Regelsysteme

Einführungsbeispiel Prädikatenlogik

Formeln der Prädikatenlogik

Bezeichnung	**Notation**	**Beispiele**
Variablen	x	x, y
Prädikate	$P(\overrightarrow{x})$	$x = 7, y < z + 3$
Wahrheitswerte	true, false	
Konjunktion	$\varphi_1 \wedge \varphi_2$	$x < y \wedge \text{true}$
Disjunktion	$\varphi_1 \vee \varphi_2$	$\text{true} \vee \text{false}$
Negation	$\neg \varphi$	$\neg \text{true}$
All-Quantor	$\forall x.\ \varphi$	$\forall x.\ x < 0 \vee y \leq x$
Existenz-Quantor	$\exists x.\ \varphi$	$\exists x.\ x < 0 \vee y \geq x$

Modell und Gültigkeit

Karlsruher Institut für Technologie

Modell $\mathcal{M}$

- Definiert Universum M für Variablenwerte
- Interpretiert Prädikate

Gültigkeit $\mathcal{M} \models \varphi$, $\mathcal{M} \models \Psi$

$\mathcal{M} \models \varphi$ gdw. Formel φ gilt im Modell $\mathcal{M}$ gdw. $\mathcal{M}$ Modell für φ.
$\mathcal{M} \models \Psi$ gdw. $\mathcal{M} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Psi$.

Beispiele:

- $\mathbb{R} \models \forall x\ y.\ x + y = y + x$
- $\mathbb{N} \not\models \forall x.\ \exists y.\ x + y = 0$

Semantische Herleitbarkeit $\Psi \models \varphi$

$\Psi \models \varphi$ gdw. für alle $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \models \Psi$ gilt auch $\mathcal{M} \models \varphi$.

Regelsysteme

Frege'scher Schlussstrich

$$\frac{A_1 \qquad A_2 \qquad A_3 \qquad \dots \qquad A_n}{E}$$

A_i Voraussetzungen, E Konklusion

Beispiel Prädikatenlogik: Syntaktische Herleitbarkeit ($\Psi \vdash \phi$)

Introduktionsregeln	Eliminationsregeln
$\lor$-I1: $\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi \lor \psi}$ $\lor$-I2: $\dfrac{}{\psi \vdash \varphi \lor \psi}$	$\lor$-E: $\dfrac{\varphi \vdash \xi \qquad \psi \vdash \xi}{\varphi \lor \psi \vdash \xi}$
$\exists$-I: $\dfrac{}{\varphi(x) \vdash \exists x.\, \varphi(x)}$	$\exists$-E: $\dfrac{\varphi[x \mapsto y] \vdash \xi}{\exists x.\, \varphi(x) \vdash \xi}$ (Keine Variablenkonflikte mit y in φ und ψ!)

Metavariablen (φ, ψ, ξ) implizit universell quantifiziert

Ableitungsbäume

Nachweis der Ableitbarkeit mit einem Ableitungsbaum.

Beispiel: Nachweis von $\exists x.\, (\varphi(x) \vee \psi) \vdash \psi \vee \exists x.\, \varphi(x)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi(y) \vdash \exists x.\, \varphi(x)}\ \exists\text{-I}}{\varphi(y) \vdash \psi \vee \exists x.\, \varphi(x)}\ \vee\text{-I2} \qquad \dfrac{\psi \vdash \psi}{\psi \vdash \psi \vee \exists x.\, \varphi(x)}\ \vee\text{-I1}}{\varphi(y) \vee \psi \vdash \psi \vee \exists x.\, \varphi(x)}\ \vee\text{-E}}{\exists x.\, (\varphi(x) \vee \psi) \vdash \psi \vee \exists x.\, \varphi(x)}\ \exists\text{-E}
$$

Regelinversion

Definitionen mit Regelsystem erlauben Fallunterscheidung durch Regelinversion:

Sei $\varphi \vdash \psi_1 \lor \psi_2$. Mögliche Fälle:

$\lor$-I1	$\varphi = \psi_1$	$\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi \lor \psi}$
$\lor$-I2	$\varphi = \psi_2$	$\dfrac{}{\psi \vdash \varphi \lor \psi}$
$\lor$-E	$\varphi = \varphi_1 \lor \varphi_2$, $\varphi_1 \vdash \psi_1 \lor \psi_2$, $\varphi_2 \vdash \psi_1 \lor \psi_2$	$\dfrac{\varphi \vdash \xi \qquad \psi \vdash \xi}{\varphi \lor \psi \vdash \xi}$
$\exists$-E	$\varphi = \exists x.\, \varphi'(x)$, $\varphi'[x \mapsto y] \vdash \psi_1 \lor \psi_2$	$\dfrac{\varphi[x \mapsto y] \vdash \xi}{\exists x.\, \varphi(x) \vdash \xi}$

Korrektheit und Vollständigkeit

Korrektheit

Jede durch das Regelsystems herleitbare Formel gilt auch semantisch: aus $\Psi \vdash \varphi$ folgt $\Psi \models \varphi$.

Vollständigkeit

Jede semantisch korrekte Aussage lässt sich durch das Regelsystem herleiten: aus $\Psi \models \varphi$ folgt $\Psi \vdash \varphi$.

Bemerkung: Regelsysteme sollten entscheidbar sein, d.h. ein Algorithmus muss stets entscheiden können, ob $\Psi \vdash \varphi$ oder $\Psi \nvdash \varphi$.