第 19 卷第 6 期　　系 统 工 程 学 报　　Vol. 19 No. 6
2004 年 12 月　　JOURNAL OF SYSTEMS ENGINEERING　　Dec. 2004

车辆路径问题的粒子群算法研究①

李　宁[1,2]，邹　彤[1]，孙德宝[1]
(1. 华中科技大学控制科学与工程系，湖北 武汉 430074；
2. 武汉理工大学计算机科学与技术学院，湖北 武汉 430070)

摘要：车辆路径优化问题是一类具有重要实用价值的组合 NP 问题. 粒子群算法(particle swarm optimization)是一种新出现的群智能(swarm intelligence)优化方法，将其应用于车辆路径优化问题，构造车辆路径问题的粒子表达方法，建立了此问题的粒子群算法，并与遗传算法作了对比试验. 结果表明，粒子群算法可以快速、有效求得车辆路径问题的优化解，是求解车辆路径问题的一个较好方案.

关键词：粒子群算法；车辆路径问题；遗传算法
中图分类号：U116.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000 - 5781(2004)06 - 0596 - 05

Particle swarm optimization for vehicle routing problem

LI Ning[1,2]，ZOU Tong[1]，SUN De-bao[1]
(1. Department of Control Science & Engineering，Huazhong Univ. of Sci. & Technology，Wuhan 430074，China；
2. School of Computer Science & Technology，Wuhan University of Technology，Wuhan 430070，China)

Abstract: The vehicle routing problem (VRP) is a kind of combination NP problem which possesses important practical value. Particle swarm optimization (PSO) is a newly appeared method for swarm intelligence optimization. PSO is used in this paper to solve the VRP. This paper proposes a novel particle presentation for the vehicle routing problem，establishes an algorithm of PSO for this kind of problem，and compares PSO with GA in the same VRP experiments. Experimental results indicate that the established algorithm of PSO can quickly and effectively get optimal solution to the vehicle routing problem，which demonstrates that the algorithm is an effective method for solving the vehicle routing problem.

Key words: particle swarm optimization；vehicle routing problem；genetic algorithm

0　引　言

车辆路径问题(vehicle routing problem，VRP)由 Dantzig 和 Ramser 于 1959 年首次提出，它是指对一系列发货点(或收货点)组成适当的行车路径，使车辆有序地通过它们，在满足一定约束条件的情况下，达到一定的目标(诸如路程最短、费用最小，耗费时间尽量少等)[1]. 此类问题具有很强的应用背景，又是一个 NP 完全问题，在运筹、计算机、物流、管理等学科均有重要意义. 近年来，研究者们先后将一般启发式算法和神经网络、遗传算法、禁忌搜索和模拟退火等智能化启发式算法用于 VRP 问题，取得了一些较好的效果[1].

粒子群算法(particle swarm optimization，PSO)[2]是最近出现的一种模拟鸟群飞行的仿生算法，有着个体数目少，计算简单，鲁棒性好等优点，在各类多维连续空间优化问题上均取得非常好的效果[3]. 本文将 PSO 应用于车辆路径问题求

① 收稿日期：2003 - 05 - 13；修订日期：2004 - 09 - 06.

解中,取得了很好的效果.

1　车辆路径问题的描述及数学模型

车辆路径问题一般描述为:有一个中心仓库,拥有 K 辆车,容量分别为 $q_k(k = 1, \cdots, K)$;现有 L 个发货点运输任务需要完成,以 $1, \cdots, L$ 表示,第 i 个发货点的货运量为 $g_i(i = 1, \cdots, L)$,且 $\max g_i \le \max q_k$,求满足货运需求的最短车辆行驶路径.

