

## Exame final nacional de Matemática A (2023, Época especial)

Proposta de resolução



1. Analisando a monotonia de cada uma das sucessões, temos:

- $a_n = (n - 5)^2$ : Como  $a_4 = 1$ ;  $a_5 = 0$  e  $a_6 = 1$ , temos que  $a_4 > a_5$  e  $a_5 < a_6$ , então a sucessão não é monótona;
- $b_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$ : Como  $a_1 = -\frac{1}{4}$ ;  $a_2 = \frac{1}{5}$  e  $a_3 = -\frac{1}{6}$ , temos que  $a_1 < a_2$  e  $a_2 > a_3$ , então a sucessão não é monótona;
- $c_n = (-2)^n$ : Como  $a_1 = -2$ ;  $a_2 = 4$  e  $a_3 = -8$ , temos que  $a_1 < a_2$  e  $a_2 > a_3$ , então a sucessão não é monótona;
- $d_n = \frac{1}{n}$ :

$$d_{n+1} - d_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n^2+n} - \frac{n+1}{n^2+n} = \frac{n-n-1}{n^2+n} = -\frac{1}{n^2+n}$$

Como  $n \in \mathbb{N}$ , então  $n^2 + n > 0$ , logo  $d_{n+1} - d_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , ou seja, a sucessão é monótona (decrescente).

Resposta: **Opção D**

2. Temos que:

- sequência dos raios das semicircunferências:  $r_n = 2^{n-1}$ ;
- sequência dos comprimentos das semicircunferências (semiperímetros das circunferências):

$$c_n = \frac{2 \times \pi \times r_n}{2} = \pi \times 2^{n-1}$$

Como os termos da sequência dos comprimentos das semicircunferências é uma progressão geométrica de razão 2, e cujo primeiro termo é  $c_1 = \pi \times 2^0 = \pi$ , então o comprimento total das 25 semicircunferências é a soma dos 25 primeiros termos da sequência:

$$S_{25} = \pi \times \frac{1 - 2^{25}}{1 - 2} = \pi \times 33\,554\,431 \approx 1,0541 \times 10^8 \text{ cm} \approx 1054 \text{ km}$$

3. Como  $P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,5$ , então:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,8 = P(B) + 0,5 \Leftrightarrow 0,3 = P(B) \end{aligned}$$

Resposta: **Opção B**

4.

- 4.1. Como os 9 bombons vão ser colocados em 9 compartimentos, existem  ${}^9C_4$  formas de colocar os 4 amêndoas, e por cada uma destas formas existem  ${}^5C_2$  formas de colocar os 2 de avelã nos restantes 5 compartimentos, e ainda  ${}^3C_3$  formas de colocar os 3 de noz, nos restantes três compartimentos, sendo esta última, uma forma única de colocar os bombons de noz.

Desta forma o número de casos possíveis é  ${}^9C_4 \times {}^5C_2 \times {}^3C_3 = {}^9C_4 \times {}^5C_2$ .

Para que uma linha fique preenchida só com bombons de amêndoa, para os restantes 6 compartimentos devemos selecionar 1 para colocar o de amêndoa restante ( ${}^6C_1$ ), 2 dos 5 compartimentos restantes para os de avelã ( ${}^5C_2$ ) e os restantes serão preenchidos com os de noz.

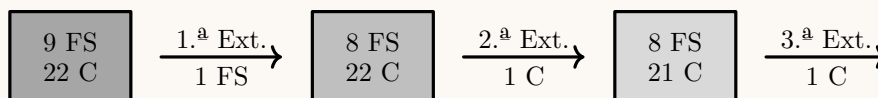
Como qualquer uma das 3 linhas pode ser a que será ocupada pelos bombons de amêndoa, o número de casos favoráveis é  $3 \times {}^6C_1 \times {}^5C_2 \times {}^3C_3 = 3 \times {}^6C_1 \times {}^5C_2$ .

Assim, recorrendo à regra de LaPlace, a probabilidade na forma de fração irredutível, é:

$$\frac{3 \times {}^6C_1 \times {}^5C_2}{{}^9C_4 \times {}^5C_2} = \frac{1}{7}$$

- 4.2. No contexto da situação descrita  $A \cap \overline{B}$  representa o acontecimento: «o primeiro bombom ter recheio de frutos secos e o segundo não ter recheio de frutos secos», pelo que  $P(C|A \cap \overline{B})$  é a probabilidade de que o terceiro bombom tenha recheio de caramelo, sabendo que o primeiro tinha de frutos secos e o segundo de caramelo.

