Algorithmisches Beweisen LAB

2-SAT

Luc Spachmann

FSU Jena

18.04.2024

Ziele

- Implementierung von SAT-Lösern
  - 2-SAT
  - DP
  - DPLL
  - CDCL (Schrittweise)

Einschränkung

- Eine Belegung ist eine Abbildung $\alpha : \mathsf{Var} \to \{0, 1\}$
- Eine Einschränkung ist die Anwendung einer (partiellen) Belegung auf eine Formel
- Zwei Möglichkeiten:
  - Ein Literal kann aus einer Klausel gelöscht werden
  - Eine Klausel kann aus der Formel gelöscht werden

Beispiel

$$f = (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee x_4)$$

- Belegung $\alpha : x_1 \mapsto 0, x_2 \mapsto 0$
- Einschränkung

$$\begin{aligned} f[\alpha] &= (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1) \wedge (0 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee x_4) \\ &= 1 \wedge 1 \wedge (\neg x_3) \wedge (x_3 \vee x_4) \\ &= (\neg x_3) \wedge (x_3 \vee x_4) \end{aligned}$$

Unit Propagation

$$(\neg x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_4 \vee \neg x_5)$$

- Eine Unit-Klausel beinhaltet genau ein Literal $(\neg x_1)$
- Eine Unit-Belegung erfüllt eine Unit-Klausel: $x_1 \mapsto 0$
- Unit Propagation ist eine sukzessive und vollständige Anwendung von Unit-Belegungen

Beispiel 2

$$
\begin{array}{lr}
 & (\neg x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_4 \vee \neg x_5) \\
x_1 \mapsto 0 & (\neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_4 \vee \neg x_5) \\
x_2 \mapsto 0 & (x_3) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_4 \vee \neg x_5) \\
x_3 \mapsto 1 & (\neg x_4) \wedge (x_4 \vee \neg x_5) \\
x_4 \mapsto 0 & (\neg x_5) \\
x_5 \mapsto 0 & \top
\end{array}
$$

Formel ist mit Belegung $\alpha : x_1 \mapsto 0, \ldots, x_5 \mapsto 0$ erfüllbar.

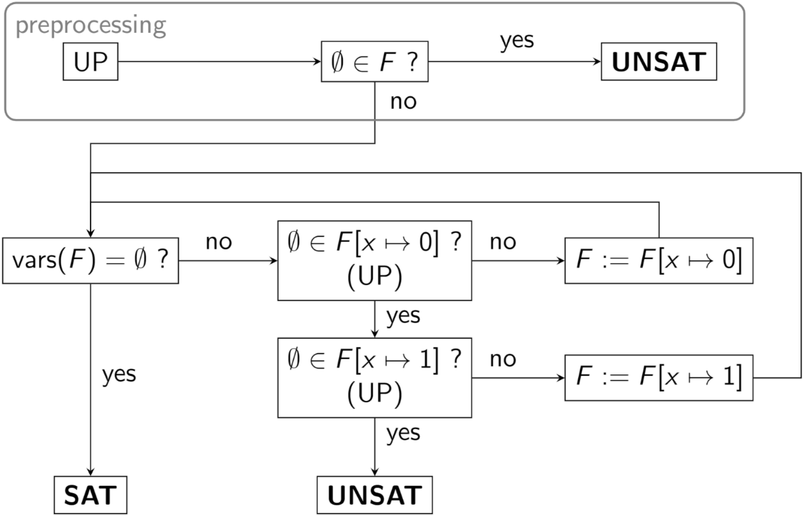
2-SAT

- CNF der Breite 2
- In Linearzeit lösbar
- Sei $F[x \mapsto b]$ die Anwendung von $x \mapsto b$ und vollständige Unit Propagation auf F ($b \in \{0, 1\}$)
- Eine Entscheidung und Unit Propagation behält Erfüllbarkeit bei, falls keine leere Klausel entsteht:

$$\emptyset \notin F[x \mapsto b] \Longrightarrow F \equiv_{\text{sat}} F[x \mapsto b]$$

- Falls F erfüllbar und $F[x \mapsto b]$ keine leere Klausel enthält, ist auch $F[x \mapsto b]$ erfüllbar

2-Sat Algorithmus



Aufgabe: 2-SAT

- Implementierung des 2-SAT Algorithmus
- Programm sollte Formeln in DIMACS bekommen (als Datei; Pfad als Kommandozeilenargument)
- Testen des Programms anhand zufälliger 2-SAT Formeln (bspw. über Vergleich mit verbreiteten Solvern; z.B. Cadical)
- Output in Standardoutput:
  - s {SATISFIABLE/UNSATISFIABLE}
  - v Belegung (Bsp. -1 -2 3 -4 -5)
  - Ausgabe einiger Statistiken, jede Zeile beginnend mit c
    - Anzahl Unit Propagations
    - Anzahl Entscheidungen