Exame final nacional de Matemática A **(2023, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

1. Calculando o valor do limite da sucessão, temos que:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2} = \left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2} = e^2$$

   Resposta: **Opção C**

2. Como cada segmento de reta tem mais 2 cm que o anterior, a sucessão dos comprimentos dos segmentos, em centímetros, é uma progressão aritmética de razão 2 ($r=2$).

   Como o comprimento total da linha poligonal, construída até ao 100.º segmento, é 104 metros, ou seja, 10 400 centímetros, temos que a soma dos 100 primeiros termos é 10 400 ($S_{100} = 10\,400$).

   Designando por u_1 o primeiro termo, temos que o termo de ordem 100 da sequência é:

$$u_{100} = u_1 + (100-1)\times r = u_1 + 99\times 2 = u_1 + 198$$

   Assim, recorrendo à fórmula da soma dos 100 primeiros termos de uma progressão aritmética, podemos calcular o valor do primeiro termo, u_1, ou seja, o comprimento do segmento de reta $[AB]$, em centímetros:

$$S_{100} = 10\,400 \Leftrightarrow \frac{u_1+u_{100}}{2}\times 100 = 10\,400 \Leftrightarrow \frac{u_1+(u_1+198)}{2} = \frac{10\,400}{100} \Leftrightarrow \frac{2u_1+198}{2} = 104 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2u_1+198 = 104\times 2 \Leftrightarrow 2u_1 = 208-198 \Leftrightarrow 2u_1 = 10 \Leftrightarrow u_1 = \frac{10}{2} \Leftrightarrow u_1 = 5$$

3. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = (-2x)'\, e^{1-x^2} + (-2x)\left(e^{1-x^2}\right)' = -2e^{1-x^2} - 2x\left(1-x^2\right)' e^{1-x^2} =$$

$$= -2e^{1-x^2} - 2x\,(0-2x)\, e^{1-x^2} = -2e^{1-x^2} + 4x^2 e^{1-x^2} = e^{1-x^2}\left(-2+4x^2\right)$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x^2}\left(-2+4x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{1-x^2} = 0}_{\text{Cond. impossível}} \vee -2+4x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
e^{1-x^2}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-2+4x^2$	$+$	0	$-$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e no intervalo $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$
- tem dois ponto de inflexão, cujas abcissas são $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.

4.1. Para averiguar se a função g é contínua em $x=1$, temos que verificar se $g(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$

- $g(1) = 7\times 3^{1-1} - 3 = 7\times 3^0 - 3 = 7\times 1 - 3 = 4$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(7\times 3^{x-1} - 3\right) = 7\times 3^{1-1} - 3 = 4$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4x-4}{e^{x-1}-1} = \dfrac{4(1)-4}{e^{1-1}-1} = \dfrac{4-4}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{4(x-1)}{e^{x-1}-1} =$$

(considerando $y = x-1$, temos $x = y+1$ e se $x\to 1^-$, então $y\to 0^-$)

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{4y}{e^y - 1} = \lim_{y\to 0^-}\left(4\times\frac{y}{e^y-1}\right) = \lim_{y\to 0^-}\left(4\times\frac{1}{\frac{e^y-1}{y}}\right) = \lim_{y\to 0^-}\frac{4}{\frac{e^y-1}{y}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{y\to 0^-} 4}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-}\left(\frac{e^y-1}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{4}{1} = 4$$

Como $g(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$, então a função g é contínua em $x=1$.

4.2. As soluções da equação pertencem ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} : g(x) > 0 \ \wedge \ x \geq 1\}$

Como a função g é crescente e

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 7 \times 3^{x-1} - 3 = 0 \Leftrightarrow 3^{x-1} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow x - 1 = \log_3 \frac{3}{7} \Leftrightarrow x - 1 = \log_3 3 - \log_3 7 \Leftrightarrow x = 2 - \log_3 7$

então $g(x) > 0$ se $x \in]2 - \log_3 7, +\infty[$, e como $2 - \log_3 7 < 1$, as soluções da equação pertencem ao conjunto $[1, +\infty[$.

