Exame final nacional de Matemática A **(2022, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

1. De entre as opções apresentadas, a única que representa o gráfico de uma função com um mínimo em $x = 0$ é a opção (C), porque nas restantes opções existem valores de a, pertencentes ao domínio da função, tais que $f(a) > f(0)$

   Resposta: **Opção C**

2. Como a soma de todos os elementos da linha n do triângulo de Pascal é 2^n, sabemos que: $2^n = 16\,384$ e como $2^{14} = 16\,384$ temos que $n = 14$

   Assim, o quarto elemento da linha seguinte $(n + 1 = 15)$, é ${}^{15}C_3 = 455$

   Resposta: **Opção B**

3. Considerando a experiência aleatória que consiste analisar o passageiro que saiu em primeiro lugar do avião, e os acontecimentos:
   A:≪O passageiro já tinha viajado de avião≫
   F:≪O passageiro já tinha estado em Faro≫

   Temos que $P\left(\overline{A}\right) = 0{,}7 = \frac{7}{10}$, $P\left(F\right) = \frac{2}{5}$ e $P\left(A|F\right) = \frac{1}{2}$

   Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

   - $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$
   - $P\left(A \cap F\right) = P\left(F\right) \times P\left(A|F\right) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
   - $P\left(\overline{A} \cap F\right) = P(F) - P\left(A \cap F\right) = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$
   - $P\left(\overline{A} \cap \overline{F}\right) = P\left(\overline{A}\right) - P\left(\overline{A} \cap F\right) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$
   - $P\left(\overline{F}\right) = 1 - P\left(F\right) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

	A	$\overline{A}$	
F	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\overline{F}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$
	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

   Assim, a probabilidade de esta ter sido a primeira viagem de avião do passageiro, ou seja, nunca ter viajado de avião, do qual sabemos que nunca tinha estado em Faro, na forma de fração irredutível, é:

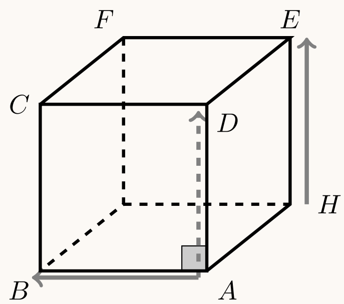
$$P\left(\overline{A}|\overline{F}\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap \overline{F}\right)}{P\left(\overline{F}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{6}$$

4. Calculando o número de grupos ordenados dos 3 cartões azuis, temos ${}^{3}A_3 = P_3 = 3!$ hipóteses para dispor os 3 cartões azuis em posições adjacentes.
E por cada grupo de cartões azuis, existem ${}^{10}A_{10} = P_{10} = 10!$ ordenações possíveis dos 12 cartões, correspondendo à disposição dos 9 cartões de outras cores e do grupo de cartões azuis, considerando a ordenação relevante.
Assim, o número casos favoráveis (disposições com os cartões azuis em posições adjacentes) é $3! \times 10!$ e o número de casos possíveis (todas as disposições dos 12 cartões) é ${}^{12}A_{12} = P_{12} = 12!$, pelo que, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade de de os cartões azuis ficarem todos juntos, na forma de fração irredutível, é:

$$p = \frac{3! \times 10!}{12!} = \frac{1}{22}$$

5.

5.1. Como $[ABCDEFGH]$ é um cubo, as arestas têm o mesmo comprimento e são todas paralelas ou perpendiculares entre si.



Em particular as arestas $[AD]$ e $[HE]$ são paralelas, e $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HE}$

Assim, como as arestas $[AD]$ e $[AB]$ são perpendiculares, temos que:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \cos(90°)\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 0\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 0$$

Resposta: **Opção B**

5.2. Como o ponto E pertence ao plano ADE, e o vetor $\overrightarrow{AB}$ é um vetor normal do plano, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,-1,2) - (-2,5,0) = (1-(-2), -1-5, 2-0) = (3,-6,2)$$

Assim, temos que a equação do plano ADE pode ser da forma $3x - 6y + 2z + d = 0$
Para determinar o valor de d, na equação do anterior, substituímos as coordenadas do ponto A, porque as estas verificam a equação do plano, porque o ponto pertence ao plano:

$$3(-2) - 6(5) + 2(0) + d = 0 \Leftrightarrow -6 - 30 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 36$$

Pelo que, uma equação cartesiana do plano ADE é

$$3x - 6y + 2z + 36 = 0$$

As coordenadas de todos os pontos da reta dada, e em particular o ponto de interseção da reta com o plano ADE, ou seja, o ponto E, para $k \in \mathbb{R}$, são da forma:

$$(x,y,z) = (0,0,3) + k(1,-1,-1) = (0 + kk\,, 0 - k\,, 3 - k) = (k\,, -k\,, 3-k)$$

