Применение автоматов для изменения вероятностого распределения алфавита

Муравьёв Никита

1 Постановка задачи

Имеется алфавит L. На нем задано вероятностное распределение. Рассматриваются обратимые автоматы, для которых этот алфавит является как входным, так и выходным. Требуется выяснить, каково вероятностное распределение выходного алфавита "в пределе".

2 Теорема 1

Групповой автомат[1], равномощный алфавиту, у которого совпадают функции перехода и выхода, "в пределе" дает равномерное распределение алфавита, если вероятность любого входа больше нуля.

$\triangleright$ Матрица переходов P, соответствующая групповому автомату с n состояниями, будет стохастической с положительными элементами. Для такой матрицы применима сжимающая лемма, согласно которой $\exists \lim_{t\to\infty} P^t = W$. Причем

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$$

Но матрица P является дважды стохастической[2], так как при ее транспонировании получаем матрицу, соответствующую тому же автомату, но с обращенными стрелками. Значит, W тоже дважды стохастическая. Но тогда $nw_i = 1 \Rightarrow w_i = \frac{1}{n}\ \forall i$. $\square$

3 Теорема 2

Если не групповой автомат равномощен алфавиту, а его функции перехода и выхода совпадают, то он не дает "в пределе" равномерного распределения алфавита, если вероятность любого входа больше нуля.

[1] В каждое состояние входят стрелки всех видов, и из каждого состояния выходят стрелки всех видов

[2] Остается стохастической после транспонирования.

$\triangleright$ Предположим, что $\exists$ автомат A, удовлетворяющий условию, который дает в пределе равномерное распределение, то есть для его матрицы переходов P

$$\exists \lim_{t\to\infty} P^t = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = W$$

Тогда $WP = W \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1 \; \forall j = 1, \dots, n$
Значит, P - дважды стохастическая матрица. Но это значит, что в любое состояние входят стрелки всех видов, ведь элементы матрицы неотрицательны. Из стохастичности матрицы и неотрицательности ее элементов следует, что из любого состояния выходят стрелки всех видов. Выходит, что автомат групповой. Противоречие с условием. $\square$