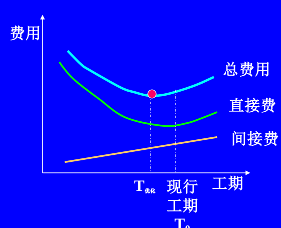
费用优化

2.7.3

目录

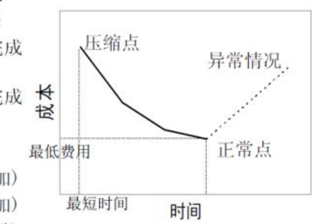
（一）费用优化概述

- 项目费用与工期的关系
  - 项目费用包括直接费和间接费



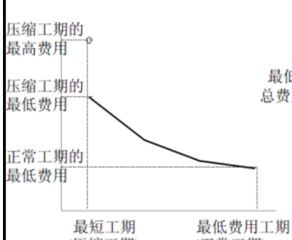
单项工作的时间-费用关系

- 单项工作中的持续时间-直接费用关系，2端点：
  - 正常点：以**最低费用**完成工作的**正常时间**
  - 压缩点：以**最短时间**完成工作的**最高费用**
- 缩短持续时间的方法：
  - 投入更多人力(费用增加)
  - 加班或多班制(费用增加)
  - 保证资源设备供应(奖励)
  - 采取不同方法(新/贵)
  - 平行规划和实施(有风险)

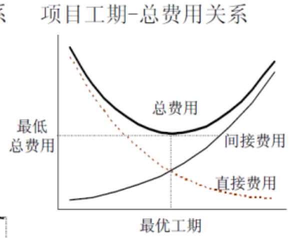


项目的工期-费用关系

项目工期-直接费用关系



项目工期-总费用关系

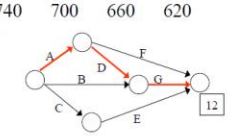


工期-费用优化示例

工作	紧前工作	正常持续时间	正常直接费用	最短时间	压缩费用/天
A	-	3	50	2	50
B	-	6	140	4	60
C	-	2	50	1	30
D	A	5	100	3	40
E	C	2	55	2	-
F	A	7	115	5	30
G	B,D	4	100	2	70

项目工期(天)	12	11	10	9	8	7
间接费用(元)	900	820	740	700	660	620

正常工期： 关键线路 A, D, G
工期 12
总正常直接费用 610
总间接费用 900
总费用 1510



压缩工期至10天：关键线路要压缩2天

工序	正常持续时间	最短持续时间	压缩费用/天
A	3	2	50
D	5	3	40
G	4	2	70

方案：D从5天压缩至3天，增加的费用(压缩费用)=2x40=80

原总正常直接费用	610
增加的费用	80
总间接费用	740（参见上页）
总费用	1430

思考：如何选择要压缩的工作？

线路：线路持续时间>目标工期的关键/非关键线路

工作：这些线路上压缩费用低的工作

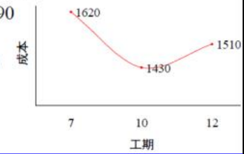
其它准则，如时间长的…、几条线路的公共工作

压缩工期至7天：关键线路要压缩5天，其它线路也要压缩

线路	正常时间	要压缩时间	压缩费用
A, D, G	12	-5	1x50(A)+2x40(D)+2x70(G) = 270
B, G	10	-3	1x60(B) = 60
A, F	10	-3	2x30(F) = 60
C, E	4	0	-

方案：A, D, G, B, F各压缩1, 2, 2, 1, 2天

增加的费用	270+60+60 = 390
原总正常直接费用	610
总间接费用	620 (参见上页)
总费用	1620



三种工期-费用计划的选择：

根据实际情况，选择最适当计划

- 费用优化
  - 也称工期-费用优化，即应用网络计划方法，在一定的约束条件下，综合考虑费用和工期之间的相互关系，以求费用和工期的最佳组合，达到费用低，工期短的优化目的
- 费用优化思路
  - 向关键线路要节约
- 费用优化假设前提
  - 现行工期大于最优工期
  - 相反的情况处理方法类似