Como na primeira extração existiam 9 bombons com recheio de frutos secos e 22 de caramelo, na segunda extração deverão existir 8 de frutos secos e 22 de caramelo e na terceira extração deverão existir 8 de frutos secos e 21 de caramelo.



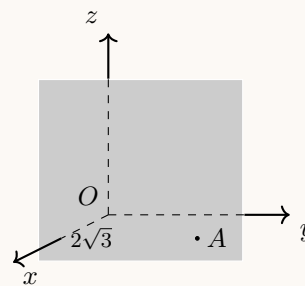
Assim, como sabendo que o acontecimento representado por  $A \cap \overline{B}$  ocorreu, para a probabilidade  $P(C|A \cap \overline{B})$ , existem na terceira extração 21 bombons de caramelo, ou seja, 21 casos favoráveis; num total de  $8 + 21 = 29$  bombons, ou seja, 29 pelo que, recorrendo à Regra de LaPlace, temos:

$$P(C|A \cap \overline{B}) = \frac{21}{29}$$

5.

- 5.1. Como um vetor diretor da reta que contém o eixo  $Ox$  é  $\vec{u} = (1,0,0)$  e para que um plano seja perpendicular a uma reta, o vetor normal do plano deve ser colinear com o vetor normal da reta, de entre as equações apresentadas, podemos identificar a que representa um plano cujo vetor normal é colinear com o vetor  $\vec{u}$ :

- $z = 0$ , vetor normal:  $\vec{v}_A = (0,0,1)$  e  $(0,0,1) \neq k(1,0,0), \forall k \in \mathbb{R}$
- $y = 6$ , vetor normal:  $\vec{v}_B = (0,6,0)$  e  $(0,6,0) \neq k(1,0,0), \forall k \in \mathbb{R}$
- $x = 2\sqrt{3}$ , vetor normal:  $\vec{v}_C = (2\sqrt{3},0,0)$  e  $(2\sqrt{3},0,0) = 2\sqrt{3}(1,0,0)$
- $x + y + z = 0$ , vetor normal:  $\vec{v}_D = (1,1,1)$  e  $(1,1,1) \neq k(1,0,0), \forall k \in \mathbb{R}$



Resposta: **Opção C**



5.2. Como o ponto  $B$  pertence ao plano mediador do segmento de reta  $[OA]$ , designado por  $M$  o ponto médio de  $[OA]$ , temos que  $[BM]$  é a altura do triângulo  $[OAB]$  relativa à base  $[OA]$ .

Assim temos que:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \overline{OA} &= \sqrt{(2\sqrt{3}-0)^2 + (6-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4 \times 3 + 36 + 0} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \\ \bullet \quad M &= \left( \frac{x_A + x_O}{2}, \frac{y_A + y_O}{2}, \frac{z_A + z_O}{2} \right) = \left( \frac{2\sqrt{3}+0}{2}, \frac{6+0}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = (\sqrt{3}, 3, 0) \end{aligned}$$

A equação do plano mediador de  $[OA]$  (ao qual pertence o ponto  $B$ ), é:

$$\begin{aligned} (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 &= (x-2\sqrt{3})^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 4x\sqrt{3} + 12 + y^2 - 12y + 36 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 &= -4x\sqrt{3} + 12 - 12y + 36 \Leftrightarrow 4x\sqrt{3} + 12y - 48 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x + 3y - 12 = 0 \end{aligned}$$

Como o ponto  $B$  pertence à reta  $AB$ , então as suas coordenadas são da forma:  $B(\sqrt{3}k, 16-5k, 0)$  pelo que podemos determinar o valor de  $k$ , substituindo as coordenadas no plano mediador de  $[OA]$ :

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3}k + 3(16-5k) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3k + 48 - 15k - 12 = 0 \Leftrightarrow 36 = 12k \Leftrightarrow \frac{250}{12} = k \Leftrightarrow k = 3$$

Desta forma temos que:

$$\begin{aligned} \bullet \quad B(\sqrt{3} \times 3, 16-5 \times 3, 0) &= (3\sqrt{3}, 16-15, 0) = (3\sqrt{3}, 1, 0) \\ \bullet \quad \overline{BM} &= \sqrt{(3\sqrt{3}-\sqrt{3})^2 + (1-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 \times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

E assim, vem que:

$$V_{[OAB]} = A_{[OAB]} \times \overline{OD} = \frac{\overline{OA} \times \overline{BM}}{2} \times \overline{OD} = \frac{4\sqrt{3} \times 4}{2} \times 5 = 2\sqrt{3} \times 4 \times 5 = 40\sqrt{3}$$

