

计划评审技术 (PERT)

3.2.6.3

目录

- (一) PERT分析说明
- (二) 应用 (手工)
- (三) 应用 (Excel)
- (四) 应用 (MS Project)
- (五) PERT的应用价值
- (六) 练习

(一) PERT分析说明

PERT类似于CPM，区别在于：CPM中活动的持续时间是最大可能值，是确定的；PERT中活动的持续时间是用贝塔分布表示的，不是确定的。

- PERT的时间参数计算
 - (1) PERT的活动持续时间估算
 - (2) PERT中活动的最早与最晚时间计算
- PERT的关键线路分析
 - (3) PERT的关键线路消耗时间估算
 - (4) 项目的最早期望结束时间
- PERT的项目完成分析
 - (5) 项目完成的概率计算

(1) PERT的活动持续时间估算

- 采用三点估计法
 - PERT确定活动持续时间的计算公式如右所示：

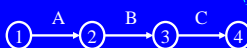
$$t_e = \frac{t_o + 4t_m + t_p}{6}$$

- 进一步可以计算活动持续时间的标准差，其计算公式如右：

$$\sigma = \frac{(t_p - t_o)}{6}$$

● 算例

考虑下图所示的简单的网络图，各项活动的三个时间估计值如下表所示，假定项目的开始时间为0并且必须在第40天之前完成。



活动	t_o	t_m	t_p
A	2	4	6
B	5	13	15
C	13	18	35

■ 各项活动的平均持续时间计算如下：

- 活动A: $t_e = (2 + 4 \times 4 + 6) / 6 = 4$ 天
- 活动B: $t_e = (5 + 4 \times 13 + 15) / 6 = 12$ 天
- 活动C: $t_e = (13 + 4 \times 18 + 35) / 6 = 20$ 天

■ 各项活动的方差计算如下：

- 活动A: $\sigma^2 = \left(\frac{6-2}{6}\right)^2 = 0.444$
- 活动B: $\sigma^2 = \left(\frac{15-5}{6}\right)^2 = 2.778$
- 活动C: $\sigma^2 = \left(\frac{35-13}{6}\right)^2 = 13.444$

(2) PERT中活动的最早与最晚时间计算

- 在PERT中，通过三点估计法估算确定了活动的持续时间后，PERT网络的计算就与CPM的计算相同了。正推计算可得到活动的最早时间，逆推计算可得到活动的最晚时间。

(3) PERT的关键线路消耗时间估算

● 分析

- 当采用三点估计时，项目网络图中关键线路上的所有活动的持续时间的和，即关键线路的消耗时间仍是一个**随机变量**（ T_{cp} ），有其自身的概率分布，该概率分布可以称之为**总概率分布**
- 若关键线路上活动很多，各活动又不相关时，根据概率中心极限定理，这个**总概率分布近似符合正态概率分布**

● 计算

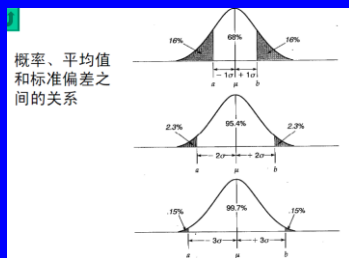
- 根据概率理论，关键线路消耗时间（ T_{cp} ）的期望值（ t_{cp} ）等于关键线路上各项活动的平均持续时间之和
- 关键线路消耗时间的标准差等于各项活动持续时间的方差之和的平方根

$$\sigma_{cp} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}$$

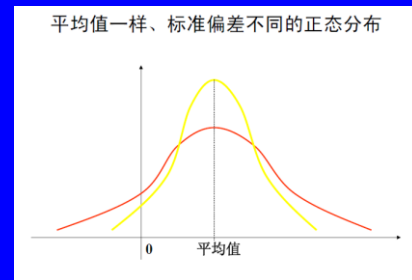
- 若有多条关键线路时取各条关键线路方差的最大值

(补充)