本文采用文献[1]提出的数学模型,将中心仓库编号为 0,发货点编号为 $1, \cdots, L$,任务及中心仓库均以点 $i(i = 0, 1, \cdots, L)$ 来表示. 定义变量如下

$$y_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{发货点 } i \text{ 的任务由车 } k \text{ 完成} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{车 } k \text{ 从点 } i \text{ 行驶到点 } j \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

c_{ij} 表示从点 i 到 j 的运输成本,它的含义可以是距离、费用、时间等,本文中代表距离. 则可得到车辆优化调度数学模型如下

$$\begin{cases} \text{Min } Z = \sum_i \sum_j \sum_k c_{ij} x_{ijk} \\ \text{s.t.} \quad \sum_i g_i y_{ki} \le q_k \quad \forall k \\ \sum_k y_{ki} = 1 \quad i = 1, \cdots, L \\ \sum_i x_{ijk} = y_{kj} \quad j = 0, 1, \cdots, L; \ \forall k \\ \sum_j x_{ijk} = y_{ki} \quad i = 0, 1, \cdots, L; \ \forall k \\ X = (x_{ijk}) \in S \\ x_{ijk} = 0 \text{ 或 } 1 \quad i, j = 0, 1, \cdots, L; \ \forall k \\ y_{ki} = 0 \text{ 或 } 1 \quad i = 0, 1, \cdots, L; \ \forall k \end{cases} \tag{1}$$

该模型要求每个发货点都得到车辆的配送服务,并限制每个发货点的需求仅能由某一车辆来完成;同时保证每条路径上的各发货点的总需求量不超过此路径配送车的容量. 优化问题也就是在满足以上条件的情况下,使所有车辆路径之和 Z 最小.

2　粒子群算法

粒子群算法由 Kennedy 和 Eberhart 在 1995 年提出[2],该算法模拟鸟集群飞行觅食的行为,通过鸟之间的集体协作使群体达到最优目的.

在 PSO 系统中,每个备选解被称为一个“粒子”(particle),多个粒子共存、合作寻优,每个粒子根据它自身的“经验”和粒子群的最佳“经验”在问题空间中向更好的位置“飞行”,搜索最优解.

PSO 算法数学表示如下[3]:

设搜索空间为 D 维,总粒子数为 n. 第 i 个粒子位置表示为向量 $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{iD})$;第 i 个粒子“飞行”历史中的最优位置(即该位置对应解最优)为 $P_i = (p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{iD})$,其中第 g 个粒子的历史最优位置 P_g 为所有 $P_i(i = 1, \cdots, n)$ 中的最优;第 i 个粒子的位置变化率(速度)为向量 $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{iD})$. 每个粒子的位置按如下公式进行变化(“飞行”)

$$v_{id}(t+1) = w\, v_{id}(t) + c_1 \operatorname{rand}(\cdot) \cdot [p_{id}(t) - x_{id}(t)] + c_2 \operatorname{rand}(\cdot) \cdot [p_{gd}(t) - x_{id}(t)] \tag{2}$$

$$x_{id}(t+1) = x_{id}(t) + v_{id}(t+1), \quad 1 \le i \le n \quad 1 \le d \le D \tag{3}$$

其中,c_1, c_2 为正常数,称为加速因子;rand() 为 [0,1] 之间的随机数;w 称惯性因子,w 较大适于对解空间进行大范围探查(exploration),w 较小适于进行小范围开挖(exploitation). 第 $d(1 \le d \le D)$ 维的位置变化范围为 $[-X\max_d, X\max_d]$,速度变化范围为 $[-V\max_d, V\max_d]$,迭代中若位置和速度超过边界范围则取边界值. Maurice 等对上述参数进行了分析,给出了 PSO 算法收敛的参数条件[4].

粒子群初始位置和速度随机产生,然后按式(2)、(3)进行迭代,直至找到满意的解. 目前,常用的粒子群算法将全体粒子群(global)分成若干个有部分粒子重叠的相邻子群(local),Kennedy 提出了多种邻居子群拓扑结构[5],如 Ring 型、Wheel 型、Star 型等,并做了相关分析. 每个粒子根据子群的历史最优 P_l 调整速度和位置,即式(2)中 p_{gd} 换为 p_{ld}. PSO 算法可用伪代码表示如下:

```
初始化粒子群;
Do
   For 每个粒子
      计算其适应度;
```

If (适应度优于粒子历史最佳值)
用 X_i 更新历史个体最佳 P_i;
End
选取当前粒子群(或子群) 中最佳粒子;
If(当前最佳粒子优于群历史最佳粒子)
用当前群最佳粒子更新 P_g(or P_l);
For 每个粒子
按式(2) 更新粒子速度;
按式(3) 更新粒子位置;
End
While 最大迭代数未达到或最小误差未达到.