6. Designando por  $P$  o ponto pertencente ao segmento de reta  $[AB]$  com ordenada igual à do ponto  $C$ , temos que  $[CP]$  é a altura do triângulo  $[ABC]$ , relativamente à base  $[AB]$ , e assim, vem que:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \overline{AB} &= \operatorname{tg} \alpha \\ \bullet \quad \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 + 1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \frac{1}{\frac{1}{9}} - 1 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 9 - 1 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{2} \\ \bullet \quad \overline{CP} &= x_A - x_C = 1 - \cos \alpha = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

E assim, a área do triângulo  $[ABC]$ , é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CP}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



7.

7.1. Como o domínio de  $f$  é  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , para que exista  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , então tem que se verificar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(2 - e^{-x}) + x + 2) = \ln(2 - e^0) + 0 + 2 = \ln(2 - 1) + 2 = \ln 1 + 2 = 0 + 2 = 2 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} = \frac{\sin(a \times 0)}{e^0 - 1} = \frac{\sin 0}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} \times \frac{ax}{ax} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\sin(ax)}{ax} \times \frac{ax}{e^x - 1} \right) =$$

(considerando  $y = ax$ , temos que se  $x \rightarrow 0^-$ , então  $y \rightarrow 0^-$ , porque  $a > 0$ )

$$= \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( a \times \frac{x}{e^x - 1} \right) = 1 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} a \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^x - 1} = a \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} =$$

$$= a \times \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} 1}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = a \times \frac{1}{1} = a$$

Logo, determinando o valor de  $a$ , vem:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Leftrightarrow 2 = a$

7.2. Como o gráfico de  $f$ , admite uma assíntota oblíqua quando  $x \rightarrow +\infty$ , podemos determinar o declive da assíntota:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 - e^{-x}) + x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(2 - e^{-x})}{x} + \frac{x}{x} + \frac{2}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \times \ln(2 - e^{-x}) + 1 + \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2 - e^{-x})) + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \\ &= \frac{1}{+\infty} \times \ln(2 - e^\infty) + 1 + \frac{2}{+\infty} = 0 \times \ln(2 - 1) + 1 + 0 = 0 \times \ln 1 + 1 = 0 \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2 - e^{-x}) + x + 2 - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2 - e^{-x}) + 2) = \ln(2 - e^{-\infty}) + 2 = \ln(2 - e^0) + 2 = \ln(2 + 0) + 2 = \ln 2 + 2 \end{aligned}$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de  $h$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , é:

$$y = 1 \times x + \ln 2 + 2 \Leftrightarrow y = x + \ln 2 + 2$$

8. Recorrendo as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_a \left( \frac{b}{a} \right) = 2 \Leftrightarrow \log_a b - \log_a a = 2 \Leftrightarrow \log_a b - 1 = 2 \Leftrightarrow \log_a b = 2 + 1 \Leftrightarrow \log_a b = 3$$

E assim:

$$\log_a (\sqrt{a^3} \times b^2) = \log_a \sqrt{a^3} + \log_a b^2 = \log_a (a)^{\frac{1}{3}} + 2 \log_a b = \frac{3}{2} \times \log_a a + 2 \times 3 = \frac{3}{2} \times 1 + 6 = \frac{3}{2} + \frac{12}{2} = \frac{15}{2}$$

Resposta: **Opção B**



9.

9.1. Começamos por determinar a expressão da derivada da função  $g$ :

$$g'(x) = (e^x \cos x)' = (e^x)' \times \cos x + e^x \times (\cos x)' = e^x \cos x + e^x (-\sin x) = e^x (\cos x - \sin x)$$

Calculando os zeros da derivada da função  $g$ , temos:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x (\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Cond. impossível}} \vee \cos x = \sin x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos x = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x = - \left( \frac{\pi}{2} - x \right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \underbrace{0x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}_{\text{Cond. impossível}}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Assim, como o domínio de  $g$  é  $[0, \pi[$ , a única solução da equação é  $x = \frac{\pi}{4}, (k = 0)$ .

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

$x$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\pi$
$e^x$	+	+	+	+	n.d.
$\cos x - \sin x$	+	+	0	-	n.d.
$g'$	+	+	0	-	n.d.
$g$	min.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função  $f$ :

- é crescente no intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ;
- é decrescente no intervalo  $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ ;
- tem um mínimo relativo que é:  $g(0) = e^0(\cos(0)) = 1 \times 1 = 1$ ;
- tem um máximo relativo que é:  $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}}(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)) = e^{\frac{\pi}{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}$ .