Assim, resolvendo a equação, temos:

$\log_3 \left(g(x)\right) = x + \log_3 2 \Leftrightarrow \log_3 \left(7 \times 3^{x-1} - 3\right) = x + \log_3 2 \Leftrightarrow \log_3 \left(7 \times 3^{x-1} - 3\right) = \log_3(3^x) + \log_3 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ \log_3 \left(7 \times 3^{x-1} - 3\right) = \log_3(3^x \times 2) \ \Leftrightarrow \ 7 \times 3^{x-1} - 3 = 2 \times 3^x \ \Leftrightarrow \ 7 \times \frac{3^x}{3} - 2 \times 3^x = 3 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ 7 \times 3^x - 6 \times 3^x = 9 \ \Leftrightarrow \ 3^x = 9 \ \Leftrightarrow \ x = \log_3 9 \ \Leftrightarrow \ x = 2$$

Assim, como $2 \in [1, +\infty[$, o conjunto dos números reais que são solução da equação, é $\{2\}$.

5.

5.1. Calculando o número de grupos ordenados dos três jovens, temos 3! grupos. E por cada um destes grupos, existem 8! ordenações possíveis dos 10 jovens, correspondendo à ordenação dos restantes 7 jovens e de um destes grupos.

Assim, o número de formas diferentes de dispor os 10 jovens na fila é:

$$3! \times 8! = 241920$$

Resposta: **Opção B**

5.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso, um jovem que respondeu ao questionário, e os acontecimentos:
F:≪O jovem respondeu que praticava *surf*≫
K:O jovem respondeu que praticava *skate*

Temos que: $P\left(F\right) = 0{,}65$; $P(K \cap \overline{F}) = 0{,}2$ e $P\left(K|F\right) = \frac{4}{5} = 0{,}8$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(K \cap F\right) = P\left(K|F\right) \times P(F) = 0{,}8 \times 0{,}65 = 0{,}52$
- $P\left(F \cap \overline{K}\right) = P\left(F\right) - P\left(F \cap K\right) = 0{,}65 - 0{,}52 = 0{,}13$
- $P\left(K\right) = P\left(F \cap K\right) + P\left(\overline{F} \cap K\right) = 0{,}52 - 0{,}2 = 0{,}72$
- $P(\overline{K}) = 1 - P\left(K\right) = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$

	K	$\overline{K}$	
F	0,52	0,13	0,65
$\overline{F}$	0,2		
	0,72		1

Assim, calculando a probabilidade de que o jovem selecionado que, no questionário, ter respondido que praticava surf sabendo que tinha respondido que não praticava skate, na forma de fração irredutível, é:

$$P\left(F|\overline{K}\right) = \frac{P\left(F \cap \overline{K}\right)}{P\left(\overline{K}\right)} = \frac{0{,}13}{0{,}28} = \frac{13}{28}$$

5.3. Relativamente à probabilidade de selecionar dois jovens do grupo com idades distintas, sabemos que:

- o número de casos possíveis é ${}^{70}C_2$, correspondendo a todos os conjuntos de 2 jovens dos grupos que é possível formar com os 70 elementos do grupo;
- designando por n o número de jovens com 13 anos do grupo, o número de casos favoráveis é: $n \times (70-n)$, porque existem n jovens com 13 anos e $70-n$ jovens com 14 anos, e não consideramos a ordem relevante.

Assim, temos que:

$$\frac{n(70-n)}{{}^{70}C_2} = \frac{16}{35} \Leftrightarrow \frac{70n-n^2}{2415} = \frac{16}{35} \Leftrightarrow 35(70n-n^2) = 16 \times 2415 \Leftrightarrow 35(70n-n^2) = 16 \times 2415 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2450n - 35n^2 = 38\,640 \Leftrightarrow 35n^2 - 2450n + 38\,640 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-(-2450) \pm \sqrt{(-2450)^2 - 4(35)(38\,640)}}{2(35)} \Leftrightarrow n = 24 \vee n = 35$$

Como o número de jovens com 13 anos é inferior ao número de jovens com 14 anos, temos que o número de jovens com 13 anos é 24 (porque se fosse 46, seria maior que o número de jovens com 14 anos).

6.

