Typinferenz

Typen

Unsichere Programme: Typfehler bei Auswertung

z.B. im λ-Kalkül: $(\lambda \mathtt{x}.\, \mathtt{x} + 42)\ \mathit{true} \Rightarrow \mathit{true} + 42 = ???$

Typisierung: Bestimme Ergebnistyp (möglichst vieler) sicherer Programme, lehne unsichere ab

Einfache Typisierung:
$\vdash (\lambda \mathtt{x}.\, 2) : \text{bool} \to \text{int}$
$\vdash (\lambda \mathtt{x}.\, 2) : \text{int} \to \text{int}$
$\vdash (\lambda \mathtt{f}.\, 2) : (\text{int} \to \text{int}) \to \text{int}$

Polymorphe Typen: $\vdash (\lambda \mathtt{x}.\, 2) : \alpha \to \text{int}$

Typvariablen

- Basistypen: bool, int, unit, ...
- Funktionstyp: $\tau_1 \to \tau_2$ (rechtsassoziativ)
- Typvariablen: $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \ldots$

Weiterhin: $\tau, \tau_1, \tau_2, \ldots$ steht für Typen

Typsystem

Typsystem $\Gamma \vdash t : T$

$\Gamma \vdash t : \tau$ – im Typkontext Γ hat Term t Typ τ.
Γ ordnet freien Variablen x ihren Typ $\Gamma(x)$ zu.

$$\textsc{Const}: \frac{c \in \mathit{Const}}{\Gamma \vdash c : \tau_c} \qquad \textsc{Var}: \frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x : \tau}$$

$$\textsc{Abs}: \frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash t : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x.\ t : \tau_1 \to \tau_2} \qquad \textsc{App}: \frac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_2 \to \tau \qquad \Gamma \vdash t_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash t_1\ t_2 : \tau}$$

Vorsicht: darf keine Überschneidungen bei Typvariablen generieren!

Typisierung

Typ-Substitution

Endliche Abbildung von Typvariablen auf Typen.
Variablenkonvention: σ

Beispiel: $\sigma = [\alpha_1 \Rightarrow \mathrm{bool}, \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \to \alpha_1]$

Wie Typvariablen substituieren für gültige Typisierung?

Lösung für Typsystem

(σ, τ) Lösung für (Γ, t), falls $\sigma\Gamma \vdash t : \tau$.

Beispiel: Sei $\Gamma = \texttt{f} : \alpha_1, \texttt{a} : \alpha_2$ und $t = \texttt{f a}$
Dann $([\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \to \alpha_3], \alpha_3)$, $([\alpha_1 \Rightarrow \mathrm{int} \to \mathrm{int}, \alpha_2 \Rightarrow \mathrm{int}], \mathrm{int})$ und
$([\alpha_1 \Rightarrow \mathrm{int} \to \mathrm{bool} \to \mathrm{int}, \alpha_2 \Rightarrow \mathrm{int}], \mathrm{bool} \to \mathrm{int})$ Lösungen für (Γ, t)

Beispiel: Typisierung

Zu typisierender Term: $(\lambda \mathtt{x}.\, \mathtt{x}\ \ \mathtt{0})$

Struktur: $(\alpha \to \beta) \to \gamma$

$$\dfrac{\dfrac{\mathtt{x} : \mathsf{int} \to \beta \vdash \mathtt{x} : \mathsf{int} \to \beta \qquad \mathtt{x} : \mathsf{int} \to \beta \vdash 0 : \mathsf{int}}{\mathtt{x} : \mathsf{int} \to \beta \vdash \mathtt{x}\ 0 : \beta}}{\vdash (\lambda \mathtt{x}.\, \mathtt{x}\ \ \mathtt{0}) : (\mathsf{int} \to \beta) \to \beta}$$

Lösungs-Beispiele:

- $(\ [\,]\, , (\mathsf{int} \to \beta) \to \beta\ \ )$
- $(\ [\beta \Rightarrow \mathsf{int}]\, , (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int}\ \ )$

Regel App:

$$\textsc{App}: \dfrac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_2 \to \tau \qquad \Gamma \vdash t_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash t_1\ t_2 : \tau}$$

Korrektheit des Typsystems

β-Reduktion: Substitution von x $\quad (\lambda x.\, t_1)\ t_2 \Rightarrow t_1[x \mapsto t_2]$

Substitutionslemma

Wenn $\Gamma, x : \tau_1 \vdash t_1 : \tau_2$ und $\Gamma \vdash t_2 : \tau_1$, dann $\Gamma \vdash t_1[x \mapsto t_2] : \tau_2$.

Beweis: Induktion über Typsystemregeln.

Korrektheit des Typsystems

β-Reduktion: Substitution von x $\quad (\lambda x.\ t_1)\ t_2 \Rightarrow t_1[x \mapsto t_2]$

Substitutionslemma

Wenn $\Gamma, x : \tau_1 \vdash t_1 : \tau_2$ und $\Gamma \vdash t_2 : \tau_1$, dann $\Gamma \vdash t_1[x \mapsto t_2] : \tau_2$.

Typerhaltungstheorem

Wenn $\Gamma \vdash t : \tau$ und $t \Rightarrow t'$, dann $\Gamma \vdash t' : \tau$.

Typsystem also korrekt bezüglich β-Reduktion.

Insbesondere: Reduziert t zu einer Konstanten c, so gilt:

$$\tau = \tau_c$$

Korrektheit des Typsystems

β-Reduktion: Substitution von x $\quad (\lambda x.\, t_1)\; t_2 \Rightarrow t_1[x \mapsto t_2]$

Substitutionslemma

Wenn $\Gamma, x : \tau_1 \vdash t_1 : \tau_2$ und $\Gamma \vdash t_2 : \tau_1$, dann $\Gamma \vdash t_1[x \mapsto t_2] : \tau_2$.