9.2. A abscissa dos pontos do gráficos da função  $g$  com a ordenada igual à abscissa são soluções da equação

$$g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0$$

Assim vamos mostrar que a função  $h(x) = g(x) - x$  tem pelo menos um zero no intervalo  $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ .Como a função  $g$ , e também a função  $h$  resultam de operações sucessivas de funções contínuas em  $[0, \pi[$ , são contínuas neste intervalo, e em particular no intervalo  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ .Como  $h\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0 < h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe  $c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$  tal que  $h(c) = 0$ , ou seja, que existe, pelo menos, uma solução da equação  $h(x) = g(x) - x$  no intervalo  $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ , isto é, que existe, pelo menos, um ponto do gráfico de  $g$  cuja ordenada é igual à abscissa, neste intervalo.

C.A.

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} \approx 0,38$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \approx -1,57$$



10. Como  $e^x > 0$  e  $e^{-x} > 0$ , então  $e^x + e^{-x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , pelo que resolvendo a equação, temos:

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow 3e^x - 3e^{-x} - e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 4e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2e^x - 4 \times \frac{1}{e^x} &= 0 \Leftrightarrow 2e^x \times \frac{e^x}{e^x} - \frac{4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(e^x)^2 - 4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 4 = 0 \wedge \underbrace{e^x \neq 0}_{\text{Cond. universal}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2e^{2x} &= 4 \Leftrightarrow e^{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

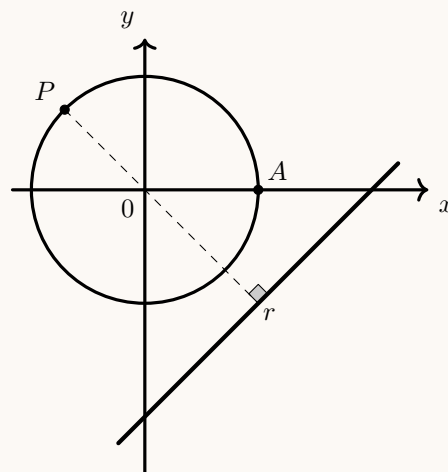
$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{\ln 2}{2} \right\}$$

11. Observando que a diferença entre a distância máxima e a distância mínima corresponde ao diâmetro,  $a$ , da circunferência, temos que:

$$a = 3\sqrt{2} + 3 - (3\sqrt{2} - 3) = 3\sqrt{2} + 3 - 3\sqrt{2} + 3 = 3 + 3 = 6$$

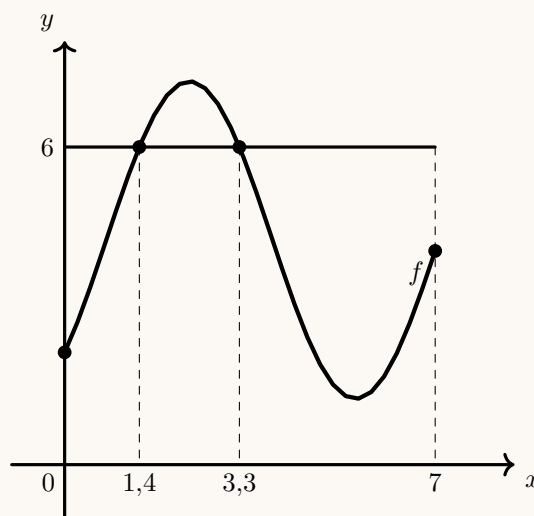
Assim, os dois instantes em que a distância do ponto  $P$  à reta  $r$  é igual ao diâmetro da circunferência, são as soluções da equação

$$d(t) = a \Leftrightarrow d(t) = 6$$



Desta forma, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função  $f(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(2 + \sin x - \cos x)$ , e a reta horizontal de equação  $y = 6$ , para  $0 < x < 7$ , reproduzido na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às décimas) das abscissas dos pontos de interseção, a que correspondem os dois instantes em que a distância do ponto  $P$  à reta  $r$  é igual ao diâmetro da circunferência:

$$t_1 \approx 1,4\text{s e } t_2 \approx 3,3\text{s}$$



12. Como  $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{7}$ , considerando  $\rho = |z|$ , temos que  $z = \rho e^{i\frac{\pi}{7}}$ .