Como o ponto de interseção da pertence ao plano ADE podemos determinar o valor de k substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$3(k) - 6(-k) + 2(3-k) + 36 = 0 \Leftrightarrow 3k + 6k + 6 - 2k + 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7k + 42 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-42}{7} \Leftrightarrow k = -6$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto E, são:

$$\big(-6\,, -(-6)\,, 3-(-6)\big) = (-6,6,9)$$

6. Considerando o número complexo z escrito na forma algébrica, $z = x + yi$, temos:

$$z \times \overline{z} = 4 \Leftrightarrow (x+yi)\times(x-yi) = 4 \Leftrightarrow x^2 - xyi + xyi - y^2i^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - y^2(-1) = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2^2$$

Ou seja, a condição $z \times \overline{z} = 4$ define uma circunferência de centro na origem e raio 2 .

Resposta: **Opção A**

7. Como $i^{18} = i^{4\times 4+2} = i^2 = -1$, temos que:

$$z = \frac{4}{1-i} + 4i^{18} = \frac{4}{1-i} + 4(-1) = \frac{4}{1-i} - 4 = \frac{4}{1-i} - \frac{4-4i}{1-i} = \frac{4-4+4i}{1-i} = \frac{4i}{1-i} =$$

$$= \frac{4i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4i+4i^2}{1^2-i^2} = \frac{4i+4(-1)}{1-(-1)} = \frac{-4+4i}{2} = -2+2i$$

Escrevendo z na forma trigonométrica ($\rho e^{i\theta}$) temos:

- $\rho = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{2}{-2} = -1$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2.º quadrante, logo $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Assim temos que $z = \sqrt{8}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$, e como os argumentos das três raízes cúbicas de um mesmo número complexo diferem de $\frac{2\pi}{3}$, e os respetivos módulos são iguais, temos que as restantes raízes cúbicas de w, são:

- $z_2 = \sqrt{8}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{8}e^{i\left(\frac{9\pi}{12}+\frac{8\pi}{12}\right)} = \sqrt{8}e^{i\left(\frac{17\pi}{12}\right)}$
- $z_3 = \sqrt{8}e^{i\left(\frac{17\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{8}e^{i\left(\frac{17\pi}{12}+\frac{8\pi}{12}\right)} = \sqrt{8}e^{i\left(\frac{25\pi}{12}\right)} = \sqrt{8}e^{i\left(\frac{25\pi}{12}-2\pi\right)} = \sqrt{8}e^{i\left(\frac{25\pi}{12}-\frac{24\pi}{12}\right)} = \sqrt{8}e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$

8. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

- $f(0) = \ln\sqrt{e+0} = \ln\sqrt{e} = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\sqrt{e+x}\right) = \ln\sqrt{e+0^+} = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos 0^-}{0^-} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1^2-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} =$$

(como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$)

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\times\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right) = \underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} =$$

$$= 1\times\frac{\operatorname{sen} 0}{1+\cos 0} = 1\times\frac{0}{2} = 1\times 0 = 0$$

Como $f(0) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, então a função f não é contínua em $x = 0$.

9.

9.1. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada no intervalo $]0,\pi[$:

$$g''(x) = \left(g'(x)\right)' = \left(x + 2\cos^2 x\right)' = (x)' + 2(\cos x \cos x)' = 1 + 2((\cos x)' \cos x + \cos x(\cos x)') =$$

$$= 1 + 2((-\operatorname{sen} x \times \cos x + \cos x(-\operatorname{sen} x) = 1 + 2 \times 2(-\operatorname{sen} x . \cos x) =$$

$$= 1 - 2 \times \underbrace{2 \operatorname{sen} x . \cos x}_{\operatorname{sen}(2x)} = 1 - 2 \operatorname{sen}(2x)$$

Determinando os zeros da segunda derivada, temos:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\operatorname{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}(2x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{2} \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como se pretende identificar as soluções do intervalo $]0,\pi[$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = -1 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12} - \pi = -\frac{7\pi}{12} \quad \left(-\frac{11\pi}{12} \notin]0,\pi[\text{ e } -\frac{7\pi}{12} \notin]0,\pi[\right)$
- $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12}$
- $k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12} \quad \left(\frac{13\pi}{12} \notin]0,\pi[\text{ e } \frac{17\pi}{12} \notin]0,\pi[\right)$

Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π
g''	n.d.	+	0	−	0	+	n.d.
g	n.d.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$	n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de g:

- tem dois pontos de inflexão (de abcissas $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{5\pi}{12}$)
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0,\frac{\pi}{12}\right]$ e no intervalo $\left[\frac{5\pi}{12},\pi\right[$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$

9.2. A abcissa do ponto do gráfico de g em que a tangente é paralela à reta de equação $y = -2x$, ou seja, o ponto em que a tangente tem declive $m = -2$, é a solução da equação $g'(x) = -2$.