Typerhaltungstheorem

Wenn $\Gamma \vdash t : \tau$ und $t \Rightarrow t'$, dann $\Gamma \vdash t' : \tau$.

Beweis: Induktion über Typsystemregeln. **Fall App:**

Annahmen: $\Gamma \vdash t_1 : \tau_1 \to \tau_2 \quad \Gamma \vdash t_2 : \tau_1 \quad t_1\; t_2 \Rightarrow t'$

Wenn $t_1 \Rightarrow t_1'$, dann $\Gamma \vdash t_1' : \tau_1 \to \tau_2$.

Wenn $t_2 \Rightarrow t_2'$, dann $\Gamma \vdash t_2' : \tau_1$.

Zu zeigen: $\Gamma \vdash t' : \tau_2$

Korrektheit des Typsystems

β-Reduktion: Substitution von x $\quad (\lambda x.\ t_1)\ t_2 \Rightarrow t_1[x \mapsto t_2]$

Substitutionslemma

Wenn $\Gamma, x : \tau_1 \vdash t_1 : \tau_2$ und $\Gamma \vdash t_2 : \tau_1$, dann $\Gamma \vdash t_1[x \mapsto t_2] : \tau_2$.

Typerhaltungstheorem

Wenn $\Gamma \vdash t : \tau$ und $t \Rightarrow t'$, dann $\Gamma \vdash t' : \tau$.

Beweis: Induktion über Typsystemregeln. **Fall App:**

Annahmen: $\Gamma \vdash t_1 : \tau_1 \to \tau_2 \quad \Gamma \vdash t_2 : \tau_1 \quad t_1\ t_2 \Rightarrow t'$

Wenn $t_1 \Rightarrow t_1'$, dann $\Gamma \vdash t_1' : \tau_1 \to \tau_2$.

Wenn $t_2 \Rightarrow t_2'$, dann $\Gamma \vdash t_2' : \tau_1$.

Zu zeigen: $\Gamma \vdash t' : \tau_2$

Fallunterscheidung über $t_1\ t_2 \Rightarrow t'$:

β-Reduktion innerhalb von t_1 oder t_2 Behauptung folgt aus Annahmen.

$t_1 = \lambda x.\ t^*$ und $t' = t^*[x \mapsto t_2]$ $\Rightarrow \Gamma, x : \tau_1 \vdash t^* : \tau_2$

$\Rightarrow$ Substitutionslemma

Untypisierbare λ-Terme

Karlsruher Institut für Technologie

Typisierbare λ-Terme

t typisierbar im Kontext Γ, falls τ mit $\Gamma \vdash t : \tau$ exisitert.

- $(\lambda \mathrm{x}.\ \mathrm{x} + 42)$ *true* nicht typisierbar.
  - Angenommen, $\Gamma \vdash (\lambda \mathrm{x}.\ \mathrm{x} + 42)\ \textit{true} : \tau$.

$\Rightarrow$ (App) Existiert τ' mit $\Gamma \vdash \textit{true} : \tau'$ und $\Gamma \vdash \lambda \mathrm{x}.\ \mathrm{x} + 42 : \tau' \to \tau$.

$\Rightarrow$ (Const) $\tau' = \tau_{\textit{true}} = \text{bool}$ und (Abs) $\Gamma, \mathrm{x} : \tau' \vdash \mathrm{x} + 42 : \tau$

$\Rightarrow$ (App) $\tau' = \tau = \text{int}$, da $\tau_{+} = \text{int} \to \text{int} \to \text{int}$. Widerspruch.

Untypisierbare λ-Terme

Typisierbare λ-Terme

t typisierbar im Kontext Γ, falls τ mit $\Gamma \vdash t : \tau$ exisitert.

- $(\lambda \mathrm{x}.\ \mathrm{x} + 42)$ *true* nicht typisierbar.
  - Angenommen, $\Gamma \vdash (\lambda \mathrm{x}.\ \mathrm{x} + 42)\ \mathit{true} : \tau$.

$\Rightarrow$ (App) Existiert τ' mit $\Gamma \vdash \mathit{true} : \tau'$ und $\Gamma \vdash \lambda \mathrm{x}.\ \mathrm{x} + 42 : \tau' \to \tau$.

$\Rightarrow$ (Const) $\tau' = \tau_{\mathit{true}} =$ bool und (Abs) $\Gamma, \mathrm{x} : \tau' \vdash \mathrm{x} + 42 : \tau$

$\Rightarrow$ (App) $\tau' = \tau =$ int, da $\tau_{+} =$ int $\to$ int $\to$ int. Widerspruch.

Aber: nicht alle sicheren Programme typisierbar

- In diesem Sinn: Typsystem nicht vollständig bzgl. β-Reduktion

Untypisierbare λ-Terme

Typisierbare λ-Terme

t typisierbar im Kontext Γ, falls τ mit $\Gamma \vdash t : \tau$ exisitert.