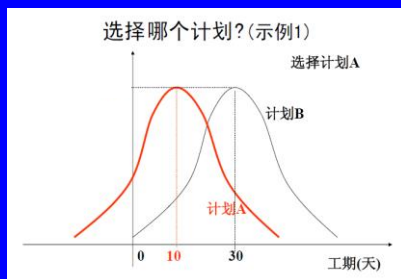
- 对于一个网络计划，关键线路消耗时间的期望值、标准差和概率的关系



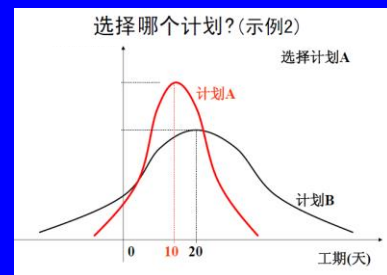
- 对于一个网络计划，关键线路消耗时间的标准差越大，关键线路在同样的时间区间内完工的概率越低，则风险越大



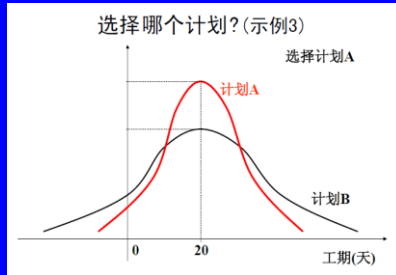
- 一个项目形成两个网络计划A和B，计划A的关键线路的期望值小于计划B的，标准差一样，应该选择计划A



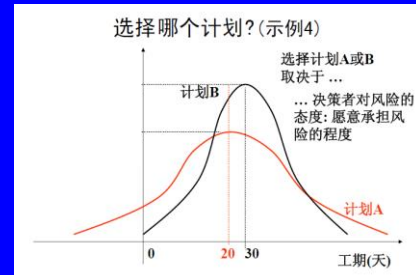
- 一个项目形成两个网络计划A和B，计划A的关键线路的期望值和标准差都小于计划B的，应该选择计划A



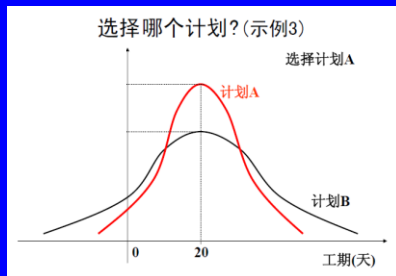
- 一个项目形成两个网络计划A和B，计划A的关键线路的期望值等于计划B的，标准差前者小于后者，应该选择计划A



- 一个项目形成两个网络计划A和B，计划A的关键线路的期望值小于计划B的，标准差前者大于后者，选择哪个计划应具体计算



- 一个项目的网络计划有两条关键线路A和B，期望值相等，A的标准差小于B的，则B比A更为关键



算例

- 考虑下图所示的简单的网络图，各项活动的时间估计值如下表所示，假定项目的开始时间为0并且必须在第40天之前完成。



活动	t_o	t_m	t_p	t_s
A	2	4	6	4
B	5	13	15	12
C	13	18	35	20

- 网络图的关键线路1-2-3-4的平均消耗时间等于活动A、B、C的平均持续时间之和，即 $4+12+20=36$ 天。
- 关键线路1-2-3-4消耗时间的标准差等于活动A、B、C的方差之和的平方根：

$$\sigma_{cp} = \sqrt{0.444 + 2.778 + 13.444} = \sqrt{16.666} = 4.08$$

(4) 项目的最早期望结束时间

- 项目的最早结束时间 (T_c ，设其期望值为 t_c) 取决于网络图中的关键线路，其期望值等于项目预计开始时间加上关键线路的平均消耗时间。
- 对前面的例子而言，项目的最早期望结束时间就是 $0+36=36$ 天。

(5) 项目完成的概率计算

- 关键线路消耗时间 (T_{cp}) 的均值 (t_{cp}) 和标准差 (σ_{cp}) 是可以得到的，这样 T_{cp} 这一随机变量的正态分布也就确定了，因此可以进一步计算在项目的要求完工时间 (T_r) 前或某一时间区间关键线路完成的概率。
- 由于关键线路完成之时也就是项目完成之时，因此所计算的概率也就是项目在项目要求完工时间之前或某一时间区间完成的概率。

项目在要求完工时间之前完成的概率

- 计算方法：首先计算下式中的参数，然后查标准正态分布的数值表就可以得到结果。

- 下式中，F表示 T_{cp} 的分布函数， Φ 是F通过变量代换化成的标准正态分布函数。

$$P(T_{cp} \leq T_r) = F(T_r) = \Phi\left(\frac{T_r - t_{cp}}{\sigma_{cp}}\right) = \Phi(\lambda)$$