近几年的研究和实践表明,PSO 在多维空间多峰问题寻优、动态目标寻优方面有着速度快、解质量高、鲁棒性好等优点[3].

3 车辆路径问题的粒子群算法

3.1 构造粒子表达方式

如何找到一个合适的表达方法,使粒子与解对应,是实现算法的关键问题之一. 借鉴文献[6]的思路,本文构造一个 $2L$ 维的空间对应有 L 个发货点任务的 VRP 问题,每个发货点任务对应两维:完成该任务车辆的编号 k,该任务在车 k 行驶路径中的次序 r. 为表达和计算方便,将每个粒子对应的 $2L$ 维向量 X 分成两个 L 维向量:X_v(表示各任务对应的车辆) 和 X_r(表示各任务在对应的车辆路径中的执行次序).

例如,设 VRP 问题中发货点任务数为 7,车辆数为 3,若某粒子的位置向量 X 为:

发货点任务号:	1	2	3	4	5	6	7
X_v:	1	2	2	2	2	3	3
X_r:	1	4	3	1	2	2	1

则该粒子对应解路径为:

车 1: 0 →1 →0

车 2: 0 →4 →5 →3 →2 →0

车 3: 0 →7 →6 →0

粒子速度向量 V 与之对应表示为 V_v 和 V_r.

该表示方法的最大优点是使每个发货点都得到车辆的配送服务,并限制每个发货点的需求仅能由某一车辆来完成,使解的可行化过程计算大大减少. 虽然该表示方法的维数较高,但由于 PSO 算法对多维寻优问题有着非常好的特性[7],维数的增加并未增加计算的复杂性,这一点在实验结果中可以看到.

3.2 算法实现过程

前面所述 PSO 算法为连续空间算法,而 VRP 问题为整数规划问题,因此在算法实现过程中要作相应修改. 具体实现步骤如下:

步骤 1 初始化粒子群.

1) 将粒子群划分成若干个两两相互重叠的子群;

2) 每个粒子位置向量 X_v 的每一维随机取 $1 \sim K$(车辆数) 之间的整数,X_r 的每一维随机取 $1 \sim L$(发货点任务数) 之间的实数;

3) 每个速度向量 V_v 的每一维随机取 $-(K-1) \sim (K-1)$(车辆数) 之间的整数,V_r 的每一维随机取 $-(L-1) \sim (L-1)$ 之间的实数;

4) 用评价函数 Eval(后述) 评价所有粒子;

5) 将初始评价值作为个体历史最优解 P_i,并寻找各子群内的最优解 P_l 和总群体内最优解 P_g.

步骤 2 重复执行以下步骤,直到满足终止条件或达到最大迭代次数.

1) 对每一个粒子,按式(2) 计算 V_v、V_r;按照式(3) 计算 X_v、X_r,其中 X_v 向上取整;当 V、X 超过其范围时按边界取值.

2) 用评价函数 Eval 评价所有粒子;

3) 若某个粒子的当前评价值优于其历史最优评价值,则记当前评价值为该历史最优评价值,同时记当前位置为该粒子历史最优位置 P_i;

4) 寻找当前各子群内最优解和总群体内最优解,若优于历史最优解则更新 P_l、P_g. 对于子群内所有个体均为不可行解,或子群内有多个体同为最优值的情况,则随机取其中一个为子群内当前最优解.

其中,评价函数 Eval 完成以下任务:

1) 将迭代运算所得 X_r 按从小到大顺序进行重新整数序规范化,以利于行驶距离的计算和后续迭代计算.