- $(\lambda \mathrm{x}.\ \mathrm{x} + 42)$ *true* nicht typisierbar.
  - Angenommen, $\Gamma \vdash (\lambda \mathrm{x}.\ \mathrm{x} + 42)\ \mathit{true} : \tau$.
  - $\Rightarrow$ (App) Existiert τ' mit $\Gamma \vdash \mathit{true} : \tau'$ und $\Gamma \vdash \lambda \mathrm{x}.\ \mathrm{x} + 42 : \tau' \to \tau$.
  - $\Rightarrow$ (Const) $\tau' = \tau_{\mathit{true}} = \mathrm{bool}$ und (Abs) $\Gamma, \mathrm{x} : \tau' \vdash \mathrm{x} + 42 : \tau$
  - $\Rightarrow$ (App) $\tau' = \tau = \mathrm{int}$, da $\tau_{+} = \mathrm{int} \to \mathrm{int} \to \mathrm{int}$. Widerspruch.
- $\omega = (\lambda \mathrm{x}.\ \mathrm{x}\ \mathrm{x})\ (\lambda \mathrm{x}.\ \mathrm{x}\ \mathrm{x})$ nicht typisierbar
  - Angenommen $\Gamma \vdash (\lambda \mathrm{x}.\ \mathrm{x}\ \mathrm{x})\ (\lambda \mathrm{x}.\ \mathrm{x}\ \mathrm{x}) : \tau$.
  - $\Rightarrow$ (App) Existiert τ' mit $\Gamma \vdash \lambda \mathrm{x}.\ \mathrm{x}\ \mathrm{x} : \tau' \to \tau$ (und $\Gamma \vdash \lambda \mathrm{x}.\ \mathrm{x}\ \mathrm{x} : \tau'$).
  - $\Rightarrow$ (Abs) $\Gamma, \mathrm{x} : \tau' \vdash \mathrm{x}\ \mathrm{x} : \tau$
  - $\Rightarrow$ (App) Existiert τ'' mit $\Gamma, \mathrm{x} : \tau' \vdash \mathrm{x} : \tau'' \to \tau$ und $\Gamma, \mathrm{x} : \tau' \vdash \mathrm{x} : \tau''$.
  - $\Rightarrow$ (Var) $\tau' = (\tau'' \to \tau)$ und $\tau' = \tau''$. Also: $\tau'' = (\tau'' \to \tau)$
  - Typen sind <u>endlich</u>! $\Rightarrow$ Keine Lösung für τ''.
- Auch Y nicht typisierbar

Typinferenz-Beispiel

Beispiel: *if* $\texttt{ChF}$ 1 2 $= (((\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2$
Vorgabe: $\Gamma = \texttt{ChF} : \alpha \to \beta \to \beta$
$\texttt{ChF}$ hat Typ von Church Boolean c_{false}

$$\Gamma \vdash (((\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2 : \alpha_1$$

Start der Typisierung mit Variable α_1

Typinferenz-Beispiel

Beispiel: *if* $\texttt{ChF}$ 1 2 $= (((\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2$
Vorgabe: $\Gamma = \texttt{ChF} : \alpha \to \beta \to \beta$

$$\textsc{App}\ \frac{\Gamma \vdash ((\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1 : \alpha_2 \to \alpha_1 \qquad \Gamma \vdash 2 : \alpha_2}{\Gamma \vdash (((\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2 : \alpha_1}$$

Passende Regel anwenden:

$$\textsc{App}:\ \frac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_2 \to \tau \qquad \Gamma \vdash t_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash t_1\ t_2 : \tau}$$

Problem: Wachsende Komplexität im Unterbaum durch $\alpha_2 \to \alpha_1$

Typinferenz-Beispiel

$\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1$

Beispiel: *if* $\texttt{ChF}$ 1 2 $= (((\lambda \texttt{x}.\, \texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2$
Vorgabe: $\Gamma = \texttt{ChF} : \alpha \to \beta \to \beta$

$$\text{APP}\ \frac{\Gamma \vdash ((\lambda \texttt{x}.\, \texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1 : \alpha_3 \qquad \Gamma \vdash 2 : \alpha_2}{\Gamma \vdash (((\lambda \texttt{x}.\, \texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2 : \alpha_1}$$

Passende Regel anwenden:

$$\text{APP:}\ \frac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_2 \to \tau \qquad \Gamma \vdash t_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash t_1\ t_2 : \tau}$$

Problem: Wachsende Komplexität im Unterbaum durch $\alpha_2 \to \alpha_1$
Lösung: vorerst α_3 und $\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1$ später.

Typinferenz-Beispiel

$\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1$
$\alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3$

Beispiel: *if* $\texttt{ChF}$ 1 2 $= (((\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2$
Vorgabe: $\Gamma = \texttt{ChF} : \alpha \to \beta \to \beta$

$$\textsc{App}\ \dfrac{\textsc{App}\ \dfrac{\Gamma \vdash (\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF} : \alpha_5 \qquad \Gamma \vdash 1 : \alpha_4}{\Gamma \vdash ((\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1 : \alpha_3} \qquad \ldots}{\Gamma \vdash (((\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2 : \alpha_1}$$

Äquivalent…

$$\textsc{App}: \dfrac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_2 \to \tau \qquad \Gamma \vdash t_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash t_1\ t_2 : \tau}$$

Typinferenz-Beispiel

$\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1$
$\alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3$
$\alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5$

Beispiel: *if* $\texttt{ChF}$ 1 2 $= (((\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2$
Vorgabe: $\Gamma = \texttt{ChF} : \alpha \to \beta \to \beta$

$$\textsc{App}\ \dfrac{\textsc{App}\ \dfrac{\textsc{App}\ \dfrac{\Gamma \vdash \lambda\texttt{x}.\,\texttt{x} : \alpha_7 \qquad \Gamma \vdash \texttt{ChF} : \alpha_6}{\Gamma \vdash (\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF} : \alpha_5} \qquad \ldots}{\Gamma \vdash ((\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1 : \alpha_3} \qquad \ldots}{\Gamma \vdash (((\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2 : \alpha_1}$$