- 基本概念
  - 完成一个活动的方法很多，其中总有一个是费用最低的，称与之相应的活动持续时间为活动的正常时间
  - 采取一些措施可以缩短持续时间，但一般是要增加费用的，而且持续时间在一定条件下也只能缩短到一定限度，这个缩短的极限时间称为活动的最短时间
  - 直接费率：活动持续时间缩短一个单位时间而增加的直接费用
    - 直接费率=（最短时间的直接费用-正常时间的直接费用）/（正常时间-最短时间）
    - 组合直接费率
  - 间接费率：项目工期缩短一个时间单位而减少的间接费用

（二）费用优化步骤

- 第一步：准备基本数据
- （1）计算或明确项目各活动的直接费率及项目的间接费率
- （2）用标号法确定项目关键线路和工期
- （3）计算正常时间下的项目总费用
- 第二步：按下表调整直至项目总费用不可再降低为止

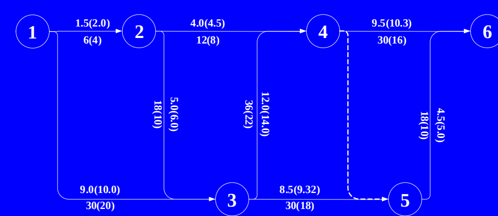
被缩短活动名称	（组合）直接费率	费率差（=直接费率-间接费率）	缩短时间	费用变化（=费率差*缩短时间）	总费用（=上一方案总费用+费用变化）	工期（=上一方案工期-缩短时间）

（1）用标号法确定关键线路
（2）选取关键线路上（组合）直接费率最低的（一组）活动作为缩短持续时间的对象
（3）当关键线路上的（组合）直接费率均>=间接费率时，调整可终止

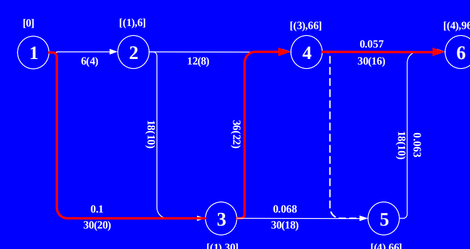
缩短时间后，活动的持续时间（1）不得小于最短持续时间；（2）活动不得变为非关键活动

（三）费用优化示例

- 项目网络计划如下图，箭线上方（或右方）括号外为正常时间的直接费用，括号内为最短时间的直接费用，箭线下方（或左方）括号外为正常持续时间，括号内最短持续时间，间接费率为0.12千元/天。

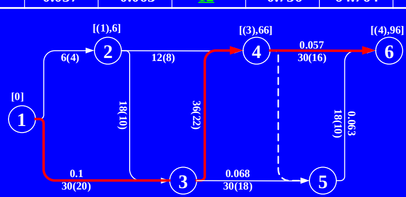


- 第一步：准备基本数据
  - 直接费率
    - P_{12}=(2.0-1.5)/(6-4)=0.25千元/天
    - 同理得其他活动的直接费率，见网络图（大于间接费率的直接费率可以不标）
  - 间接费率：0.12千元/天
  - 关键线路见网络图，工期为96天
  - 正常时间下项目总费用=总直接费用+总间接费用 = （1.5+9.0+5.0+4.0+12.0+8.5+9.5+4.5)+0.12*96=65.52千元

