Exemple : let $x = e_1$ in
let $y = e_2$ in
$x + y$

Objectif : montrer que cette transformation préserve la sémantique

Lemme : si $\Gamma, e \Rightarrow v$
alors $\Gamma', \varphi(e) \Rightarrow \varphi(v)$

$\varphi(e)$ e où on a transformer toutes les additions

ex : $\varphi(n) = n \quad \varphi(x) = x \quad \varphi(e_1+e_2) = \text{let} \dots$
$\varphi(e_1\ e_2) = \varphi(e_1)\ \varphi(e_2)$

Démonstration, par récurrence sur la dérivation

- Cas $\Gamma, n \Rightarrow n$, on a bien $\Gamma, \varphi(n) \Rightarrow n$
- Cas $\Gamma, x \Rightarrow v$, avec $\Gamma(x) = v$, on a bien $\Gamma, \varphi(x) \Rightarrow v$
- Cas $\Gamma, e_1\ e_2 \Rightarrow w$ car $\Gamma, e_1 \Rightarrow (\text{fun } x \to e, \Gamma')$
  et $\Gamma, e_2 \Rightarrow v$
  et $\Gamma'\{x \to v\}, e \Rightarrow w$

$\Rightarrow$ On a trois Hypothèse de Récurrence

- $\varphi(\Gamma), \varphi(e_1) \Rightarrow (\text{fun } x \to \varphi(e), \varphi(\Gamma'))$
- $\varphi(\Gamma), \varphi(e_2) \Rightarrow \varphi(v)$
- $\varphi(\Gamma')\{x \to \varphi(v)\}, \varphi(e) \Rightarrow \varphi(w)$

$$\frac{\varphi(\Gamma)\ \varphi(e_1) \Rightarrow (\text{fun } x \to \varphi(e), \varphi(\Gamma')) \quad \varphi(\Gamma), \varphi(e_2) \Rightarrow \varphi(v) \quad \varphi(\Gamma')\{x \to \varphi(v)\}\ \varphi(e) \Rightarrow \varphi(w)}{\varphi(\Gamma),\ \varphi(e_1)\ \varphi(e_2) \Rightarrow \varphi(w)}$$

$$\frac{\overset{HR}{\overline{\varphi(\Gamma), \varphi(e_1) \Rightarrow \varphi(v_1)}} \quad \dfrac{\overset{HR}{\varphi(\Gamma)\{x \to \varphi(v_1)\}\ \varphi(e_1) \Rightarrow \varphi(e_2)} \quad \dfrac{x \Rightarrow \varphi(v_1) \quad \overline{y \Rightarrow \varphi(v_2)} \quad \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v)}{\varphi(\Gamma)\left\{\begin{matrix} x \to \varphi(v_1) \\ y \to \varphi(v_2) \end{matrix}\right\}\ x+y \Rightarrow \varphi(v)}}{\varphi(\Gamma)\{x \to \varphi(v_1)\},\ \text{let } y = \varphi(e_2) \text{ in } x+y \Rightarrow \varphi(v)}}{\varphi(\Gamma),\ \text{let } x = \varphi(e_1) \text{ in let } y = \varphi(e_2) \text{ in } x+y \Rightarrow \varphi(v)}$$