Äquivalent...

$$\textsc{App}: \dfrac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_2 \to \tau \qquad \Gamma \vdash t_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash t_1\ t_2 : \tau}$$

Typinferenz-Beispiel

$\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1$
$\alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3$
$\alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5$
$\alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9$

Beispiel: *if* $\texttt{ChF}$ 1 2 $= (((\lambda \texttt{x}.\, \texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2$
Vorgabe: $\Gamma = \texttt{ChF} : \alpha \to \beta \to \beta$

$$
\textsc{App}\ \dfrac{\textsc{App}\ \dfrac{\textsc{App}\ \dfrac{\textsc{Abs}\ \dfrac{\Gamma, \texttt{x} : \alpha_8 \vdash \texttt{x} : \alpha_9}{\Gamma \vdash \lambda \texttt{x}.\, \texttt{x} : \alpha_7} \qquad \Gamma \vdash \texttt{ChF} : \alpha_6}{\Gamma \vdash (\lambda \texttt{x}.\, \texttt{x})\ \texttt{ChF} : \alpha_5} \qquad \ldots}{\Gamma \vdash ((\lambda \texttt{x}.\, \texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1 : \alpha_3} \qquad \ldots}{\Gamma \vdash (((\lambda \texttt{x}.\, \texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2 : \alpha_1}
$$

Wegen $\textsc{Abs}: \dfrac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash t : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x.\, t : \tau_1 \to \tau_2}$ muss α_7 Funktionstyp sein.

Typinferenz-Beispiel

$$\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1$$
$$\alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3$$
$$\alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5$$
$$\alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9$$
$$\alpha_8 = \alpha_9$$

Beispiel: *if* $\mathtt{ChF}$ 1 2 $= (((\lambda \mathtt{x}.\, \mathtt{x})\ \mathtt{ChF})\ 1)\ 2$

Vorgabe: $\Gamma = \mathtt{ChF} : \alpha \to \beta \to \beta$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\Gamma, \mathtt{x} : \alpha_8)\,(\mathtt{x}) = \alpha_9}{(\Gamma, \mathtt{x} : \alpha_8) \vdash \mathtt{x} : \alpha_9}\,\textsc{Var}}{\Gamma \vdash \lambda \mathtt{x}.\, \mathtt{x} : \alpha_7}\,\textsc{Abs} \qquad \Gamma \vdash \mathtt{ChF} : \alpha_6}{\Gamma \vdash (\lambda \mathtt{x}.\, \mathtt{x})\ \mathtt{ChF} : \alpha_5}\,\textsc{App} \qquad \ldots}{\Gamma \vdash ((\lambda \mathtt{x}.\, \mathtt{x})\ \mathtt{ChF})\ 1 : \alpha_3}\,\textsc{App} \qquad \ldots}{\Gamma \vdash (((\lambda \mathtt{x}.\, \mathtt{x})\ \mathtt{ChF})\ 1)\ 2 : \alpha_1}\,\textsc{App}$$

Wegen $\textsc{Var}: \dfrac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x : \tau}$ muss $\alpha_8 = \alpha_9$.

Typinferenz-Beispiel

$$\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1$$
$$\alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3$$
$$\alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5$$
$$\alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9$$
$$\alpha_8 = \alpha_9$$
$$\color{red}{\alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta}$$

Beispiel: *if* $\texttt{ChF}$ 1 2 $= (((\lambda\mathtt{x}.\,\mathtt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2$

Vorgabe: $\Gamma = \texttt{ChF} : \alpha \to \beta \to \beta$

$$\textsc{App}\ \dfrac{\textsc{App}\ \dfrac{\textsc{App}\ \dfrac{\textsc{Abs}\ \dfrac{\textsc{Var}\ \dfrac{(\Gamma, \mathtt{x} : \alpha_8)\,(\mathtt{x}) = \alpha_9}{(\Gamma, \mathtt{x} : \alpha_8) \vdash \mathtt{x} : \alpha_9}}{\Gamma \vdash \lambda\mathtt{x}.\,\mathtt{x} : \alpha_7} \quad \textsc{Var}\ \dfrac{\Gamma(\texttt{ChF}) = \alpha_6}{\Gamma \vdash \texttt{ChF} : \alpha_6}}{\Gamma \vdash (\lambda\mathtt{x}.\,\mathtt{x})\ \texttt{ChF} : \alpha_5} \quad \ldots}{\Gamma \vdash ((\lambda\mathtt{x}.\,\mathtt{x})\ \texttt{ChF})\ 1 : \alpha_3} \quad \ldots}{\Gamma \vdash (((\lambda\mathtt{x}.\,\mathtt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2 : \alpha_1}$$

$$\textsc{Var}: \dfrac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x : \tau}$$

Äquivalent für α_6

Unterbaum $\Gamma \vdash (\lambda\mathtt{x}.\,\mathtt{x})\ \texttt{ChF} : \alpha_5$ abgeschlossen.