例如,某粒子迭代一次后结果如下:

发货点:	1	2	3	4	5	6	7
X_v:	1	2	2	2	2	3	3
X_r:	5	3.2	6.2	1.2	2.5	0.5	4.2

其中,第 2、3、4、5 号任务由车 2 完成,这些任务点所对应的 X_r 值为(3.2 6.2 1.2 2.5),用其值从

小到大的顺序号重新设置 X_r. 任务点 4 所对应 X_r 值 1.2 最小,将其更新为 1;任务点 5 对应 X_r 值 2.5 次小,将其更新为 2,其他依此类推. 按此方法,经重新整数序规范化后得到的 X_r 为:

1　3　4　1　2　1　2

2) 计算该粒子所代表方案的距离之和 Z. 对于有某条路径上的各发货任务的总需求量超过此条路径配送车容量的不可行解,则将该方案的评价值置为一个可行解不可达到的大值 $T_{\max}$.

4　实验结果及分析

为便于比较结果,用 MatLab 6.1 编写了车辆路径问题的粒子群算法和遗传算法(GA) 程序. 并在同一 P4 1.7G、256M RAM、Win2000 操作系统的计算机上运行. 其中,GA 采用了文献[1]中的染色体编码方式和相关参数;粒子群参数采用满足文献[4]中约束条件的参数.

实验 1　采用文献[1]中例子,问题为一个有 7 个发货点任务的车辆路径问题,各任务的坐标及货运量见表 1.

表 1　各发货点坐标及货运量

序号	0	1	2	3	4	5	6	7
坐 标	(18,54)	(22,60)	(58,69)	(71,71)	(83,46)	(91,38)	(24,42)	(18,40)
货运量 (g_i)		0.89	0.14	0.28	0.33	0.21	0.41	0.57

注:序号 0 表示中心仓库,设车辆容量皆为 $q = 1.0$,由 3 辆车完成所有任务(最优路径距离为 217.81).

GA 参数:群体规模 $n = 40$;交叉概率 $P_c = 0.6$;变异概率 $P_m = 0.2$;轮盘赌法选择子代,最大迭代数 200.

PSO 参数:粒子数 $n = 40$;邻居群采用环形(Ring) 拓扑结构[5],邻居子群规模为 3;$w = 0.729$;$c_1 = c_2 = 1.494\ 45$;最大迭代数 200.

两种方法各运行 50 次,比较结果如表 2 所示.

表 2　实验 1　GA、PSO 方法结果对比

方法	达到最优路径次数	未达最优路径次数	达到最优路径平均代数	达到最优路径的平均时间/s
GA	32	18	53.9	32.3
PSO	50	0	28.36	3.04

PSO 方法每次达到最优路径的代数为

7	23	2	17	7	17	13	7	41	19
28	11	33	14	21	23	11	71	82	24
13	58	36	20	10	3	8	5	65	35
9	2	15	76	25	67	30	55	9	29
21	6	38	9	43	148	1	29	3	79

实验结果表明,PSO 方法对该问题的搜索成功率为 100 %,远远高于 GA 方法的 64 %,而且达到最优路径的速度比 GA 方法提高 10 倍左右. 说明在该问题上使用 PSO 方法的效果远远优于 GA 方法. 这一结果与文献[6]中 GA 和 PSO 在并行处理器任务调度分配问题中的比较结果非常近似.

为验证实验结果是否具备一般性,随机产生多个 VRP 问题,使用与上面相同参数的 GA 和 PSO 算法进行实验,所取得结果近似.

实验 2　为考察粒子数变化对 PSO 方法效果的影响,随机产生多个货点任务数不同的 VRP 问题进行实验. 表 4 为对 3 个货点任务数同为 10,车辆数分别为 4、5、6 的不同 VRP 问题,分别采用不同的粒子数,每种情况各作 50 次实验的结果. 除最大代数为 2 000 以外,其它参数与实验 1 相同.

通过多次试验得到以下经验规律:

1) 当发货点任务数增加,必须增加粒子数来避免出现收敛于局部最优. 对于发货点任务数相同的不同 VRP 问题,使之能达到较高搜索成功率(搜索到最优路径的几率)的最少粒子数也有所不同,一般当粒子数为任务数的 6～8 倍时,搜索成功率可达 90 %以上;

2) 使用不同的子群拓扑结构对搜索成功率和达到最优路径的平均代数有影响,采用 Ring 拓扑邻居子群结构的效果最佳;

3) 子群之间重叠粒子个数对搜索成功率和达到最优路径的平均代数也有一定影响. 重叠粒子个数过多易于导致局部收敛,而重叠粒子数太少则会使搜索成功的迭代次数和时间增加,一般重叠粒子数为 1～2 效果最好;

4) 当粒子数大于任务数的 6 倍之后,对于达到最优解的平均搜索时间、50 次搜索结果平均值而言,粒子数的增加并无很大影响,即粒子数与寻优速度和解的质量的相关性不大.

