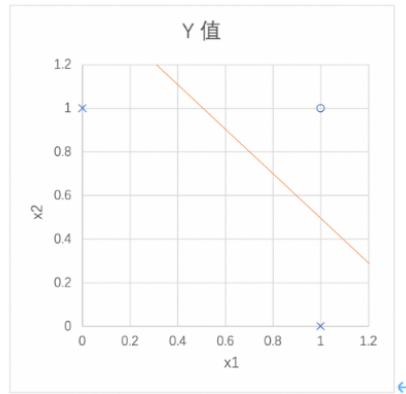


## SVM 课后作业

设训练样本共 3 个： $\{(\mathbf{x}_1 = [0, 1]^T, y_1 = -1), (\mathbf{x}_2 = [1, 0]^T, y_2 = -1), (\mathbf{x}_3 = [1, 1]^T, y_3 = 1)\}$ 。使用线性 SVM 模型优化收敛后结果如图所示。



- 1) 试写出上述问题的线性 SVM 原始优化问题的数学形式；
- 2) 试写出该问题的拉格朗日对偶问题的数学形式；
- 3) 试写出该问题的所有 KKT 条件；
- 4) 根据红线所示的 SVM 分类器决策面推算乘子  $\alpha_i, i = 1, 2, 3$  的数值。

解 (1):

$$\min \frac{1}{2} \|w\|^2$$

$$\text{s.t.} \quad w_2 + \gamma \leq -1$$

$$w_1 + \gamma \leq -1$$

$$w_1 + w_2 + \gamma \geq 1$$

$$(2) \quad \max \sum_{i=1}^3 a_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i a_j y_i y_j x_i^T x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^3 a_i y_i = 0; \quad a_i \geq 0, \quad i=1, 2, 3$$

$$\text{代入 } y_1 = -1, y_2 = -1, y_3 = 1; \quad x_1 = [0, 1]^T, x_2 = [1, 0]^T, x_3 = [1, 1]^T$$

$$\max (a_1 + a_2 + a_3 - \frac{1}{2} a_1^2 - \frac{1}{2} a_2^2 - a_3^2 + a_2 a_3 + a_3 a_1)$$

$$\text{s.t.} \quad -a_1 - a_2 + a_3 = 0;$$

$$a_i \geq 0 \quad i=1, 2, 3$$

(3) 对于每个样本  $x_i$ , 应满足以下 KKT 条件:

$$\begin{cases} a_i \geq 0 \\ y_i (w^T x_i + \gamma) - 1 \geq 0, \quad i=1, 2, 3 \\ a_i (y_i (w^T x_i + \gamma) - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{代入 } y_1 = -1, y_2 = -1, y_3 = 1; \quad x_1 = [0, 1]^T, x_2 = [1, 0]^T, x_3 = [1, 1]^T$$

得到三组 KKT 条件如下:

$$\begin{cases} a_1 \geq 0 \\ -w_2 - \gamma - 1 \geq 0 \\ a_1 (w_2 + \gamma + 1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 \geq 0 \\ -w_1 - \gamma - 1 \geq 0 \\ a_2 (w_1 + \gamma + 1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 \geq 0 \\ w_1 + w_2 + \gamma - 1 \geq 0 \\ a_3 (w_1 + w_2 + \gamma - 1) = 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad w = \sum_{i=1}^m a_i y_i x_i$$

代入  $a_1, a_2, a_3$  有:

$$\begin{aligned} w &= a_1 \times (-1) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \times (-1) \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \times 1 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_2 + a_3 \\ -a_1 + a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 + a_3 \\ -a_1 + a_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

根据约束条件可得:  $w_1 = w_2 = 2$

$$\text{又有 s.t.} \quad -a_1 - a_2 + a_3 = 0$$

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 2, a_3 = 4 \end{cases}$$