- 算例（考虑前面的例子）

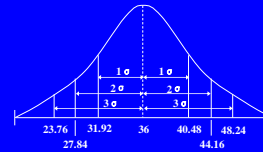
- 项目要求完工时间是42天，项目网络图中关键线路消耗时间的均值是36天，标准差是4.08天，则

$$P(T_{cp} \leq 42) = \Phi\left(\frac{42 - 36}{4.08}\right) = \Phi(1.47)$$

- 查表得 $\Phi(1.47) = 0.92922$ ，表明项目在要求完工时间之前完工的概率是92.922%。

- 以前例为例，将网络图关键线路的平均消耗时间及其标准差反映到关键线路消耗时间这一随机变量的概率分布上，如下图。

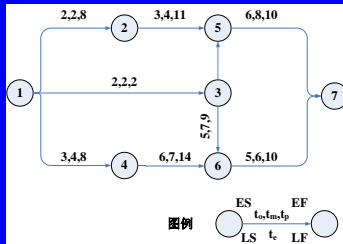
- 在31.92天与40.08天之间完成项目的概率为68%，在27.84天与44.16天之间完成项目的概率为95%，在23.76天与48.24天之间完成项目的概率为99%。



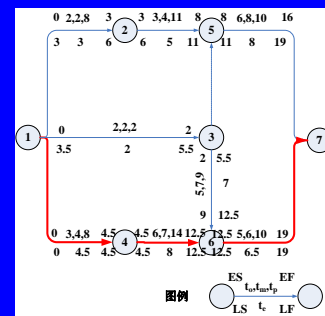
- 在 $\pm 1\sigma$ 范围内即在31.92天与40.08天之间包含了正态曲线下总面积的68%。
- 在 $\pm 2\sigma$ 范围内即在27.84天与44.16天之间包含了正态曲线下总面积的95%。
- 在 $\pm 3\sigma$ 范围内即在23.76天与48.24天之间包含了正态曲线下总面积的99%。

(二) 应用 (手工)

- 项目网络图及时间数据如图所示，设要求工期是20，问项目在要求工期前完工的概率是多少？



- 时间参数计算及关键线路分析如下图



- $t_c = t_{cp} = 19$
- 项目在要求工期前完工的概率为72%

$$\sigma_{cp} = \sqrt{\sigma_{14}^2 + \sigma_{46}^2 + \sigma_{67}^2} = 1.78$$

$$P(T_{cp} \leq 20) = \Phi\left(\frac{20 - 19}{1.78}\right) = \Phi(0.56)$$

(三) 应用 (Excel)

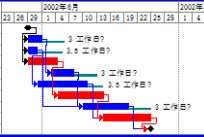
- 对上例应用Excel得到下表

活动	to	tm	tp	te	标准差	ES	EF	LS	LF	FF	TF	关键路 线1	关键路 线2
(1,2)	2	2	8	3	1	0	3	3	6	0	3	0	0
(1,3)	2	2	2	0	0	2	3.5	5.5	0	3.5	0	0	0
(1,4)	3	4	8	4.5	0.8333	0	4.5	0	4.5	0	0	1	0
(2,5)	3	4	11	5	1.3333	3	8	6	11	0	3	0	0
(3,5)	0	0	0	0	0	2	2	11	11	6	9	0	0
(3,6)	5	7	9	7	0.6667	2	9	5.5	12.5	3.5	3.5	0	0
(4,6)	6	7	14	8	1.3333	4.5	12.5	4.5	12.5	0	0	1	0
(5,7)	6	8	10	8	0.6667	8	16	11	19	3	3	0	0
(6,7)	5	6	10	6.5	0.8333	12.5	19	12.5	19	0	0	1	0
节点数	7									关键线路标准差			
tc	19									1.77951			
tp	19												

(四) 应用 (MS Project)

- 对上例应用 **MS Project** 得到下表

序号	任务名称	工期	开始工期	结束工期	提前工期
1	开始	0 工作日	0 工作日	0 工作日	0 工作日
2	(1,2)	3 工作日	2 工作日	2 工作日	0 工作日
3	(1,3)	2 工作日	2 工作日	2 工作日	0 工作日
4	(1,4)	4 工作日	3 工作日	4 工作日	0 工作日
5	(2,5)	5 工作日	3 工作日	4 工作日	11 工作日
6	(3,6)	7 工作日	5 工作日	7 工作日	12 工作日
7	(4,6)	8 工作日	6 工作日	7 工作日	14 工作日
8	(5,7)	9 工作日	6 工作日	8 工作日	10 工作日
9	(6,7)	6 工作日	8 工作日	6 工作日	10 工作日
10	结束	0 工作日	0 工作日	0 工作日	0 工作日



