3ème année SM 11/02/2009

EMD Méthodes Numériques

(3 heures)

Problème 1 (15 points)

1. Calculez et affichez avec 6 chiffres significatifs, la matrice B, 4×4 définie par :

$$B \equiv \sum_{k=0}^{100} \frac{1}{k!} A^k \qquad \text{où} \qquad A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad A^0 \equiv I \ .$$

Remarquons que $B \equiv \sum_{k=0}^{100} U_k$, où les matrices U_k vérifient $U_k = U_{k-1} A/k$ et $U_0 = I$ (matrice identité 4×4). L'algorithme pour calculer B est donc le suivant :

1. Nous initialisons les matrices : $U = I$ et $B = I$
2. Pour $k = 1, 2, \ldots, 100$:

$$\begin{cases} D = UA & (D \text{ est une matrice intermédiaire}) \\ U = D/k \\ B = B + U \end{cases}$$

Pour vous faciliter la tâche, vous écrirez d'abord deux fonctions en C qui font

- la somme de 2 matrices, et
- la multiplication d'une matrice par un scalaire.

Ces fonctions seront utilisées dans la fonction "`main`" comme ceci :

```
somme_matrice_matrice(A,B,C,n) ; /* C = A + B */
produit_matrice_scalaire(A,a,C,n) ; /* C = a A avec "a" un double */.
```

2. Calculez le déterminant de la matrice B, puis comparez ce déterminant avec $e^{\mathrm{Tr} A}$, $\mathrm{Tr}(A)$ étant la trace de la matrice A, définie comme la somme de ses éléments diagonaux.

3. Résoudre avec la méthode de Gauss le système $B\vec{x} = \vec{a}$, où $\vec{a}^{\,t} = (1, 2, 3, 4)$, puis comparez votre solution avec le vecteur $\vec{b} = C\vec{a}$, C étant la matrice définie par $C \equiv \sum_{k=0}^{100} (-1)^k A^k/k!$ (Vous devez calculer cette matrice C avec un algorithme similaire à celui utilisé pour calculer B).

4. Calculez les produits $B\,C$ et $C\,B$, puis comparez-les à la matrice identité.

5. La matrice suivante, symétrique, a des valeurs propres réelles que vous devez calculer :

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & -7 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \\ 4 & -7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecrivez une fonction en C qui calcule le polynôme caractéristique $P(\lambda) \equiv \det(A - \lambda I)$.
Cette fonction sera utilisée dans la fonction "`main`" comme ceci :

```
y = P(A,n,lambda) ; /* y=det(A-lambda*I); y et lambda "doubles" */
```

Calculez et affichez $P(\lambda_i)$, pour $\lambda_i \equiv -20 + 0,4\, i$, $i = 0, 1, \ldots, 100$.
Identifiez les intervalles contenant les zéros de $P(\lambda)$ (ces zéros sont les valeurs propres de la matrice A).
Calculez ensuite ces zéros en utilisant la méthode de la sécante, avec une précision de 10^{-12}.
Vérifier que le produit des valeurs propres est bien égal au déterminant de A.

Problème 2 (5 points)

Une manière brute de calculer une intégrale définie est :

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,\Delta x_i \ ,$$

où l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$ est découpé en N intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, N$, et chaque intervalle a la même longueur $h = \Delta x_i = (b-a)/N$. Nous avons donc :

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq h \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \ .$$

Calculez de manière approchée, pour $N = 200$ et $N = 300$,

$$\int_1^2 f(x)\,dx \simeq I_N \qquad \text{pour} \qquad f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}\,\frac{\log(1+x^6)}{1+\tan^6(1+x^2)}$$

Affichez le résultat, qui est ici I_{300}, et l'erreur estimée que vous prendrez égale à $|I_{300} - I_{200}|$.