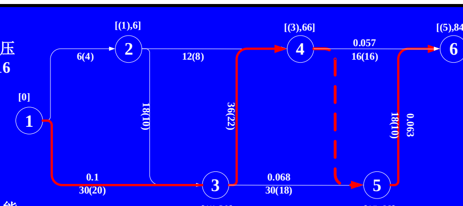


- 第二步：表格计算

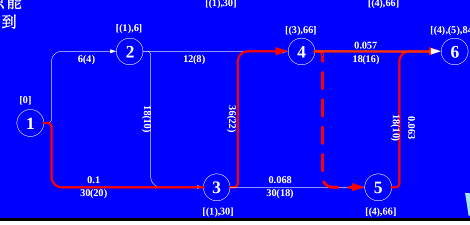
被缩短活动名称	（组合）直接费率	费率差	缩短时间	费用变化	总费用	工期
-	-	-	-	-	65.52	96
4-6	0.057	-0.063	12	-0.756	64.764	84



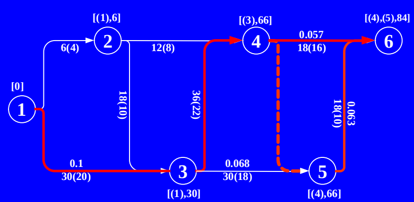
将4-6压缩到16



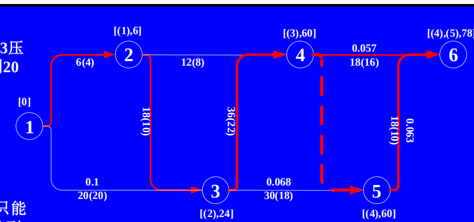
4-6只能压缩到18



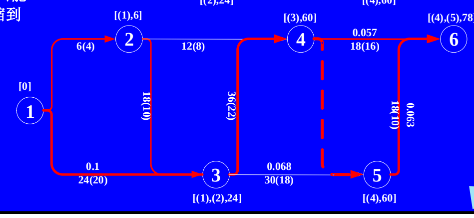
被缩短活动名称	（组合）直接费率	费率差	缩短时间	费用变化	总费用	工期
4-6	0.057	-0.063	12	-0.756	64.764	84
1-3	0.100	-0.020	6	-0.120	64.646	78



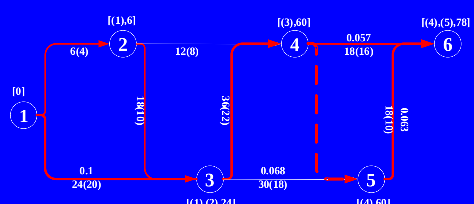
将1-3压缩到20



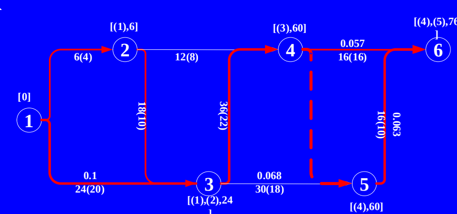
1-3只能压缩到24



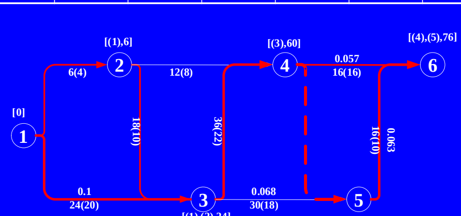
被缩短活动名称	（组合）直接费率	费率差	缩短时间	费用变化	总费用	工期
1-3	0.100	-0.020	6	-0.120	64.646	78
4-6 5-6	0.119	-0.001	2	-0.002	64.644	76



将4-5、4-6同时缩短到16



被缩短活动名称	（组合）直接费率	费率差	缩短时间	费用变化	总费用	工期
4-6 5-6	0.119	-0.001	2	-0.002	64.644	76
结束						

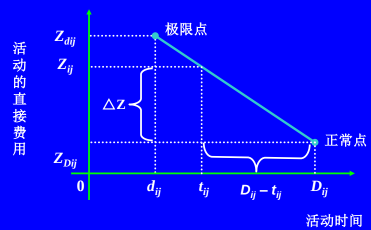


（总结）

- 工期优化
  - 使计算工期符合要求工期
  - 压缩关键活动
- 资源优化
  - 使资源均衡或使资源在限量内
  - 调整活动（尤其是非关键活动）的开始结束时间或者活动之间的逻辑关系
- 费用优化
  - 使费用最低（没考虑资源不均衡的浪费或超出资源限量的问题）
  - 压缩关键活动
- 组合使用，一种可能的组合方式
  - 先工期优化，再费用优化，再资源优化（可先解决超出资源限量的问题，再解决资源均衡的问题）

