点单元上使用线性插值，在三节点单元上使用二次插值，等等。

$$u_1(\xi_1) = \sum_{a=1}^{N_e} N^a(\xi_1)\, u_1^a$$

一般的线性和四边形一维元素如表8.1所示。元素上的E个局部节点对于线性元素编号为1和2，对于二次元素编号为1、2和3，如图所示。设该元素位于-1≤ξ1≤1的区域内。元素内的E位移被插值为