Como  $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ , então:

$$2iz = 2i \times z = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \times \rho e^{i\frac{\pi}{7}} = 2\rho e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7})} = 2\rho e^{i(\frac{7\pi}{14} + \frac{2\pi}{14})} = 2\rho e^{i\frac{9\pi}{14}}$$

Ou seja,  $\text{Arg}(2iz) = \frac{9\pi}{14}$ .

Resposta: **Opção B**



13. Escrevendo  $z_2$  na forma trigonométrica ( $\rho e^{i\theta}$ ) temos:

- $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$ ; como  $\operatorname{sen} \theta < 0$  e  $\operatorname{cos} \theta < 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 3º quadrante, logo  $\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Logo  $z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ .

Como  $i^{23} = i^{4 \times 5 + 3} = i^3 = -i$ , escrevendo  $z_1 + i^{23}$  na forma trigonométrica, vem:

$$z_1 + i^{23} = -5i - i = -6i = 6e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Assim, simplificando a expressão de  $w$ , temos que:

$$w = \frac{z_1 + i^{23}}{z_2^n} = \frac{6e^{i\frac{3\pi}{2}}}{\left(2e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^n} = \frac{6e^{i\frac{3\pi}{2}}}{2^n e^{i\left(n \times \frac{4\pi}{3}\right)}} = \frac{6}{2^n} e^{i\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{4n\pi}{3}\right)}$$

Como  $w$  é um imaginário puro se  $\operatorname{Arg} w = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , temos que, para  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} w = \frac{\pi}{2} + k\pi &\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} - \frac{4n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{9\pi}{6} - \frac{8n\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} + \frac{6k\pi}{6} \Leftrightarrow 9\pi - 8n\pi = 3\pi + 6k\pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9\pi - 3\pi - 8n\pi = 6k\pi \Leftrightarrow 6\pi - 8n\pi = 6k\pi \Leftrightarrow 2\pi(3 - 4n) = 6k\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi(3 - 4n)}{6\pi} = k \Leftrightarrow \frac{3 - 4n}{3} = k \end{aligned}$$

Como  $n \in \mathbb{N}$ , o menor valor de  $n$  que corresponde a um valor inteiro de  $k$  é 3:

- $n = 1 \rightarrow k = \frac{3 - 4(1)}{3} = -\frac{1}{3}$
- $n = 2 \rightarrow k = \frac{3 - 4(2)}{3} = -\frac{5}{3}$
- $n = 3 \rightarrow k = \frac{3 - 4(3)}{3} = -\frac{9}{3} = -3$



14. Designando por  $m$  e  $n$  as abscissas dos pontos  $A$  e  $B$ , temos que as respectivas coordenadas e as do ponto médio são:

- $A(m, h(m)) = (m, am^2)$
- $B(n, h(n)) = (n, an^2)$
- $M\left(\frac{m+n}{2}, \frac{am^2 + an^2}{2}\right)$

Como a derivada da função  $h$  é  $h'(x) = (ax^2)' = 2ax$ , os declives das retas tangentes ao gráfico de  $h$ , nos pontos  $A$  e  $B$ , são:

- $m_A = h'(m) = 2am$
- $m_B = h'(n) = 2an$

E assim, designado por  $p$  podemos determinar uma expressão para a ordenada da origem para cada uma das equações das retas, substituindo a expressão do declive e das coordenadas dos pontos de tangência:

- $y = m_A \times x + b_A \Leftrightarrow am^2 = 2am \times m + b_A \Leftrightarrow am^2 - 2am^2 = b_A \Leftrightarrow -am^2 = b_A$
- $y = m_B \times x + b_B \Leftrightarrow an^2 = 2an \times n + b_B \Leftrightarrow an^2 - 2an^2 = b_B \Leftrightarrow -an^2 = b_B$

Ou seja as equações das retas tangentes nos pontos  $A$  e  $B$ , são, respetivamente,  $y = 2max - am^2$  e  $y = 2nax - an^2$ , pelo que a abscissa do ponto de interseção das retas é a solução da equação:

$$\begin{aligned} 2max - am^2 &= 2nax - an^2 \Leftrightarrow \frac{2max - am^2}{a} = \frac{2nax - an^2}{a} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2mx - m^2 &= 2nx - n^2 \Leftrightarrow 2mx - 2nx = m^2 - n^2 \Leftrightarrow x(2m - 2n) = m^2 - n^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{(n-m)(n+m)}{2(m-n)} \Leftrightarrow x = \frac{n+m}{2} \end{aligned}$$

Como as abscissas do ponto médio e do ponto de interseção das tangentes são iguais, logo, o ponto de interseção das tangentes pertence à reta vertical que contém o ponto médio.