(五) PERT的应用价值

- PERT对于每个项目活动需要估算三种时间，并通过公式计算出活动的加权平均持续时间及其标准偏差。与关键线路法相比，由于PERT需要做更多的工作，以至于很多项目计划人员认为PERT不值得做。
- 事实上，有些人对PERT的有效性持怀疑态度，他们争论的焦点是PERT的三个预测时间加权合成的值与CPM所采用的最可能值相比有什么好处？
- 我们可以认为PERT的主要优点是它使每个人认识到所确定的活动持续时间并不是严格准确的。

(六) 练习

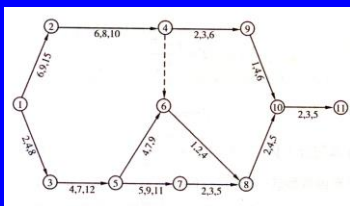
- 一个项目的最早期望结束时间是138天，它的要求完工时间是130天。如果最长路径上各项工作总分布的标准差是6，那么在要求完工时间之前完成项目的概率是多少？

PERT练习1答案

$$P(T_{cp} \leq 130) = \Phi\left(\frac{130-138}{6}\right) = \Phi(-1.33)$$

- 项目在要求工期前完工的概率为9.7%

- 一项新产品开发的项目采用PERT网络计划，各项活动的持续时间按三个估计标于图上，求在33周内完成该项目的概率



PERT练习2答案

序号	1s	2s	3s	4s	期望值	RS	TP	1S	1P	FP	TP	关键路径
(1,2)	6	9	10	9.6	1.6	0	9.6	2.666666667	12.16666667	0	2.666666667	0
(1,3)	2	4	6	4.33	1	0	4.333333333	0	4.333333333	0	0	1
(2,4)	6	8	10	8	0.6667	9.6	17.6	18.16666667	20.16666667	0	2.666666667	0
(3,5)	4	7	12	7.33	1.3333	4.333333333	11.6667	4.333333333	11.66666667	0	0	1
(4,6)	0	0	0	0	0	17.6	17.6	21.33333333	21.33333333	1	3.333333333	0
(4,7)	1	3	6	3.33	0.6667	17.6	20.9333	20.16666667	20.16666667	0	2.666666667	0
(5,6)	4	7	9	6.83	0.8333	11.66666667	18.6	14.6	21.33333333	0	2.333333333	0
(6,7)	5	9	11	8.67	1	11.66666667	20.3333	11.66666667	20.33333333	0	0	1
(6,8)	1	2	4	2.17	0.6	18.6	20.6667	21.33333333	22.6	2.833333333	3.833333333	0
(7,8)	2	3	5	3.17	0.6	20.33333333	23.6	20.33333333	23.6	0	0	1
(8,9)	2	4	5	3.63	0.6	22.6	27.3333	22.6	27.33333333	0	0	1
(9,10)	1	4	6	3.63	0.8333	20.33333333	24.6667	22.6	27.33333333	2.666666667	2.666666667	0
(10,11)	2	3	5	3.17	0.6	27.33333333	30.6	27.33333333	30.6	-30.6	0	1.27768

$$P(T_{cp} \leq 33) = \Phi\left(\frac{33-30.5}{2.13}\right) = \Phi(1.17)$$

- 项目在要求工期前完工的概率为88%

● 已知表所列项目数据。

- 试分别计算项目到17周、24周完成的概率，并计算到多少周完成才能达到90%的完成概率。
- 如果公司能在18周内完成项目，将会得到一笔10000元的奖金；但如果项目拖期到22周以上，就要付出5000元的罚款。如果公司可以选择投标或不投这个项目，而且这个项目只是一个收支平衡的一般项目，公司应当如何决策？

工作	时间/周		
	乐观估计	可能估计	保守估计
1-2	5	11	13
1-3	10	10	10
1-4	2	5	8
2-6	1	7	13
3-6	4	4	10
3-7	4	7	10
3-8	2	2	2
4-8	0	6	6
5-7	2	8	14
6-7	1	4	7