（四）利用线性规划模型进行优化

- 设活动(i, j)的时间-费用是线性关系



$$P_{ij}=\frac{\text{极限费用 - 正常费用}}{\text{正常时间 - 极限时间}}=\frac{Z_{dij}-Z_{Dij}}{D_{ij}-d_{ij}}$$

- 问题1：给定完工期T，求最优方案
  - 符号说明
    - Z —总(直接)费用
    - t_{ij}—活动(i, j)的延续时间；
    - P_{ij}—活动(i, j)的直接费率；
    - d_{ij}—活动(i, j)的最短持续时间；
    - D_{ij}—活动(i, j)的正常持续时间；
    - Z_{Dij}—活动(i, j)的正常费用；
    - T_i—节点的发生时间，i=1,2,…,n。
    - T—项目完工期
  - 优化目标：Z —总(直接)费用
  - 决策变量：t_{ij}，T_i

则活动(i, j)的加快时间为$(D_{ij}-t_{ij})$；

活动(i, j)的追加费用$P_{ij}(D_{ij}-t_{ij})$；

项目的正常费用$Z_D=\sum Z_{Dij}$；

项目的追加费用$\triangle Z=\sum P_{ij}(D_{ij}-t_{ij})$；

故项目的总(直接)费用为：

$$Z=Z_D+\sum_{(i,j)}P_{ij}(D_{ij}-t_{ij})$$

使项目的总(直接)费用最小，即

$$MinZ=Z_D+\sum_{(i,j)}P_{ij}(D_{ij}-t_{ij})$$

考虑约束条件，对任意活动(i, j)，应有

$$\begin{aligned}&d_{ij}\le t_{ij}\le D_{ij}\\&T_1=0\\&T_j-T_i\ge t_{ij}\\&T_n\le T\end{aligned}$$

费用优化的线性模型可表述为

$$MinZ=Z_D+\sum_{(i,j)}P_{ij}(D_{ij}-t_{ij})$$

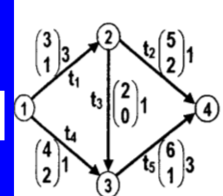
$$\begin{aligned}s.t.\quad&d_{ij}\le t_{ij}\le D_{ij}&&\text{对所有实活动}\\&T_1=0\\&T_j-T_i\ge t_{ij}&&\text{对所有活动，包括虚活动}\\&T_n\le T\\&t_{ij},T_j\ge 0&&\text{对所有活动和节点}\end{aligned}$$

最优解：Z^*，t_{ij}^*,T_j^*

- 示例：给定完工期T，求最优方案

$$\begin{pmatrix}D_{ij}\\d_{ij}\end{pmatrix}\cdot P_{ij}$$

$$\text{Min } Z=Z_D+3(3-t_1)+(5-t_2)+(2-t_3)+(4-t_4)+3(6-t_5)$$



$$\begin{aligned}&&T_1&=0\\1\leqslant t_1\leqslant 3,&&T_2-T_1&\geqslant t_1\\2\leqslant t_2\leqslant 5,&&T_4-T_2&\geqslant t_2\\0\leqslant t_3\leqslant 2,&&T_3-T_2&\geqslant t_3\\2\leqslant t_4\leqslant 4,&&T_3-T_1&\geqslant t_4\\1\leqslant t_5\leqslant 6,&&T_4-T_3&\geqslant t_5\\&&T_4&\leqslant T(\text{给定})\end{aligned}$$