Como em $]-\infty{,}0[$ temos $g'(x) = 3e^{2x} - 7e^x$, vem que:

$$g'(x) = -2 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 7e^x = -2 \Leftrightarrow 3\left(e^x\right)^2 - 7e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

(considerando $y = e^x$)

$$\Leftrightarrow 3y^2 - 7y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} \Leftrightarrow y = \frac{7+5}{6} \vee y = \frac{7-5}{6} \Leftrightarrow y = 2 \vee y = \frac{1}{3}$$

(como $y = e^x$)

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \vee e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = \ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = \ln 1 - \ln 3 \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = -\ln 3$$

Como $\ln 2 \notin]-\infty{,}0[$, a abcissa do ponto do gráfico de g em que a tangente é paralela à reta de equação $y = -2x$, é $-\ln 3$.

10. Como a função é contínua em $]0, +\infty[$ (porque é o quociente de funções contínuas), a reta de equação $x = 0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de h, paralela ao eixo Oy. Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1} = \frac{e^{0^+} + \ln 0^+}{e^{0^+} - 1} = \frac{1^+ - \infty}{1^+ - 1} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Logo a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota do gráfico de h paralela ao eixo das ordenadas.

Para averiguar a existência de assíntotas horizontais, ou seja, paralelas ao eixo Ox, como o domínio de h é $]0, +\infty[$, vamos calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1} = \frac{e^{+\infty} + \ln(+\infty)}{e^{+\infty} - 1} = \frac{+\infty + \infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \ln x}{e^x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{e^x + \ln x}{e^x}}{\dfrac{e^x - 1}{e^x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{e^x} + \dfrac{\ln x}{e^x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{e^x} - \dfrac{1}{e^x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{\ln x}{e^x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x}} = \frac{1 + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{e^x}{x}}}{1 - \dfrac{1}{e^{+\infty}}} = \frac{1 + \dfrac{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}}{1 - \dfrac{1}{+\infty}} = \frac{1 + \dfrac{0}{+\infty}}{1 - 0} = \frac{1+0}{1} = 1$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação $y = 1$ é a única assíntota horizontal, ou seja, paralela ao eixo das abcissas, do gráfico de h, quando $x \to +\infty$.

11.

11.1. Calculando a massa de sal no instante da abertura das torneiras ($t = 0$), temos:

$$m(0) = \frac{30(1+0{,}006\times 0)^3 - 29}{(1+0{,}006\times 0)^2} = \frac{30(1)^3-29}{(1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

Calculando a massa de sal um minuto após a abertura das torneiras ($t = 1$), temos:

$$m(1) = \frac{30(1+0{,}006\times 1)^3 - 29}{(1+0{,}006\times 1)^2} = \frac{30(1+0{,}006)^3-29}{(1+0{,}006)^2} \approx 1{,}524$$

Assim, a diferença das massas ao fim de um minuto é $1{,}524 - 1 = 0{,}524$, pelo que a percentagem (p) de aumento da massa de sal no primeiro minuto é:

$$\frac{100}{1} = \frac{p}{0{,}524} \Leftrightarrow 0{,}524 \times 100 = p \Leftrightarrow 52{,}4 = p$$

Pelo que percentagem de aumento, com arrendamento às unidades é 52%.

Resposta: **Opção B**

11.2. No instante a a massa de sal no tanque é $m(a)$. Como passada meia hora, ou seja, 30 minutos, a que corresponde o instante $a + 30$, a massa de sal triplica, relativamente ao instante a, pelo que o valor de a é a solução da equação