PERT练习3答案

活动	to	tm	tp	ta	标准差	ES	EF	LS	LF	FF	TF	关键路径
(1,2)	5	11	11	10	1	0	10	0	10	0	0	1
(1,3)	10	10	10	10	0	0	10	1	11	0	1	0
(1,4)	2	5	8	5	1	0	5	3	8	0	3	0
(2,6)	1	7	13	7	2	10	17	10	17	0	0	1
(3,6)	4	4	10	6	1	10	15	12	17	2	2	0
(3,7)	4	7	10	7	1	10	17	14	21	4	4	0
(3,8)	2	2	2	2	0	10	12	11	13	0	1	0
(4,8)	0	6	6	6	1	5	10	8	13	2	3	0
(6,7)	2	8	14	8	2	12	20	13	21	1	1	0
(6,7)	1	4	7	4	1	17	21	17	21	0	0	1

关键路径标准差 2.44949

$$P(T_{cp} \leq 17) = \Phi\left(\frac{17-21}{2.45}\right) = \Phi(-1.63)$$

- 项目在17周前完工的概率为5.4%
- 同理，项目在24周前完工的概率为88.5%

$$P(T_{cp} \leq t) = \Phi\left(\frac{t-21}{2.45}\right) = \Phi(1.33) = 0.9$$

- t=24.3天
- 18周内完成项目的概率是11.5%，22周内完成项目的概率是65.5%
- 项目收益1万元的概率为11.5%
- 项目收益-0.5万元的概率为34.5%
- 不投标

案例研究

某建筑公司中标了一个540万美元的工厂建设项目。要求新工厂在一年之内投入使用。因此合同包含了如下条款：

- 如果47周之内不能完成这个建设任务，要赔偿30万美元
- 如果40周之内完成这个建设任务，将获得15万美元的奖金

该公司希望用PERT制定进度计划

案例研究

项目活动列表

编号	活动	紧前活动	估计a	估计m	估计b
A	挖掘	--	1	2	3
B	打地基	A	2	3.5	8
C	建承重墙	B	6	9	18
D	封顶	C	4	5.5	10
E	装外管道	C	1	4.5	5
F	装内管道	E	4	4	10
G	外墙施工	D	5	6.5	11
H	外墙上漆	E,G	5	8	17
I	电路铺设	C	3	7.5	9
J	竖墙板	F,I	3	9	9
K	铺地板	J	4	4	4
L	内部上漆	J	1	5.5	7
M	装外设备	H	1	2	3
N	装内设备	K,L	5	5.5	9

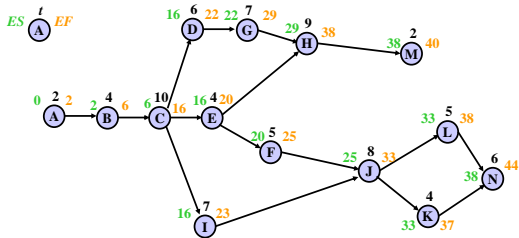
案例研究

项目活动列表

$$\mu = \frac{a + 4m + b}{6} \quad \sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

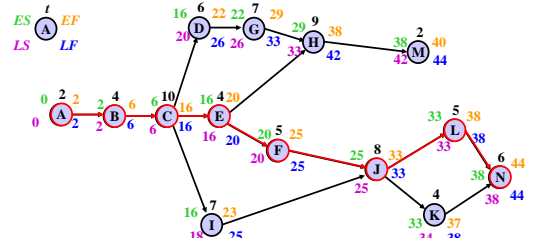
编号	活动	紧前活动	估计a	估计m	估计b	均值	方差
A	挖掘	--	1	2	3	2	1/9
B	打地基	A	2	3.5	8	4	1
C	建承重墙	B	6	9	18	10	4
D	封顶	C	4	5.5	10	6	1
E	装外管道	C	1	4.5	5	4	4/9
F	装内管道	E	4	4	10	5	1
G	外墙施工	D	5	6.5	11	7	1
H	外墙上漆	E,G	5	8	17	9	4
I	电路铺设	C	3	7.5	9	7	1
J	竖墙板	F,I	3	9	9	8	1
K	铺地板	J	4	4	4	4	0
L	内部上漆	J	1	5.5	7	5	1
M	装外设备	H	1	2	3	2	1/9
N	装内设备	K,L	5	5.5	9	6	4/9