Typinferenz-Beispiel

$\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1$
$\alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3$
$\alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5$
$\alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9$
$\alpha_8 = \alpha_9$
$\alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta$
$\alpha_4 = \text{int}$

Beispiel: *if* $\texttt{ChF}\ 1\ 2 = (((\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2$
Vorgabe: $\Gamma = \texttt{ChF} : \alpha \to \beta \to \beta$

$$\textsc{App}\ \dfrac{\textsc{App}\ \dfrac{\textsc{App}\ \dfrac{\dots}{\Gamma \vdash (\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF} : \alpha_5} \qquad \textsc{Const}\ \dfrac{1 \in \mathit{Const}}{\Gamma \vdash 1 : \alpha_4}}{\Gamma \vdash ((\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1 : \alpha_3} \qquad \dots}{\Gamma \vdash (((\lambda\texttt{x}.\,\texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2 : \alpha_1}$$

Weiter mit den Const-Unterbäumen

$$\textsc{Const}: \dfrac{c \in \mathit{Const}}{\Gamma \vdash c : \tau_c}$$

Typinferenz-Beispiel

$$\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1$$
$$\alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3$$
$$\alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5$$
$$\alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9$$
$$\alpha_8 = \alpha_9$$
$$\alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta$$
$$\alpha_4 = \text{int}$$
$$\alpha_2 = \text{int}$$

Beispiel: *if* $\texttt{ChF}$ 1 2 $= (((\lambda \texttt{x}.\, \texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2$

Vorgabe: $\Gamma = \texttt{ChF} : \alpha \to \beta \to \beta$

$$\textsc{App}\ \dfrac{\textsc{App}\ \dfrac{\textsc{App}\ \dfrac{\ldots}{\Gamma \vdash (\lambda \texttt{x}.\, \texttt{x})\ \texttt{ChF} : \alpha_5} \qquad \textsc{Const}\ \dfrac{1 \in \mathit{Const}}{\Gamma \vdash 1 : \alpha_4}}{\Gamma \vdash ((\lambda \texttt{x}.\, \texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1 : \alpha_3} \qquad \textsc{Const}\ \dfrac{2 \in \mathit{Const}}{\Gamma \vdash 2 : \alpha_2}}{\Gamma \vdash (((\lambda \texttt{x}.\, \texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2 : \alpha_1}$$

Weiter mit den Const-Unterbäumen

$$\textsc{Const}: \dfrac{c \in \mathit{Const}}{\Gamma \vdash c : \tau_c}$$

Typinferenz-Beispiel

$C = \{$
$\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1$
$\alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3$
$\alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5$
$\alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9$
$\alpha_8 = \alpha_9$
$\alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta$
$\alpha_4 = \text{int}$
$\alpha_2 = \text{int}\ \}$

Beispiel: *if* $\texttt{ChF}\ 1\ 2 = (((\lambda \texttt{x}.\, \texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2$
Vorgabe: $\Gamma = \texttt{ChF} : \alpha \to \beta \to \beta$

$$\text{APP}\ \dfrac{\text{APP}\ \dfrac{\text{APP}\ \dfrac{\dots}{\Gamma \vdash (\lambda \texttt{x}.\, \texttt{x})\ \texttt{ChF} : \alpha_5} \qquad \text{CONST}\ \dfrac{1 \in \mathit{Const}}{\Gamma \vdash 1 : \alpha_4}}{\Gamma \vdash ((\lambda \texttt{x}.\, \texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1 : \alpha_3} \qquad \text{CONST}\ \dfrac{2 \in \mathit{Const}}{\Gamma \vdash 2 : \alpha_2}}{\Gamma \vdash (((\lambda \texttt{x}.\, \texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2 : \alpha_1}$$

Gleichungssystem C „unifizieren“ für Lösung (σ, α_1) der Typinferenz

Unifikation

Suchen Substitution, die alle Bedingungen erfüllt: Unifikator

Unifikator

Substitution σ unifiziert Gleichung $\tau = \tau'$, falls $\sigma\tau = \sigma\tau'$.
σ unifiziert C, falls $\forall c \in C$ gilt: σ unifiziert c.

Beispiel: $C = \{\alpha_1 \to \alpha_2 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_3 = \text{bool} \to \alpha_4\}$
$\gamma = [\alpha_1 \Rightarrow \text{int}, \alpha_2 \Rightarrow \text{bool} \to \text{int}, \alpha_3 \Rightarrow \text{bool} \to \text{int}, \alpha_4 \Rightarrow \text{int}]$ Unifikator für C

Allgemeinster Unifikator (most general unifier, *mgu*)

σ *mgu* , falls $\forall\gamma$ Unifikator $\exists$ Substitution $\delta.\ \gamma = \delta \circ \sigma$.

Beispiel: $\sigma = [\alpha_1 \Rightarrow \alpha_4, \alpha_2 \Rightarrow \text{bool} \to \alpha_4, \alpha_3 \Rightarrow \text{bool} \to \alpha_4]$ *mgu* für obiges C

- für γ wähle z.B. $\delta = [\alpha_4 \Rightarrow \text{int}]$

Unifikation

Unifikationsalgorithmus: $\texttt{unify}(C) =$

$$
\begin{array}{l}
\textbf{if}\ C\ \texttt{==}\ \emptyset\ \textbf{then}\ []\\
\textbf{else let}\ \{\tau_1 = \tau_2\} \cup C' = C\ \textbf{in}\\
\quad \textbf{if}\ \tau_1\ \texttt{==}\ \tau_2\ \textbf{then}\ \texttt{unify}(C')\\
\quad \textbf{else if}\ \tau_1\ \texttt{==}\ \alpha\ \texttt{and}\ \alpha \notin FV(\tau_2)\ \textbf{then}\ \texttt{unify}([\alpha \Rightarrow \tau_2]\, C') \circ [\alpha \Rightarrow \tau_2]\\
\quad \textbf{else if}\ \tau_2\ \texttt{==}\ \alpha\ \texttt{and}\ \alpha \notin FV(\tau_1)\ \textbf{then}\ \texttt{unify}([\alpha \Rightarrow \tau_1]\, C') \circ [\alpha \Rightarrow \tau_1]\\
\quad \textbf{else if}\ \tau_1\ \texttt{==}\ (\tau_1' \to \tau_1'')\ \texttt{and}\ \tau_2\ \texttt{==}\ (\tau_2' \to \tau_2'')\\
\qquad\quad \textbf{then}\ \texttt{unify}(C' \cup \{\tau_1' = \tau_2', \tau_1'' = \tau_2''\})\\
\quad \textbf{else fail}
\end{array}
$$

$\alpha \in FV(\tau)$ occur check, verhindert zyklische Substitutionen

Korrektheitstheorem

$\texttt{unify}(C)$ terminiert und gibt *mgu* für C zurück, falls C unifizierbar, ansonsten **`fail`**.