$$m(a+30) = 3m(a)$$

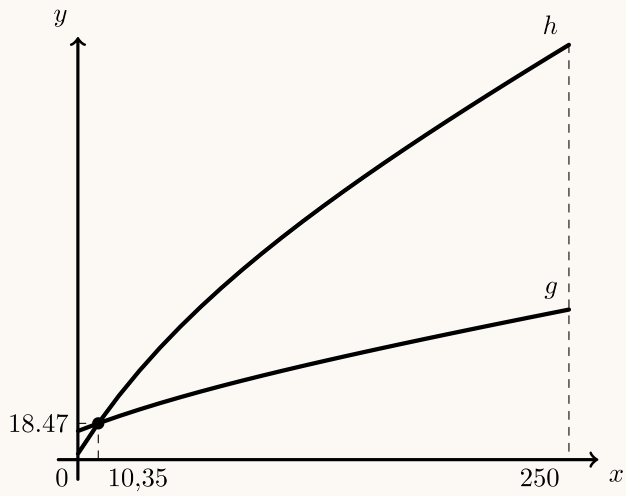
Assim, inserindo na calculadora a função $f(x) = \dfrac{30(1+0{,}006x)^3-29}{(1+0{,}006x)^2}$, determinamos o valor de a como a abcissa do ponto de interseção das funções:

- $g(x) = f\,(x+30)$
- $h(x) = 3 \times f(x)$

Representando na calculadora as funções g e h, numa janela compatível com o domínio da função ($x \in [0{,}250]$), obtemos o gráfico representado na figura ao lado.

Recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos, obtemos valores aproximados às décimas da abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos:

10,35 min.



Desta forma, como 0,35 minutos correspondem a $0{,}35 \times 60 = 21$ segundos, o instante em causa ocorre 10 minutos e 21 segundos após a abertura das torneiras.

12. Como $\lim u_n = \lim \frac{4n-1}{n+3} = \lim \frac{4n}{n} = \lim 4 = 4$, então (u_n) é uma sucessão convergente.

    Como qualquer sucessão convergente é limitada, então (u_n) é uma sucessão limitada.

13. Como os extremos da função correspondem aos zeros da função derivada associados à mudança de sinal, começamos por determinar a expressão da derivada da função f:

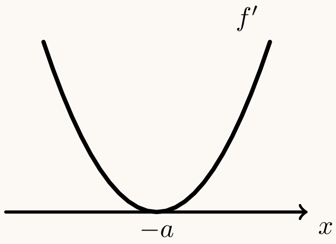
$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + a^2x + \sqrt{2}\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + (ax^2)' + (a^2x)' + (\sqrt{2})' = 3 \times \frac{1}{3}x^2 + 2ax + a^2 + 0 =$$

$$= x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

Calculando os zeros da derivada da função f, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+a)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+a)(x+a) = 0 \Leftrightarrow x = -a \vee x = -a$$

Assim, temos que $-a$ é o único zero da derivada da função f, mas como não está associado a uma mudança de sinal, não corresponde a um extremo da função, e por não existir qualquer outro zero da derivada, a função não tem extremos.



14. Como $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, temos que:

$$\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = 4 - 1 \Leftrightarrow \text{tg}\alpha = \pm\sqrt{3}$$

Como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ então $\text{tg}\alpha = \sqrt{3}$, e como o declive da reta s é a tangente da inclinação $m_s = \text{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$, e a reta s passa pela origem, é definida pela equação: $y = \sqrt{3}x$.

Desta forma as coordenadas do ponto B são:

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}x = 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x = 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ y = \sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = 2 \end{cases}$$

Temos ainda que a abcissa do ponto A é:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

E assim, a área do triângulo $[AOB]$, é:

$$A_{[AOB]} = \frac{|x_A| \times y_B}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

15. Como os pontos A e B pertencem ao gráfico de f, designado por a a abcissa do ponto A e por B a abcissa do ponto B, temos que as coordenadas destes pontos são $A(a,a^2)$ e $B(b,b^2)$.

 Assim, o declive da reta r (reta AB) é dado por:

$$m = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)} = b + a$$

 Como o ponto de coordenadas $(0,1)$ pertence à reta r, temos que a sua equação é: $y = (b+a)x + 1$.

 Temos ainda que, como o ponto A pertence à reta r, as suas coordenadas verificam a equação da reta:

$$a^2 = (b+a)(a) + 1 \Leftrightarrow a^2 = ab + a^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 - a^2 - ab = 1 \Leftrightarrow -ab = 1 \Leftrightarrow ab = -1$$

 Determinando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, temos:

 - $\overrightarrow{OA} = A - O = (a,a^2) - (0,0) = (a,a^2)$
 - $\overrightarrow{OB} = B - O = (b,b^2) - (0,0) = (b,b^2)$

 E assim, calculado o produto escalar, temos:

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = (a,a^2).(b,b^2) = atimesb + a^2 \times b^2 = ab + (ab)^2 = -1 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$$

 Como $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$, então o ângulo AOB é reto.