- 如果没有延误, 按均值活动时间完成这个项目的总时间是多少?
用均值作为活动时间的估计, 可得该项目的网络图和时间参数:



若每个活动的时间都等于它的均值, 则整个项目可以在44周之内完成, 比规定的工期47周要早3周。

寻找均值关键路线:

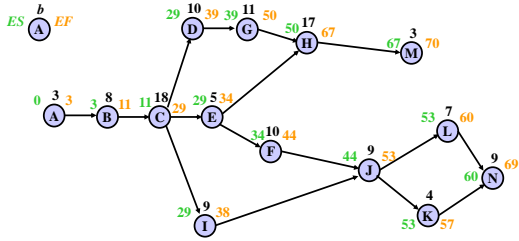


均值关键路线:



- 在最坏的情形下, 完成这个项目的总时间是多少?

为了分析一下最坏的情形, 用悲观估计 b 作为活动时间的估计, 计算时间参数:



这是一种可怕(虽然不可能出现)的情形, 按悲观估计, 整个项目的完成时间变成了70周!

- 项目在47周之内完成的概率是多少?

均值关键路线: A-B-C-E-F-J-L-N

$$\mu_T = 44 \quad \sigma_T^2 = 9$$

注意到

$$p\{T \leq T_0\} = p\left\{\frac{T - \mu_T}{\sigma_T} \leq \frac{T_0 - \mu_T}{\sigma_T}\right\} = \Phi\left(\frac{T_0 - \mu_T}{\sigma_T}\right)$$

应有

$$p\{T \leq 47\} = p\left\{\frac{T - 44}{3} \leq \frac{47 - 44}{3}\right\} = \Phi(1) = 0.84$$

项目在47周之内完成的概率是0.84。

- 如果用额外的资金来加速工程进度的话, 怎样才能以最低的成本达到目标完成时间(40周)?

项目中各活动的时间-成本平衡数据					
活动	时间(周)		费用(万美元)		加快一周的费用(万美元)
	正常	极限	正常	极限	
A	2	1	18	28	10
B	4	2	32	42	5
C	10	7	62	86	8
D	6	4	26	34	4
E	4	3	41	57	16
F	5	3	18	26	4
G	7	4	90	102	4
H	9	6	20	38	6
I	7	5	21	27	3
J	8	6	43	49	3
K	4	3	16	20	4
L	5	3	25	35	5
M	2	1	10	20	10
N	6	3	33	51	6

均值关键路线: A-B-C-E-F-J-L-N

加快处理的
活动

加快费用率
(万美元/周)

ABCDGHM

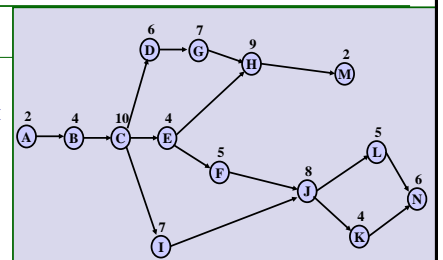
ABCEHM

ABCFJKN

ABCFJLN

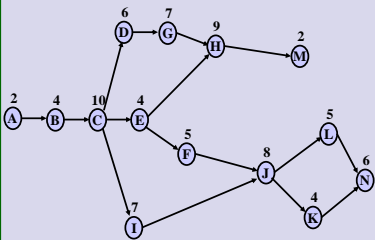
ABCIJKN

ABCIJLN



均值关键路线: 2 4 10 4 5 8 5 6
A B C E F J L N

加快处理 的活动		
加快费用率 (万美元/周)		
ABCDGHM	40	
ABCEHM	31	
ABCEFJKN	43	
ABCEFJLN	44	
ABCIJKN	41	
ABCIJLN	42	



均值关键路线: 2 4 10 4 5 8 5 6
A B C E F J L N

项目中各活动的时间-成本平衡(路线长度)					
加快处理 的活动	J	J	F	F	总加快费用
加快费用率 (万美元/周)					
ABCDGHM	40	40	40	40	14
ABCEHM	31	31	31	31	
ABCEFJKN	43	42	41	40	39
ABCEFJLN	44	43	42	41	40
ABCIJKN	41	40	39	39	39
ABCIJLN	42	41	40	40	40