Beweis: Siehe Literatur

Unifikation: Beispiel von oben

$\sigma = \mathit{mgu}$ von $C = \{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5, \alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \alpha_8 = \alpha_9, \alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \alpha_4 = \text{int}, \alpha_2 = \text{int}\}$?

$\texttt{unify}(C) =$

Unifikation: Beispiel von oben

$\sigma = \textit{mgu}$ von $C = \{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5, \alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \alpha_8 = \alpha_9, \alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \alpha_4 = \text{int}, \alpha_2 = \text{int}\}$?

$\texttt{unify}(C) = \texttt{unify}($
$\{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1\} \cup \{\ \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3,$
$\alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5,$
$\alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9,\ \alpha_8 = \alpha_9,$
$\alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta,\ \alpha_4 = \text{int},\ \alpha_2 = \text{int},$

$\}$
$)$

Unifikation: Beispiel von oben

$\sigma = \mathit{mgu}$ von $C = \{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5, \alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \alpha_8 = \alpha_9, \alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \alpha_4 = \text{int}, \alpha_2 = \text{int}\}$?

$\texttt{unify}(C) = \texttt{unify}($
$\{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1\} \cup \{\ \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3,$
$\alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5,$
$\alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9,\ \alpha_8 = \alpha_9,$
$\alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta,\ \alpha_4 = \text{int},\ \alpha_2 = \text{int},$

$\}$
$)$

Unifikation: Beispiel von oben

$\sigma = mgu$ von $C = \{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5, \alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \alpha_8 = \alpha_9, \alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \alpha_4 = \text{int}, \alpha_2 = \text{int}\}$?

$$\texttt{unify}(C) = \ldots = \texttt{unify}(\\ \{\alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1\} \cup \{$$

$$\alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5,$$
$$\alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9,\ \ \alpha_8 = \alpha_9,$$
$$\alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta,\ \ \alpha_4 = \text{int},\ \ \alpha_2 = \text{int},$$

$$\}$$
$$) \circ$$

$$[\alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 \to \alpha_1]$$

Unifikation: Beispiel von oben

$\sigma = mgu$ von $C = \{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5, \alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \alpha_8 = \alpha_9, \alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \alpha_4 = \text{int}, \alpha_2 = \text{int}\}$?

$\texttt{unify}(C) = \ldots = \texttt{unify}($

$\{\alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1\} \cup \{$

$\alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \;\; \alpha_8 = \alpha_9,$

$\alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \;\; \alpha_4 = \text{int}, \;\; \alpha_2 = \text{int},$

$\}$

$) \circ$

$[\alpha_5 \Rightarrow \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ$

$[\alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 \to \alpha_1]$

Unifikation: Beispiel von oben

$\sigma = mgu$ von $C = \{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5, \alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \alpha_8 = \alpha_9, \alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \alpha_4 = \text{int}, \alpha_2 = \text{int}\}$?

$\texttt{unify}(C) = \ldots = \texttt{unify}($

$\{\alpha_6 \to \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1 = \alpha_8 \to \alpha_9\} \cup \{\ \alpha_8 = \alpha_9,$
$\alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta,\ \alpha_4 = \text{int},\ \alpha_2 = \text{int},$

$\}$
$) \circ$

$[\alpha_7 \Rightarrow \alpha_6 \to \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ [\alpha_5 \Rightarrow \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ$
$[\alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 \to \alpha_1]$

Unifikation: Beispiel von oben

$\sigma = mgu$ von $C = \{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5, \alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \alpha_8 = \alpha_9, \alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \alpha_4 = \text{int}, \alpha_2 = \text{int}\}$?

$\texttt{unify}(C) = \ldots = \texttt{unify}($

$\{\alpha_8 = \alpha_9\} \cup \{$

$\alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta,\ \alpha_4 = \text{int},\ \alpha_2 = \text{int},$

$\alpha_6 = \alpha_8,\ \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1 = \alpha_9,$

$\}$

$) \circ$

$[\alpha_7 \Rightarrow \alpha_6 \to \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ [\alpha_5 \Rightarrow \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ$
$[\alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 \to \alpha_1]$

Unifikation: Beispiel von oben

$\sigma = mgu$ von $C = \{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5, \alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \alpha_8 = \alpha_9, \alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \alpha_4 = \text{int}, \alpha_2 = \text{int}\}$?

$\texttt{unify}(C) = \ldots = \texttt{unify}($

$\{\alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta\} \cup \{\ \alpha_4 = \text{int},\ \ \alpha_2 = \text{int},$

$\alpha_6 = \alpha_9,\ \ \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1 = \alpha_9,$

$\}$

$) \circ$

$[\alpha_8 \Rightarrow \alpha_9] \circ$

$[\alpha_7 \Rightarrow \alpha_6 \to \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ [\alpha_5 \Rightarrow \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ$

$[\alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 \to \alpha_1]$

Unifikation: Beispiel von oben

$\sigma = mgu$ von $C = \{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5, \alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \alpha_8 = \alpha_9, \alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \alpha_4 = \text{int}, \alpha_2 = \text{int}\}$?