6.1. Como as retas OD e AC são paralelas porque contêm arestas laterais de um prisma reto, os respetivos vetores diretores são colineares. Desta forma, podemos verificar que o vetor $\left(0{,}2{,}\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}(0{,}4{,}3)$, ou seja, é colinear com um vetor diretor da reta AC, e por isso é um vetor diretor da reta OD.

Temos ainda que, uma equação da reta OD é $(x{,}y{,}z) = (0{,}0{,}0) + k\left(0{,}2{,}\frac{3}{2}\right), k \in \mathbb{R}$, pelo que podemos verificar que o ponto de coordenadas $(0,-4,-3)$ pertence à reta OD porque
$(0,-4,-3) = (0{,}0{,}0) + (-2)\left(0{,}2{,}\frac{3}{2}\right)$.

Assim, $(x{,}y{,}z) = (0,-4,-3) + k\left(0{,}2{,}\frac{3}{2}\right), k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial que define a reta OD.

Resposta: **Opção B**

6.2. Como a base $[ABC]$ do triângulo está inscrita numa semicircunferência de diâmetro $[AB]$, então o triângulo é retângulo em C, e por isso a reta AC é perpendicular ao plano CBE.

Assim, o vetor $\vec{u} = (0{,}4{,}3)$, vetor diretor da reta AC é também um vetor normal do plano CBE, pelo que este pode ser definido por uma equação da forma $0x + 4y + 3z + d = 0, d \in \mathbb{R}$. Como o ponto E pertence ao eixo Oy e $\overline{OE} = 12{,}5$, temos que as suas coordenadas são $(0; 12{,}5; 0)$, pelo que podemos determinar o valor do parâmetro d na equação do plano CBE:

$$0 + 4(12{,}5) + 3(0) + d = 0 \Leftrightarrow 50 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -50$$

Pelo que uma equação do plano CBE é $4y + 3z - 50 = 0$.

Assim, as coordenadas do ponto C, podem ser determinadas pela interseção da reta AC com o plano CBE. Assim, temos que as coordenadas de um ponto da reta AC são da forma $(x{,}y{,}z) = (10{,}0{,}0) + (0{,}4k{,}3k) = (10{,}4k{,}3k), k \in \mathbb{R}$, e substituindo as coordenadas na equação do plano, temos:

$$4(4k) + 3(3k) - 50 = 0 \Leftrightarrow 16k + 9k = 50 \Leftrightarrow 25k = 50 \Leftrightarrow k = \frac{50}{25} \Leftrightarrow k = 2$$

Desta forma, substituindo o valor de k nas coordenadas do ponto da reta AC, $(10{,}4k{,}3k)$, obtemos as coordenadas do ponto C:

$$(10{,}4(2){,}(3(2)) = (10{,}8{,}6)$$

7. Identificando as coordenadas dos pontos Q e P, temos:

   - como o ponto Q pertence à circunferência de de centro na origem e raio 2 e a semirreta $\dot{O}Q$ define com o semieixo positivo Ox um ângulo de amplitude α, as suas coordenadas são $(2\cos\alpha, 2\,\text{sen}\,\alpha)$, pelo que $\overrightarrow{OQ} = Q - O = (2\cos\alpha, 2\,\text{sen}\,\alpha)$,
   - como o ponto P pertence á mesma circunferência e tem a mesma abcissa do ponto Q então a sua ordenada é simétrica da do ponto Q, pelo que as suas coordenadas são $(2\cos\alpha, -2\,\text{sen}\,\alpha)$, e de forma análoga, se tem que $\overrightarrow{OP} = P - O = (2\cos\alpha, -2\,\text{sen}\,\alpha)$.

   Assim, como $\cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha = \cos(2\alpha)$, vem que:

   $$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = 3 \Leftrightarrow (2\cos\alpha, -2\,\text{sen}\,\alpha).(2\cos\alpha, 2\,\text{sen}\,\alpha) = 3 \Leftrightarrow (2\cos\alpha)^2 + (-2\,\text{sen}\,\alpha) \times (2\,\text{sen}\,\alpha)) = 3 :\Leftrightarrow$$

