

### 第三章 线性模型

#### 一、填空题

1. 生成模型通过估计 ( ) 进行分类, 判别模型通过估计 ( ) 进行分类。
2. 感知器算法通常采用 ( ) 法求解目标函数的优化问题。
3. 线性回归模型的封闭解又称为 ( ) 解。
4. 逻辑回归函数的取值区间是 ( )。

#### 二、判断题

5. 当两个类别均服从正态分布时, 根据贝叶斯决策理论计算出的决策面必然是一个线性决策面。( )
6. 当两个类别均服从正态分布时, 根据贝叶斯决策理论计算出的决策面必然是一个二次型决策面。( )
7. 线性回归模型如存在唯一解, 必然可以令模型在训练集上的均方误差为 0。( )
8. 4 个不具有共线性的三维样本, 无法用线性回归模型得到唯一解。( )
9. 逻辑回归模型无法用于多类分类问题。( )

#### 三、选择题

10. 假设线性回归问题的训练集为:  $x_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, 100$ , 则该线性模型包含多少个参数:( )  
A. 3 个                      B. 4 个                      C. 100 个                      D. 101 个
11. 上题中如果使用线性回归的最小二乘解的封闭解形式, 则自相关矩阵  $R_x$  的大小为:( )  
A.  $3 \times 3$                       B.  $4 \times 4$                       C.  $100 \times 100$                       D.  $101 \times 101$
12. 逻辑回归模型中的逻辑回归函数可以看做是对以下哪种概率的描述:( )  
A.  $p(x|\omega_1)$                       B.  $p(\omega_1|x)$                       C.  $p(x)$                       D.  $p(\omega_1)$

#### 四、简答题

13. 请写出感知器算法的目标函数的标准数学形式, 并解释其中每一个符号的意义与计算方法, 说明其合理性。

14. 请写出线性回归模型的封闭解数学形式，及其推导过程，并标明符号意义。
15. 在线性回归模型中，假设输入样本记为  $x_i, i = 1, \dots, N$ ，相应的类别标签记为  $y_i, i = 1, \dots, N$ 。请给出自相关矩阵和互相关向量的定义（公式与符号表达）。如果样本集  $X \in \mathbb{R}^{N \times (d+1)}$  中， $N < d + 1$ ，应如何处理才能得到合理的模型参数向量唯一解。
16. 请从求解线性方程组的角度说明线性回归模型时的无解情况，从矩阵运算角度说明线性回归模型时的唯一解情况，并比较两者之间的联系与区别。
17. 标签  $y$  是一个随机变量，由函数  $\hat{w}^T \hat{x}$  加上一个随机噪声生成： $y = \hat{w}^T x + \epsilon$ ；其中噪声  $\epsilon$  服从正态分布  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ，设当前训练样本集为  $X = \{\hat{x}_i | i = 1, \dots, N\}, Y = \{y_i | i = 1, \dots, N\}$ ；
  - (1) 试推导  $\hat{w}$  的最大似然解的数学形式；
  - (2) 假设  $\hat{w}$  的先验分布服从  $d + 1$  元正态分布  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, I_{(d+1) \times (d+1)})$ ，试采用最大后验概率估计法推导  $\hat{w}$  的最优解的数学形式。
18. 如何防止线性回归模型出现过拟合现象，请给出具体的方案
19. 请给出逻辑回归模型中 sigmoid 函数形式的推导过程，并说明其概率解释。
20. 请给出逻辑回归模型梯度下降法更新公式的推导过程。

## 五、计算（画图）题

21. 已知两个类别  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ，其先验概率相等，两类的类条件概率密度服从正态分布，有  $p(x|\omega_1) = \mathcal{N}(\mu_1, \Sigma)$  和  $p(x|\omega_2) = \mathcal{N}(\mu_2, \Sigma)$ ，且  $\mu_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $\mu_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ ， $\Sigma = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.3 \\ 0.3 & 1.9 \end{bmatrix}$ ，试写出上述问题每一类的判别函数  $g_i(x), i = 1, 2$  的线性形式以及整个分类问题的决策面方程的线性形式。并判断样本  $x = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.9 \end{bmatrix}$  属于哪一类，给出计算过程。
22. 已知决策面方程： $5x_1 - x_2 - 1 = 0$ ，当前错分样本为： $(0.4, 0.6)$ ， $(0.1 - 0.25)$ 。
  - (1) 写出参数向量  $w$ ，并设定合适的学习步长  $\eta$ ；

- (2) 列出迭代公式和计算结果
- (3) 列出迭代后的决策面方程
- (4) 画出相应的决策面 ( 虚线 )
- (5) 给出结论与分析

23. 以 Iris 数据库每类的 70% 的样本为训练集，基于线性回归模型，使用花萼长度、花萼宽度和花瓣宽度特征来估计其花瓣长度特征，请写出线性回归模型参数的封闭解的数学形式，标明每个变量的矩阵大小或矢量维度。

24. 已知 3 个样本坐标为  $x^{(1)} = [1, 0]$ ,  $x^{(2)} = [0, 1]$ ,  $x^{(3)} = [1, 1]$ ，其中  $x^{(1)}, x^{(2)} \in \omega_1$ ,  $x^{(3)} \in \omega_2$ ，初始化逻辑回归模型对应的线性决策面为： $x_1 = 0.5$ 。设学习步长为 0.2。请计算基于逻辑回归梯度下降法进行一次迭代后的决策面方程，并在下图中画出相应的决策面直线。