$\texttt{unify}(C) = \ldots = \texttt{unify}($

$$\{\alpha_4 = \text{int}\} \cup \{\ \alpha_2 = \text{int},$$

$\alpha \to \beta \to \beta = \alpha_9,\ \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1 = \alpha_9,$

$\}$

$) \circ$

$$[\alpha_6 \Rightarrow \alpha \to \beta \to \beta] \circ [\alpha_8 \Rightarrow \alpha_9] \circ$$

$[\alpha_7 \Rightarrow \alpha_6 \to \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ [\alpha_5 \Rightarrow \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ$

$[\alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 \to \alpha_1]$

Unifikation: Beispiel von oben

$\sigma = mgu$ von $C = \{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5, \alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \alpha_8 = \alpha_9, \alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \alpha_4 = \text{int}, \alpha_2 = \text{int}\}$?

$\texttt{unify}(C) = \ldots = \texttt{unify}($

$\{\alpha_2 = \text{int}\} \cup \{$

$\alpha \to \beta \to \beta = \alpha_9,\ \text{int} \to \alpha_2 \to \alpha_1 = \alpha_9,$

$\}$

$) \circ$

$[\alpha_4 \Rightarrow \text{int}] \circ [\alpha_6 \Rightarrow \alpha \to \beta \to \beta] \circ [\alpha_8 \Rightarrow \alpha_9] \circ$
$[\alpha_7 \Rightarrow \alpha_6 \to \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ [\alpha_5 \Rightarrow \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ$
$[\alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 \to \alpha_1]$

Unifikation: Beispiel von oben

$\sigma = mgu$ von $C = \{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5, \alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \alpha_8 = \alpha_9, \alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \alpha_4 = \text{int}, \alpha_2 = \text{int}\}$?

$\texttt{unify}(C) = \ldots = \texttt{unify}($

$\{\alpha \to \beta \to \beta = \alpha_9\} \cup \{\ \text{int} \to \text{int} \to \alpha_1 = \alpha_9,$
$\}$
$) \circ$ $[\alpha_2 \mapsto \text{int}] \circ$
$[\alpha_4 \mapsto \text{int}] \circ [\alpha_6 \mapsto \alpha \to \beta \to \beta] \circ [\alpha_8 \mapsto \alpha_9] \circ$
$[\alpha_7 \mapsto \alpha_6 \to \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ [\alpha_5 \mapsto \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ$
$[\alpha_3 \mapsto \alpha_2 \to \alpha_1]$

Unifikation: Beispiel von oben

$\sigma = \mathit{mgu}$ von $C = \{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5, \alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \alpha_8 = \alpha_9, \alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \alpha_4 = \text{int}, \alpha_2 = \text{int}\}$?

$\texttt{unify}(C) = \ldots = \texttt{unify}($

$\{\text{int} \to \text{int} \to \alpha_1 = \alpha \to \beta \to \beta\} \cup \{$

$\}$

$) \circ$ $[\alpha_9 \Rightarrow \alpha \to \beta \to \beta] \circ [\alpha_2 \Rightarrow \text{int}] \circ$

$[\alpha_4 \Rightarrow \text{int}] \circ [\alpha_6 \Rightarrow \alpha \to \beta \to \beta] \circ [\alpha_8 \Rightarrow \alpha_9] \circ$

$[\alpha_7 \Rightarrow \alpha_6 \to \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ [\alpha_5 \Rightarrow \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ$

$[\alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 \to \alpha_1]$

Unifikation: Beispiel von oben

$\sigma = \mathit{mgu}$ von $C = \{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5, \alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \alpha_8 = \alpha_9, \alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \alpha_4 = \text{int}, \alpha_2 = \text{int}\}$?

$\texttt{unify}(C) = \ldots = \texttt{unify}($

$\{\text{int} = \alpha\} \cup \{\ \text{int} = \beta,\ \ \alpha_1 = \text{int}, \}$

$) \circ$ $[\alpha_9 \Rightarrow \alpha \to \beta \to \beta] \circ [\alpha_2 \Rightarrow \text{int}] \circ$
$[\alpha_4 \Rightarrow \text{int}] \circ [\alpha_6 \Rightarrow \alpha \to \beta \to \beta] \circ [\alpha_8 \Rightarrow \alpha_9] \circ$
$[\alpha_7 \Rightarrow \alpha_6 \to \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ [\alpha_5 \Rightarrow \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ$
$[\alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 \to \alpha_1]$

Unifikation: Beispiel von oben

$\sigma = mgu$ von $C = \{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5, \alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \alpha_8 = \alpha_9, \alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \alpha_4 = \text{int}, \alpha_2 = \text{int}\}$?

$\texttt{unify}(C) = \ldots = \texttt{unify}($

$\{\text{int} = \beta\} \cup \{\ \alpha_1 = \text{int}, \}$

$) \circ$ $[\alpha \Rightarrow \text{int}] \circ [\alpha_9 \Rightarrow \alpha \to \beta \to \beta] \circ [\alpha_2 \Rightarrow \text{int}] \circ$
$[\alpha_4 \Rightarrow \text{int}] \circ [\alpha_6 \Rightarrow \alpha \to \beta \to \beta] \circ [\alpha_8 \Rightarrow \alpha_9] \circ$
$[\alpha_7 \Rightarrow \alpha_6 \to \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ [\alpha_5 \Rightarrow \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ$
$[\alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 \to \alpha_1]$

Unifikation: Beispiel von oben

$\sigma = \textit{mgu}$ von $C = \{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5, \alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \alpha_8 = \alpha_9, \alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \alpha_4 = \text{int}, \alpha_2 = \text{int}\}$?