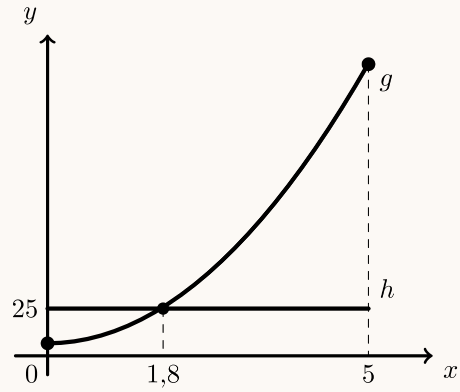
   $$\Leftrightarrow 4\cos^2\alpha - 4\,\text{sen}^2\,\alpha = 3 \Leftrightarrow 4\big(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha\big) = 3 \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \frac{3}{4}$$

8. Como a distância ao solo do foguete é dado por $a(t)$, no instante t, a distância ao solo, 3 segundos depois é dada por $a(t+3)$, pelo que a distância percorrida, durante os 3 segundos é dada por $a(t+3) - a(t)$. Como se pretende que esta distância seja igual a 25 metros, o instante t em que se verifica a condição dada é a solução da equação $a(t+3) - a(t) = 25$.

   Assim, inserindo na calculadora a função $f(x) = 100\left(x + (10-x) \times \ln\left(1 - \frac{x}{10}\right)\right) - 4{,}9x^2$, determinamos o valor de t como a abcissa do ponto de interseção das funções:

   - $g(x) = f\,(x+3) - f(x)$
   - $h(x) = 25$

   Representando na calculadora as funções g e h, numa janela compatível com o domínio da função ($x \in [0{,}5]$, porque $D_f = [0{,}8]$, logo $D_{f(x-3)} = [0{,}5]$), obtemos o gráfico representado na figura ao lado.

   Recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos, obtemos valores aproximados às décimas da abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos, ou seja, o instante pretendido:

   1,8 segundos.

9. Temos que:

   - como $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x) - 2x + 1\big) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x) - (2x-1)\big) = 0$, a reta de equação $y = 2x - 1$ é uma assíntota do gráfico de f, quando x tende para $+\infty$, pelo que não existe uma assíntota horizontal do gráfico de f, quando x tende para $+\infty$, ou seja, a afirmação I. é falsa;
   - como a reta de equação $y = 2x - 1$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1, então o ponto da reta de coordenadas $(1{,}2(1) - 1) = (1{,}1)$ também é um ponto do gráfico de g, ou seja, $g(1) = 1$; e como a função g é diferenciável, também é contínua, em particular no ponto de abcissa 1, pelo que $\lim\limits_{x\to1} g(x) = g(1) = 1$, logo, a afirmação II. é falsa;
   - como o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima, $f''(x) > 0$ e como o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo, $g''(x) < 0$, pelo que $f''(x) > g''(x)$ para $x > 0$, pelo que a afirmação III. também é falsa.

10. Como $\text{Im}\,(z) = \text{Re}\,(z)$, e $\text{Re}\,(z) > 0$, então o afixo de z é um ponto do primeiro quadrante que pertence à bissetriz dos quadrante ímpares, ou seja, $\text{Arg}\,(z) = \frac{\pi}{4}$

    Como $A\hat{O}B = \frac{5\pi}{8}$, então $\text{Arg}\,(w) = \text{Arg}\,(z) + A\hat{O}B = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{8} = \frac{2\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$

    Logo, temos que:

    $$\text{Arg}\,(w \times z) = \text{Arg}\,(w) + \text{Arg}\,(z) = \frac{7\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{8} + \frac{2\pi}{8} = \frac{9\pi}{8}$$

    Resposta: **Opção C**

11. Escrevendo $e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$ na forma algébrica, temos:

    $$e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}$$

    Como $i^{17} = i^{4\times4+1} = i^1 = i$, simplificando a expressão do número w, vem:

    $$w = \frac{e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)} - i^{17}}{i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2} - i}{i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \times \frac{1}{2}}{i} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \times \frac{1}{2}\right) \times (-i)}{i \times (-i)} =$$

    $$= \frac{i \times \frac{\sqrt{3}}{2} + i^2 \times \frac{1}{2}}{-i^2} = \frac{i \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \times \frac{1}{2}}{-(-1)} = -\frac{1}{2} + i \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

    Escrevendo w na forma trigonométrica $(\rho e^{i\theta})$, vem que:

    - $\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$
    - $\text{tg}\,\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$; como $\text{sen}\,\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 2.º quadrante, logo $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

    Assim, temos que;

    $$z^2 = w \Leftrightarrow z^2 = e^{i\left(\frac{2\pi}{e}\right)} \Leftrightarrow z = e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)}, k \in \{0,1\}$$

    Assim, os dois números complexos que são solução da equação, são:

    - $(k = 0) \rightarrow e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\times0\times\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{2\pi}{2\times3}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
    - $(k = 1) \rightarrow e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\times1\times\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3}}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\frac{8\pi}{3}}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{8\pi}{2\times3}\right)} = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} =$

    $$= -\cos\frac{\pi}{3} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

12.

    12.1. Determinando a expressão da função derivada, temos:

    $$f'(x) = (\text{sen}\,(2x + x)' = (\text{sen}\,(2x))' + (x)' = (2x)'\cos(2x) + 1 = 2\cos(2x) + 1 = 2\big(\cos^2 x - \text{sen}^2 x\big) + 1 =$$

    $$= 2\big(1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x\big) + 1 = 2\big(1 - 2\,\text{sen}^2 x\big) + 1 = 2 - 4\,\text{sen}^2 x + 1 = 3 - 4\,\text{sen}^2 x$$

    Resposta: **Opção D**

12.2. As abcissas dos pontos de interseção da reta r com o gráfico da função f são soluções da equação

$$f(x) = -x + 2 \Leftrightarrow f(x) + x - 2 = 0$$

Assim vamos mostrar que a função $g(x) = f(x) + x - 2$ tem pelo menos um zero no intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[$.

Como a função f, e também a função g resultam de operações sucessivas de funções contínuas em $[0,\pi]$, são contínua neste intervalo, e em particular no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

Como $g\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0 < g\left(\frac{\pi}{3}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, uma solução da equação $g(x) = f(x) + x - 2$ no intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[$, isto é, que a reta r intersecta o gráfico da função f em pelo menos um ponto, cuja abcissa(s) pertencem a este intervalo.

C.A.

$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - 2 \approx$
$\approx -0{,}09$

$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - 2 \approx$
$\approx 0{,}96$

13. Como o declive da reta tangente ao gráfico de f, é dado por $f'(x)$, começamos por derivar a função f:

$$f'(x) = \left(ax^2 + bx\right) = 2ax + b$$

Como sabemos que o declive da reta tangente é a, a abcissa do ponto de tangência é a solução da equação $f'(x) = a$, e desta forma temos:

$$f'(x) = a \Leftrightarrow 2ax + b = a \Leftrightarrow 2ax = a - b \Leftrightarrow x = \frac{a-b}{2a}$$

Assim, podemos determinar a ordenada do ponto de tangência:

- através da equação da reta tangente:

$$y = a\left(\frac{a-b}{2a}\right) + b = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a-b}{2} + \frac{2b}{2} = \frac{a-b+2b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

- através da expressão algébrica da função f:

$$f\left(\frac{a-b}{2a}\right) = a\left(\frac{a-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{a-b}{2a}\right) = a\left(\frac{a^2-2ab+b^2}{4a^2}\right) + \frac{ba-b^2}{2a} = \frac{a^2-2ab+b^2}{4a} + \frac{ba-b^2}{2a} =$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2}{4a} + \frac{2ba-2b^2}{4a} = \frac{a^2-2ab+b^2}{4a} + \frac{2ba-2b^2}{4a} = \frac{a^2-b^2}{4a}$$

Desta forma, igualando as duas expressões da ordenada do ponto de tangência, temos:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a^2-b^2}{4a} \Leftrightarrow \frac{4a}{2} = \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} \Leftrightarrow 2a = a - b \Leftrightarrow a = -b$$

Assim, temos que:

- a abcissa do ponto de tangência é: $\frac{a-b}{2a} = \frac{a+a}{2a} = \frac{-b-b}{2(-b)} = \frac{-2b}{-2b} = 1$;
- a ordenada do ponto de tangência é: $\frac{a+b}{2} = \frac{-b+b}{2} = \frac{0}{2} = 0$.

Ou seja o ponto de tangência tem coordenadas $(1{,}0)$.