$$t_i, T_j\geqslant 0$$

● 问题2：不给定完工期，求最优方案

$$MinF = 间接费用 + [Z_D + \sum_{(i,j)} P_{ij}(D_{ij} - t_{ij})]$$

$s.t.$ $\quad d_{ij} \le t_{ij} \le D_{ij}$ 对所有实活动

$T_1 = 0$

$T_j - T_i \ge t_{ij}$ 对所有活动，包括虚活动

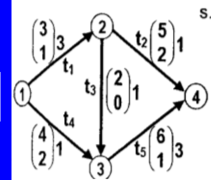
$t_{ij}, T_j \ge 0$ 对所有活动和节点

最优解：F^*，t_{ij}^*, T_j^*（$T^* = T_{终}^*$）

● 示例：不给定完工期T，β是间接费率，求最优方案

$\begin{pmatrix} D_{ij} \\ d_{ij} \end{pmatrix} \cdot P_{ij}$

$$\text{Min } F = \beta \cdot T_4 + Z_D + 3(3-t_1) + (5-t_2) + (2-t_3) + (4-t_4) + 3(6-t_5)$$



s.t. $T_1 = 0$

$1 \le t_1 \le 3$, $T_2 - T_1 \ge t_1$

$2 \le t_2 \le 5$, $T_4 - T_2 \ge t_2$

$0 \le t_3 \le 2$, $T_3 - T_2 \ge t_3$

$2 \le t_4 \le 4$, $T_3 - T_1 \ge t_4$

$1 \le t_5 \le 6$, $T_4 - T_3 \ge t_5$

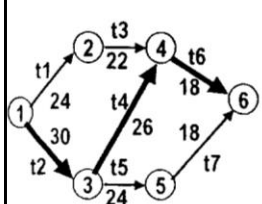
$t_i, T_j \ge 0$

• 习题 正常情况下，总间接费用18000元，项目完工期每缩短一天间接费用节省 330 元，最低成本日程？

活动 时间 代号	正常工时（天）	正常费用（元）	特急工时（天）	特急费用（元）	成本斜率（元/天）
t_1 ①→②	24	5000	16	7000	250
t_2 ①→③	30	9000	18	10200	100
t_3 ②→④	22	4000	18	4800	200
t_4 ③→④	26	10000	24	10300	150
t_5 ③→⑤	24	8000	20	9000	250
t_6 ④→⑥	18	5400			—
t_7 ⑤→⑥	18	6400	10	6800	50
总计	正常完工期 74	47800			

用 Excel 计算结果

$$\text{Min } F = 18000 - 330(74 - T_6) + Z_D + \sum p_i(D_i - t_i)$$



s.t. $T_1 = 0$

$16 \le t_1 \le 24$, $T_2 - T_1 \ge t_1$

$18 \le t_2 \le 30$, $T_3 - T_1 \ge t_2$

$18 \le t_3 \le 22$, $T_4 - T_2 \ge t_3$

$24 \le t_4 \le 26$, $T_4 - T_3 \ge t_4$

$20 \le t_5 \le 24$, $T_5 - T_3 \ge t_5$

$18 \le t_6 \le 18$, $T_6 - T_4 \ge t_6$

$10 \le t_7 \le 18$, $T_6 - T_5 \ge t_7$

$t_i, T_j \ge 0$

用 Excel 计算结果

● 给定工期资源均衡的规划问题

– 规划模型

• 优化目标

$$Min \quad \sigma^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(Q_t - Q_m)^2 = (\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}Q_t^2) - Q_m^2$$

• 约束条件

– 最早开工时间≤活动的开工时间≤最晚开工时间

– 活动的完工时间≤紧后开工的最小值（等价于活动的开工时间≥紧前完工的最大值）

– 活动的开工时间≥0，整数

• 求解

– 观察法求满意解

– 启发式方法求满意解