$\texttt{unify}(C) = \ldots = \texttt{unify}($

$\{\alpha_1 = \text{int}\} \cup \{\}$

$) \circ \quad [\beta \mapsto \text{int}] \circ [\alpha \mapsto \text{int}] \circ [\alpha_9 \mapsto \alpha \to \beta \to \beta] \circ [\alpha_2 \mapsto \text{int}] \circ [\alpha_4 \mapsto \text{int}] \circ [\alpha_6 \mapsto \alpha \to \beta \to \beta] \circ [\alpha_8 \mapsto \alpha_9] \circ [\alpha_7 \mapsto \alpha_6 \to \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ [\alpha_5 \mapsto \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ [\alpha_3 \mapsto \alpha_2 \to \alpha_1]$

Unifikation: Beispiel von oben

$\sigma = \mathit{mgu}$ von $C = \{\alpha_3 = \alpha_2 \to \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_4 \to \alpha_3, \alpha_7 = \alpha_6 \to \alpha_5, \alpha_7 = \alpha_8 \to \alpha_9, \alpha_8 = \alpha_9, \alpha_6 = \alpha \to \beta \to \beta, \alpha_4 = \text{int}, \alpha_2 = \text{int}\}$?

$\texttt{unify}(C) = \ldots = \texttt{unify}($

$\{\ \}$

$) \circ [\alpha_1 \Rightarrow \text{int}] \circ [\beta \Rightarrow \text{int}] \circ [\alpha \Rightarrow \text{int}] \circ [\alpha_9 \Rightarrow \alpha \to \beta \to \beta] \circ [\alpha_2 \Rightarrow \text{int}] \circ$
$[\alpha_4 \Rightarrow \text{int}] \circ [\alpha_6 \Rightarrow \alpha \to \beta \to \beta] \circ [\alpha_8 \Rightarrow \alpha_9] \circ$
$[\alpha_7 \Rightarrow \alpha_6 \to \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ [\alpha_5 \Rightarrow \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ$
$[\alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 \to \alpha_1]$

Beispiel: Lösung

Beispiel: *if* $\texttt{ChF}\ 1\ 2 = (((\lambda \texttt{x}.\, \texttt{x})\ \texttt{ChF})\ 1)\ 2$

Lösung der Typinferenz: $(\sigma, \sigma\alpha_1)$ wobei $\sigma =$

$$[\alpha_1 \Rightarrow \text{int}] \circ [\beta \Rightarrow \text{int}] \circ [\alpha \Rightarrow \text{int}] \circ [\alpha_9 \Rightarrow \alpha \to \beta \to \beta] \circ [\alpha_2 \Rightarrow \text{int}] \circ [\alpha_4 \Rightarrow \text{int}] \circ$$
$$[\alpha_6 \Rightarrow \alpha \to \beta \to \beta] \circ [\alpha_8 \Rightarrow \alpha_9] \circ [\alpha_7 \Rightarrow \alpha_6 \to \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ$$
$$[\alpha_5 \Rightarrow \alpha_4 \to \alpha_2 \to \alpha_1] \circ [\alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 \to \alpha_1] =$$

$$[\ \alpha_1 \Rightarrow \text{int}, \beta \Rightarrow \text{int}, \alpha \Rightarrow \text{int}, \alpha_9 \Rightarrow \text{int} \to \text{int} \to \text{int}, \alpha_2 \Rightarrow \text{int}, \alpha_4 \Rightarrow \text{int},$$
$$\alpha_6 \Rightarrow \text{int} \to \text{int} \to \text{int}, \alpha_8 \Rightarrow \text{int} \to \text{int} \to \text{int},$$
$$\alpha_7 \Rightarrow (\text{int} \to \text{int} \to \text{int}) \to \text{int} \to \text{int} \to \text{int},$$
$$\alpha_5 \Rightarrow \text{int} \to \text{int} \to \text{int}, \alpha_3 \Rightarrow \text{int} \to \text{int}\ ]$$

$$\begin{array}{rl} \text{Typisierung:} & \sigma\,(\texttt{ChF} : \alpha \to \beta \to \beta) \vdash \textit{if}\ \texttt{ChF}\ 1\ 2 : \sigma\alpha_1 \\ \Leftrightarrow & \texttt{ChF} : \text{int} \to \text{int} \to \text{int} \vdash \textit{if}\ \texttt{ChF}\ 1\ 2 : \text{int} \end{array}$$

Allgemeinste Typen

Falls *t* nicht typisierbar: Unifikation schlägt fehl

$\Rightarrow$ Verfahren korrekt bezüglich Typsystem

Allgemeinster Typ (principal type):

Sei *t* typisierbar im Kontext Γ, dann existiert ein allgemeinster Typ τ mit $\Gamma \vdash t : \tau$, so dass für alle Typisierungen $\Gamma \vdash t : \tau'$ eine Substitution σ existiert, mit $\sigma\tau = \tau'$.

Unser Verfahren liefert immer allgemeinsten Typen dank Unifikation.

$\Rightarrow$ Verfahren vollständig bezüglich Typsystem, jeder gültige Typ τ' aus Ergebnis τ bestimmbar

$\exists$ Allgemeinster Typ

$\Rightarrow$ keine Mehrdeutigkeiten bei Typinferenz

$\Rightarrow$ Lösung eindeutig