表 4 实验 2 粒子数与寻优结果的相关性

车辆数	最优路径距离	粒子数	达到最优路径次数	达到最优路径的平均代数	达到最优路径的平均时间/s	50 次实验结果路径平均距离
4	554.547	40	32	437.3	59.24	556.156
		60	39	284.1	59.41	555.163
		80	46	254.1	70.34	554.839
		100	46	239.5	82.37	554.770
		120	47	164.3	64.65	554.749
5	470.165	40	39	525.4	73.23	471.147
		60	47	305.3	72.00	470.319
		80	48	267.3	80.65	470.334
		100	48	179.0	67.33	470.334
		120	50	184.2	91.90	470.165
6	581.400	40	40	529.9	71.80	581.664
		60	43	493.0	105.62	581.552
		80	44	446.1	129.33	581.531
		100	44	373.3	134.29	581.531
		120	46	284.8	122.06	581.487

文献[7]在对典型连续非线性多维多峰函数使用 PSO 方法寻优的经验研究中,发现粒子数与寻优结果的相关性并不大;通过自适应修改惯量 w 的方法,可以克服在非常复杂空间寻优时收敛于局部最优解的问题. 但 VRP 属于整数规划问题,实验中采用自适应修改惯量 w 的方法,但并未能解决收敛于局部最优解的问题.

5 结论

分析 PSO 方法,可以看出它与 GA 等其他演化算法的最大不同在于:

1) 迭代运算中只涉及到初等运算,且运算量非常少;

2) 每个个体(粒子)能直接获取子群历史经验和个体历史经验,比在其他方法中使用精英集(elitism)的方法更有效;

3) 整个粒子群被划分为若干个子群,且子群之间有一定重叠,从而使收敛于局部最优解的几率大大减少.

正因为如此,将 PSO 应用于车辆路径问题求解中,取得了很好的效果,有着运算速度快、鲁棒性好、个体数目与寻优结果相关性小、所获得的解质量高等诸多优点.

本文所研究对象为单仓库非满载 VRP 问题,PSO 方法是否能在带时间窗 VRP 问题、不确定车辆数 VRP 问题、多仓库 VRP 问题,以及其他整数规划问题上取得同样的效果,将作进一步的研究.

参考文献:

[1]李 军,郭耀煌. 物流配送车辆优化调度理论与方法[M]. 北京:中国物资出版社,2001. 76—77.

[2]Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization[A]. Proc. IEEE International Conference on Neural Networks, IV[C]. Piscataway, NJ: IEEE Service Center, 1995. 1942—1948.

[3]Eberhart R C, Shi Y. Particle Swarm Optimization: Developments, Applications and Resources[C]. Proc. Congress on Evolutionary Computation 2001. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2001. 81—86.

[4]Maurice C, Kennedy J. The particle swarm—explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(1): 58—73.

[5]Kennedy J. Small worlds and mega-minds: Effects of neighborhood topology on particle swarm performance[A]. Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation[C]. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1999. 1931—1938.

[6]Salmen A, Ahmad I, Al-Madani B. Particle swarm optimization for task assignment problem[J]. Microprocessors and Microsystems, 2002, 26: 363—371.

[7]Shi Y, Eberhart R C. Empirical study of particle swarm optimization[A]. Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation[C]. Piscataway, NJ: IEEE Service Center, 1999. 1945—1950.

作者简介:

李 宁(1972—)男,湖北京山人,博士生,讲师,研究方向:系统工程、演化计算、人工生命;

邹 彤(1971—)男,湖北黄石人,博士生,研究方向:演化计算;

孙德宝(1941—)男,湖北云梦人,教授,博士生导师,研究方向:人工智能,信号处理.